2023 Nowcoder Multi-University Training Contest 9

Contest Analysis

Oscar, Sugar

08.14.2023

$n \times m$ 网格，划分成正方形使得没有任何一个点和四个正方形相邻。

E. Puzzle: Square Jam

Solution

辗转相减即可。

给定长度为 n 的排列，计算有多少个子区间满足子区间第 k 小的数不在子区间第 k 位。$n \leq 5000$。

对于每个数字，计算在哪些区间中它不满足条件。不妨枚举该数字为 a_i，左端点为 l。则不合法的右端点 r 一定是一段区间，满足 r 在这段区间中时，比 a_i 小的数恰有 $i-l$ 个。注意到随着左端点向左移动时，这个区间一定是不断向右移动的，双指针维护即可。

求出区间后，将不合法的区间并起来，然后剩余的区间个数就是答案。

给定 n 个区间对 $[L_i, R_i], [L'_i, R'_i]$，从每对区间中选择一个，使得它们至少包含一个公共点，问方案数。

Solution

区间的交仍然是区间，考虑枚举区间左端点 x，则要满足区间的交包含 x，并且不包含 $x-1$。考虑计算包含 x 的方案数，则每对区间的贡献为 0，1 或 2（代表有几个区间包含点 x），方案数就是所有贡献的乘积。
然后要扣除包含 $x-1$ 的方案数。实质上扣除的是同时包含 x 和 $x-1$ 两个点的方案数，同样是若干个 $0,1,2$ 的乘积。
对 x 作扫描线，实时维护 $0,1,2$ 的个数即可。

Alice 和 Bob 博弈。黑板上原有 n 个数 a_i，每次当前行动方可以选择一对 (i, j)，并在黑板上写上 $a_i \oplus a_j$。先写下 k 的人胜利。问博弈结果，或者平局。

显然数字出现的次数是没有意义的，而除了第一步之外，任意一步总可以保持局面不变（和上一步进行同一个操作即可）。所以假设当前先手面对必败局面，他总可以将同样的局面留给对手。故只有三种情况：Alice 一步胜，Alice 走完一步后 Bob 一步胜，平局。

下文用集合 A 代表序列 a 构成的集合。

Alice 一步胜只需判断是否存在每个 i，$a_i \oplus k$ 在集合 A 内。

Bob 在 Alice 走完后一步胜，等价于对于任意 i, j，总存在 p，使得 $a_i \oplus a_j = a_p \oplus k$（这样无论 Alice 如何行动，下一步 Bob 都能取胜）。上式等价于 $(a_i \oplus k) \oplus (a_j \oplus k) = a_p \oplus k$，故令 $a'_i = a_i \oplus k$，对应集合为 A'，则 Bob 胜等价于集合 A' 在 xor 运算意义下封闭。

封闭性等价于该集合在在 xor 意义下（F_2 域）张成的向量空间蕴含的向量就是 A' 本身，故判断该集合的线性基能表示出的元素是否严格等于 A' 即可。

找到 $a^u \equiv u \bmod m$。$1 \leq a < m \leq 10^9$.

不妨令 $d = lcm(m, phi(m))$。
考虑假设我们有一个满足条件的，充分大的 u，则根据扩展欧拉定理 $u \mod d + d$ 也是一个满足条件的数字。
考虑数列 A，满足 $A_0 = 1, A_i = a^{A_{i-1}}$。则当 $n \geq log(m)$ 时，A_n 模 m 为定值（同样由扩展欧拉定理计算幂塔得），故对于任意充分大的 n，A_n 均满足条件。
则由上面的陈述，计算 n 充分大时，$A_n \mod d + d$ 即可。注意这个数字可能超过 10^{18}，但是考虑扩展欧拉定理的证明过程，仅有 $A_n \mod d \leq 30$ 时需要加上 d，特判即可。
实现过程中不需要显式带入 n 的值，按扩展欧拉定理不断递归至模数为 1 即可。

$4n \times 4n$ 网格，切分成 $4n$ 个给定的区域（可能不连通），要求每行每列每区域恰好 n 个星，且星不能边相邻也不能对角相邻。

诈骗题。
可以发现没有区域限制时只有两种解，判定这两种解是否满足区域限制即可。

给一张图，每个点上有线索 a_i，每条边有长度 l_i，求一棵生成树使得每个点到树上最远点距离恰好为 a_i。

观察发现线索最大的点一定是直径端点，线索最小的点一定在直径上。
设直径为 L，线索最小的点之一为 r 点。
定义一般边是满足 $a_u - a_v = l_{uv}$ 的边，特殊边是满足 $a_u + a_v - l_{uv} = L$ 且和最小点相邻的边，特殊点是没有连向线索比他小的点的一般边的点。
r 点不视为特殊点。
考虑按有几个特殊点分类：
如果有两个特殊点那么无解
如果有一个特殊点那么需要找到一条从 r 到一个直径端点的路径，和一条从特殊点到另一直径端点的（只经过一般边的）路径，使得两条路径不交。同时需要满足特殊点到 r 连有特殊边。这可以用网络流解决。

如果没有特殊点，且 r 不是直径中点，那么需要找一条从 r 到一个直径端点的路径，和一条从任意一个和 r 连有特殊边的点到另一直径端点的（只经过一般边的）路径。这也可以用网络流解决。注意需要先跑从 r 出发的再跑其他的。

如果 r 是直径中点，那么需要找到两条从 r 到某个直径端点的路径，使得两条路径除了在 r 处相交以外，其他地方不交。这仍然可以用网络流解决。

跑出直径后，不在直径上的点只需任意选择一条连向线索比他小的点的一般边连接即可。

$n \times m$ 网格，每个格填一个整数使得每行每列的只包含 $+$-的算式成立，还要求填的数互不相同。

首先考虑所有数是实数的情况。
如果拿出其中的两行两列，保持上面那行和两列的运算结果不变，那么下面那行可以调整的条件是：交叉点对应的 8 个符号有奇数个减号。
当符号确定，任意线索都有解的条件是：存在 r, c，使得第 1 行，第 r 行，第 1 列，第 c 列满足上面的条件。同时，如果满足条件，则任意位置 x, y 都可以找到 r', c'，使得第 x 行，第 r' 行，第 y 列，第 c' 列满足上面的条件。
根据这个性质，如果线索是整数，填入实数有解，并且奇偶性正确，那么一定可以通过依次调整每个格子使得所有格子都是整数。

因此可以按从下到上从右到左的顺序依次填入随机整数，如果和之前相同就重新随机。如果一个位置在填入的时候可以被该行/该列的线索唯一确定，那么直接填入。最后一个格子可能会不能同时满足行线索和列线索，只需使用之前的方法进行调整即可。

如果求解时发现出现重复整数，那么重新随机整个表格即可。发生这件事的概率很小（小于 10^{-6}）。

对于不满足条件的情况，仍然可以用上述方法填数，如果最后一个格子不能同时满足行列线索则无解。

对于序列 a，令 num_i 表示数字 i 出现的次数。
统计满足条件的序列个数：

- $1 \leq a_i \leq m$
- 给定一些 x_i, y_i，满足 $a_{x_i} \neq y_i$
- 给定一些 x_i, y_i，满足 $num_{x_i} \neq y_i$。
- 将 num 排序后，得到一给定序列 B

F. Non-Puzzle: The Lost Array

Solution

假设我们给每种数字分配若干个位置，则需要满足每个位置只能被一种数字分配。考虑容斥掉这个限制，枚举位置集合 S，计算将 $[1, m]$ 映射到该集合，且不强制每个位置只被分配一个数字的方案数，其容斥系数为 $(-1)^{n-|S|}$。
考虑如何计算方案数。令 $f_{i,S}$，表示考虑前 i 种数字，当前的 num 集合为 S。转移时枚举当前数字分配几个数字（当前的 num）即可。注意到合法的 S 数目很少，最多 72 种，这一步总复杂度是 $O(n \times m \times 72)$ 的。
总复杂度为 $O(2^n \times nm \times 72)$。

无限大网格的原点上有一个高尔夫球，给定 n，第 $i+1$ 步选一个与坐标轴平行的方向走 $n-i$ 格，可以提前结束，至多走 n 步，行走路线不能自交，求能否到达 (x,y)。输出方案。

$n >= 10$ 时无解的区域是一个固定形状，并且 n 较大时解的个数很多。
在搜索中加入剩余曼哈顿距离 $<$ 剩余线段总长度的剪枝即可通过 $n \leq 1000$。
对于 n 很大的情况，可以发现当球不进入第四象限时不会影响第一象限中解的存在性。因此将坐标系翻转后，首先预留出总长度 $=$(到达终点的曼哈顿距离 $+10^5$ 左右) 的线段，在第四象限使用多余的长度绕一圈，然后对剩余的部分使用搜索即可。

Thanks!