大学视角下的中学数学(泰勒展开)(续)

李尚志

(北京航空航天大学　100083)

4. 无名英雄

中学生不难了解和应用泰勒展开，借助它想出解法，算出答案. 虽不能将它写进答卷，但可以让它作无名英雄，用求导来实施它的计划.

Ⅰ. 什么是泰勒展开：如果函数 $f(x)$在某点 c 附近可以展开成 $x-c$ 的无穷级数

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+\cdots+a_k(x-c)^k+\cdots \tag{4'}$$

就称为 $f(x)$在 c 的泰勒展开.

只要有了展开式(4′)，取 $x=c$ 得 $f(c)=a_0$. 求导再取 $x=c$ 得导数 $f'(c)=a_1$. 求导 k 次再取 $x=c$ 得 k 阶导数 $f^{(k)}(c)=(k!)a_k$.

反过来，算出函数值 $f(c)$ 和各阶导数值 $f^{(k)}(c)$，就得到展开式各项系数 $a_0=f(c)$，$a_k=\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$. 代入(4′)得到泰勒展开式.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots \tag{4}$$

例如，e^x 的导数$(e^x)'=e^x$等于自身，任意阶导数$(e^x)^{(k)}=e^x$ 等于自身. 在 $x=0$ 的值和所有各阶导数都是 1，代入(4′)就得到展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{5}$$

要使泰勒展开式(4)右边的无穷级数真正等于左边的函数，还须将 x 的取值限制在一定范围内，才能够保证无穷级数的极限存在. 例如，对数函数 $\ln(1+x)$ 的展开式要求 $-1<x\leqslant 1$. 指数函数 e^x的展开式则允许 x 取任意实数. 不过，我们向中学生介绍的如下两项应用却不需要很大范围，只要求存在一个足够小的范围$(-d,d)$ 就行了. 不但不需要担心极限是否存在，高次项都可以忽略掉，用起来很方便.

Ⅱ. 两项用途

(1) 判定 $f(c)$ 是否极值

在 c 附近足够小范围内，$f(x)-f(c)=a_1(x-c)+\cdots=a_m(x-c)^m+a_{m+1}(x-c)^{m+1}+\cdots$ 的正负号与最低次非零项 $a_m(x-c)^m\neq 0$ 的正负号相同，高次项忽略不计. 当 m 为奇数，$f(c)$不是极值. 当 m 是偶数，$a_m<0$ 时 $f(c)$ 是极大值，$a_m>0$时 $f(c)$ 是极小值.

例 3　(2019 北京市海淀区高三一摸) 已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$. 当$a<0$时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值.

分析　将 $\ln(1+x)$ 的展开式代入得 $f(x)=x(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)-ax^2=(1-a)x^2-\frac{x^3}{2}+\cdots$. 当 $a<0$时 $1-a>0$，$f(x)$ 与$(1-a)x^2$同号，$x=0$ 附近 $f(x)>0=f(0)$，$f(0)$ 是极小值.

容易看出进一步的结论：当 $a<1$ 时 $f(0)$是极小值，$a>1$ 是极大值，$a=1$ 时 $f(0)$ 不是极值.

中学生不能在答卷上作泰勒展开. 在草稿上用泰勒展开知道了 $f(0)$是极小值. 在答卷上就可以计算 $f'(0)=0$，$f''(0)=1+1-2a>0$ 来说明 $f(0)$ 是极小值.

以上例 1，例 3 都是给定了 c 判定 $f(c)$ 是否极值. 如果不知道 c 要求极值点，需要先解方程 $f'(x)=0$ 求出 c 满足必要条件 $f'(c)=0$，再判定是否满足充分条件.

例 4(2017 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题) 函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；