大学视角下的中学数学(泰勒展开)

李尚志

(北京航空航天大学　100083)

例 **1**　(2018 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题)

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的值.

大学视角

用泰勒展开式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ 得

$$f(x)=(2+x+ax^2)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-2x$$
$$=\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\right)x^4+\cdots \quad (1)$$

如果三次项系数 $a+\frac{1}{6}\neq 0$，在 0 附近足够小的区间$(-d,d)$内，三次以上各项和绝对值比三次项小，$f(x)$ 的正负号与三次项$(a+\frac{1}{6})x^3$ 相同，$f(x)$ 与 $f(-x)$ 异号，总有一个大于 0，$f(0)=0$不是极大值.

要使 $f(0)$ 极大，必须三次项系数 $a+\frac{1}{6}=0$，$a=-\frac{1}{6}$. 此时 $f(x)=-\frac{1}{12}x^4+\cdots$的最低次非零项是四次项$-\frac{1}{12}x^4$. 在 0 附近足够小的区间内，$f(x)$ 的正负号与四次项$-\frac{1}{12}x^4$ 相同，当 $x\neq 0$时都小于 0，$f(0)$ 确实是极大值.

一般地，设 $f(x)=f(c)+a_m(x-c)^m+a_{m+1}(x-c)^{m+1}+\cdots$是无穷级数且 $a_m\neq 0$ 是常数项之外最低次非零项的系数. 则当 $x\to c$ 时 $f(x)-f(c)=(x-c)^m[a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots]$，方括号内的 $\lambda(x)=a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots\to a_m$，在 c 附近足够小的区间$(c-d,c+d)$内，$|x-c|$ 足够小，$\lambda(x)$ 足够接近 a_m，正负号与 a_m 相同. $f(x)-f(c)$与 m 次项 $a_m(x-c)^m$ 正负号相同.

当 m 是奇数，$x-c<0$ 与 $x-c>0$ 时 $f(x)-f(c)$ 的正负号相反，一正一负，$f(c)$既不是极大值也不是极小值.

当 m 是偶数，只要 $x-c\neq 0$ 都有$(x-c)^m>0$. 当 $a_m<0$ 时都有 $f(x)-f(c)<0$，$f(c)$ 是极大值. 当 $a_m>0$ 时都有 $f(x)-f(c)>0$，$f(c)$ 是极小值.

中学生只要背熟了泰勒展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

就不难在草稿上完成以上解答，知道此题的正确答案. 他不能将这个解答写在高考试卷上，但既然知道了 $f(x)$ 展开式中的三次以下的项都等于 0，就知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶与二阶导数 $f'(0)=f''(0)=0$ 都等于 0. 也知道应该根据三阶导数 $f^{(3)}(0)=0$ 得到 $a=-\frac{1}{6}$，并且根据 0 附近的三阶导数 $f^{(3)}(x)<0$ 来论证 $f(0)$ 确实是极大值. 他已经胸有成竹，只需按照既定路线一步一步算导数达到预定目标. 别的考生也在一步一步算导数，却茫然不知前面的道路会遇到什么障碍，算出一阶和二阶导数都等于 0 就可能不知所措了.

中学解法

首先，$f(x)=0$.

(1) $a=0$，$h(x)=f'(x)=\ln(1+x)+\frac{2+x}{1+x}$