热力学统计物理第一章作业

1.1 试求理想气体的体胀系数 α , 压强系数 β 和等温压缩系数 κ_T .

1.2 证明任何一种具有两个独立参量 T , p 的物质, 其物态方程可由实验测得的体胀系数 α 及等温压缩系数 κ_T , 根据下述积分求得:

$$\ln V = \int (\alpha \, \mathrm{d}T - \kappa_T \, \mathrm{d}p)$$

如果 $\alpha = \dfrac{1}{T}$, $\kappa_T = \dfrac{1}{p}$, 试求物态方程.

1.3 在 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 和 $1\,\mathrm{p_n}$ 下, 测得一铜块的体胀系数和等温压缩系数分别为 $\alpha = 4.85 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ 和 $\kappa_T = 7.8 \times 10^{-7} \mathrm{p_n}^{-1}$. α 和 κ_T 可近似看作常量. 今使铜块加热至 $10\,^\circ\mathrm{C}$. 问:

(a) 压强要增加多少 p_n 才能使铜块的体积维持不变?

(b) 若压强增加$100\,\mathrm{p_n}$, 铜块的体积改变多少?

1.4 简单固体和液体的体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 数值都很小, 在一定温度范围内可以把它们看作常数. 试证明简单固体和液体的物态方程可以近似为

$$V(T,p) = V_0\,(T_0,0)\,[1 + \alpha\,(T - T_0) - \kappa_T p]$$

1.5 描述金属丝的几何参量试长度 L , 力学参量是张力 $\mathscr{T}$, 物态方程是

$$f\,(\mathscr{T}, L, T) = 0$$

实验通常在 $1\,\mathrm{p_n}$ 下进行, 其体积变化可以忽略.

线胀系数定义为

$$\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}$$

等温杨氏模量定义为

$$Y = \frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T$$

其中 A 是金属丝的截面积. 一般来说, α 和 Y 是 T 的函数, 对 $\mathscr{T}$ 仅有微弱的依赖关系. 如果温度变化范围不大, 可以看作常量. 假设金属丝两端固定. 试证明, 当温度由 T_1 降为 T_2 时, 其张力的增加为

$$\Delta\mathscr{T} = YA\alpha\left(T_2 - T_1\right)$$

1.6 一理想弹性线的物态方程为

$$\mathscr{T} = bT\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)$$

其中 L 是长度, L_0 是张力 $\mathscr{T}$ 为零时的 L 值, 它只是温度 $\mathscr{T}$ 的函数,b 是常数, 试证明:

1.7 抽成真空的小匣带有活门, 打开活门让气体冲入. 当压强达到外界压强 p_0 时将活门关上. 试证明: 小匣内的空气在没有与外界交换热量之前, 它的内能 U 与原来在大气中的内能 U_0 之差为 $U - U_0 == p_0V_0$, 其中 V_0 是它原来在大气中的体积. 若气体是理想气体, 求它的温度与体积.

1.8 满足 $pV^n = C$(常量) 的过程称多方过程, 其中常数 n 称为多方指数. 试证明: 理想气体在多方过程中的热容量 C_n 为

$$C_n = \frac{n-\gamma}{n-1}C_V$$

1.9 试证明: 理想气体在某一过程中的热容量 C_n 如果是常量, 该过程一定是多方过程, 多方指数 $n = \dfrac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$.

假设气体的定压热容和定容热容是常量.

1.10 声波在气体中的传播速度为

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

假设气体是理想气体, 其定压和定容热容是常量. 试证明气体单位质量的内能 u 和焓 h 可由声速及 γ 给出:

$$u = \frac{\alpha^2}{\gamma(\gamma-1)} + \text{Const.}, \quad h = \frac{\alpha^2}{\gamma-1} + \text{Const}$$

1.11 大气温度随高度降低的主要原因是在对流层的低处与高处之间空气不断发生对流, 由于气压随高度而降低, 空气上升时膨胀, 下降时收缩. 空气的导热率很小, 膨胀和收缩的过程可以认为是绝热过程. 试计算大气温度随高度变化率 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$, 并给出数值结果.

[提示: 根据流体静力学可导出气压随高度的变化率

$$\frac{\mathrm{d}p(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

再利用理想气体的绝热方程求出

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T(z)}{p(z)}$$

从而求出 $\frac{\mathrm{d}T(z)}{\mathrm{d}z}$.
$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{(\gamma-1)mg}{\gamma R}$, 数值结果:$-10\,\mathrm{K\,km^{-1}}$]

1.12 假设理想气体的 C_p 和 C_V 之比 γ 是温度的函数, 试求在准静态绝热过程中 T 和 V 的关系. 该关系式中要用到一个函数 $F(T)$, 其表达式为

$$\ln F(T) = \int \frac{\mathrm{d}T}{(\gamma - 1)T}$$

1.13 利用上题的结果证明: 当 γ 为温度的函数时, 理想气体卡诺循环的效率为 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

1.14 试根据热力学第二定律证明两条绝热线不能相交.