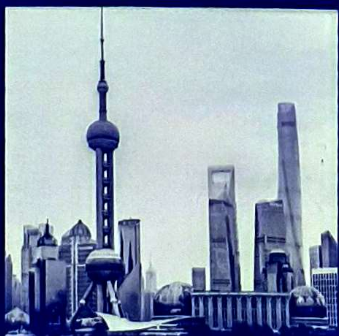
复旦大学课程教学改革的实践与研究

上海高校示范性本科课堂教学案例优选

·第一辑·

蒋玉龙◎主编



复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

上海高校示范性本科课堂教学案例优选. 第一辑/蒋玉龙主编. —上海：复旦大学出版社，2024.4
(复旦大学课程教学改革的实践与研究 / 蒋玉龙主编)
ISBN 978-7-309-17384-0

Ⅰ.①上…　Ⅱ.①蒋…　Ⅲ.①高等学校-课堂教学-教案(教育)-汇编-上海　Ⅳ.①G642.421

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 076711 号

上海高校示范性本科课堂教学案例优选. 第一辑
蒋玉龙　主编
责任编辑/梁　玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编：200433
网址：fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售：86-21-65102580　团体订购：86-21-65104505
出版部电话：86-21-65642845
上海丽佳制版印刷有限公司

开本 787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 12.25　字数 290 千字
2024 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-17384-0/G・2589
定价：68.00 元

教师访谈及教学设计

访谈嘉宾　上海大学　王卿文
访谈内容　“线性代数”

问题1　课程介绍

我是上海大学的王卿文,主讲的课程是理工和经管类一年级大学生的公共基础课“线性代数”。线性代数是以矩阵为工具研究线性空间和线性变换的一门学科,在大数据和人工智能时代,线性代数发挥的作用愈加凸显。但由于课时较少、内容抽象,“线性代数”难教难学就成为普遍现象。让学生既好又快地掌握线性代数的核心内容和方法,使教师好教、学生易学,一直是我和团队改革的主攻方向。

经过多年的探索实践,我们的课程有以下特色。

(1) 优化重构了课程体系和课程内容,凸显方法简捷、观点高远、趋向前沿、反映现代。围绕矩阵的3种重要等价关系(相抵、相似和相合)展开,先从相抵讲起,浓墨重彩讲解矩阵初等变换、矩阵分块、矩阵相抵标准形等重要工具后,直接进入线性代数的主要研究对象——线性空间,将线性方程组作为子空间和矩阵相抵标准形的直接应用。然后,聚焦线性变换和矩阵的1-1对应关系,重点讨论矩阵的相似与相合化简。

(2) 着重阐述知识的来龙去脉,引领学生用已有知识和方法想出后面要学习的内容,即:让学生做古代的数学家,把课本上的知识重新发现一遍。

(3) 突出数学思想和方法的运用,力图以最简捷的方式展现线性代数的核心理论和方法。例如,矩阵分块是以华罗庚为代表的中国代数学家从事科学研究的“杀手锏”,本课程凸显这一思想和方法的妙用,如给出Sylvester惯性定理的简洁证明。

(4) 兼顾知识的深度、广度和应用度,以适合不同层次的学生。由于优化了课程体系,以简捷明了的方式处理课程内容,因此即使在课时较少的情况下,也能保障学生掌握线性代数的核心内容和方法。对于课时相对较多、学有余力的学生,设计了有一定深度、广度和应用度的“探索与发现”,精选和设计了若干理论探究和应用探索的研究性课题。

(5) 引入研究新成果,改造了同类课程不易讲授的内容;突出了线性代数与中学数学的有机衔接与融通;注重了数学文化和科研方法的渗透。

(6) 高等教育出版社出版了体现上述特色的新形态教材《线性代数》,读者扫二维码就可看视频。这本教材的最大特点就是展现了线性代数成果的发现过程,实现了线性代数知识的再创造。

问题2　参加示范课堂活动的感受

下面我谈一下参加上海高校示范性本科课堂及其教学展示交流活动的两大感受。

(1) 这次活动很有意义。参赛者既能分享个人教学改革的经验体会,又能学习众多专家教学之专长。这是一个很好的交流平台,对本科课堂教学改革产生非常积极的促进作用。

(2) 参展的这些课程展现了很高的教学水平,提供了宝贵的教学经验。入选课程所在高校也开展了教学展示的交流活动,教师们踊跃参与,这对提高青年教师的教学水平发挥了很好的示范性作用。希望这样的活动能继续开展下去。

问题3　课程的创新性和示范性

我的教学理念是不仅要教会学生知识,更要教好学生如何发现知识。这次示范性课堂,我主要是引领学生发现齐次线性方程组解空间基的新求法,使学生在体验科学发现过程的基础上,见证经过几百年沉淀的数学内容仍可改进与创新,激发学生的学习热情,培养学生的创造能力。

上述教学理念和做法可以为数学类课程的教学改革提供参考。

请扫码观看王卿文的访谈

“线性代数”　课堂教学设计

第3章　线性方程组
3.2　齐次线性方程组解空间的基

一、课堂内容摘要

以“北斗”导航系统、“嫦娥四号”探测器和“玉兔二号”月球车等为背景,引入线性方程组教学主题,教学与思政融合;核查学生课前通过微课视频的预习情况,使学生清楚线性方程组的核心问题及其要解决的关键是求齐次线性方程组解空间的基;引领学生发现齐次线性方程组的新解法及其深度研究,提高课程内容的挑战度——把齐次线性方程组求解方法推广到齐次矩阵方程;课外探究,锻炼学生能够利用线性方程组理论与方法构建模型,解决实际应用问题,通过荣誉作业,实施个性化培养。

二、教学设计架构(体现“两性一度”)

1. 教学目标

授课对象:上海大学理工类和经管类学生。

(1) 知识目标:通过有效合理的教学环节、教学手段以及课内外联动学习,使学生能够扎实掌握齐次线性方程组解空间基的新求法。

(2) 能力目标:通过展现齐次线性方程组解空间基的新求法的发现过程,培养学生科学

研究的能力：通过引领学生深度研究——把齐次线性方程组求解方法推广到齐次矩阵方程，提高课程内容的挑战度，让学生体验“跳一跳才能够得着”的学习挑战，提升学生的创新思维能力：通过课外探究，使学生能够利用线性方程组理论与方法构建投入产出模型，解决实际应用问题：通过荣誉作业，实施个性化培养。

(3) 思政目标：使学生树立民族自信心，发愤图强。

2. *教学理念与策略*

不仅教会学生掌握齐次线性方程组解空间基的新求法，更要教会学生如何发现和创造这个新方法。引领学生从逆矩阵的计算、相抵标准形等相关知识出发，通过类比推理探索求解齐次线性方程组新的简便方法并加以证明。采取“自主式”教学策略，引导学生渐进式地思考齐次线性方程组解空间基的新求法，发散学生思维，使学生能从不同角度将知识连成脉络，最终找到联系并得出新的解法。

3. *齐次线性方程组解空间基的教学实施结构图*（图 1）

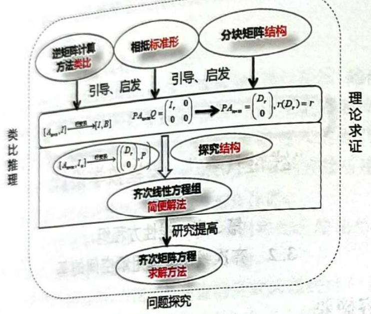


图 1　齐次线性方程组解空间基的教学实施结构图

三、教学过程

1. *课程思政素材*

“北斗”导航定位系统、“嫦娥四号”探测器和“玉兔二号”月球车。

2. *播放视频*（图 2，大约 35 秒）

“北斗”导航定位系统、“嫦娥四号”探测器和“玉兔二号”月球车。

3. *课程思政*

以“北斗”导航系统、“嫦娥四号”探测器和“玉兔二号”月球车为例证，说明中国的航天技术已赶超世界先进水平，使学生树立民族自信心，激励学生发愤图强。

4. *线性方程组引入*

“北斗”导航定位系统、“嫦娥四号”探测器、“玉兔二号”月球车等航天器的定位和发回的海量数据需要用线性方程组处理，美国 1949 年经济模型用线性方程组处理的结果获

图 2　播放视频

1973 年诺贝尔经济学奖等，引入要学习的内容——第 3 章“线性方程组”。

5. *检查上次课外作业*

通过 http://mooc1.chaoxing.com/course/200456807.html 观看“线性代数”视频课程，预习第 3 章“线性方程组”。

提问　线性方程组的核心问题是什么？

请学生回答并确认（图 3）。

图 3　学生回答问题

线性方程组的核心问题

线性方程组

$$X_{1\times n}A_{n\times m}=b_{1\times m} \tag{1.1}$$

需要解决以下 3 个问题。

问题 1　线性方程组有解判定；

问题 2　线性方程组解的结构；

问题 3　线性方程组如何求解？

对于问题 1，通过视频预习，学生不难解决。课堂上只需重点强调矩阵的分块及其初等变换与向量的线性表示的方法运用。将(1.1)式中的未知向量和系数矩阵分块，

$$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

则(1.1)式有解当且仅当常数向量 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 线性表示，即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\boldsymbol{b},$$

$$\Updownarrow$$

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})。$$

对于问题 2，通过观看视频，学生也能顺利解决。课堂上只需强调如下两点。

$$\boldsymbol{X}_{1\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{b}_{1\times m},$$

$$\boldsymbol{X}_{1\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{0},\tag{1.2}$$

(1.1)式与(1.2)式解的关系如下。(1.1)式的任意两个解的差是(1.2)式的解，(1.1)式的通解可表示为(1.1)式的特解与(1.2)式的全部解的和。

通解的含义是解且能表示任意一个解。

对于问题 3，强调求(1.1)式的通解，要做如下的工作。

判断(1.1)式是否有解，只须验证

$$r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}?$$

(1.1)式的通解是(1.1)式的一个特解和(1.1)式的导出组(1.2)式的全部解。

齐次线性方程组(1.2)式的全部解构成线性空间 $\boldsymbol{F}^{1\times n}$ 的子空间 $\boldsymbol{W}$，因此求(1.2)式的全部解就是求 $\boldsymbol{W}$ 的一个基，即(1.2)式的一个基础解系(解释为什么叫基础解系)。

这样引入这节课要讲的主要内容——求齐次线性方程组解空间的一个基。

6. 教学主题：引领学生发现(1.2)解空间基的一个新的简洁求法

(1) 先给方法，让学生体验方法的简洁实用，激发学生探究其发现过程的兴趣。

齐次线性方程组(1.2)解空间基的一个简便求法，

$$[\boldsymbol{A}_{n\times m},\ \boldsymbol{I}_n]\xrightarrow{\text{row}}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}\right],$$

则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的后 $n-r$ 行是(1.2)式的解空间的一个基。

例　求下面方程组解空间的一个基：

$$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0。\end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix}1&1&3&1&1&0&0&0\\ -1&1&-1&3&0&1&0&0\\ 5&-2&8&-9&0&0&1&0\\ -1&3&1&7&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&3&1&1&0&0&0\\ 0&2&2&4&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&-\frac{3}{2}&\frac{7}{2}&1&0\\ 0&0&0&0&-1&-2&0&1\end{pmatrix},$$

$\alpha_1=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2},\ 1,\ 0\right)$，$\alpha_2=(-1,\ -2,\ 0,\ 1)$ 为所求的一个基础解系。

(2) 引领学生展现方法的发现过程。

科研思想的展现

矩阵有丰富的数学内容(图 4)。一个自然的问题是：将一个矩阵进行化简，让其变得最简单，即让它的元素只有 1 和 0。于是，有矩阵的相抵标准形定理，上面 1 的个数 r 是唯一。

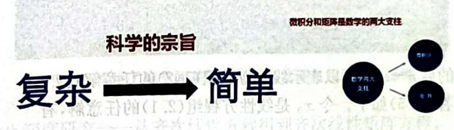


图 4

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

提问　可逆矩阵、初等阵、初等变换的关系是什么？

请学生回答。

矩阵的相抵标准形定理

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\ 0\leqslant r\leqslant\min\{m,\ n\}。$$

提问　可逆矩阵的相抵标准形式是什么？

集体回答：确认是单位矩阵。

问题 1　把可逆矩阵经过初等行变换化成相抵标准形时，怎样记录这些初等变换呢？

对于问题 1，这样产生了求可逆矩阵的逆阵的方法，

$$[\boldsymbol{A}_{n\times n},\ \boldsymbol{I}_n]\xrightarrow{\text{row}}[\boldsymbol{I}_n,\ \boldsymbol{P}],\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}。$$

I_n 起到“记录仪”的作用。

强调 关键思想的产生

问题 2 科学研究就要发散思维。当矩阵不可逆时，能否只用矩阵的初等行变换就将其化成相抵标准形？

$$PA_{n\times m}Q=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow PA_{n\times m}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix} D_r \\ 0 \end{bmatrix},\ r(D_r)=r。$$

根据可逆阵和初等阵及初等变换的关系，可知

$$[A_{n\times m},\ I_n] \xrightarrow{\text{row}} \left[\begin{bmatrix} D_r \\ 0 \end{bmatrix},\ P\right],\ r(D_r)=r。$$

考查矩阵 P 的后 $n-r$ 行的特征，有以下 3 个问题。

考查矩阵 P 的后 $n-r$ 行表示为 $[0,\ I_{n-r}]P$，为什么？

问题 1 将 P 的后 $n-r$ 行线性无关吗？为什么？

问题 2 P 可逆，其后 $n-r$ 行为齐次线性方程组(1.2)的解吗？

问题 3 P 的后 $n-r$ 行可以表示线性方程组(1.2)的任意解吗？

对于问题 1，请学生回答，并确认。

对于问题 2，集体回答。

对于问题 3，推导得到肯定答案，

$$[0,\ I_{n-r}]PA=[0,\ I_{n-r}]\begin{bmatrix} D_r \\ 0 \end{bmatrix}=0。$$

问题 4 P 的后 $n-r$ 行可以表示线性方程组(1.2)的任意解吗？

引导学生解答(图 5)如下。令 x_0 是线性方程组(2.1)的任意解，有

图 5 主讲人在引导学生探究发现

$$x_0A=0 \Leftrightarrow x_0P^{-1}PAQ=0,\ x_0P^{-1}:=(y_1,\ y_2),$$

$$(y_1,\ y_2)\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0,\ y_1=0,\ x_0=(0,\ y_2)P=y_2[0,\ I_{n-r}]P.$$

于是 P 的后 $n-r$ 行能表示齐次线性方程组(1.2)的任意一个解。故结论为 P 的后 $n-r$ 行构成齐次线性方程组(1.2)解空间的一个基。

学生在了解空间基的简便求法发现过程后充满喜悦(图 6)，教师再请学生思考以下 2 个问题。

问题 1 齐次线性方程组反问题：给定 s 个线性无关的向量，怎样求一个齐次线性方程组以这 s 个向量为一个基础解系？

问题 2 课外探讨：比较齐次线性方程组的新解法与中国传统“方程术”(也称高斯消元法)。

图 6 学生了解空间基的简便求法发现过程后充满喜悦

(3) 引领学生深度研究——从齐次线性方程组到齐次线性矩阵方程。

为了提高课程内容的挑战度，把齐次线性方程组求解方法推广到齐次矩阵方程，让学生体验“跳一跳才能够得着”的学习挑战，提升学生的创新思维能力。

思路 考查矩阵方程

$$X_{s\times n}A_{n\times m}=B_{s\times m}, \tag{1.3}$$

使用矩阵分块工具，令

$$X=(x_{ij})_{s\times n},\ A=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix},$$

则(1.3)式有解的充分必要条件是 $\beta_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 可以由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 线性表示，即

$$x_{i1}\alpha_1+x_{i2}\alpha_2+\cdots+x_{in}\alpha_n=\beta_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \Leftrightarrow r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=r(A),$$

称非齐次矩阵方程 $X_{s\times n}A_{n\times m}=B_{s\times m}$ (1.3) 的导出方程为

$$\boldsymbol{X}_{s\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{0}_{s\times m}。\tag{1.4}$$

由齐次线性方程组 $x_{1\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{0}_{s\times m}$ (1.2)的基础解系为行向量构成的矩阵 $\boldsymbol{N}$ 称为(1.4)的一个基础解阵。

类似于非齐次线性方程组与其导出组齐次线性方程组的解的关系，可以得到非齐次线性矩阵方程(1.3)与其导出方程解的关系，即以下 3 个性质。

性质 1 (1.3)式的任意两个解的差是(1.4)式的解。

性质 2 (1.3)式的通解是其任意特解与(1.4)式的全部解之和。

性质 3 (1.4)式任意两个解的线性组合仍然是解。

因此，求(1.3)式的通解只需求(1.3)式的一个特解 $\boldsymbol{U}$ 及(1.4)式的一个基础解阵 $\boldsymbol{N}$，其通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{HN},$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 是任意 $s\times(n-r)$ 阵。

定理 对于矩阵程组 $\boldsymbol{X}_{s\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{0}_{1\times m}$，

$$(\boldsymbol{A}_{n\times m},\boldsymbol{I}_n)\xrightarrow{\text{row}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{rm} & \boldsymbol{M}_{rn}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}_{(n-r)n}\end{bmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{N}_{s\times(n-r)}$ 为矩阵方程(1.4)的一个基础解阵，(1.4)的通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{HN}$，其中 $\boldsymbol{H}$ 是任意 $s\times(n-r)$ 阵。

例 求解下列矩阵方程：

$$\boldsymbol{X}_{3\times 4}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}_{3\times 3},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -5 & -4\end{pmatrix}。$$

解

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

于是得 $\boldsymbol{N}=(-1,1,0,1)$。所以，矩阵方程通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{HN}$，其中 $\boldsymbol{H}$ 为任意 3×1 矩阵。

应用 解决齐次线性方程组反问题。

(4) 课堂内容总结。

从逆矩阵的计算、相抵标准形等相关知识出发，通过类比推理探索齐次线性方程组解空间基新的简便求法并给予证明。最后，把齐次线性方程组的求解方法推广到到齐次矩阵方程。

(5) 课内外作业。

普通作业包括：

① 复习今天的全部内容，重新观看在线课程关于齐次线性方程组的基础解系，进一步体会基础解系求法的发现过程及其推广。

② 研习教科书内容（95～98 页）。

③ 完成 98 页习题 3.2 和 102 页总复习题 3,4,8,9。

④ 在线观看"线性代数"视频，预习"非齐次线性方程组"的视频。

⑤ 上机实践：利用 MatLab 软件程序语句解齐次线性方程组。

挑战性作业包括：

① 研究 $\boldsymbol{X}_{1\times n}\boldsymbol{A}_{n\times m}=\boldsymbol{b}_{1\times m}$ 的简便求法。

② 研究矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$。

③ 研究投入产出模型。

荣誉学生作业包括：

① 编写 MatLab 软件程序实行线性方程组新求解方法，并提交报告。

② 比较齐次线性方程组新求法与中国传统"方程术"（高斯消元法）。

四、 教学目标达成度分析

本次课的 3 个教学目标（即知识目标、能力目标和思政目标）均有很好的达成。

关于课前预习任务，99%的学生能够很好地完成，掌握了齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的关系，清楚了一般的线性方程组求解的关键就是求齐次线性方程组解空间的基。

在教师引领启发下，98%以上的学生能够很好地理解和掌握齐次线性方程组解空间基的新求法的发现过程，能够通过类比探究，把齐次线性方程组求解方法推广到齐次矩阵方程，高阶思维得到锻炼，创新能力得以提升。通过课外探究，95%以上的学生能够利用线性方程组理论与方法构建相关的模型，解决实际应用问题。

本堂课的引入既使学生树立民族自信心、激励学生发愤图强，又使学生认识到线性方程组的重要性。通过课外作业，学生了解中国是世界上最早完整解决线性方程组求解的国家。通过自主发现新方法，学生对数学学习和探究的自信心得到提升。从整体上，完美达成课程思政目标。

五、 教学示范意义反思

通过教学示范，深感教学是师生联动共同演奏的乐曲，其中"教学设计"起到关键性作用。通过介绍线性方程组在工程计算中的应用背景，引出求解线性方程组的重要性，从而激发学生对课程内容学习的兴趣。在实施过程中每个问题的提出，促进师生互动，产生"同频共振"效果。齐次线性方程组简便新解法的导出，让学生惊叹数学理论与方法的优美。

通过教学示范，引发对数学课程思政更深入的思考。课程思政的确应润物无声，才能达到好的效果。教学中通过介绍航天技术、大规模经济计算等对线性方程组求解方法的需要，充分调动了学生思考的积极性，让课程推进一气呵成。

通过教学示范，对教学方式以及教学环境的转变有了更深层次的认识。首先，课前利用微课视频让学生对课程内容有较清晰的了解。然后，给出实用的求解线性方程组的新方法，让学生求解相关问题，并引导学生思考此方法求解问题的方便优势。在新旧碰撞中，引发学生探究，提升课堂教学效果，同时提升学生的创新思维能力。

通过教学示范，为教学内容的迁移打开新窗口。应特别注重引导学生从不同角度去思考问题，在已有知识基础上进行深层次探究。课堂中教师引导学生把齐次线性方程组的求解方法推广到求解齐次矩阵方程中，既调动了学生对于数学探究的兴趣，又提升了课程的挑战度，让学生在“跳一跳才能够得着”的体验中收获满满。

通过教学示范，深感创新性教学内容可激发学生学习兴趣，以问题引导学生进行探究学习，使学生经历探究过程、思考过程、抽象过程、预测过程、推理过程、反思过程，真正实现从“教”向“学”转变，逐渐培养学生的创新思维能力，进而培养其创造发明能力。