2023 Nowcoder Multi-University Training Contest 9 Contest Analysis

Oscar, Sugar

08.14.2023

Oscar, Sugar 08.14.2023 1 / 2⁴

E. Puzzle: Square Jam

Description

 $n \times m$ 网格,划分成正方形使得没有任何一个点和四个正方形相邻。

E. Puzzle: Square Jam

Solution

辗转相减即可。

D. Non-Puzzle: Error Permutation

Description

给定长度为n的排列,计算有多少个子区间满足子区间第k小的数不在子区间第k位。 $n \le 5000$ 。

< ロ > ← 団 > ← 豆 > ← 豆 > 一豆 - かへで

D. Non-Puzzle: Error Permutation

Solution

对于每个数字,计算在哪些区间中它不满足条件。不妨枚举该数字为 a_i , 左端点为 l。则不合法的右端点 r 一定是一段区间,满足 r 在这段区间中时,比 a_i 小的数恰有 i-l 个。注意到随着左端点向左移动时,这个区间一定是不断向右移动的,双指针维护即可。 求出区间后,将不合法的区间并起来,然后剩余的区间个数就是答案。

5/24

I. Non-Puzzle: Segment Pair

Description

给定 n 个区间对 $[L_i, R_i], [L_i', R_i']$,从每对区间中选择一个,使得它们至少 包含一个公共点,问方案数。

08.14.2023

Oscar, Sugar

I. Non-Puzzle: Segment Pair

Solution

区间的交仍然是区间,考虑枚举区间左端点 x,则要满足区间的交包含 x,并且不包含 x-1。考虑计算包含 x 的方案数,则每对区间的贡献为 0,1 或 2(代表有几个区间包含点 x),方案数就是所有贡献的乘积。然后要扣除包含 x-1 的方案数。实质上扣除的是同时包含 x 和 x-1 两个点的方案数,同样是若干个 0,1,2 的乘积。对 x 作扫描线,实时维护 0,1,2 的个数即可。

G. Non-Puzzle: Game

Description

Alice 和 Bob 博弈。黑板上原有 n 个数 a_i ,每次当前行动方可以选择一对 (i,j),并在黑板上写上 $a_i \oplus a_j$ 。先写下 k 的人胜利。问博弈结果,或者平局。

08.14.2023 8 / 24

G. Non-Puzzle: Game

Solution

显然数字出现的次数是没有意义的,而除了第一步之外,任意一步总可以保持局面不变(和上一步进行同一个操作即可)。所以假设当前先手面对必败局面,他总可以将同样的局面留给对手。故只有三种情况:Alice 一步胜,Alice 走完一步后 Bob 一步胜,平局。下文用集合 A 代表序列 a 构成的集合。

Alice 一步胜只需判断是否存在每个 i, $a_i \oplus k$ 在集合 A 内。

Bob 在 Alice 走完后一步胜,等价于对于任意 i,j,总存在 p,使得 $a_i \oplus a_j = a_p \oplus k$ (这样无论 Alice 如何行动,下一步 Bob 都能取胜)。上式等价于 $(a_i \oplus k) \oplus (a_j \oplus k) = a_p \oplus k$,故令 $a_i' = a_i \oplus k$,对应集合为 A',则 Bob 胜等价于集合 A' 在 xor 运算意义下封闭。

封闭性等价于该集合在在 xor 意义下(F_2 域)张成的向量空间蕴含的向量就是 A' 本身,故判断该集合的线性基能表示出的元素是否严格等于 A' 即可。

Oscar, Sugar 08.14.2023 9 / 24

B. Semi-Puzzle: Brain Storm

Description

找到
$$a^u \equiv u \mod m$$
. $1 \le a < m \le 10^9$.

< ロト < 個 ト < 重 ト < 重 ト 三 重 ・ の Q @

10/24

B. Semi-Puzzle: Brain Storm

Solution

不妨令 d = lcm(m, phi(m))。

考虑假设我们有一个满足条件的,充分大的 u,则根据扩展欧拉定理 $u \mod d + d$ 也是一个满足条件的数字。

考虑数列 A, 满足 $A_0 = 1$, $A_i = a^{A_{i-1}}$ 。则当 $n \ge log(m)$ 时, A_n 模 m 为定值(同样由扩展欧拉定理计算幂塔得),故对于任意充分大的 n, A_n 均满足条件。

则由上面的陈述,计算 n 充分大时, $A_n \mod d + d$ 即可。注意这个数字可能超过 10^{18} ,但是考虑扩展欧拉定理的证明过程,仅有 $A_n \mod d \le 30$ 时需要加上 d,特判即可。

实现过程中不需要显式带入 n 的值,按扩展欧拉定理不断递归至模数为 1 即可。

Oscar, Sugar 08.14.2023 11 / 24

J. Puzzle: Star Battle

Description

 $4n \times 4n$ 网格,切分成 4n 个给定的区域(可能不连通),要求每行每列 每区域恰好 n 个星,且星不能边相邻也不能对角相邻。

J. Puzzle: Star Battle

Solution

诈骗题。

可以发现没有区域限制时只有两种解,判定这两种解是否满足区域限制即可。

< ロ > ← 団 > ← 豆 > ← 豆 > 一豆 - かへで

13/24

C. Puzzle: Kurodoko (Max)

Description

给一张图,每个点上有线索 a_i ,每条边有长度 l_i ,求一棵生成树使得每个点到树上最远点距离恰好为 a_i 。

14 / 24

C. Puzzle: Kurodoko (Max)

Solution

观察发现线索最大的点一定是直径端点,线索最小的点一定在直径上。 设直径为 L,线索最小的点之一为 r 点。

定义一般边是满足 $a_u - a_v = l_{uv}$ 的边,特殊边是满足 $a_u + a_v - l_{uv} = L$ 且和最小点相邻的边,特殊点是没有连向线索比他小的点的一般边的点。 r 点不视为特殊点。

考虑按有几个特殊点分类:

如果有两个特殊点那么无解

如果有一个特殊点那么需要找到一条从r到一个直径端点的路径,和一条从特殊点到另一直径端点的(只经过一般边的)路径,使得两条路径不交。同时需要满足特殊点到r连有特殊边。这可以用网络流解决。

Oscar, Sugar 08.14.2023 15 / 24

C. Puzzle: Kurodoko (Max)

Solution

如果没有特殊点,且r不是直径中点,那么需要找一条从r到一个直径端点的路径,和一条从任意一个和r连有特殊边的点到另一直径端点的(只经过一般边的)路径。这也可以用网络流解决。注意需要先跑从r出发的再跑其他的。

如果 r 是直径中点,那么需要找到两条从 r 到某个直径端点的路径,使得两条路径除了在 r 处相交以外,其他地方不交。这仍然可以用网络流解决。

跑出直径后,不在直径上的点只需任意选择一条连向线索比他小的点的 一般边连接即可。

Oscar, Sugar 08.14.2023 16 / 24

A. Puzzle: Arithmetic Square

Description

 $n \times m$ 网格,每个格填一个整数使得每行每列的只包含 +-的算式成立,还要求填的数互不相同。

17 / 24

A. Puzzle: Arithmetic Square

Solution

首先考虑所有数是实数的情况。

如果拿出其中的两行两列,保持上面那行和两列的运算结果不变,那么下面那行可以调整的条件是:交叉点对应的 8 个符号有奇数个减号。当符号确定,任意线索都有解的条件是:存在 r,c,使得第 1 行,第 r 行,第 1 列,第 c 列满足上面的条件。同时,如果满足条件,则任意位置 x,y 都可以找到 r',c',使得第 x 行,第 r' 行,第 y 列,第 c' 列满足上面的条件。

根据这个性质,如果线索是整数,填入实数有解,并且奇偶性正确,那么一定可以通过依次调整每个格子使得所有格子都是整数。

Oscar, Sugar 08.14.2023 18 / 24

A. Puzzle: Arithmetic Square

Solution

因此可以按从下到上从右到左的顺序依次填入随机整数,如果和之前相同就重新随机。如果一个位置在填入的时候可以被该行/该列的线索唯一确定,那么直接填入。最后一个格子可能会不能同时满足行线索和列线索,只需使用之前的方法进行调整即可。

如果求解时发现出现重复整数,那么重新随机整个表格即可。发生这件事的概率很小(小于 10^{-6})。

对于不满足条件的情况,仍然可以用上述方法填数,如果最后一个格子 不能同时满足行列线索则无解。

Oscar, Sugar 08.14.2023 19 / 24

F. Non-Puzzle: The Lost Array

Description

对于序列 a, 令 num_i 表示数字 i 出现的次数。 统计满足条件的序列个数:

- $1 \leq a_i \leq m$
- 给定一些 x_i, y_i ,满足 $a_{x_i} \neq y_i$
- 给定一些 x_i, y_i , 满足 $num_{x_i} \neq y_i$ 。
- 将 num 排序后, 得到一给定序列 B

20 / 24

F. Non-Puzzle: The Lost Array

Solution

假设我们给每种数字分配若干个位置,则需要满足每个位置只能被一种 数字分配。考虑容斥掉这个限制,枚举位置集合 S,计算将 [1, m] 映射 到该集合,且不强制每个位置只被分配一个数字的方案数,其容斥系数 为 $(-1)^{n-|S|}$ 。

考虑如何计算方案数。令 $f_{i,S}$,表示考虑前 i 种数字,当前的 num 集合 为 S。转移时枚举当前数字分配几个数字(当前的 num)即可。注意到 合法的 S 数目很少,最多 72 种,这一步总复杂度是 $O(n \times m \times 72)$ 的。 总复杂度为 $O(2^n \times nm \times 72)$ 。

Oscar, Sugar 08.14.2023 21 / 24

H. Puzzle: Herugolf

Description

无限大网格的原点上有一个高尔夫球,给定 n,第 i+1 步选一个与坐标轴平行的方向走 n-i 格,可以提前结束,至多走 n 步,行走路线不能自交,求能否到达 (x,y)。输出方案。

Oscar, Sugar 08.14.2023 22 / 24

H. Puzzle: Herugolf

Solution

n>=10 时无解的区域是一个固定形状,并且 n 较大时解的个数很多。在搜索中加入剩余曼哈顿距离 < 剩余线段总长度的剪枝即可通过 $n \le 1000$ 。

对于 n 很大的情况,可以发现当球不进入第四象限时不会影响第一象限中解的存在性。因此将坐标系翻转后,首先预留出总长度 =(到达终点的曼哈顿距离 $+10^5$ 左右) 的线段,在第四象限使用多余的长度绕一圈,然后对剩余的部分使用搜索即可。

Oscar, Sugar 08.14.2023 23 / 24

Thanks!

Oscar, Sugar 08.14.2023 24 / 24