第 38 卷第 4 期 大 学 数 学 Vol. 38, №. 4
2022 年 8 月 COLLEGE MATHEMATICS Aug. 2022

线性代数中两个重要定理的证明注记

王卿文， 杨建生， 张崇权
（上海大学 数学系，上海 200444）

［摘 要］运用矩阵分块技巧，给出了矩阵相抵标准形唯一性定理和 Sylvester 惯性定律的简捷证明.

［关键词］分块矩阵；矩阵的相抵标准形；Sylvester 惯性定律；齐次线性方程组
［中图分类号］O151.2 ［文献标识码］C ［文章编号］1672-1454(2022)04-0083-03

1 引 言

矩阵的相抵标准形定理和 Sylvester 惯性定律是线性代数中的两个最基本的重要定理，发挥着极其重要的作用，譬如，可用矩阵相抵标准形中数字 1 的个数定义矩阵的秩，通过矩阵相抵标准形给出齐次线性方程组解空间基的简便求法和广义 Sylvester 矩阵方程可解的实用判定条件等；Sylvester 惯性定律则表明几何中的二次曲面经过可逆线性变换不改变曲面原本的类别. 游宏和朱广俊教授首次利用矩阵分块的方法给出了唯一性的直接证明[1]. 关于 Sylvester 惯性定律，传统的证明[2]是假定二次型的规范形不唯一，构造具有非零解的线性方程组，利用反证法给予证明；文献[3]利用生成子空间和维数公式给出了一种证法；文献[4]借助 Courant-Fischer 定理给出了一种变型后的 Sylvester 惯性定律的简化证明.

中国现代数学之父华罗庚曾说：国外把我说成是玩矩阵的魔鬼……表面上你看我搞的是多复变函数、典型群、自守函数、偏微分方程等，实际上骨子里还是我的矩阵技巧[5]. 矩阵的分块是以华罗庚为代表的中国代数学家从事科学研究的杀手锏. 矩阵的分块在其它领域也有重要的应用，例如计算科学中，对矩阵进行适当分块可显著减少计算的复杂度. 本文利用这一思想和方法，给出了矩阵相抵标准形唯一性的一种直接证明. 较文献[1]，笔者利用了矩阵相抵的传递性及矩阵分块技巧，所给证明更为简洁. 同时，基于矩阵的不同分块，本文从不同角度给出了 Sylvester 惯性定律的非常简单的证明.

以下约定：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

2 矩阵相抵标准形唯一性与 Sylvester 惯性定律证明注记

2.1 矩阵相抵标准形唯一性的证明

定理 1（矩阵的相抵标准形定理） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可以经过一系列初等变换化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 r 是满足 $0\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}$ 的整数，且唯一. (1)称为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形（或等价标准形）.

［收稿日期］2021-09-21；［修改日期］2022-07-19
［基金项目］高等学校大学数学教学研究与发展中心教改项目“基于教育数学思想的一流课程教材建设”(CMC20210503)；中国高等教育学会教育数学专业委员会重大课题“教育数学与一流课程建设”；上海高校本科重点教改项目“创立和发展教育数学理论，重构大学数学课程体系和课程内容”
［作者简介］王卿文(1964－)，男，博士，教授，从事矩阵代数、量子计算、四元数统计研究. E-mail：wqw@shu.edu.cn