

热力学统计物理第一周

杨守康 2018115309

2020 年 2 月 29 日

1.1 试求理想气体的体胀系数 α , 压强系数 β 和等温压缩系数 κ_T .

解:

$$pV = nRT \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \\ \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \\ \kappa_T = \frac{\alpha}{\beta p} = \frac{1}{p} \end{cases}$$

1.2 证明任何一种具有两个独立参量 T, p 的物质, 其物态方程可由实验测得的体胀系数 α 及等温压缩系数 κ_T , 根据下述积分求得:

$$\ln V = \int (\alpha dT - \kappa_T dp)$$

如果 $\alpha = \frac{1}{T}$, $\kappa_T = \frac{1}{p}$, 试求物态方程.

解:

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \\ &= V\alpha dT - V\kappa_T dp \\ \frac{dV}{V} &= \alpha dT - \kappa_T dp \\ \ln V &= \int \alpha dT - \kappa_T dp \\ &= \int \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \\ &= \ln T - \ln p + C \Rightarrow \frac{pV}{T} = C \end{aligned}$$

1.3 在 0°C 和 1p_n 下, 测得一铜块的体胀系数和等温压缩系数分别为 $\alpha = 4.85 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ 和 $\kappa_T = 7.8 \times 10^{-7} \text{p}_n^{-1}$. α 和 κ_T 可近似看作常量. 今使铜块加热至 10°C . 问:

(a) 压强要增加多少 p_n 才能使铜块的体积维持不变?

(b) 若压强增加 $100 p_n$, 铜块的体积改变多少?

解:

(a) 由定义, 且小温度和压强小范围变化时 α 与 κ_T 视作常量, 有

$$\begin{aligned}\alpha V \Delta T &= \kappa_T V \Delta p \\ \Delta p &= \frac{\alpha}{\kappa_T} \Delta T \approx 621.8 p_n\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta T - \kappa_T \Delta p = 4.07 \times 10^{-4}$$

体积增大量为原体积的 4.07×10^{-4} .

1.4 简单固体和液体的体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 数值都很小, 在一定温度范围内可以把它们看作常数. 试证明简单固体和液体的物态方程可以近似为

$$V(T, p) = V_0(T_0, 0) [1 + \alpha(T - T_0) - \kappa_T p]$$

解: 由 (1.2),

$$\begin{aligned}V(T, p) &= V(T_0, 0) e^{\int \alpha dT - \kappa_T dp} \\ &\sim V(T_0, 0) \left(1 + \int \alpha dT - \kappa_T dp \right) \\ &= V(T_0, 0) (1 + (T - T_0)\alpha - \kappa_T p)\end{aligned}$$

1.5 描述金属丝的几何参量是长度 L , 力学参量是张力 \mathcal{T} , 物态方程是

$$f(\mathcal{T}, L, T) = 0$$

实验通常在 $1 p_n$ 下进行, 其体积变化可以忽略.

线胀系数定义为

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{T}}$$

等温杨氏模量定义为

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L} \right)_T$$

其中 A 是金属丝的截面积. 一般来说, α 和 Y 是 T 的函数, 对 \mathcal{T} 仅有微弱的依赖关系. 如果温度变化范围不大, 可以看作常量. 假设金属丝两端固定. 试证明, 当温度由 T_1 降为 T_2 时, 其张力的增加为

$$\Delta \mathcal{T} = Y A \alpha (T_2 - T_1)$$

解:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{T}, L, T) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial T} \right)_L &= - \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{T}} / \left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{T}} \right)_T = Y A \alpha \\ \Rightarrow \Delta \mathcal{T} &= Y A \alpha (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

1.6 一理想弹性线的物态方程为

$$\mathcal{T} = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right)$$

其中 L 是长度, L_0 是张力 \mathcal{T} 为零时的 L 值, 它只是温度 \mathcal{T} 的函数, b 是常数, 试证明:

(a) 等温杨氏模量为

$$Y = \frac{bT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right)$$

在张力为零时, $Y_0 = \frac{3bT}{A}$. 其中 A 是弹性线的截面面积.

(b) 线膨胀系数

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{T} \frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2}$$

其中 $\alpha_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT}$.

解:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L} \right)_T &= bT \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right) \\ Y &= \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L} \right)_T = \frac{bT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial T} \right)_L &= b \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) + bT \left(-\frac{L}{L_0} \frac{dL_0}{dT} - \frac{2L_0}{L^2} \frac{dL_0}{dT} \right) \\ &= b \left[\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) - T \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0}{L^2} \right) \frac{dL_0}{dT} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{T}} \\
&= -\frac{1}{L} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial T} \right)_L \bigg/ \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L} \right)_T \\
&= \frac{\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) - T \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0}{L^2} \right) \frac{dL_0}{dT}}{LT \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right)} \\
&= \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT} - \frac{1}{T} \frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2} \\
&= \alpha_0 - \frac{1}{T} \frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2}
\end{aligned}$$