

最年轻的科学家，她只有15岁。网友：千万别让我妈看到

人民日报 2019年10月30日 15:04 北京

她的研究成果是斐波那契数列与贝祖数的估计。



央视网消息，第二届世界顶尖科学家论坛29日开幕，全球顶尖科学家汇聚上海，共同探讨科学发展前沿问题。

本届大会还邀请了青少年科学家参加，他们大多出生于2001年到2004年。
最年轻的一位“小小科学家”，是来自华东师大二附中高一的谈方琳同学，她的研究成果是斐波那契数列与贝祖数的估计。

长相清秀的谈方琳在会场上听得很认真，两只手握着拳头，托在腮帮上……看上去和一般认真听课的高中小女生没什么区别。





然而，这位“普通”小女生获得的科研成就却一点儿也不普通。如今也不过15岁的她，早在初中阶段就凭借课题“斐波那契数列与贝祖数的估计”获得了“第33届全国青少年科技创新比赛”一等奖、专项奖一项；“第33届上海市青少年科技创新比赛”上海市科学技术学会主席奖（唯一初中生获奖者）、一等奖。

她的研究项目**第一次建立了斐波那契数列和贝祖数的联系。作为应用，解决了贝祖数的最佳上界和下界的估计问题**，改进了加拿大数学家Rankin教授于2013年在《美国数学月刊》上给出的一个粗糙的估计式。

菲波那契数列与贝祖数的估计

1 选题的目的

欧几里德算法可以求出两个正整数 a, b 的最大公因子 d 。

1733 年，意大利数学家 Lagry 首次利用菲波那契数列给出算法中所用除法次数 n 的上界的估计，经过众多人的努力，最终得到最佳估计。

扩展欧几里德算法还给出不定方程 $ax + by = d$ 的一组特解 x_0, y_0 ，称 $|x_0|, |y_0|$ 为 a, b 的贝祖数。

2013 年，加拿大数学家 Rankin 在《美国数月刊》上给出了贝祖数的第一个上界估计：

$$|x_0| \leq \frac{b}{2d}, |y_0| \leq \frac{a}{2d}. \quad (1)$$

他的证明方法是对除法次数 n 作归纳来证明。欧氏算法中，关于 r_1, r_2 所用除法次数是 $n-1$ ，利用两组数的贝祖数之间的关系和归纳假设可以证明 (1)，但 (1) 不是最佳的。

由于贝祖数是数学中的一个基本概念，给出贝祖数的最佳估计是一个非常有趣的问题。解决这个问题就是本课题的目的。

2 部分参考文献

[1] 王卿文《信息化时代的数学探索与发现》上海，2011

[2] 王卿文《数学文化》上海

海科学技术出版社，2013

[3] A. R. 辛钦《连分数》，上海科学技术出版社，1965

[4] T. F. de Lagry, Mem. Acad. Sci. Paris, 11 (1733), 363-4

[5] S. A. Rankin, Amer. Math. Monthly, 120(2013)562-4

主要结果

定理：给定整数 $a, b, a > b > 0$ ，设通过 n 次辗转相除可以得到其最大公因子 d ，贝祖数为 $|x_0|, |y_0|$ 。

利用菲波那契数列 (F_k) ，我们得到了贝祖数的最佳上界估计，同时还得到贝祖数的最佳下界估计

$$F_{n-1} \leq |x_0| \leq \frac{b}{2d} - \frac{1}{2} F_{n-2}, \quad (2)$$

$$F_n \leq |y_0| \leq \frac{a}{2d} - \frac{1}{2} F_{n-1}$$

它还推出了辗转相除的次数 n 的最佳上界

$$F_{n+2} \leq \frac{a}{d}, F_{n+1} \leq \frac{b}{d}. \quad (3)$$

推论：若 $b < F_m$ ，则对任何正整数 a ，有

$$n \leq m-2 \quad (4)$$

证明： $F_{n+1} \leq \frac{b}{d} \leq b < F_m$ 推出 $n+1 < m$ 。

6 不等式为最佳的例子

1) $a = F_m, b = F_{m-1}$ ，则

$$d = 1, n = m-2,$$

$$|x_0| = F_{m-1}, |y_0| = F_m,$$

(2) (3) (4) 中的等号都成立，所以不等式都是最佳的。

2) $b = 2018 < 2584$ (第 18 个菲波那契数)，则最多用 16 次除法就能求出 2018 与任何正整数的最大公因子。

7 方法上的创新

1. 发现贝祖数与菲氏数列的联系
2. 发现几个常用数列 (菲氏型数列，欧氏数列，连分数的数列，贝祖数列等) 可用统一的方法得到
3. 提出菲氏型数列新的数学问题
4. (4) 比通常的估计式更简单实用

3 欧氏算法

$$r_k = q_{k+1}r_{k+1} + r_{k+2}, (r_0 = a, r_1 = b)$$

$$r_0 \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \dots \quad r_{n-2} \quad r_{n-1} \quad r_n = d \quad r_{n+1} = 0$$

$$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{n-2} \quad q_{n-1} \quad q_n > 1$$

4 贝祖数列

$$B_k = q_{k+1}B_{k+1} + B_{k+2}, (B_n = 0, B_{n-1} = 1)$$

$$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{n-2} \quad q_{n-1} \quad q_n$$

$$B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_{n-2} \quad 1 \quad 0$$

$$\begin{array}{cc} || & || \\ |y_0| & |x_0| \end{array}$$

5 菲波那契数列

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, (F_0 = 0, F_1 = 1)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$F_n \quad F_{n-1} \quad F_{n-2} \quad F_{n-3} \quad \dots \quad F_2 \quad 1 \quad 0$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584

@新闻晨报

英雄出少年！

来源：周到上海App（作者林劲榆），综合人民日报微博、新闻晨报、央视网
本期编辑：胡程远、赵雅娇