热力学统计物理第一周

杨守康

2020 年 2 月 28 日

1.1 试求理想气体的体胀系数 α , 压强系数 β 和等温压缩系数 κ_T .

解:

$$pV = nRT \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p \\ \beta = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\ \kappa_T = \dfrac{\alpha}{\beta p} = \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

1.2 证明任何一种具有两个独立参量 T , p 的物质, 其物态方程可由实验测得的体胀系数 α 及等温压缩系数 κ_T , 根据下述积分求得:

$$\ln V = \int (\alpha \ \mathrm{d}T - \kappa_T \ \mathrm{d}p)$$

如果 $\alpha = \dfrac{1}{T}$, $\kappa_T = \dfrac{1}{p}$, 试求物态方程.

解:

$$\begin{aligned} \mathrm{dV} &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \ \mathrm{dT} + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{p}}\right)_{\mathrm{T}} \ \mathrm{dp} \\ &= V\alpha \ \mathrm{dT} - \mathrm{V}\kappa_{\mathrm{T}} \ \mathrm{dp} \\ \frac{\mathrm{dV}}{V} &= \alpha \ \mathrm{dT} - \kappa_{\mathrm{T}} \ \mathrm{dp} \\ \ln V &= \int \alpha \ \mathrm{dT} - \kappa_{\mathrm{T}} \ \mathrm{dp} \\ &= \int \frac{\mathrm{dT}}{T} - \frac{\mathrm{dp}}{p} \\ &= \ln T - \ln p + C \Rightarrow \frac{pV}{T} = C \end{aligned}$$

1.3 在 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 和 $1\,\mathrm{p_n}$ 下, 测得一铜块的体胀系数和等温压缩系数分别为 $\alpha = 4.85\times10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ 和 $\kappa_T = 7.8\times10^{-7}\mathrm{p_n^{-1}}$. α 和 κ_T 可近似看作常量. 今使铜块加热至 $10\,^\circ\mathrm{C}$. 问:

(a) 压强要增加多少 p_n 才能使铜块的体积维持不变?

(b) 若压强增加$100\,\mathrm{p_n}$, 铜块的体积改变多少?

解:

(a) 由定义, 且小温度和压强小范围变化时 α 与 κ_T 视作常量, 有

$$\alpha V\Delta T = \kappa_T V\Delta p$$
$$\Delta p = \frac{\alpha}{\kappa_T}\Delta T \approx 621.8\,\mathrm{p_n}$$

(b)

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha\Delta T - \kappa_T\Delta p = 4.07\times10^{-4}$$

体积增大量为原体积的 4.07×10^{-4}.

1.4 简单固体和液体的体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 数值都很小, 在一定温度范围内可以把它们看作常数. 试证明简单固体和液体的物态方程可以近似为

$$V(T,p) = V_0\left(T_0,0\right)\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)-\kappa_T p\right]$$

解: 由 (1.2),

$$\begin{aligned} V(T,p) &= V(T_0,0)\mathrm{e}^{\int \alpha\ \mathrm{dT}-\kappa_\mathrm{T}\ \mathrm{dp}} \\ &\sim V(T_0,0)\left(1+\int \alpha\ \mathrm{dT}-\kappa_\mathrm{T}\ \mathrm{dp}\right) \\ &= V(T_0,0)\left(1+(T-T_0)\alpha-\kappa_T p\right) \end{aligned}$$

1.5 描述金属丝的几何参量试长度 L , 力学参量是张力 $\mathscr{T}$, 物态方程是

$$f\left(\mathscr{T},L,T\right)=0$$

实验通常在 $1\,\mathrm{p_n}$ 下进行, 其体积变化可以忽略.

线胀系数定义为

$$\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}$$

等温杨氏模量定义为

$$Y=\frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T$$

其中 A 是金属丝的截面积. 一般来说, α 和 Y 是 T 的函数, 对 $\mathscr{T}$ 仅有微弱的依赖关系. 如果温度变化范围不大, 可以看作常量. 假设金属丝两端固定. 试证明, 当温度由 T_1 降为 T_2 时, 其张力的增加为

$$\Delta \mathscr{T}=YA\alpha\left(T_2-T_1\right)$$

解:

$$\begin{gathered}
f\left(\mathscr{T}, L, T\right)=0 \\
\Rightarrow\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_L=-\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}} \Bigg/ \left(\frac{\partial L}{\partial \mathscr{T}}\right)_T=YA\alpha \\
\Rightarrow \Delta \mathscr{T}=YA\alpha\left(T_2-T_1\right)
\end{gathered}$$

1.6 一理想弹性线的物态方程为

$$\mathscr{T}=bT\left(\frac{L}{L_0}-\frac{L_0^2}{L^2}\right)$$

其中 L 是长度, L_0 是张力 $\mathscr{T}$ 为零时的 L 值, 它只是温度 $\mathscr{T}$ 的函数,b 是常数, 试证明:

(a) 等温杨氏模量为

$$Y=\frac{bT}{A}\left(\frac{L}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^2}\right)$$

在张力为零时, $Y_0=\dfrac{3bT}{A}$. 其中 A 是弹性线的截面面积.

(b) 线膨胀系数

$$\alpha=\alpha_0-\frac{1}{T}\frac{L^3/L_0^3-1}{L^3/L_0^3+2}$$

其中 $\alpha_0=\dfrac{1}{L_0}\dfrac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T}$.

解:

(a)

$$\mathscr{T} = bT\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)$$
$$\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T = bT\left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3}\right)$$
$$Y = \frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T = \frac{bT}{A}\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2}\right)$$

(b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_L &= b\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) + bT\left(-\frac{L}{L_0}\frac{\mathrm{dL_0}}{\mathrm{dT}} - \frac{2L_0}{L^2}\frac{\mathrm{dL_0}}{\mathrm{dT}}\right)\\ &= b\left[\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) - \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0}{L^2}\right)\right]\frac{\mathrm{dL_0}}{\mathrm{dT}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}\\ &= -\frac{1}{L}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_L \Big/ \left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T\\ &= \frac{b\left[\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) - \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0}{L^2}\right)\right]\frac{\mathrm{dL_0}}{\mathrm{dT}}}{bT\left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3}\right)}\\ &= \frac{1}{L_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T} - \frac{1}{T}\frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2}\\ &= \alpha_0 - \frac{1}{T}\frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2}\end{aligned}$$