第 27 卷 第 6 期　　力 学 学 报　　Vol. 27, No.6
1995 年 11 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Nov., 1995

四元数乘法的结构张量与四元数矩阵的张量表示

王庆贵
(北方交通大学力学研究所，北京 100044)

摘要　阐述了四元数的张量概念，并利用四元数乘法的结构张量建立了各种四元数分量矩阵与四元数张量的关系. 从而使四元数运算归结为一般的张量运算.

关键词　四元数，乘法，矩阵，张量

引 言

四元数本身具有实数、复数和三维真欧空间矢量的综合性质. 对于刚体系统的运动分析还可通过它的矩阵进行计算 [1]. 本文指出四元数又可看作是四维伪欧空间 [2,3] 中的矢量，四元数分量矩阵是该空间中的二阶张量，四元数的一切运算均可通过简洁的张量运算来实现. 鉴于张量在物理领域应用之广泛，四元数的应用范围也将会随之扩大.

1　四元数乘法的结构张量

1.1 四元数的矢量表示

按四元数的定义，可将四元数看作是四维线性空间 L^4 的矢量 [4]. 设 L^4 的基矢量为 $\bar{E}_\alpha(\alpha=0,\ 1,2,3)$，每个 $\bar{E}_\alpha$ 可以是 L^4 中任何四个线性无关的元素的一个线性组合，则对任何一个 $\bar{A}\in L^4$ 有

$$\bar{A}=A^\alpha\bar{E}_\alpha \tag{1}$$

其中 A^α 为四维实数域 $\mathcal{L}^4$ 上的四个有序实数，为四元数矢量 $\bar{A}$ 在基 $\bar{E}_\alpha$ 上的分量.

因两四元数相加及数乘一个四元数仍为一四元数，故对任何的 $\bar{A},\ \bar{B}\in L^4$ 及任何实数 $\lambda,\ \mu$ 关系式

$$\lambda\bar{A}+\mu\bar{B}=\bar{C}\in L^4 \tag{2}$$

成立，且有

$$\lambda A^\alpha+\mu B^\alpha=C^\alpha\in\mathcal{L}^4 \tag{3}$$

在 L^4 中取另一基矢量 $\bar{E}_{\alpha'}(\alpha'=0,1,2,3)$，它是 $\bar{E}_\alpha$ 的某一线性组合，即

$$\left.\begin{aligned}&\bar{E}_{\alpha'}=P^\alpha_{\alpha'}\bar{E}_\alpha\ ,\quad \det(P^\alpha_{\alpha'})\neq0\\&\bar{E}_\alpha=P^{\alpha'}_\alpha\bar{E}_{\alpha'}\ ,\quad P^\alpha_{\alpha'}P^{\alpha'}_\beta=\delta^\alpha_\beta\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

则对任一不变矢量 $\bar{A}\in L^4$ 有　$\bar{A}=A^\alpha\bar{E}_\alpha=A^{\alpha'}\bar{E}_{\alpha'}=P^\alpha_{\alpha'}A^{\alpha'}\bar{E}_\alpha$. 因 $\bar{E}_\alpha(\alpha=0,1,2,3)$

1993-06-16 收到第一稿，1994-05-22 收到修改稿.

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

线性无关，故得

$$A^{\alpha}=P^{\alpha}_{\alpha'}A^{\alpha'} \qquad 或 \qquad A^{\alpha'}=P^{\alpha'}_{\alpha}A^{\alpha} \tag{5}$$

可见，A^{α} 是个一阶张量，它是 $\bar{A}$ 的逆变分量，A^{α} 与 $\bar{A}$ 等价，亦可称 A^{α} 为四元数矢量 $\bar{A}$ 的逆变矢量.

1.2 四元数乘法的结构张量 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$

在 L^4 中对任何 $\bar{A}\neq 0$ 存在唯一一个单位矢量 $\bar{E}$，使有

$$\bar{A}\circ\bar{E}=\bar{E}\circ\bar{A} \tag{6}$$

和

$$\bar{A}\circ\bar{A}^{-1}=\bar{A}^{-1}\circ\bar{A}=\bar{E} \tag{7}$$

其中 $\bar{A}^{-1}\in L^4$，是矢量 $\bar{A}$ 的逆，“$\circ$”号表示按四元数乘法规则相乘，在不致与并矢相混时“$\circ$”号可不必写出.

因二、四元数的乘积仍为四元数，故对任何的 $\bar{A}$, $\bar{B}\in L^4$ 有

$$\bar{A}\circ\bar{B}=\bar{C}\in L^4 \tag{8}$$

特别当 $\bar{A}=\bar{E}_{\alpha}$, $\bar{B}=\bar{E}_{\beta}$，则有

$$\bar{E}_{\alpha}\circ\bar{E}_{\beta}=E^{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{E}_{\gamma} \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3) \tag{9}$$

其中 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 为 $\bar{E}_{\alpha}$ 与 $\bar{E}_{\beta}$ 相乘所得四元数矢量在基 $\bar{E}_{\alpha}$ 上的分量，可以证明，它是一个三阶混合张量.

事实上，因在基变换下有 $\bar{E}_{\alpha'}=P^{\alpha}_{\alpha'}\bar{E}_{\alpha}$，故

$$\bar{E}_{\alpha'}\circ\bar{E}_{\beta'}=P^{\alpha}_{\alpha'}P^{\beta}_{\beta'}\bar{E}_{\alpha}\circ\bar{E}_{\beta}=P^{\alpha}_{\alpha'}P^{\beta}_{\beta'}E^{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{E}_{\gamma}$$

而 $\bar{E}_{\gamma}=P^{\gamma'}_{\gamma}\bar{E}_{\gamma'}$，代入上式得

$$\bar{E}_{\alpha'}\circ\bar{E}_{\beta'}=P^{\alpha}_{\alpha'}P^{\beta}_{\beta'}P^{\gamma'}_{\gamma}E^{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{E}_{\gamma'}$$

又

$$\bar{E}_{\alpha'}\circ\bar{E}_{\beta'}=E^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}\bar{E}_{\gamma'}$$

比较以上两式，并考虑到 $\bar{E}_{\gamma'}$ 线性无关，得

$$E^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}=P^{\alpha}_{\alpha'}P^{\beta}_{\beta'}P^{\gamma'}_{\gamma}E^{\gamma}_{\alpha\beta} \tag{10}$$

故 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 是一个三阶混合张量，可称其为四元数乘法的结构张量，它包含 4^3 个常数，$E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 完全决定了四元数乘法的一切规律，换言之，$E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 隐含了四元数乘法的所有信息.

易证，$E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 有以下性质：

(a)$E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 关于 α 及 β 是线性无关的. 即，对任何实数 λ^{α} 有 $\lambda^{\alpha}E^{\gamma}_{\alpha\beta}=0$，当且仅当 $\lambda^{\alpha}=0$（关于 β 亦是）.

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(b)$E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 关于 α 和 β 一般是不对称的，即 $E^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq E^{\gamma}_{\beta\alpha}$.

(c) 由 $(\bar{E}_\alpha \circ \bar{E}_\beta) \circ \bar{E}_\gamma = \bar{E}_\alpha \circ (\bar{E}_\beta \circ \bar{E}_\gamma)$ 可得

$$E^{\sigma}_{\alpha\beta} E^{\tau}_{\sigma\gamma} = E^{\tau}_{\alpha\sigma} E^{\sigma}_{\beta\gamma} \tag{11}$$

2 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的导出张量及其显式

2.1 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的导出张量

由 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的缩并运算可得两个一阶协变张量

$$C_\alpha = E^{\gamma}_{\alpha\gamma}\,, \qquad \mathcal{D}_\alpha = E^{\gamma}_{\gamma\alpha} \tag{12}$$

由两个结构张量的内乘可得以下二阶协变张量

$$\left.\begin{aligned}
\underset{1}{a}_{\alpha\beta} &= E^{\gamma}_{\alpha\sigma} E^{\sigma}_{\beta\gamma} = \underset{1}{a}_{\beta\alpha} \\
\underset{2}{a}_{\alpha\beta} &= E^{\gamma}_{\sigma\alpha} E^{\sigma}_{\gamma\beta} = \underset{2}{a}_{\beta\alpha} \\
\underset{3}{a}_{\alpha\beta} &= E^{\gamma}_{\alpha\sigma} E^{\sigma}_{\gamma\beta} \\
\underset{4}{a}_{\alpha\beta} &= E^{\tau}_{\sigma\tau} E^{\sigma}_{\alpha\beta} = C_\sigma E^{\sigma}_{\alpha\beta} \\
\underset{5}{a}_{\alpha\beta} &= E^{\tau}_{\tau\sigma} E^{\sigma}_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_\alpha E^{\sigma}_{\alpha\beta}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由式 (11) 可推得

$$\left.\begin{aligned}
\underset{1}{a}_{\alpha\beta} &= \underset{4}{a}_{\alpha\beta} = C_\sigma E^{\sigma}_{\alpha\beta} \\
\underset{2}{a}_{\alpha\beta} &= \underset{5}{a}_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_\sigma E^{\sigma}_{\alpha\beta}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

以上各张量都是不同的三个基矢量相乘之积在其中一基矢量方向上的分量.

2.2 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的导出张量在标准基中的显式

(a) 标准基： 设 L^4 中代表基矢量 $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ 的四个点依次与 $\mathcal{L}^4$ 上的四个实数组 $R_0 = (1,0,0,0)$, $R_1 = (0,1,0,0)$, $R_2 = (0,0,1,0)$, $R_3 = (0,0,0,1)$ 相对应；另设组成四元数的实数单位为 1, 三个虚数单位为 $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$(这三个虚数又是三维空间的三个正交单位矢量)，即任何一个四元数 A 都可写成如下形式

$$A = A^0 + A^1\boldsymbol{i}_1 + A^2\boldsymbol{i}_2 + A^3\boldsymbol{i}_3 \tag{15}$$

则可见每个四元数 A 与 $\mathcal{L}^4$ 上的四个有序实数 (A^0, A^1, A^2, A^3) 即 L^4 上的一点 (A^0, A^1, A^2, A^3) 相对应. 将 1, $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ 写成式 (15) 的形式，显然它们也依次与 $\mathcal{L}^4$ 上的四个实数组 R_0, R_1, R_2, R_3 相对应.

因在 L^4 中 $\bar{E}_\alpha(\alpha = 0,1,2,3)$ 之间，在 $\mathcal{L}^4$ 中 R_α 之间，在四元数域 K 中 1, $\boldsymbol{i}_K(K = 1,2,3)$ 之间都是线性无关的. 故 $\bar{E}_\alpha$ 与且只与 K 中的 1, $\boldsymbol{i}_K$ 相对应，反之亦然. 从而 L^4 与 K 中的元素间相互单值对应 (即映射是 1-1 的). 设 $\bar{E}_\alpha$ 与 1, $\boldsymbol{i}_K$ 均满足相同

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的运算规则，则 L^4 与 K 关于每种相对应的二元运算同构 [5]，故由 1, i_K 间四元数相乘结果可得 $\bar{E}_\alpha \circ \bar{E}_\beta$ 的结果如下．

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}^{\qquad E_\beta}_{\bar{E}_0 \quad \bar{E}^0_\alpha \bar{E}_\beta} & \bar{E}_0 & \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & \bar{E}_3 \\
\hline
\bar{E}_0 & \bar{E}_0 & \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & \bar{E}_3 \\
\bar{E}_1 & \bar{E}_1 & -\bar{E}_0 & \bar{E}_3 & -\bar{E}_2 \\
\bar{E}_2 & \bar{E}_2 & -\bar{E}_3 & -\bar{E}_0 & \bar{E}_1 \\
\bar{E}_3 & \bar{E}_3 & \bar{E}_2 & -\bar{E}_1 & -\bar{E}_0
\end{array}
\tag{16}
$$

满足上述关系 (16) 的基 $\bar{E}_\alpha$ 称为 L^4 的标准基．

(b) 导出张量在标准基 $\bar{E}_\alpha$ 中的显式：由关系 (16) 和式 (9) 可得 $\underset{(\gamma)}{E^{\alpha}_{\beta}}$ 的矩阵实体表示为

$$
\left.
\begin{array}{l}
\underset{(0)}{E^{\alpha}_{\beta}} = E^{\alpha}_{0\beta} = (\delta^{\alpha}_{\beta}) = \mathrm{diag}(1,1,1,1) \\
\underset{(1)}{E^{\alpha}_{\beta}} = E^{\alpha}_{1\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(2)}{E^{\alpha}_{\beta}} = E^{\alpha}_{2\beta} = \begin{bmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix} \\
\underset{(3)}{E^{\alpha}_{\beta}} = E^{\alpha}_{3\beta} = \begin{bmatrix} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{bmatrix}
\end{array}
\right\}
\tag{17}
$$

因四元数相乘与顺序有关，故还有

$$
\left.
\begin{array}{l}
\underset{(0)}{E^{\beta}_{\alpha}} = E^{\beta}_{\alpha 0} = (\delta^{\beta}_{\alpha}) = \mathrm{diag}(1,1,1,1) \\
\underset{(1)}{E^{\beta}_{\alpha}} = E^{\beta}_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(2)}{E^{\beta}_{\alpha}} = E^{\beta}_{\alpha 2} = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix} \\
\underset{(3)}{E^{\beta}_{\alpha}} = E^{\beta}_{\alpha 3} = \begin{bmatrix} & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \end{bmatrix}
\end{array}
\right\}
\tag{18}
$$

由式 (17) 和 (18) 可得 $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的各导出张量的矩阵实体表示如下

$$C_\sigma = E^{\gamma}_{\sigma\gamma} = (4,0,0,0) \tag{19}$$

$$\mathcal{D}_\sigma = E^{\gamma}_{\gamma\sigma} = (4,0,0,0) \tag{20}$$

故

$$C_\sigma = \mathcal{D}_\sigma = (4,0,0,0) \tag{21}$$

进而，由 (14) 式并考虑到 (21) 式，得

$$\underset{1}{a_{\alpha\beta}} = \underset{2}{a_{\alpha\beta}} = \underset{4}{a_{\alpha\beta}} = \underset{5}{a_{\alpha\beta}} = C_\sigma E^{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{22}$$

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

可统一记为

$$a_{\alpha\beta} = C_\sigma E^\sigma_{\alpha\beta} \tag{23}$$

将式 (19) 代入得 $a_{\alpha\beta} = C_0 E^0_{\alpha\beta} = 4E^0_{\alpha\beta}$

通过计算可知

$$E^0_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \tag{24}$$

故

$$a_{\alpha\beta} = 4\eta_{\alpha\beta} \tag{25}$$

而

$$\underset{3}{a}_{\alpha\beta} = E^\gamma_{\alpha\sigma} E^\sigma_{\gamma\beta} = \mathrm{diag}(4,0,0,0) \tag{26}$$

可见，结构张量 $E^\gamma_{\alpha\beta}$ 的内积有两种，即 $a_{\alpha\beta}$ 和 $\underset{3}{a}_{\alpha\beta}$，而 $\underset{3}{a}_{\alpha\beta}$ 的秩为 1，它是退化的．故可知四元数乘法的结构张量的内乘只给出唯一的一种非退化的对称张量，即 $a_{\alpha\beta} = 4\eta_{\alpha\beta}$．

3 基变换下的张量不变量

由以上张量缩并和内乘的结果可看出，在这些运算中，标准基 $\bar{E}_\alpha$ 间的标乘有以下规律

$$\bar{E}_\alpha \cdot \bar{E}_\beta = \bar{E}_\beta \cdot \bar{E}_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \tag{27}$$

如将张量写成并矢的实体表示 [6]，这种规律是显而易见的．故又称满足关系 (16) 的基 $\bar{E}_\alpha$ 为 L^4 的标准正交基，或称正交归一系 [2](实际上是标准伪正交基，称 L^4 为 Minkowski 空间或伪欧空间 [3])，并取 $\eta_{\alpha\beta}$ 为 L^4 的协变度规张量．

令 $\bar{A}$ 的协变分量为

$$A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta \tag{28}$$

则可求得 L^4 的逆变度规张量为

$$\eta^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{A}dj(\eta_{\beta\alpha})}{\det(\eta_{\alpha\beta})} \tag{29}$$

且有

$$\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\gamma\beta} = \eta^\beta_\alpha \tag{30}$$

称 $\eta^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$ 为 L^4 的混变度规张量，而

$$A^\alpha = \eta^{\alpha\beta} A_\beta \tag{31}$$

借助 $\eta_{\alpha\beta}$ 和 C_α 对每一个 $\bar{A} \in L^4$ 可以写出在基变换下的两个独立的不变量

$$J_1 = C_\alpha A^\alpha = 4A^0 \tag{32}$$

$$J_2 = \eta_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta \tag{33}$$

称 J_2 为矢量 $\bar{A}$ 的长度平方 [7].

由 J_1 和 J_2 还可得到 L^4 中的一些其它不变量，如 $\bar{A}$ 的范数 [4] 为

$$J_3 = \frac{1}{8}J_1^2 - J_2 = (A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \tag{34}$$

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

或按以下方法写出 J_3. 设

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}C_\alpha C_\beta - \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{35}$$

则

$$J_3 = g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \tag{36}$$

由式 (35) 知，$g_{\alpha\beta}$ 是一、二阶协变张量. 可以证明 [7]，对 $\bar{A}$, $\bar{B} \in L^4$ 标积 $\bar{A}\cdot\bar{B}$ 也是不变量，即

$$J_4 = \bar{A}\cdot\bar{B} = \eta_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \tag{37}$$

J_4 即为四元数代数中两个四元数乘积的标量部份. J_2 和 J_4 统称为 L^4 中矢量度量平方不变式 [3].

4 四元数分量矩阵的张量表示

若 $\bar{C} = \bar{A}\circ\bar{B}$, 则 $C^\gamma = (E^\gamma_{\alpha\beta}A^\alpha)B^\beta = (E^\gamma_{\alpha\beta}B^\beta)A^\alpha$，令 $E^\gamma_{\alpha\beta}A^\alpha = A^\gamma_{.\beta}$, $E^\gamma_{\alpha\beta}B^\beta = B^\gamma_{\alpha.}$，则有

$$C^\gamma = A^\gamma_{.\beta}B^\beta = B^\gamma_{\alpha.}A^\alpha \tag{38}$$

显然，$A^\gamma_{.\beta}$ 和 $B^\gamma_{\alpha.}$ 皆为二阶混合张量. $\bar{C} = \bar{A}\circ\bar{B}$ 的四元数分量矩阵 [8] 的表示式为

$$C = M(A)B = M_7(B)A \tag{39}$$

其中 A, B, C 依次为 A^α, B^α, C^α 的列阵形式. 比较 (38) 与 (39) 式，显然应有

$$M(A) = (A^\gamma_{.\beta})\ , \qquad M_7(B) = (B^\gamma_{\alpha.}) \tag{40}$$

由上述可见，通过 $E^\gamma_{\alpha\beta}$ 可对每个 $\bar{A}\in L^4$ 定义以下两个二阶张量

$$A^\alpha_{.\beta} = E^\alpha_{\gamma\beta}A^\gamma \tag{41}$$

$$A^\beta_{\alpha.} = E^\alpha_{\gamma\beta}A^\gamma \tag{42}$$

当 $\bar{A}$ 左乘另一个四元数时，可用 (41) 式，右乘时可用 (42) 式.

式 (40) 的正确性可通过写出 (41), (42) 式的矩阵表示式得到证明.

因 $A^\alpha_{.\beta} = E^\alpha_{\gamma\beta}A^\gamma = E^\alpha_{0\beta}A^0 + E^\alpha_{1\beta}A^1 + E^\alpha_{2\beta}A^2 + E^\alpha_{3\beta}A^3$，将式 (17) 代入，得

$$(A^\alpha_{.\beta}) = \begin{bmatrix} A^0 & -A^1 & -A^2 & -A^3 \\ A^1 & A^0 & -A^3 & A^2 \\ A^2 & A^3 & A^0 & -A^1 \\ A^3 & -A^2 & A^1 & A^0 \end{bmatrix} = M(A) \tag{43}$$

类似地，$A^\beta_{\alpha.} = E^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma = E^\beta_{\alpha0}A^0 + E^\beta_{\alpha1}A^1 + E^\beta_{\alpha2}A^2 + E^\beta_{\alpha3}A^3$，将式 (18) 代入，得

$$(A^\beta_{\alpha.}) = \begin{bmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \\ -A^1 & A^0 & -A^3 & A^2 \\ -A^2 & A^3 & A^0 & -A^1 \\ -A^3 & -A^2 & A^1 & A^0 \end{bmatrix} = M_7^{\mathrm{T}}(A) \tag{44}$$

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由 $\eta^{\alpha\beta}$ 或 $\eta_{\alpha\beta}$ 与 $A^{\alpha}_{.\beta}$ 的内乘可得到以下张量

$$\left.\begin{aligned} &A^{\alpha\beta}_{.} = \eta^{\beta\gamma}A^{\alpha}_{.\gamma}\,, \quad A^{.}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{.\beta} \\ &A^{.\beta}_{\alpha} = \eta_{\alpha\mu}\eta^{\beta\gamma}A^{\mu}_{.\gamma} = \eta_{\alpha\mu}A^{\mu\beta}_{.} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

与 $A^{\beta}_{\alpha.}$ 内乘还可得以下张量

$$\left.\begin{aligned} &A^{\alpha\beta}_{.} = \eta^{\gamma\alpha}A^{\beta}_{\gamma.}\,, \qquad A^{.}_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\alpha.} \\ &A^{\alpha.}_{\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\mu.} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

将由 $A^{\beta}_{\alpha.}$ 与由 $A^{\alpha}_{.\beta}$ 得到的各张量相比较，可看出，凡同名张量完全对应相等，即

$$\left.\begin{aligned} &A^{\alpha}_{.\beta} = A^{\alpha.}_{\beta} = A^{\alpha}_{\beta} \\ &A^{\alpha\beta}_{.} = A^{\alpha\beta}_{.} = A^{\alpha\beta} \\ &A^{.}_{\alpha\beta} = A^{.}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \\ &A^{.\beta}_{\alpha} = A^{\beta}_{\alpha.} = A^{\beta}_{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

可见，对每一个矢量 $\bar{A}$ 只能写出四种张量. 至于左乘和右乘由指标排列位置完全可以确定. 故 "." 可略去不写而不致混淆. 可称式 (47) 中的张量为四元数张量.

A^{α}_{β}, $A^{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ 和 A^{β}_{α} 依次与文 [8] 中的四元数分量矩阵 M_0, M_1, M_4 和 M_5 相对应，各个矩阵分别是这些张量的一种实体表示.

与四元数 A 的共轭四元数

$$\tilde{A} = A^0 - A^1\boldsymbol{i}_1 - A^2\boldsymbol{i}_2 - A^3\boldsymbol{i}_3 \tag{48}$$

相对应的 $\bar{A}$ 的共轭四元数矢量为

$$\tilde{\bar{A}} = \tilde{A}^{\alpha}\bar{E}_{\alpha} = A^0\bar{E}_0 - A^1\bar{E}_1 - A^2\bar{E}_2 - A^3\bar{E}_3 \tag{49}$$

矢量 $\bar{A}$ 的协变形式为

$$\bar{A} = A_{\alpha}\bar{E}^{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}A^{\beta}\bar{E}^{\alpha} = A^0\bar{E}^0 - A^1\bar{E}^1 - A^2\bar{E}^2 - A^3\bar{E}^3 \tag{50}$$

其中

$$\bar{E}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\bar{E}_{\beta} \tag{51}$$

为 $\bar{E}_{\alpha}$ 的相伴 (或称倒易) 基矢量，且有

$$\left.\begin{aligned} &\bar{E}^{\alpha}\cdot\bar{E}^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha} \\ &\bar{E}^{\alpha}\cdot\bar{E}_{\beta} = \eta^{\alpha}_{\beta} = \eta^{\alpha}_{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

比较式 (49) 和 (50), 可将 $\tilde{A}^{\alpha}$ 表成

$$\tilde{A}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}A_{\beta} = g^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta}A^{\beta} \tag{53}$$

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $g^{\alpha\beta}$ 为一逆变张量，与式 (35) 定义的 $g_{\alpha\beta}$ 相对应，且有

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}=g_{\beta}^{\alpha}=g_{\beta}^{\alpha}=\delta_{\beta}^{\alpha} \tag{54}$$

而 $\bar{A}$ 的共轭矢量 $\tilde{\bar{A}}$ 可表成

$$\tilde{\bar{A}}=\tilde{A}^{\alpha}\bar{E}_{\alpha}=g^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta}A^{\beta}\bar{E}_{\alpha} \tag{55}$$

从式 (49) 和 (50) 的比较中，还可看出，$\tilde{\bar{A}}$ 实际上是 $\bar{A}$ 的协变矢量 $A_{\alpha}\bar{E}^{\alpha}$ 在基 $\bar{E}_{\alpha}$ 中的映像，$\bar{A}\in L^{4}$．在式 (47) 中将 $\bar{A}$ 换为 $\tilde{\bar{A}}$，则可得与 $\tilde{\bar{A}}$ 对应的另外四个张量 $\tilde{A}_{\beta}^{\alpha}$, $\tilde{A}^{\alpha\beta}$, $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ 和 $\tilde{A}_{\alpha}^{\beta}$．这些张量的矩阵实体表示依次是文 [8] 中的 M_2, M_3, M_6 和 M_7，而这些矩阵依次又是 M_0, M_4, M_1 和 M_5 的转置．这些转置 (T), 共轭 (～)，对应 (=) 和相等 (≡) 诸关系表示如下

$$\left.\begin{array}{l}
A_{\beta}^{\alpha}=M_0\xleftrightarrow{\mathrm{T},\sim}M_2=\tilde{A}_{\beta}^{\alpha}\equiv A_{\beta}^{\alpha}=(A_{\beta}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\\
A^{\alpha\beta}=M_1\xleftrightarrow{\;\sim\;}M_3=\tilde{A}^{\alpha\beta}\equiv A_{\beta\alpha}=(A_{\alpha\beta})^{\mathrm{T}}\\
\qquad\qquad\quad\mathbf{T}\underset{\sim}{\times}\mathbf{T}\\
A_{\alpha\beta}=M_4\longleftrightarrow M_6=\tilde{A}_{\alpha\beta}\equiv A^{\beta\alpha}=(A^{\alpha\beta})^{\mathrm{T}}\\
A_{\alpha}^{\beta}=M_5\xleftrightarrow{\mathrm{T},\sim}M_7=\tilde{A}_{\alpha}^{\beta}\equiv A_{\alpha}^{\beta}=(A_{\alpha}^{\beta})^{\mathrm{T}}
\end{array}\right\} \tag{56}$$

当 $\bar{A}$ 为单位四元数时，即

$$\bar{A}\circ\tilde{\bar{A}}=\tilde{\bar{A}}\circ\bar{A}=\bar{E} \tag{57}$$

则式 (56) 中的转置关系同时又是互逆关系．

5 结　语

5.1 四元数张量算法与矩阵算法的比较

现有的四元数分量矩阵算法简便易行，已普遍用于多体动力学的数值计算软件．而四元数张量就其代数运算而言，由本文可以看出，它与四元数分量矩阵完全等价．以坐标系的二次旋转变换为例．若一次等效旋转的四元数表示设为 $C=A\circ B$(A, B 为先后两次转动的特征四元数)，则与其等价的一种矩阵算式为

$$C=M(A)B \tag{a}$$

其中 A, B, C 各以其分量列阵表示．与 (a) 等价的一种张量算式为

$$C^{\alpha}=A_{\beta}^{\alpha}B^{\beta}\qquad\text{或}\qquad C^{\alpha}=E_{\gamma\beta}^{\alpha}A^{\gamma}B^{\beta} \tag{b}$$

可见，(b) 是 (a) 的分解表示，(b) 式只不过指明了四元数 C 的各个分量．因而，当求一次等效变换四元数 C 时，二者计算量相同；当求 C 的某一分量时，可直接采用 (b) 式，同时，(b) 式也将为编制 (a) 式的递推或迭代计算程序带来方便．

本文未涉及四元数张量的分析方面 (如它的逆变与协变导数等)．在代数方面，它可以代替四元数分量矩阵的一切运算，但反之却未必．在四元数乘法等运算规律

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的完整表述方面，单凭其矩阵也是无法简捷表达的. 例如四元数基间相乘关系，可用结构张量 $E_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 来表示，但却不能用一个 "平面" 矩阵表示出来.

二阶张量可用矩阵来表示，但不是所有的矩阵都可表示为张量. 本文说明了，四元数分量矩阵却是一种张量. 四元数张量概念的建立，将使四元数理论和应用方面的研究由矩阵代数的范畴延伸到另一个重要的数学分支 —— 张量分析的领域来讨论.

5.2 四元数张量在连续介质力学中的应用前景

与三维矢量对应的张量已普遍用于连续介质力学. 三维矢量可以看作是标量部分为零的四元数或者看作是本文中 $\bar{E}_0$ 分量为零的四维矢量即看作是四元数意义下的矢量 [9]. 三维矢量运算都可化为四元数运算，一经化为四元数运算就一定能进一步转化为张量运算. 四元数本身和以四元数本身为元素的矩阵已有人应用于结构力学 [9]，并论述了相对三维矩阵方法的优越性. 故可以肯定，四元数张量首先即可以用于结构力学，尤其是空间复杂杆系结构. 在其它固体力学如弹性力学中也可望得到应用. 例如单元体的角应变、有限单元法中有限单元间的几何与变形协调关系等都可以用四元数张量的乘法来表示. 因本文中心议题所限，加之要涉及到一些具体知识领域，故关于四元数以及它的矩阵和张量在连续介质力学中具体应用的展开讨论需专文来完成.

参 考 文 献

1 王庆贵. 四元数矩阵在研究多刚体相对运动中的应用. 北方交通大学学报， 1987, 2: 52–62
2 周季生. 张量初步. 北京：高等教育出版社， 1986, 1–82, 144–151
3 Рашевский ПК. Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, 1953, 9–201, 253–262
4 [苏] 勃拉涅茨 В Н，什梅格列夫斯基 И П 著. 梁振和 译. 四元数在刚体定位问题中的应用. 北京：国防工业出版社， 1977, 9–76
5 范德瓦尔登 BL 著. 丁石孙等译. 代数学 I. 北京：科学出版社， 1978, 1–69
6 黄克智，薛明德，陆明万. 张量分析. 北京：清华大学出版社， 1986, 1–118
7 [英] 狄拉克 PAM 著. 朱培豫译. 广义相对论. 北京：科学出版社， 1979, 1–8
8 王庆贵. 四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用. 力学学报， 1983, (1): 54–55
9 Цалик АМ. Кватернионные преобразования в загачах механики стержневых систем, изв. АН СССР. МТТ. 1(1991)

STRUCTURE TENSOR OF QUATERNION MULTIPLICATION AND TENSOR EXPRESSIONS OF QUATERNION MATRICES

Wang Qinggui

(*Northern Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

Abstract The tensor concept of quaternions has been expounded and the relations between quaternion matrices and quaternion tensors have been set up with the aid of the structure tensor of quaternion multiplication, thus the quaternion calculus can be converted into the ordinary tensor calculus.

Key words quaternion, multiplication, matrix, tensor

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net