2D CFT in a Lagrangian perspective

X. D. H.

2024 年 10 月 15 日

摘要

本文是 liuy 学习共形场论以及共形场论与引力的对偶的笔记！本文的书写基于小黄书的阅读，还有很多感兴趣的论文材料积攒而成!

其中还涉及很多量子场论和统计力学的知识,以及数学复分析的知识,也相当于作为一个比较 consistent 的专题讲义。

目录

Chapter 1

highlight of fundamental QFT

本章节我们主要 follow 大黄书 Conformal Field Theory 的基础知识的内容。

1.1 Quantization

这里我们列举一些玻色和费米场的正则量子化的结论，具体细节推导和理解可以之后补充。

我们定义什么是路径积分：

Theorem 1. 路径积分

波色场的路径积分为：

$$\langle\varphi_f(\mathbf{x},t_f)|\varphi_i(\mathbf{x},t_i)\rangle=\int[d\varphi(\mathbf{x},t)]e^{iS[\varphi]} \tag{1.1}$$

费米场的路径积分为：

$$\langle\psi_f(x,t_f)|\psi_i(x,t_i)\rangle=\int[d\bar{\psi}d\psi]e^{iS[\bar{\psi},\psi]} \tag{1.2}$$

我们讨论一下我们怎么理解路径积分：

Remark:

我们认为路径积分其实是对与场的构型的积分。也就是每一个积分的元素是场在全是空的一个分布。

我们为时空上面每一个点赋予一个场我们称之为 $\psi(x,t)$ ，并且根据这个我们可以求出这个构型对应的一个作用量我们定义为：$S[\psi(x,t)]$ 作用量本质上就是这样的一个全时空的场的构型的泛函。

对于边界条件，也就是我们约束场的每一种积分的构型都需要满足条件：

$$\psi(x,t=t_f)=\varphi_f(x)\quad\psi(x,t=t_i)=\varphi_i(x) \tag{1.3}$$

这样的路径积分的结果就是一个数，这个数表示两个态之间的概率。

1.2 correlation function

首先我们介绍量子力学意义下面的关联函数是什么，接下来我们推广到量子场论之中：

1.2.1 量子力学的关联函数

我们定义一些定义在一个粒子在不同时间的位置的关联函数是 $x(t)$，接下来我们可以定义关联函数为:

Definition 1. *我们定义关联函数为:*

$$\langle x(t_1)x(t_2)\cdots x(t_n)\rangle = \langle 0|\mathcal{T}\left(\hat{x}(t_1)\cdots\hat{x}(t_n)\right)|0\rangle \tag{1.4}$$

特别注意，所有算符必须是 time ordered（这个在正则量子化的语境下十分令人困惑），也就是说:

$$\mathcal{T}(x(t_1)\cdots x(t_n)) = x(t_1)\cdots x(t_n) \quad \text{if} \quad t_1 > t_2 > \cdots > t_n \tag{1.5}$$

上方语言是在正则量子化的语境下有些令人困惑，但是推广到路径积分的语境我们可以很自然的发现 time ordered 是一个很重要的条件:

接下来我们给出定理，也就是路径积分量子化语境下关联函数的等价表示:

Theorem 2. *在路径积分量子化的语境之下，关联函数可以写成:*

$$\langle x(t_1)x(t_2)\cdots x(t_n)\rangle \quad = \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int[dx]x(t_1)\cdots x(t_n)\exp iS_\varepsilon[x(t)]}{\int[dx]\exp iS_\varepsilon[x(t)]} \quad . \tag{1.6}$$

注意：中路径积分的时间必须有一个欧几里得的分量，其中的:

$$S_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dt(1-i\epsilon)\mathcal{L}(x, \frac{dx}{dt(1-i\epsilon)}, t(1-i\epsilon)) \tag{1.7}$$

也就是把积分微元替换成 $t(1-i\epsilon)$ 这个时候拉格朗日量之中的所有含时元素也需要变成 $t(1-i\epsilon)$

注意：我们路径积分是对于数的积分而不是对于算符的积分，路径积分之中涉及的 $x(t_i)$ 指的就是粒子在 t_i 时间的位置坐标，由于是量子力学的理论我们考虑的积分空间只有 1 维时间维。x 其实是场!

接下来我们说明路径积分出来的关联函数和正则量子化语境下面定义的关联函数是等价的。这里我们归一化正则量子化语境下面的关联函数是:

$$\langle x(t_1)x(t_2)\cdots x(t_n)\rangle = \frac{\langle 0|e^{iHt_1}\hat{x}e^{iH(t_2-t_1)}\hat{x}e^{iH(t_3-t_2)}\cdots\hat{x}|0\rangle}{\langle 0|e^{iH(t_n-t_1)}|0\rangle} \tag{1.8}$$

因为我们的某个时间的算符可以写成:

$$\hat{x}(t) = e^{iHt}\hat{x}e^{-iHt} \tag{1.9}$$

!!ATTENTION!!
我们注意，7 式子之中我们可以写成这样类似路径积分的形式，是因为我们把算符按照时间的顺序排列了!

接下来我们定义研究两个算符在真空态的平均值的比值，我们可以知道:

$$\frac{\langle 0|\mathcal{O}_1|0\rangle}{\langle 0|\mathcal{O}_2|0\rangle} = \lim_{T_i,T_f\to\infty}\frac{\langle\psi_f|e^{-iT_fH(1-i\varepsilon)}\mathcal{O}_1e^{-iT_iH(1-i\varepsilon)}|\psi_i\rangle}{\langle\psi_f|e^{-iT_fH(1-i\varepsilon)}\mathcal{O}_2e^{-iT_iH(1-i\varepsilon)}|\psi_i\rangle} \tag{1.10}$$

因为真空态可以由无穷的欧几里得路径积分得到：

$$e^{-iT_iH(1-i\varepsilon)}|\psi_i\rangle = \sum_n e^{-iT_iH(1-i\varepsilon)}|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle \tag{1.11}$$

$$= \sum_n e^{-iT_iE_n(1-i\varepsilon)}|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle \tag{1.12}$$

$$\to e^{-iT_iE_0(1-i\varepsilon)}|0\rangle\langle 0|\psi_i\rangle \quad \text{if} \quad \varepsilon \to 0, T_i \to \infty \tag{1.13}$$

!!ATTENTION!!

这个时候我们就凸显了使用 $t(1-i\epsilon)$ 的好处，也就是可以获得一个欧几里得路径积分来构造我们的真空态。从而保证我们的关联函数是对于真空态的平均。

同时我们注意到，我们使用了 $t \to 0$ 的假设，这个保证了我们拉格朗日量的形式不会发生变化。否则其实我们做路径积分的时候，如果考虑时间演化函数是 $exp(-Ht(1-i\epsilon))$ 也就是我们推导过程之中使用的 $t \to t(1-i\epsilon)$ 那么我们其实路径积分指数上面的作用量已经不再是对于拉格朗日量的积分，而是拉格朗日量函数形式进行一些些的变化（甚至如果 ϵ 很大的时候这个函数形式会发生不小变化!!）这个变化产生于我们拉格朗日量部分的求导的变量已经不再是 t 而变成了 $t(1-i\epsilon)$

Remark:

容易让人困惑的是这个路径积分的边界条件是什么?

根据我们的推导我们会发现一个有趣的事实，就是不论取什么样的边界条件都不影响路径积分的结果。因为上方的式子在推导的时候最后一步可以写成：

$$\int dx(t=\infty)dx(t=-\infty)\langle\psi_f|x(t=\infty)\rangle\langle x(t=-\infty)|\psi_i\rangle \int_{x(t=\infty)}^{x(t=\infty)} \mathcal{D}x(t)\ \mathcal{O}e^{iS_\epsilon} \tag{1.14}$$

那么我们会选用一些我们习惯的边界条件，比如就是取边界条件是一个位置算符的本征值。

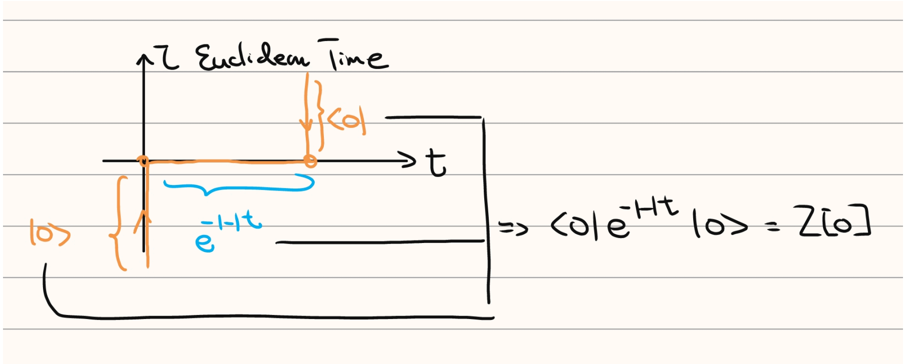
$$|\psi_i\rangle = |x_0\rangle \quad |\psi_f\rangle = |x_n\rangle \tag{1.15}$$

这里就是涉及一个让人困惑的事情就是当对于真空态取时间演化算符的平均值的时候，也就是求配分函数的时候：

$$Z[0] = \langle 0|e^{-Ht(1-i\epsilon)}|0\rangle = \int_{x_0}^{x_n} \mathcal{D}x(t)\ e^{iS_\epsilon} \tag{1.16}$$

虽然我们取的是一定时间的算符，但是其实路径积分把这个时间的信息给消磨掉了！我们的路径积分是对于从负无穷到正无穷的时间进行的路径积分！并且边界条件是任取的

这里这么不清楚是因为我们通过了一个加入很小的 ϵ 的操作混淆了欧几里得路径积分和真实时空的路径积分我们真实的操作其实是，先通过不确定边界条件的欧几里得路径积分得到了真空态，再进行洛伦兹的路径积分，然后再进行欧几里得路径积分得到真空态。那么对于配分函数更舒服的表达其实应该看下面的图



> **!!ATTENTION!!**
> 由于我们知道边界条件和路径积分求关联函数并没有任何关系，那么我们之后求关联函数不再写积分边界条件。因为写边界条件并没有意义！
> 并且我们认为积分永远是对于我们讨论问题的整个流形进行积分！

1.2.2 欧几里得路径积分

我们一般用相对论的路径积分定义一切，但是问题是，这样的路径积分形式很复杂也很难计算。同时写成这样的形式也会导致我们没有办法从式子之中看出来量子场论和统计力学的联系。

位了更加简便的引入路径积分，我们进行一个变量替换（这个操作的合法性由复分析保证，可以单拿出一章讨论复变函数）我们把所有的（包括求导变量，积分变量）的 t 替换为欧几里得时间。注意这样的替换会导致拉格朗日量和作用量的函数形式发生一些些的变化（有的时候拉格朗日量直接变成了哈密顿量！）。这个时候我们给出下面的定理：

Theorem 3. 我们定义下面的欧几里得（算符，作用量，拉格朗日量）为：

$$\hat{X}(-i\tau) = \hat{X}_E(\tau) \quad iS_E[x(\tau)] = S[x(t \to -i\tau)] \quad L_E(x(\tau)) = -L(x(t \to -i\tau)) \tag{1.17}$$

我们可以给出关联函数等于

$$\langle x(\tau_1)x(\tau_2)\cdots x(\tau_n)\rangle = \frac{\int[dx]x(\tau_1)\cdots x(\tau_n)\exp -S_E[x(\tau)]}{\int[dx]\exp -S_E[x(\tau)]} \tag{1.18}$$

这个时候我们就体现出之前边界条件书写不含时间的优越性了，因为我们发现，边界条件与时间没有关系，就是两个空间上面的场的分布。所以边界条件在欧几里得路径积分的时候也不会发生变化。

值得注意的是，我们改成欧几里得路径积分之后，时间和空间维度并没有任何的区别。当然我们路径积分仍然是对整个时空的所有的构型进行积分。这里我们只对于 t 积分是因为我们考虑的是量子力学，时空只有时间维度。

根据上文的讨论接下来我们很容易将欧几里得路径积分得到的关联函数推广到量子场论，因为时间和空间维度是完全等价的：

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x_1)...\phi(x_n)exp(-S_E)}{\int\mathcal{D}\phi\ exp(-S_E)} \tag{1.19}$$

Remark:

今后我们的讨论使用的计算全部都是对于欧几里得路径积分的计算

但是容易含糊的是，欧几里得的作用量，拉格朗日量，算符，还有关联函数，我们的函数形式和正常的路径积分完全不一样。但是我们知道如果取自变量换元 $t = -i\tau$ 那么得到的数值是一样的！

1.2.3 怎么计算关联函数

为了方便的计算关联函数，我们引入 Generator funtion 的概念，我们定义：

Definition 2. *Generator function*

定义生成函数满足下面的式子：

$$Z[j] = \int\mathcal{D}\phi(x)\ \exp - \left\{S[\phi(x)] - \int dt\ \mathrm{j}(x)\phi(x)\right\} \tag{1.20}$$

对于欧几里得量子场论我们使用的就是 $\phi(x)$ 表示，我们并不区分时间维度和其他维度，可以放心的进行正常欧几里得时空之中的积分。

根据这个定义我们可以知道路径积分其实就是 $Z[0]$ 接下来我们可以发现下方等式成立：

$$\mathrm{Z[j]} = Z[0]\langle\exp\int dtj(t)\phi(x)\rangle \tag{1.21}$$

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = Z[0]^{-1}\frac{\delta}{\delta j(t_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta j(t_n)}Z[j]\bigg|_{j=0} \tag{1.22}$$

我们可以使用更直接的求导得到我们的关联函数

1.2.4 总结

这里我需要进行一个总结。我们知道有两种量子化方式，并且这两种量子化方式是等价的，至于怎么样的定价，我认为下方的话可以描述：

1. 路径积分量子化：关联函数是物理量在全平面对于作用量加权的路径积分下的值

2. 正则量子化：关联函数是 time ordered（因此为了定义正则量子化我们必须先定义一个正交于空间维度的“时间”）物理量量子化后的算符在真空量子态下面的平均值

上方手段定义的“关联函数”必须是等价的。这个意义上两个量子化方式是等价的，而这种等价也让我们可以在定义一种量子化后，找到相应系统的另一种量子化的定义。

1.3 Symmetry of Fields

1.3.1 协变经典场

我觉得协变完全可以用一个式子表达，我们定义一个场是协变的，那么这个场满足下面的性质：

Definition 3. 流形上的协变的场 A

我们定义一个群 G，以及一个流形上的场。g 的元素让流形上的点产生了一些移动和变化 $x'=gx$ 同时也会对场产生一些变化

$$A^{\mu'}(x'=gx)=R^{\mu}_{\nu}A^{\mu}(x) \tag{1.23}$$

如果满足这个关系，并且 R 是 G 在场空间的表示

而在量子场论之中，我们研究的场（标量场，矢量场，旋量场）我们一般认为都是协变的！也就是说给出一个群使得坐标变换，那么场必然按照这个群的表示变换。后面我们会给出具体的方式求解群表示。

之后我们要定义一种特殊的场，也就是张量场。张量场我们认为是满足一些特殊变换关系的协变。也就是张量场在坐标变换之下按照一个特殊的矩阵发生函数形式的变化。

注释：这里的张量场其实就是广义相对论之中讨论的张量场！

Definition 4. 流形上的张量场 T

我们认为流形上的张量场在变换之下 $x\to x'$ 协变关系是：

$$T^{\mu'}|_{x'}=\frac{dx^{\mu'}}{dx^{\mu}}T^{\mu}|_{x} \tag{1.24}$$

我们会发现我们对于流形上的张量场有两种截然不同的理解，并且这样的两种理解是一模一样的。(对于一般的协变的场，我们只用主动变换理解)

第一种理解：（主动观点）x' 是流形微分同胚变换后另一个点的坐标

第二种理解：（被动观点）x' 是 x 换了一个坐标系之后的坐标

我们注意到，对于"张量场"这样一种特殊的协变的场，这样的两种理解给出的变换的数学形式是一模一样的。至于使用哪种理解，我个人认为，被动观点很方便理解计算的细节；主动变换很方便和协变场统一理解"协变"是什么。

1.3.2 经典协变场守恒流

1.3.3 量子协变场——关联函数协变

1.3.4 量子协变场——Ward identity

这里

Chapter 2

2D CFT fundamentals

这个章节我主要会 follow polchinski 的弦理论之中第二章对于 CFT 的讲解，并且会附上一些我自己的判断和参考其他的教材之中的内容!

2.1 holomrophic coordinates & 二维标量场

我们研究很多很多个二维标量场写在一起:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu \right). \tag{2.1}$$

这里我们使用欧几里得空间，但是欧几里得空间和洛伦兹空间的差别只有我们使用等式: $\sigma^2 = i\sigma^0$

2.1.1 坐标变换

接下来我们引入一个坐标变换，由于这个操作十分重要所以单独列出几个点:

- 坐标变换的定义:

> **Definition 5.** *holomorphic coordinate*
>
> $$z = \sigma^1 + i\sigma^2, \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2. \tag{2.2}$$
>
> $$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)\ ,\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)\ . \tag{2.3}$$
>
> 注意：我们通常认为 σ^2 是时间维度通过 *wick rotation* 变成的!!
>
> **首先：**我们这样定义导数对于经典的导数定义是自洽的
>
> $$\partial_z z = 1\ ,\ \partial_z \bar{z} = 0\ ,\ \partial_{\bar{z}} z = 0\ ,\ \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1\ . \tag{2.4}$$
>
> **其次：**我们上面的式子是定义式子，这样的定义的结果就是我们对于度规的定义是合理的
>
> $$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.5}$$

- 张量的坐标变换的定义:

Definition 6. *tensor in holomrophic coordinate*

$$v^z = v^1 + iv^2, \quad v^{\bar{z}} = v^1 - iv^2, \quad v_z = \frac{1}{2}(v^1 - iv^2), \quad v_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(v^1 + iv^2). \tag{2.6}$$

这是一个矢量的变换定义，但是已经给出了矢量的变换矩阵，根据这个变换矩阵我们可以给出任何张量的变换矩阵。

上方的定义的基础上可以有下方结论：

- 度规在新的坐标之下（度规的变换是由线长在不同的坐标系之下保持不变定义的）：

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2, \quad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{2.7}$$

- 积分单元为：

$$\sqrt{-g_z}\ d^2z = \sqrt{g_\sigma} d\sigma^1 d\sigma^2 \tag{2.8}$$

注意我们的 $g_\sigma = 1$ 因为我们考虑的是平直的欧几里得时空。其中我们可以通过度规的定义给出 $-g = 1/4$

- δ 函数的定义是：

$$\int d^2z\ \delta^2(z, \bar{z}) = 1 \tag{2.9}$$

根据这个定义可以写出 δ 函数的具体形式是：

$$\delta^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\delta(\sigma^1)\delta(\sigma^2) \tag{2.10}$$

- 接下来有导数定理的推广是：

$$\int_R d^2z \left(\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}\right) = i \oint_{\partial R} (v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz) \tag{2.11}$$

2.1.2 坐标变换下面的经典标量场

坐标变换的经典标量场为：

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \tag{2.12}$$

可以给出运动方程：

$$\partial\bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \tag{2.13}$$

Remark:

我们认为标量场是两个坐标的函数，显然这两个坐标是相关联的。但是我们可以在解析延拓的意义下认为两个坐标是不一样独立的。（至少我们可以这么算）

根据柯希黎曼条件：

$$\partial M = 0 \tag{2.14}$$

我们可以知道 ∂X^μ 是 holomorphic(left-moving) 的；$\bar{\partial} X^\mu$ 是 antiholomorphic(right-moving) 的。

2.1.3 坐标变换下面的量子标量场

对于一个量子场我们一般研究的是关联函数（或者说全屏面路径积分里面插入一些物理量的平均；或者说算符在真空态的平均）

$$\langle \mathscr{F}[X] \rangle = \int [dX] \exp(-S) \mathscr{F}[X] \tag{2.15}$$

我们根据路径积分的计算可以得到：

$$\left\langle \partial\bar{\partial} X^\mu(z,\bar{z}) \ldots \right\rangle = 0 \tag{2.16}$$

对应的量子化之后我们得到算符的表达式：

$$\partial\bar{\partial} \hat{X}^\mu(z,\bar{z}) = 0 \tag{2.17}$$

Remark:

当我们写下一个算符表达式我们需要明确这个是什么意思：

$$X_1 ... X_n = 0 \tag{2.18}$$

的意思是：1. 在 $X_1 ... X_n$ 是 time ordered 顺序的时候（我们不加声明把一些算符写在一起，他们必须是 time ordered，否则不能够定义）他们对应的经典的物理量有：

$$\langle X_1 ... X_n ... \rangle = 0 \tag{2.19}$$

2. 并且右面插入的任意算符不能是和左边算符在同一个点上面。

而如果路径积分之中插入一个场算符，并且场算符和 EOM 算符靠的很近，这个时候我们有上方算符关系的一个合理的推广：

$$\frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') = -\eta^{\mu\nu} \delta^2(z-z', \bar{z}-\bar{z}') \tag{2.20}$$

2.1.4 Normal Order

我们定义一般直接从平均值之间拿出来的算符都是 time ordered。这样的定义与量子场论 consistent。但是有的时候我们并不方便使用 time ordered 的算符，我们定义另一种 order 也就是:”normal ordered”

Definition 7. *场算符的 normal order*

首先我们定义 1，2 point 场算符的 normal order 为：

$$: X^\mu(z,\bar{z}) : = X^\mu(z,\bar{z}) \tag{2.21}$$

$$: X^\mu(z_1,\bar{z}_1) X^\nu(z_2,\bar{z}_2) : = X^\mu(z_1,\bar{z}_1) X^\nu(z_2,\bar{z}_2) + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z_{12}|^2 \tag{2.22}$$

接下来我们可以有一个递推式子递推出任意多的场算度的 normal order:

$$:X^{\mu_1}(z_1,\bar{z}_1) \ldots X^{\mu_n}(z_n,\bar{z}_n) : \tag{2.23}$$

$$= X^{\mu_1}(z_1,\bar{z}_1) \ldots X^{\mu_n}(z_n,\bar{z}_n) + \sum subtractions \tag{2.24}$$

subtraction 指任意两个场算符之间进行缩并，缩并的结果是两个场替换为：

$$X^{\mu_i} X^{\mu_j} \to \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_i \mu_j} \ln |z_{ij}|^2 \tag{2.25}$$

我们可以举出一个三阶场算符的 normal order 的例子：

$$:X^{\mu_1}(z_1,\bar{z}_1)X^{\mu_2}(z_2,\bar{z}_2)X^{\mu_3}(z_3,\bar{z}_3):=X^{\mu_1}(z_1,\bar{z}_1)X^{\mu_2}(z_2,\bar{z}_2)X^{\mu_3}(z_3,\bar{z}_3) \tag{2.26}$$

$$+\left(\frac{\alpha}{2}\eta^{\mu_1\mu_2}\ln|z_{12}|^2X^{\mu_3}(z_3,\bar{z}_3)+2\text{ permutations}\right)\ . \tag{2.27}$$

> **Remark:**
>
> 我们为什么这么定义 normal order 呢？是因为 normal order 的场算符满足经典的运动方程也就是：
>
> $$\partial\bar{\partial}:\hat{X}^{\mu}(z,\bar{z})...:=0 \tag{2.28}$$

由于我们有公式：

$$\partial\bar{\partial}\ln|z|^2=2\pi\delta^2(z,\bar{z})\ . \tag{2.29}$$

在这个定义下面我们可以得到之前相邻很近的场算符和 EOM 之间的关联函数的表达式是:

$$\partial_1\bar{\partial}_1:X^{\mu}(z_1,\bar{z}_1)X^{\nu}(z_2,\bar{z}_2):=0 \tag{2.30}$$

这里我们会发现，我们的 normal order 下的算符正好满足类似于经典的 EOM 的关系而并不是量子的加入了一个 delta 函数！！

> **Remark:**
>
> 为什么量子的 EOM 在场位置一样的时候会产生 δ 函数?
>
> 这是因为我们一般量子的情况下考虑的是路径积分，在路径积分下存在一个 delta 函数。这个不同就是量子理论和经典理论本质的不同。也就是从路径积分拿出算符和经典的物理量本身不一样的地方。

2.2 OPE

2.2.1 OPE 定义

首先我们定义什么是 OPE:

Definition 8. *OPE*:

我们研究两个算符，当对应的位置无限靠近的情况:

$$\mathscr{A}_i(\sigma_1)\mathscr{A}_j(\sigma_2) = \sum_k c_{ij}^k(\sigma_1 - \sigma_2)\mathscr{A}_k(\sigma_2)\ . \tag{2.31}$$

可以求解标量场的 OPE，我们的操作是：先把两个标量场算符换成和经典更加对应的 normal order；

$$X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) =: X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2 \tag{2.32}$$

接下来我们对于 normal order 进行态了展开可以得到:

$$X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2 + : X^\nu X^\mu(z_2, \bar{z}_2) : \tag{2.33}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big[(z_{12})^k : X^\nu\partial^k X^\mu(z_2, \bar{z}_2) : +(\bar{z}_{12})^k : X^\nu\bar{\partial}^k X^\mu(z_2, \bar{z}_2) : \Big] \tag{2.34}$$

这里我们认为 $|z_1| > |z_2|$ 我们在 z_2 点进行泰勒展开，并且认为 z_1 趋近于 z_2，这个展开的过程之中由于我们有量子的运动方程: $\partial_1\bar{\partial}_1 : X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) := 0$ 所以并没有两种导数的交叉项。

下面是关于 OPE 的一些讨论:

- 对于 OPE 我们主要关心是最开始几个有奇异性的项，对于一般的没有奇异的项我们并不关系。
- 对于共形不变的场 OPE 一般是熟练的，并且收敛半径是与其他算符最近的距离。

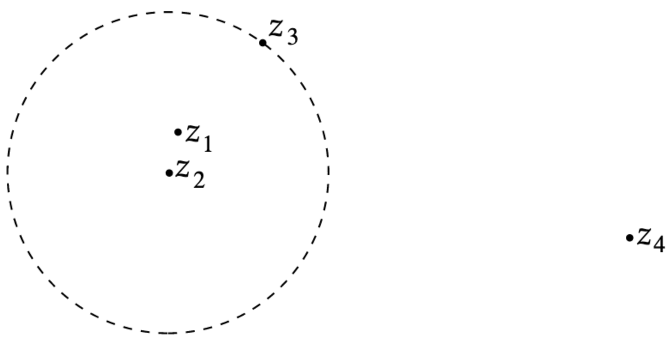


Fig. 2.1. Expectation value of a product of four local operators. The OPE gives the asymptotics as $z_1 \to z_2$ as a series where the pair of operators at z_1 and z_2 is replaced by a single operator at z_2. The radius of convergence is the distance to the nearest other operator, indicated by the dashed circle.

- OPE 等式右手边我们有很多在同一点场的乘积，一般对于量子场论我们是使用 time ordered 这样的“同一点”是不能被允许的。但是，对于 OPE 我们每一阶展开使用的是 normal order 所以可以这么写。

2.2.2 任意算符 Normal Order

之前我们定义了场算符的 normal order。现在我们讨论任意算符的 normal order 可不可以用一个比较简单的方式算出来：

Theorem 4. 任意算符 *Normal Order* 变换法则：

任意算符的 *Normal Order* 等价于之前的定义可以写成：

$$:\mathscr{F}:=\exp\left(\frac{\alpha'}{4}\int d^2z_1d^2z_2\ln|z_{12}|^2\frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1,\bar{z}_1)}\frac{\delta}{\delta X_\mu(z_2,\bar{z}_2)}\right)\mathscr{F} \tag{2.35}$$

对于两个 *normal order* 的算符的乘法定义：

$$:\mathscr{F}::\mathscr{G}:=:\mathscr{F}\mathscr{G}:+\sum \textit{cross-contractions} \tag{2.36}$$

或者使用求导的定义：

$$:\mathscr{F}::\mathscr{G}:=\exp\left(-\frac{\alpha'}{2}\int d^2z_1d^2z_2\ln|z_{12}|^2\frac{\delta}{\delta X^\mu_F(z_1,\bar{z}_1)}\frac{\delta}{\delta X_{G\mu}(z_2,\bar{z}_2)}\right):\mathscr{F}\mathscr{G}: \tag{2.37}$$

其中求导是分别对于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 之中包含的标量场 X 进行求导。

!!ATTENTION!!

contraction 是 $-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2$ ；而 subtraction 是 $+\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2$

Remark:

我们这里认为所有的算符是场算符的泛函。因此我们认为真正独立的算符只有场算符。

在上面的定义里面我们使用的是泛函导数。也就是说对于 ∂X^μ 其实我们认为是 X^μ 的函数。因为我们对于算符的所有操作其实等价于对于物理量在积分里面的操作。所以其实就是分部积分。

但是我们可以特别形式化的就是认准所有的场算符进行缩并。

接下来我们给出一些经典的算符积展开的计算帮助理解。

2.2.3 OPE 计算

首先我们计算两个 normal ordered 的场算符的导数的 OPE。

第一步我们先通过 contraction 的定义把多个 normal ordered 算符的乘积变成很多 normal ordered 的算符的求和：

$$:\partial X^\mu\partial X_\mu:(z):\partial' X^\nu\partial' X_\nu:(z')=:\partial X^\mu\partial X_\mu(z)\partial' X^\nu\partial' X_\nu(z'): \tag{2.38}$$

$$+4\times\partial X^\mu(z)\partial' X^\nu(z'):\partial X_\mu(z)\partial' X_\nu:(z') \tag{2.39}$$

$$+2\times\partial X^\mu(z)\partial' X^\nu(z')\partial X_\mu(z)\partial' X_\nu(z') \tag{2.40}$$

$$=\partial X^\mu\partial X_\mu(z)\partial' X^\nu\partial' X_\nu(z') \tag{2.41}$$

$$-4\times\frac{1}{2}\alpha'\eta^{\mu\nu}\partial\partial'\ln|z-z'|^2:\partial X_\mu(z)\partial' X_\nu:(z') \tag{2.42}$$

$$+2\times\left(\frac{1}{2}\alpha'\eta^{\mu\nu}\partial\partial'\ln|z-z'|^2\right)^2 \tag{2.43}$$

其中式子第二和第三行我们放在:: 外面的场算符会 contract 变成 $-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2$ 。这样我们才能够得到后面行的结论。至于系数就是组合的情况。对于只有两个场算符 contract 的情况由于 $2.2=2$ 所以我们一共有四种情况；对于四个 contract 的情况由于只有两种选择所以系数是 2。

第二步我们把所有单个的 normal order operator 进行泰勒展开。由于我们这些算符都是 normal ordered 所以泰勒展开不包含交叉项，并且并没有奇异（可以认为就是行为很规范的经典场）最后我们得到展开的结果是:

$$\sim \frac{D\alpha'^2}{2(z-z')^4} - \frac{2\alpha'}{(z-z')^2} : \partial' X^\mu(z')\partial' X_\mu(z') : - \frac{2\alpha'}{z-z'} : \partial'^2 X^\mu(z')\partial' X_\mu(z') : \tag{2.44}$$

其中 $\sim$ 指的就是我们只考虑有奇异性的项的展开。

!!ATTENTION!!

注意我们上面所有的场算符的导数都写成只和 z 相关但是和 $\bar{z}$ 无关是因为我们有标量场的运动方程的量子化后的算符表达式是:

$$\partial\bar{\partial}\hat{X}^\mu(z,\bar{z}) = 0 \tag{2.45}$$

正好是全纯函数的表达形式。所以自变量其实只有 z

接下来我们计算另外一个算符的 OPE。首先定义两个算符是:

$$\mathscr{F} = e^{ik_1\cdot X(z,\bar{z})}, \quad \mathscr{G} = e^{ik_2\cdot X(0,0)} \tag{2.46}$$

第一步和之前不一样我们之前使用的是比较规范定义的 contraction 的方式，这个时候我们可以使用形式化的泛函求导的公式进行计算：由于我们有公式:

$$:\mathscr{F}::\mathscr{G}: = \exp\left(-\frac{\alpha'}{2}\int d^2z_1 d^2z_2 \ln|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X_F^\mu(z_1,\bar{z}_1)}\frac{\delta}{\delta X_{G\mu}(z_2,\bar{z}_2)}\right) :\mathscr{F}\mathscr{G}: \tag{2.47}$$

我需要澄清一下这个形式化的表达是什么意思。我们分别对于 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 中同样 label 也就是同样的一个标量场进行求导，如果有多个同样类型的标量场那么我们可以排列组合。全程求导的过程请无视右面式子里面的::。因为我们发现所有算符已经是 normal ordered 的了。

$$:e^{ik_1\cdot X(z,\bar{z})}::e^{ik_2\cdot X(0,0)}: = \exp\left(\frac{\alpha'}{2}k_1\cdot k_2 \ln|z|^2\right) :e^{ik_1\cdot X(z,\bar{z})}e^{ik_2\cdot X(0,0)}: \tag{2.48}$$

$$= |z|^{\alpha' k_1\cdot k_2} :e^{ik_1\cdot X(z,\bar{z})}e^{ik_2\cdot X(0,0)}: \tag{2.49}$$

第二步我们依旧使用泰勒展开在第二个算符处展开第一个算符。由于是 normal order 我们可以比较恣意的进行泰勒展开:

$$:e^{ik_1\cdot X(z,\bar{z})}::e^{ik_2\cdot X(0,0)}:= |z|^{\alpha' k_1\cdot k_2} :e^{i(k_1+k_2)\cdot X(0,0)}[1+O(z,\bar{z})]:. \tag{2.50}$$

2.3 Ward Identity

2.3.1 Ward Identity 定义

首先我们定义什么是 Symmetry。由于我们讨论在量子场论的语境下，所以我们定义量子的 Symmetry：

Definition 9. *Symmetry*

如果存在一个场的函数的变换（坐标的变换与函数形式的变化的综合）：

$$\phi'_\alpha(\sigma) = \phi_\alpha(\sigma) + \delta\phi_\alpha(\sigma) \tag{2.51}$$

其中 $\delta\phi_\alpha(\sigma)$ 正比于一个无限小的常数 ϵ 。这个变换前后满足这个关系：

$$[d\phi'] \exp(-S[\phi']) = [d\phi] \exp(-S[\phi]) \tag{2.52}$$

那么这个变换就是 *Symmetry*。

接下来我们给出一个定理:

Theorem 5. *Ward Identity*

如果系统存在一个 *Symmetry*。那么必然存在一个守恒的流。这个守恒流量子化后面的结果满足一定的算符关系，我们称之为 *Ward Identity*。

接下来我们推导算符的关系，首先我们把我们的 Symmetry 变换进行一个变形加入一个任意的函数 $\rho(\sigma)$ 。

$$\phi'_\alpha(\sigma) = \phi_\alpha(\sigma) + \rho(\sigma)\delta\phi_\alpha(\sigma) \tag{2.53}$$

这个时候请谨记 $\delta\phi_\alpha(\sigma)$ 正比于一个无限小常数 ϵ 。

对于 Symmetry 变换进行修正之后我们可以发现之前定义的关系不再满足，而是变为了：

$$[d\phi'] \exp(-S[\phi']) = [d\phi] \exp(-S[\phi]) \left[1 + \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^d\sigma \; \mathrm{g}^{1/2} j^a(\sigma)\partial_a\rho(\sigma) + O(\epsilon^2)\right] \tag{2.54}$$

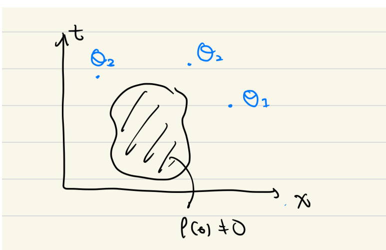
其中 $j^a(\sigma)$ 是被场和 measure 的变换决定的一个 local 的物理量。而 g 指的是我们考虑空间的度规或者写成:

$$\int [d\phi'] \exp(-S[\phi']) - \int [d\phi] \exp(-S[\phi]) = \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^d\sigma \; \mathrm{g}^{1/2} \langle j^a(\sigma)\rangle \partial_a\rho(\sigma) \tag{2.55}$$

关于右面的式子，我们的路径积分是泛函的积分只和函数形式相关。由于只有诺特流与我们唱的函数形式相关，所以只对其进行平均。

接下来我们考虑两种特殊的 ρ 函数形式：

- $\rho(\sigma)$ **只在一个不含任何算符的小区域里面不为 0**



由于这个情况所以我们认为变换前后了关联函数（也就是平均值）并不发生变化：

$$0 = \int [d\phi'] \exp(-S[\phi']) \ldots \quad - \int [d\phi] \exp(-S[\phi]) \ldots \tag{2.56}$$

$$= \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^d\sigma g^{1/2} \rho(\sigma) \langle \nabla_a j^a(\sigma) \ldots \rangle \tag{2.57}$$

上方的式子之中我们使用了分部积分，以及公式：

$$\partial_a (g^{1/2} v^a(c)) = g^{1/2} \nabla_a v^a(c) \tag{2.58}$$

因此最后由于 $\rho(\sigma)$ 是任取的，可以得到诺特定理：

Theorem 6. 如果算符右面不插入同一点的算符那么满足：

$$\nabla_a j^a = 0 \tag{2.59}$$

!!ATTENTION!!

上面的公式其实只在讨论的 ρ 不为 0 的小区域里面成立，也就是说。如果我们关心的 local 小空间里面有其他的算符，那么上面的诺特定理就需要被算符进行一个修正。

而修正后的结果我们称之为 Ward Identity。

这个时候我们也意识到了。这两个关系并不是对于全空间成立的，而是 local property。仅仅对于我们考虑的一个小区域的讨论之中使用成立的！

!!ATTENTION!!

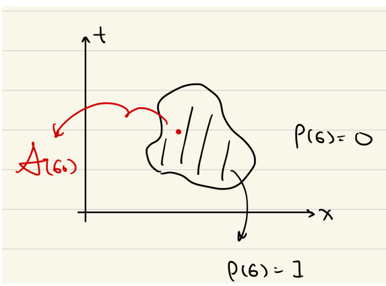
我们为什么要很刻意的定义“很小的区域”呢？

因为每当我们写下一个算符的关系式子的时候我们往往在默认，在这个算符右面乘上其他任意算符这个式子依然成立。也就是说算符的表达式的意义其实是：

$$\nabla_a j^a \ldots = 0 \tag{2.60}$$

但是其实对于诺特定理这个并不成立，如果在右面乘上了一个和诺特流在同一个点上的场，那么就会出问题。就不能用诺特定理来描述而是需要用 Ward Identity。

- $\rho(\sigma)$ **只在包含一个算符的小区域 R 里面为 1，其他区域为 0**



这个情况之下我们可以依旧根据公式（2.55）进行计算，等式左边变成了算符的平均值变化量。

$$\delta \mathscr{A}(\sigma_0) + \frac{\epsilon}{2\pi i} \int_R d^d\sigma g^{1/2} \nabla_a j^a(\sigma) \mathscr{A}(\sigma_0) = 0 \tag{2.61}$$

或者可以写成“微分形式”也就是我们常见的 Ward Identity：

Theorem 7. *Ward Identity*

$$\nabla_a j^a(\sigma)\mathscr{A}(\sigma_0) = g^{-1/2}\delta^d(\sigma-\sigma_0)\frac{2\pi}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(\sigma_0) + \textit{total } \sigma\textit{-derivative} \tag{2.62}$$

接下来我们着重讨论，我们考虑的 local 小区域里面存在算符的情况。这种情况之下我们可以利用散度的定理变形式子（2.60），我们有：

$$\int_{\partial R} dA\, n_a j^a \mathscr{A}(\sigma_0) = \frac{2\pi}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(\sigma_0) \tag{2.63}$$

这个积分是对于向外的方向，进行逆时针绕圈的积分。

我们现在开始只考虑二维空间，并且通过我们的坐标变换变成 holomorphic & antinolomrophic 的坐标：

$$\oint_{\partial R}(j dz - \tilde{j} d\bar{z})\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) = \frac{2\pi}{\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.64}$$

其中我们定义其中：$j_1 \equiv j_z, \tilde{j} \equiv j_{\bar{z}}$ 并且由于我们考虑的是被 wick rotation 之后的一个欧几里得量子场论，所以我们回大西安 $j_z = \frac{1}{2}(j_1 - i j_2)$ 是厄米的，因为 $j_2^\dagger = -j_2$ 。

接下来我们考虑如果场论具有共形不变形，这个时候我们的 j_z 一般只是 z 的函数；$\tilde{j}_{\bar{z}}$ 仅仅是 $\bar{z}$ 的函数。这个时候我们可以对于式子（2.63）使用留数定理：

$$\mathrm{Res}_{z\to z_0} j(z)\mathcal{A}(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\ j(z)\mathcal{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.65}$$

$$\bar{\mathrm{Res}}_{\bar{z}\to\bar{z}_0}\tilde{j}(\bar{z})\mathcal{A}(z_0,\bar{z}_0) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar{z}\ \tilde{j}(\bar{z})\mathcal{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.66}$$

注意：反全纯的函数使用留数定理逆时针积分会出一个负号!! 根据上面的两个柿子我们可以得到一个很重要的定理：

Theorem 8. *对称性对应诺特流和算符 OPE 留数与算符变换的关系. 又名 Conformal Ward Identity*

我们讨论二维的空间其中 j 是一个共形不变形的系统的共形变换的守恒荷（一个例子是：由能动量张量生成 $j(z) = iv(z)T(z)$ ）。对于共形不变形的系统，共形不变对应的守恒荷必然是全纯和反全纯函数（上方例子这个正好成立）。

并且由下面的关系：

$$\mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) + \mathrm{Res}_{\bar{z}\to\bar{z}_0}\,\tilde{j}(\bar{z})\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.67}$$

这是一个算符的关系，并且由于我们讨论的是留数所以正好就是讨论 OPE 的-1 阶的算符与一个算符的变化之间的关系。我们可以很显然的看出来 OPE 和 Ward Identity 之间的关系。

那么为了求留数，我们需要使用 OPE。但是在此之前需要求出诺特流对于场的泛函，下面我们给出一些诺特流对于场的泛函的求解。

Remark:

怎么理解 Ward Identity 是一个 local 的性质呢?

我认为我们可以认为 Noether thm 在每一个点都成立。只是，如果不小心碰上了这个点有一个又面乘上去的算符，那么就需要 modify 一下。那么需要变化多少呢? 变化的量正好是这个点处算符在 Symmetry 变化前后的变化量。

怎么理解“正好碰上”呢?

同时我们也可以换一种说法:“两个算符在某个点碰上”正好等价于求两个算符的 OPE。Ward Identity 告诉我们 OPE 的留数（-1 阶）的和正好等于碰上的右面的算符在 Symmetry 变化的变化量。

2.3.2 计算 Noether Current

计算场平移不变诺特流

对于场进行平移我们可以有:

$$\delta X^\mu = \epsilon a^\mu. \quad \delta X^\mu(\sigma) = \epsilon\rho(\sigma)a^\mu \tag{2.68}$$

其中我们有 a^μ 是 μ 方向的单位向量。我们可以通过作用量变换不变（因为我们的 measure 自动变换不变）求出诺特流:

$$j_a^\mu = \frac{i}{\alpha'}\partial_a X^\mu \tag{2.69}$$

接下来可以进行一个操作就是求诺特流和算符的 OPE。由于我们的 OPE 只能定义 Normal order 的 OPE。但是诺特流自身只有一个场的泛函，所以自身自然就是 Normal order 的了，求解的结果是:

$$j^\mu(z) : e^{ik\cdot X(0,0)} : \sim \frac{k^\mu}{2z} : e^{ik\cdot X(0,0)} : \tag{2.70}$$

$$\tilde{j}^\mu(\bar{z}) : e^{ik\cdot X(0,0)} : \sim \frac{k^\mu}{2\bar{z}} : e^{ik\cdot X(0,0)} : \tag{2.71}$$

很容易看出我们的留数的和是:

$$k^\mu : e^{ik\cdot X(0,0)} := \frac{\delta\mathcal{A}}{i\epsilon} \tag{2.72}$$

正好满足公式（2.66）。

计算 world sheet 平移不变诺特流

Another example is the *world-sheet* translation $\delta\sigma^a = \epsilon v^a$, under which $\delta X^\mu = -\epsilon v^a \partial_a X^\mu$. The Noether current is

$$j_a = i v^b T_{ab} \,, \tag{2.3.15a}$$

$$T_{ab} = -\frac{1}{\alpha'} :\left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2}\delta_{ab}\partial_c X^\mu \partial^c X_\mu\right): \,. \tag{2.3.15b}$$

Here T_{ab} is the world-sheet energy-momentum tensor.[2]

2.4 共形不变性

2.4.1 构造共形变换

我们首先讨论能动量张量:

$$T_{ab}=-\frac{1}{\alpha'}:\left(\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu-\frac{1}{2}\delta_{ab}\partial_c X^\mu\partial^c X_\mu\right): \tag{2.73}$$

我们发现几个性质:

- traceless（上面的能动量张量显然 tr 是 0，但是我们可以证明二维满足共性对称性的 tr 都是 0）: $T^a_a=0$ 也就是说 $T_{z\bar{z}}=0$ 所有非对角元都是 0
- 由于我们诺特定理（这个讨论和场无关）给出了能量守恒（当然这里的"守恒"指算符右面不乘上同一个点的其他算符）我们有关系:

  $$\partial^a T_{ab}=0 \tag{2.74}$$

  相等价的我们有:

  $$\bar{\partial}T_{zz}=\partial T_{\bar{z}\bar{z}}=0 \tag{2.75}$$

  因此我们发现两个独立的能动量张量一个是全纯的一个是反全纯的。
- notation 定义:

  $$T(z)\equiv T_{zz}(z)\ ,\quad \tilde{T}(\bar{z})\equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \tag{2.76}$$

- 由于 T_{ab} 满足上面的性质那么我们自然可以对于两个能动量张量加上任意一个全纯、反全纯函数保证能动量张量仍然是守恒的！这意味着有着一个更大的对称性:

  $$j(z)=iv(z)T(z)\ ,\quad j(\bar{z})=iv(z)^*\tilde{T}(\bar{z}) \tag{2.77}$$

  注意，我们之前推导能动量张量用的仅仅是一个特殊的二维共形变换（平移不变性）那么其实我们发现能动量张量进行一些 modification 之后依旧是守恒的。但是对应着完整的共性不变性。

接下来我们希望研究这个"更大的对称性"到底是什么?

我们的思路是我们已经知道诺特流了，我们通过诺特流的 OPE 反回去推导场的变换关系，得到场的生成元。

对于二维的标量场，我们有能动量张量的表达式是:

$$T(z)=-\frac{1}{\alpha'}:\partial X^\mu\partial X_\mu:,\quad \tilde{T}(\bar{z})=-\frac{1}{\alpha'}:\bar{\partial}X^\mu\bar{\partial}X_\mu: \tag{2.78}$$

根据我们的二维标量场的运动方程: $\partial\bar{\partial}X^\mu(z,\bar{z})=0$ 显然可以知道分别是全纯和反全纯的。

接下来我们使用扩展的诺特流（2.76）和场求解 OPE:

$$j(z)X^\mu(0)\sim\frac{iv(z)}{z}\partial X^\mu(0)\ ,\quad \tilde{j}(\bar{z})X^\mu(0)\sim\frac{iv(z)^*}{\bar{z}}\bar{\partial}X^\mu(0) \tag{2.79}$$

利用公式:

$$\mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0)+\mathrm{Res}_{\bar{z}\to\bar{z}_0}\,\tilde{j}(\bar{z})\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0)=\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.80}$$

可以推出:

$$\delta X^\mu=-\epsilon v(z)\partial X^\mu-\epsilon v(z)^*\bar{\partial}X^\mu. \tag{2.81}$$

$$z'=z+\epsilon v(z) \tag{2.82}$$

其中 $v(z)$ 正好就是对于诺特流的 modification 的那个全纯函数。

这个变化的关系在宏观上是:

$$X'^\mu(z',\bar{z}')=X^\mu(z,\bar{z}),\quad z'=f(z) \tag{2.83}$$

我们称之为 **共形变换**。

!!ATTENTION!!

注意我们上面讨论的都是在“自由标量场”的语境之下的。也就是我们认为场是没有 spin 也是 0 维的。

这个时候场的变换关系是:

$$X'^\mu(z',\bar{z}')=X^\mu(z,\bar{z}),\quad z'=f(z) \tag{2.84}$$

无限小变换关系是:

$$\delta X^\mu=-\epsilon v(z)\partial X^\mu-\epsilon v(z)^*\bar{\partial}X^\mu. \tag{2.85}$$

其中 $v(z)$ 是:

$$z'=z+\epsilon v(z) \tag{2.86}$$

但是对于一般的有 spin 和维度的协变场我们并不一定成立。下面一小节我们会讨论更一般的协变场。

2.4.2 共形变换的特质

我们给出二维的共形变换的定义是:

Definition 10. 共形变换

我们定义共形变换是对于二维空间写成:

$$z'=f(z) \tag{2.87}$$

其中 f 是一个全纯函数。

接下来我们讨论二维空间之中定义这样的变换有哪些性质:

- 共形变换对于距离的影响，我们发现共形变换让距离乘以一个依赖于位置的量:

$$ds'^2=dz'd\bar{z}'=\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial\bar{z}'}{\partial\bar{z}}dzd\bar{z}. \tag{2.88}$$

2.4.3 共形不变性和 OPE

共形不变形给以 EM 张量的 OPE 约束:

我们这里主要考虑 $T(z)$ 能动量张量和某一个在 0 点的算符之间的 OPE。由于 OPE 我们可以认为是在外面圈的算符在里面圈的展开，而正好 $T(z)$ 是全纯函数所以可以进行洛朗展开。这个时候我们可以证明一个结论:

> **Lemma 1.** *如果系统具有一定的共性对称性，能动量张量是共性对称性保证的守恒量。*
>
> *所有的奇异的 OPE 的系数完全由能动量张量右面的算符的共性变换决定。*

我们对于 OPE 进行展开:

$$T(z)\mathscr{A}(0,0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \mathscr{A}^{(n)}(0,0) \tag{2.89}$$

注意我们这里右方的 $\mathscr{A}$ 的系数比展开系数要小一阶。接下来我们利用公式:

$$\mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) + \mathrm{Res}_{\bar{z}\to\bar{z}_0}\, \tilde{j}(\bar{z})\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.90}$$

我们进一步计算出，对于能动量张量进行一些变换的共性变换的守恒荷，也就是 $j(z) = iv(z)T(z)$ 以及 $\bar{j}(\bar{z}) = iv(z)^*\bar{T}(\bar{z})$ 我们有关系:

$$\delta\mathscr{A}(z,\bar{z}) = -\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\partial^n v(z)\mathscr{A}^{(n)}(z,\bar{z}) + \bar{\partial}^n v(z)^* \tilde{\mathscr{A}}^{(n)}(z,\bar{z})\right] \tag{2.91}$$

推导过程是，对于一个特别的共形变换的诺特流: $j(z) = iv(z)T(z)$ 我们的公式:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}(z_0) &= \mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) && (2.92)\\
&= i\varepsilon\frac{1}{2\pi i}\oint_C j(z)\mathcal{A}(z_0) && (2.93)\\
&= i\varepsilon\frac{1}{2\pi i}\oint_C iv(z)T(z)\mathcal{A}(z_0) && (2.94)\\
&= -\frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint_C \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{k!}\partial^k v(z_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} && (2.95)\\
&= -\frac{\varepsilon}{2\pi i}\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k v(z_0)\mathcal{A}^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)^{n-k+1}} = -\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial^n v(z_0)\mathcal{A}^{(n)} && (2.96)
\end{aligned}$$

上面是全纯的情况，反全纯的情况同理!

> **Remark:**
>
> 这里我们写的 $\delta\mathcal{A}(z_0)$ 指的并不是共形变换下某个算符的无限小变换；而是【这个变换的全纯部分】
>
> 之后我们也会看到一些公式:
>
> $$\mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0) \tag{2.97}$$
>
> 这些公式的意思是我们只考虑变换的全纯部分。其中 $\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar{z}_0)$ 的意思不再是完整的共形变换，而是变换的全纯部分。

Theorem 9. *共形变换生成元与 EM tensor OPE 的关系*

这样我们就产生了一组方法来确定 $\mathcal{A}^{(n)}$ 具体的值是什么。我们已知一个变换（坐标和协变场的变换形式）那么我们就可以得到 $\delta\mathcal{A}$ 的形式。in terms of $v(z)$ 。其中 $z' = z + \epsilon v(z)$ 。

接下来我们把这个形式和公式:

$$\delta\mathscr{A}(z,\bar{z}) = -\epsilon\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\partial^n v(z)\mathscr{A}^{(n)}(z,\bar{z}) + \bar{\partial}^n v(z)^* \tilde{\mathscr{A}}^{(n)}(z,\bar{z})\right] \tag{2.98}$$

进行对比，就可以得到各个-1 以及以上项的系数！但问题是，我们求不出来更低阶的系数，并且如果 $v(z)$ 的高阶导数为 0 那么也是求不出来 OPE 的系数的。

注意一个容易混淆的地方:

$\delta\mathscr{A}$ 是共形变换下面某个算符的无限小变化量，对应的生成元是 $j = iv(z)T(z)$ ；而 $\mathscr{A}^{(n)}$ 是能动量张量和算符 $\mathscr{A}$ 的 OPE 展开的系数!!

Remark:

我们会发现当我们给出一个变换，我们并不能够确定全部的 OPE 的系数。（至少我们给不出没有奇异的项的系数。）

但是如果给出一个 OPE 我们可以完整的给出一个无限小变换。

接下来我们就用一个例子来说明。我们给定一个特殊的共性变换，来求出 OPE 的各项系数:

$$z' = \zeta z \quad \mathscr{A}'(z',\bar{z}') = \zeta^{-h}\overline{\zeta}^{-\tilde{h}}\mathscr{A}(z,\bar{z}) \tag{2.99}$$

其中 ζ 是一个普通的复数 $\zeta = Ae^{i\theta}$ 。并且我们认为 $h+\tilde{h}$ 是算符 $\mathcal{A}$ 的维度；$h-\tilde{h}$ 是算符的 spin。我们可以计算微小到变换为 $\zeta = (1+\epsilon)$ 同时对于这个变换我们有 $v(z) = z$:

$$\delta\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}'(z) - \mathcal{A}(z) = -\varepsilon z\partial\mathcal{A}(z) - h\varepsilon\mathcal{A}(z) \tag{2.100}$$

这样我们很容易确定:

$$T(z)\mathscr{A}(0,0) = \ldots + \frac{h}{z^2}\mathscr{A}(0,0) + \frac{1}{z}\partial\mathscr{A}(0,0) + \ldots \tag{2.101}$$

我们考虑一种重要的协变场我们称之为：Primary Field，它满足下面的协变关系:

$$\mathcal{O}'(z',\bar{z}') = (\partial_z z')^{-h}(\partial_{\bar{z}}\bar{z}')^{-\tilde{h}}\mathcal{O}(z,\bar{z})\ . \tag{2.102}$$

我们同样可以推导出相应的 OPE 的系数:

$$T(z)\mathscr{O}(0,0) = \frac{h}{z^2}\mathscr{O}(0,0) + \frac{1}{z}\partial\mathscr{O}(0,0) + \ldots \tag{2.103}$$

接下来列出一些特殊的场的 h 的数值，并且我们会发现除了 $\partial^2 X^\mu$ 都是 Primary field：

Taking again the example of the free X^μ CFT, the weights of some typical operators are

$$\left.\begin{array}{llll} X^\mu & (0,0)\,, & \partial X^\mu & (1,0)\,, \\ \bar\partial X^\mu & (0,1)\,, & \partial^2 X^\mu & (2,0)\,, \\ :e^{ik\cdot X}: & \left(\frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\alpha' k^2}{4}\right). & & \end{array}\right\} \tag{2.4.17}$$

我们如何得到这些数值呢？

首先我们计算其 OPE。通过 OPE 的形式我们会发现他们是不是 primary field。接下来，我们使用-2 阶的系数当作 h 数值。

对于 X^μ 我们前面计算过:

$$T(z)X^\mu(0) \sim \frac{1}{z}\partial X^\mu(0) \tag{2.104}$$

对于 ∂X^μ：

$$T(z)\partial X^\mu(w) = \partial_w(T(z)X^\mu(w)) = \partial_w\left(\frac{\partial X^\mu(w)}{z-w}\right) = \frac{\partial X^\mu(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(\partial X^\mu)(w)}{z-w} \tag{2.105}$$

对于 $\partial^2 X^\mu$：

$$T(z)\partial^2 X^\mu(w) = \partial_w\left[\frac{\partial X^\mu(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(\partial X^\mu)(w)}{z-w}\right] \tag{2.106}$$

$$= \frac{2\partial X^\mu(w)}{(z-w)^3} + \frac{2\partial X^\mu(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(\partial^2 X^\mu)(w)}{z-w} \tag{2.107}$$

我们会发现由于有三阶项的存在所以这并不是一个 Primary field。

对于 $:e^{ik.X(w)}:$：

$$T(z):e^{ik\cdot X(w)}: = -\frac{1}{\alpha'}:\partial X^\mu \partial X_\mu:(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}:(k\cdot X)^n:(w) \tag{2.108}$$

$$= -\frac{1}{\alpha'}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2ni^n}{n!}k_\nu \partial\overline{X^\mu(z)X}^\nu(w):(k\cdot X)^{n-1}:(w)\right. \tag{2.109}$$

$$\left.+\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n(n-1)i^n}{n!}k_\nu k_\sigma \partial\overline{X^\mu(z)X}^\nu(w)\partial\overline{X_\mu(z)X}^\sigma(w):(k\cdot X)^{n-2}:(w)\right]\right. \tag{2.110}$$

$$= -\frac{1}{\alpha'}\left[2k_\nu\left(-\frac{\eta^{\mu\nu}\alpha'}{2(z-w)}\right)i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}:\partial X^\mu(z)(k\cdot X)^{n-1}(w):\right. \tag{2.111}$$

$$\left.+k_\nu k_\sigma\left(-\frac{\eta^{\mu\nu}\alpha'}{2(z-w)}\right)\left(-\frac{\delta^\sigma_\mu\alpha'}{2(z-w)}\right)i^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^{n-2}}{(n-2)!}:(k\cdot X)^{n-2}(w):\right] \tag{2.112}$$

$$= \frac{ik_\mu:\partial^\mu X(z)e^{ik\cdot X(w)}:}{z-w} + \frac{\alpha' k^\mu k_\mu:e^{ik\cdot X(w)}:}{4(z-w)^2} \tag{2.113}$$

$$\sim \frac{\frac{\alpha' k^2}{4}:e^{ik\cdot X(w)}:}{(z-w)^2} + \frac{\partial:e^{ik\cdot X(w)}:}{z-w} \tag{2.114}$$

上面画横线指的是 contraction。这个时候我们可以看出来我们的 normal order 的算符的共形变换和一般 ordered 其实并不一样!! 这个区别源于“量子”下定义同一点两个算符的乘积!!

2.4.4 能动量张量共形性质

之前已经求出能动量张量的 OPE 是:

$$T(z)T(0)=\frac{\eta^{\mu}\mu}{2z^4}-\frac{2}{\alpha' z^2}:\partial X^{\mu}(z)\partial X_{\mu}(0):+:T(z)T(0): \tag{2.115}$$

$$\sim\frac{D}{2z^4}+\frac{2}{z^2}T(0)+\frac{1}{z}\partial T(0). \tag{2.116}$$

根据这个 OPE 我们有能动量张量的共形变换下的展开

$$T(z)T(w)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^{(n)}(w)}{(z-w)^{n+1}} \tag{2.117}$$

这个展开的有奇异的项的系数是:

$$T^{(3)}(z)=D/2;\quad T^{(1)}(z)=2T(z);\quad T^{(0)}(z)=\partial T(z) \tag{2.118}$$

根据我们之前 OPE 和变换生成元的关系我们可以知道能动量张量在共形变换下面的生成元是:

$$\delta T(z)=-\varepsilon\left[\frac{1}{3!}\partial^3 v(z)T^{(3)}(z)+\frac{1}{1!}\partial^1 v(z)T^{(1)}(z)+\frac{1}{0!}\partial^0 v(z)T^{(0)}(z)\right] \tag{2.119}$$

$$=-\varepsilon\left[\frac{D}{12}\partial^3 v(z)+2\partial v(z)T(z)+v(z)\partial T(z)\right] \tag{2.120}$$

我们对比 OPE 就已经显然会发现，这个 OPE 并不是 Primary Field 的 OPE 也就是说能动量张量其实并不是一个“张量”，因为它不满足我们一般认为的共形变换下的场的协变方式。

接下来值得讨论的就是能动量张量是怎么样随着共形变换协变的。我们取能动量张量的变换形式:

$$\epsilon^{-1}\delta T(z)=-\frac{c}{12}\partial_z^3 v(z)-2\partial_z v(z)T(z)-v(z)\partial_z T(z) \tag{2.121}$$

其中的 c 我们定义为”centual charge”。

对应的能动量张量的变换是:

$$\begin{gathered}(\partial_z z')^2 T'(z')=T(z)-\frac{c}{12}\{z',z\},\\ \text{where } \{f,z\} \text{ denotes the Schwarzian derivative}\\ \{f,z\}=\frac{2\partial_z^3 f\partial_z f-3\partial_z^2 f\partial_z^2 f}{2\partial_z f\partial_z f}.\end{gathered} \tag{2.122}$$

这个变换形式我们会发现，广义相对论里面我们讨论的协变张量是按照坐标的变换矩阵进行变换的。这个时候的能动量张量显然不是一个张量，相比于坐标变换矩阵进行的变换，我们多出了一个和 central charge 相关的项。

> **Remark:**
>
> 我们怎么理解“共形变换下能动量张量不再是张量”这个事实呢?
>
> 首先，我们先明确我们这里讨论的 T，到底是什么? 我们区分两个量: $j=iv(z)T(z)$ 是共形变换的守恒量; T 是能动量张量，是 world sheet translation 变换的守恒量。
>
> 最后，对于 2D 共形变换是一个 local 变换。一般我们用主动的观点研究共形变换。但是，由于作为 local 变换，(根据广义相对论里讨论的主被动变换等价原理) 其实等价于一个坐标变换。对于这样的变换我们认为“张量的协变”指的是张量按照被动变换观点下的坐标变换矩阵 $z'=z+v(z)\epsilon$ 进行变换。但是很可惜的是能动量张量并不按照这个变化进行变换。所以我们会说它不是一个张量。

接下来我们讨论一个 general 的 OPE。如果对于两个 conformal weight（这个是由 dimension 和 spin 这样的算符的内柄的性质决定的）我们对于 OPE 进行坐标变换可以变成下面的形式：

$$\mathscr{A}_i(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{A}_j(z_2,\bar{z}_2)=\sum_k z_{12}^{h_k-h_i-h_j}\bar{z}_{12}^{\tilde{h}_k-\tilde{h}_i-\tilde{h}_j}c_{ij}^k\mathscr{A}_k(z_2,\bar{z}_2) \tag{2.123}$$

我们很快可以发现一个结论就是：算符的 OPE 被 h 数 lower bound 所以最大的奇异有一个下界。

2.5 Virasoro 代数

现在我们讨论一个 general 的 1+1 维的周期性的 CFT 的能谱。我们认为我们的理论生活的空间是：

$$\sigma^1 \sim \sigma^1 + 2\pi. \quad -\infty < \sigma^2 < \infty \tag{2.124}$$

注意我们一般使用 σ^2 作为我们的时间维度。

接下来有两种坐标可以描述这个体系：第一种是正常的周期性复平面：

$$w = \sigma^1 + i\sigma^2 \tag{2.125}$$

第二种我们认为时间维度是径向的：

$$z = \exp(-iw) = \exp(-i\sigma^1 + \sigma^2) \tag{2.126}$$

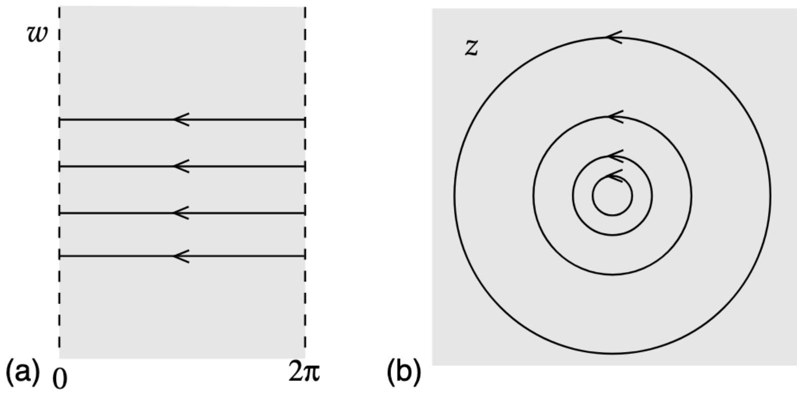


Fig. 2.3. Closed string coordinates. (a) Equal time contours in the w-plane. The dashed lines are identified. (b) The same contours in the z-plane.

接下来我们讨论两个坐标下面的能动量张量的表达：

1. 根据能动量张量的变换规则（注意：这个时候 world sheet translation 对应的“能动量张量”在共形变换下已经不是张量了）对于上面两种坐标系（或者用主动观点就是一个共形变换，但是用被动观点好求变换矩阵）：

$$T_{zz}(z) = (\partial_w z)^{-2}\left(T_{ww}(w) - \frac{c}{24}\right) \tag{2.127}$$

其中 $\partial_w z = -iz$ 是坐标变换矩阵的 zw 分量（由于能动量张量非对角项都是 0（这个是二维共形场论在 holomorphic 坐标系下由于能动量张量守恒必须满足的））。

2. 两种能动量张量展开为：

第一种是：

$$T_{zz}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}} \tag{2.128}$$

$$L_m = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{m+2} T_{zz}(z) \ , \tag{2.129}$$

这个展开在原点进行其实就是负无穷点进行展开; 第二个式子的围道积分由于柯西定理其实和路径没有任何关系，只要绕着远点就可以了，所以我们认为 L_m 展开系数矩阵其实和时间没有关系，是守恒量!!

第二种是:

$$T_{ww}(w) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\sigma^1 - m\sigma^2) T_m, \tag{2.130}$$

$$T_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{w}) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-im\sigma^1 - m\sigma^2) \tilde{T}_m \tag{2.131}$$

这个展开在时间为 0 的点进行。并且根据坐标变换关系我们发现两种展开的系数矩阵满足下面的关系:

$$T_m = L_m - \delta_{m,0}\frac{c}{24}, \quad \tilde{T}_m = \tilde{L}_m - \delta_{m,0}\frac{\tilde{c}}{24}. \tag{2.132}$$

3. 对于时间平移不变性对应的守恒量 $T^{\mu 2}$ 注意由于是欧几里得时空我们并不区分上下标。其对应的守恒量是哈密顿量:

$$H = \int J^0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma^1}{2\pi} T_{22} = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}. \tag{2.133}$$

4. 最后一个很重要的结论:

Theorem 10. *L_m 和 $\tilde{L}_m$ 定义是:*

$$L_m = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{m+2} T_{zz}(z) \ , \tag{2.134}$$

注意我们的积分是逆时针的。

- *这一组算符是能动量张量在负无穷远的展开算符*
- *这一组算符与时间无关，是守恒量*
- *这一组算符是共形变换的守恒荷，由于共形变换在二维有无穷个，所以也是有无穷个守恒荷。*

接下来我们讨论一个很重要的定理:

Theorem 11. *对于一个对称性（注意，不一定是共形变换的诺特流，还可能是任何变换，这个定理适用范围是一般的能写成 radial 量子化的二维场论），其诺特流的 OPE 决定了，对称性对应的守恒荷的 algebra。*

$$[Q_1, Q_2]\{C_2\} = \oint_{C_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \mathrm{Res}_{z_1 \to z_2}\, j_1(z_1) j_2(z_2) \tag{2.135}$$

对于 local 算符和 charge 的对易子:

$$[Q, \mathscr{A}(z_2, \bar{z}_2)] = \mathrm{Res}_{z_1 \to z_2}\, j(z_1) \mathscr{A}(z_2, \bar{z}_2) \tag{2.136}$$

注意：这个定理唯一的限制是：诺特流应该是 holomorphic 的!!!!!

对于某一个对应着一个 holomorphic 的诺特流的 charge，在 radial 坐标下面，我们有定义：

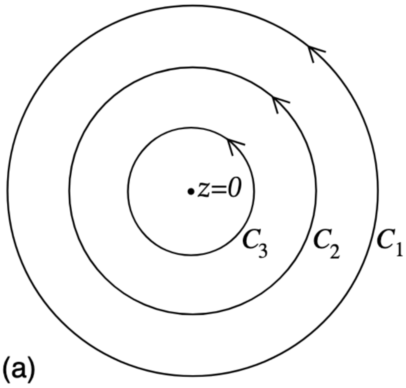
$$Q_i\{C\} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i}\ j_i \tag{2.137}$$

注意这个时候我们定义的 charge 还是一个经典的量，就是一个数。考虑另一个数，平对其进行路径积分平均，我们会发现对易子算符对应的物理量：

$$Q_1\{C_1\}Q_2\{C_2\} - Q_1\{C_3\}Q_2\{C_2\} \tag{2.138}$$

$$\hat{Q}_1\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2\hat{Q}_1 \equiv [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] \tag{2.139}$$

其中 C 代表积分的围道，我们取下图之中的围道。



(a)

接下来我们讨论数

$$Q_1\{C_1\}Q_2\{C_2\} - Q_1\{C_3\}Q_2\{C_2\} = Q_2\{C_2\}(Q_1\{C_1\} - Q_1\{C_3\}) \tag{2.140}$$

而对于经典的数我们可以写出关系，并与量子的相对应：

$$[Q_1, Q_2]\{C_2\} = \oint_{C_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \mathrm{Res}_{z_1\to z_2}\, j_1(z_1)j_2(z_2) \tag{2.141}$$

等式两边量子化（也就是放在路径积分里面）之后，左边是对易子，右面是诺特流的 OPE。我们会发现，charge 的对易子和诺特流的 OPE 有关系。

这个时候我们可以发现任何 local 算符和 charge 之间的对易子满足关系：

$$[Q, \mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2)] = \mathrm{Res}_{z_1\to z_2}\, j(z_1)\mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2) = \frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2) \tag{2.142}$$

相应的对于一个 antiholomorphic 的诺特流:

$$[\tilde{Q}, \mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2)] = \overline{\mathrm{Res}}_{\bar{z}_1\to \bar{z}_2}\tilde{j}(\bar{z}_1)\mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2) = \frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_2,\bar{z}_2) \tag{2.143}$$

!!ATTENTION!!

我们应该区分这个定理还有另外一个关系：

$$\mathrm{Res}_{z\to z_0}\, j(z)\mathscr{A}(z_0,\bar z_0)+\mathrm{Res}_{\bar z\to \bar z_0}\,\tilde{j}(\bar z)\mathscr{A}(z_0,\bar z_0)=\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_0,\bar z_0) \tag{2.144}$$

这个关系的前提是：

在共形变换之下！（这个关系是 conformal ward identity）j 是共形变换的诺特流。

共形变换的诺特流有两部分一个是 holomorphic 的另外一个是 antiholomorphic 的。只有这两部分加起来我们才可以生成一个共形变换的 $\delta\mathscr{A}(z_0,\bar z_0)$

但是上面我们讨论的就是一个诺特流是 holomorphic 的变换；和是 antiholomorphic 的变换，利用和共形变换一样的推导方式我们有:

$$[Q,\mathscr{A}(z_2,\bar z_2)]=\mathrm{Res}_{z_1\to z_2}\, j(z_1)\mathscr{A}(z_2,\bar z_2)=\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_2,\bar z_2) \tag{2.145}$$

以及

$$[\tilde Q,\mathscr{A}(z_2,\bar z_2)]=\overline{\mathrm{Res}}_{\bar z_1\to \bar z_2}\tilde{j}(\bar z_1)\mathscr{A}(z_2,\bar z_2)=\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathscr{A}(z_2,\bar z_2) \tag{2.146}$$

这两个是两个没有关系的不同的变换。

Remark:

这个关系对应着经典的关系。也就是对称性的对应的守恒荷，在量子化后是这个量子的对称性的生成元。

接下来我们讨论共形变换的生成元（或者守恒荷）之间的对易关系。

Remark:

虽然我们任意共形变换的生成元是有 holomorphic 和 antiholomorphic 两个部分的。这里我们很人为的把两个部分分开来讨论了。

当我们把能动量张量写成 holomorphic 坐标系的时候我们其实已经说明了我们准备分开讨论某一个共形变换的 holomorphic 和 antiholomorphic 的部分！

经过我懒得抄的一大堆推导我们有结论：

Theorem 12. *Virasoro Algebra*

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n} \tag{2.147}$$

我们很容易意识到这个代数的一些性质：

$$[L_0,L_n]=-nL_n \tag{2.148}$$

$$L_0L_n|\psi\rangle=L_n(L_0-n)|\psi\rangle=(h-n)L_n|\psi\rangle \tag{2.149}$$

这就很像升降算符。

The three generators L_0 and $L_{\pm 1}$ form a closed algebra without central charge,

$$[L_0, L_1] = -L_1 \ , \quad [L_0, L_{-1}] = L_{-1} \ , \quad [L_1, L_{-1}] = 2L_0 \ . \qquad (2.6.22)$$

This is the algebra $SL(2,\mathbf{R})$, which differs from $SU(2)$ by signs. For the

接下来讨论一个（h，0）的 primary field 的算符代数：

This is the algebra $SL(2,\mathbf{R})$, which differs from $SU(2)$ by signs. For the Laurent coefficients of a holomorphic tensor field $\mathcal{O}$ of weight $(h,0)$,

$$\mathcal{O}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{O}_m}{z^{m+h}} \ , \qquad (2.6.23)$$

one finds from the OPE (2.4.16) the commutator

$$[L_m, \mathcal{O}_n] = [(h-1)m - n]\mathcal{O}_{m+n} \ . \qquad (2.6.24)$$

Again modes with $n > 0$ reduce L_0, while modes with $n < 0$ increase it.

2.6 Mode Expansion

接下来我们讨论自由标量场的模式展开。对于最开始我们列出的自由标量场的理论：

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,(\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu)\,. \tag{2.150}$$

由于运动方程，我们会知道 ∂X 和 $\bar{\partial} X$ 是全纯和反全纯的。所以可以利用 laurent expansion。

$$\partial X^\mu(z) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}. \tag{2.151}$$

其中我们的展开系数是:

$$\begin{aligned} \alpha_m^\mu &= \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2}\oint\frac{dz}{2\pi}z^m\partial X^\mu(z)\ , \\ \tilde{\alpha}_m^\mu &= -\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2}\oint\frac{d\bar{z}}{2\pi}\bar{z}^m\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})\ . \end{aligned} \tag{2.152}$$

2.7 Vertex Operator

在量子场论之中，我们认为 Operator 和 State 存在着一些关联，我们知道欧几里得路径积分如果指定一边的边界条件我们会认为生成了一个泛函，或者说量子态：

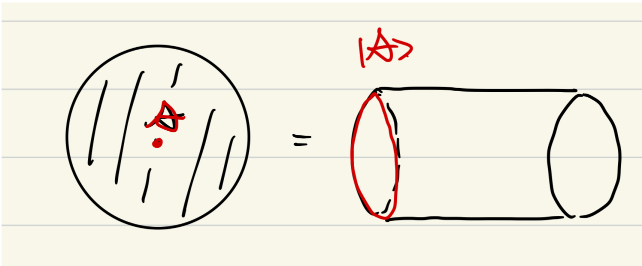
我们考虑二维的半个圆柱面（从负无穷到 0）这个路径积分等价于 radial 坐标系下单位圆上的路径积分。这个路径积分附带上无穷远的边界条件生成了一个量子态：

$$|\psi\rangle = PI|\mathcal{A}\rangle \tag{2.153}$$

我们定义这个量子态等于在单位圆中心插入一个算符的路径积分

$$|\psi\rangle = PI(\mathcal{A}) \tag{2.154}$$

因此，算符 $\mathcal{A}$ 和量子态 $|\mathcal{A}\rangle$ 相等价。



> **Remark:**
> 我们认为一个算符作用在一个态上面，对应的算符的语言其实是两个算符做乘法然后放在路径积分里面。

接下来我们可以计算一些特殊的算符对应的量子态，首先我们考虑恒等算符，我们认为恒等算符对应的态是 $|1\rangle \sim 1$ ，这个时候我们计算 $m \geq 0$ 的 ∂x 的算符作用在这个态上面的结论：

$$\alpha_m^\mu |1\rangle \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} z^m \partial X^\mu(z)\mathbf{1} \tag{2.155}$$

其中 $\equiv$ 的意思其实就是左边的量子态等价于右面的算符。由于对于 $m \geq 0$ 我们有上面式子右面是 0，因此我们有关系：

$$\alpha_m^\mu |1\rangle = 0 \quad \text{for} \quad m \geq 0 \tag{2.156}$$

根据定义单位算符对应的态是弦的真空态：

$$|1\rangle = |0;0\rangle \tag{2.157}$$

接下来我们讨论激发态对应着什么样的算符：