大学视角下的中学数学(复数)

李尚志

(北京航空航天大学　100083)

1　复数的几何模型

例 1　(高考 2017 年理科数学全国卷 3)

设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$. 则 $|z|=$______.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

解　$|1+\mathrm{i}||z|=|2\mathrm{i}|\Rightarrow|z|=\frac{|2\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

答案　C.

点评　网上发表的一个答案是:先求出

$$z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{2}=1+\mathrm{i},$$

再求出 $|z|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

很多人喜欢这种做法,按部就班死算复数除法再算模,而不习惯于先求模再相除. 但是,按照这种思路能做出下面的题目吗?

例 2　(中国科大 2016 年自主招生题)

复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=2,|z_2|=3,|z_1+z_2|=4$. 则 $\frac{z_1}{z_2}=$________.

解法 1　(代数算法)设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i},z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,列方程组

$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=|z_1|^2=4 & (1)\\ x_2^2+y_2^2=|z_2|^2=9 & (2)\\ (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=|z_1+z_2|^2=16 & (3)\end{cases}$$

点评　4 个未知数 x_1,x_2,y_1,y_2,3 个方程,你能解出来吗?

题目要求的是 $\frac{z_1}{z_2}$,一定要把 x_1,x_2,y_1,y_2 都解出来吗?

则　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1\mathrm{i}}{x_2+y_2\mathrm{i}}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{(x_2+y_2\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}=\frac{[(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)\mathrm{i}}{(x_2^2+y_2^2)},$$

$$x_1x_2+y_1y_2=\frac{[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]-(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)}{2}=\frac{16-4-9}{2}=\frac{3}{2},$$

由　$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2)=(x_1y_2)^2-2(x_1y_2)(x_2y_1)+(x_2y_1)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2,$$

得　$$x_2y_1-x_1y_2=\pm\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=\pm\sqrt{4\times 9-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{135}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{15},$$

于是　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{15}\mathrm{i}}{9}=\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}\mathrm{i}.$$

点评　怎么想出用等式(1),(2),(3)算 $x_1x_2+y_1y_2$ 和 $x_2y_1-x_1y_2$?

3 个复数 z_1,z_2,z_1+z_2 代表 3 个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,复数的模是向量的模(有向线段的长度):$|z_1|=|\boldsymbol{a}|,|z_2|=|\boldsymbol{b}|,|z_1+z_2|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

$x_1x_2+y_1y_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 是向量内积,α 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角. 由完全平方公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$(就是余弦定理)得到

$$x_1x_2+y_1y_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{2}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha.$$

$|x_2y_1-x_1y_2|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\alpha|$(见《借题发挥 1》),它的平方

$$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\alpha=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos\alpha^2)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$