基于数学实验为探究手段的高考数学命题新视角

200092 上海市杨浦区教师进修学院 王国江

从2000年以来, 上海高中可使用规定的计算器进行数学问题探究, 相应地, 高考数学题中也出现了对数学实验的思想方法、能力的考查. 例如: 借助计算器对数学问题进行验证、探究, 以及折纸实验等都在高考题中得到了不同的体现. 所谓数学实验是指: 为获得某种数学理论, 验证某个数学猜想, 解决某类数学问题, 实验者运用一定的工具, 在思维活动的参与下, 在典型的实验环境中或特定的实验条件下所进行的一种数学探索活动. 在高考中以数学实验为探究手段的命题新视角也逐步形成.

一、展示数学直观形象的"解释性数学实验"

解释性数学实验能更好地将抽象的数学问题具体化、直观化、形象化, 在某些数学领域, 解释性实验具有常规思维方法不可替代的优越性, 它能将问题的切入点直观地展示在学生面前. 学生通过对实物、模型的观察和实验操作可以"实实在在"地体验思维的形成过程和"看到"其实验结果. 例如, 图1所示, 是一个两节圆形管焊接而成的弯管, 其中每一节都是斜截圆柱而成. 如果把其中一个斜截圆柱的侧面沿着 AA_1 剪开并摊平, 曲线 A_1BCDA_1' 是什么曲线? 学生可能会猜想是圆弧或抛物线段等二次曲线的一部分. 让学生模拟纸片围住水杯, 观察其相应展开图的形状, 如图2所示, 学生惊讶: 是正弦曲线或余弦曲线! 再根据图1中所给条件 (图中单位: cm), 问加工这一圆形弯管, 约需要多少面积的材料.

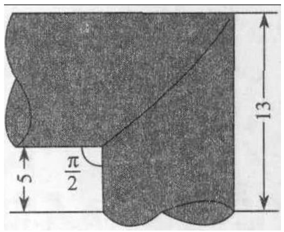

图1

$\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{2}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+n-1}-\frac{1}{m+n}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}=\frac{n}{m(m+n)}$. 故对任意正整数 m、n, 不等式 $\frac{1}{\ln(m+1)}+\frac{1}{\ln(m+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(m+n)}>\frac{n}{m(m+n)}$ 恒成立.

例3 证明: $\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$.

证明: 当 $n\geqslant 2$ 时, 记 $a_n=\frac{\ln n}{n+1}$, $b_n=\frac{n(n-1)}{4}-\frac{(n-1)(n-2)}{4}=\frac{n-1}{2}$.

原问题现转化为: 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1$ 时, 证明原命题的充分条件 $\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n-1}{2}$ 成立, 即证明 $2\ln n<n^2-1$.

设 $f(x)=2\ln x-x^2+1$, 则 $f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1+x)(1-x)}{x}$. 当 $x>1$ 时, $f'(x)<0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $f(x)<f(1)=0$, 即 $2\ln x<x^2-1$, 从而 $\frac{\ln x}{x+1}<\frac{x-1}{2}(x>1)$. 分别令 $x=2,3,4,\cdots,n$, 相加即得 $\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$.