抽象指挥具体：数学核心素养的重要内涵

——以湘教版高中数学教材为例

文/李尚志

李尚志　北京航空航天大学教授，博士生导师

数学核心素养第一条就是数学抽象。大家都熟悉“抽象”这个词，尤其是学数学的人更熟悉。很多人不是因为喜欢抽象而熟悉它，而是因为害怕抽象而熟悉它。数学最大的特点就是抽象，很多人因为数学的这个特点而害怕数学。

什么是抽象？“象”是看得见摸得着的具体事物，“抽象”就是从不同的“象”中“抽”出的共同规律。抽出共同规律有什么好处？就是把解决这个问题的方法搬到另一个地方解决另外的问题。很多人喜欢一题多解。抽象就是多题一解，一个方法解决很多不同类型的问题。如果一个方法只能解决某个特殊的问题，这叫作具体。如果同一个方法解决很多不同的问题，这就叫抽象。抽象就是“管得宽”，适用面广。抽象程度越高，管得越宽，适用面越广，威力越大。就是“一招鲜，吃遍天”。这样的抽象，你难道不喜欢？

抽象到底是很可怕还是很有用？我们不作抽象的论证，先看具体的例子。

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

大学视角下的中学数学(泰勒展开)(续)

李尚志

(北京航空航天大学 100083)

4. 无名英雄

中学生不难了解和应用泰勒展开，借助它想出解法，算出答案. 虽不能将它写进答卷，但可以让它作无名英雄，用求导来实施它的计划.

Ⅰ. 什么是泰勒展开： 如果函数 $f(x)$ 在某点 c 附近可以展开成 $x-c$ 的无穷级数

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+\cdots+a_k(x-c)^k+\cdots \tag{4'}$$

就称为 $f(x)$ 在 c 的泰勒展开.

只要有了展开式(4′)，取 $x=c$ 得 $f(c)=a_0$. 求导再取 $x=c$ 得导数 $f'(c)=a_1$. 求导 k 次再取 $x=c$ 得 k 阶导数 $f^{(k)}(c)=(k!)a_k$.

反过来，算出函数值 $f(c)$ 和各阶导数值 $f^{(k)}(c)$，就得到展开式各项系数 $a_0=f(c)$，$a_k=\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$. 代入(4′)得到泰勒展开式.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots \tag{4}$$

例如，e^x 的导数 $(e^x)'=e^x$ 等于自身，任意阶导数 $(e^x)^{(k)}=e^x$ 等于自身. 在 $x=0$ 的值和所有各阶导数都是 1，代入(4′)就得到展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{5}$$

要使泰勒展开式(4)右边的无穷级数真正等于左边的函数，还须将 x 的取值限制在一定范围内，才能够保证无穷级数的极限存在. 例如，对数函数 $\ln(1+x)$ 的展开式要求 $-1<x\leqslant 1$. 指数函数 e^x 的展开式则允许 x 取任意实数. 不过，我们向中学生介绍的如下两项应用却不需要很大范围，只要求存在一个足够小的范围 $(-d,d)$ 就行了. 不但不需要担心极限是否存在，高次项都可以忽略掉，用起来很方便.

Ⅱ. 两项用途

(1) 判定 $f(c)$ 是否极值

在 c 附近足够小范围内，$f(x)-f(c)=a_1(x-c)+\cdots=a_m(x-c)^m+a_{m+1}(x-c)^{m+1}+\cdots$ 的正负号与最低次非零项 $a_m(x-c)^m\neq 0$ 的正负号相同，高次项忽略不计. 当 m 为奇数，$f(c)$ 不是极值. 当 m 是偶数，$a_m<0$ 时 $f(c)$ 是极大值，$a_m>0$ 时 $f(c)$ 是极小值.

例 3 (2019 北京市海淀区高三一摸) 已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$. 当 $a<0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值.

分析 将 $\ln(1+x)$ 的展开式代入得 $f(x)=x(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)-ax^2=(1-a)x^2-\frac{x^3}{2}+\cdots$. 当 $a<0$ 时 $1-a>0$，$f(x)$ 与 $(1-a)x^2$ 同号，$x=0$ 附近 $f(x)>0=f(0)$，$f(0)$ 是极小值.

容易看出进一步的结论：当 $a<1$ 时 $f(0)$ 是极小值，$a>1$ 是极大值，$a=1$ 时 $f(0)$ 不是极值.

中学生不能在答卷上作泰勒展开. 在草稿上用泰勒展开知道了 $f(0)$ 是极小值. 在答卷上就可以计算 $f'(0)=0$，$f''(0)=1+1-2a>0$ 来说明 $f(0)$ 是极小值.

以上例 1，例 3 都是给定了 c 判定 $f(c)$ 是否极值. 如果不知道 c 要求极值点，需要先解方程 $f'(x)=0$ 求出 c 满足必要条件 $f'(c)=0$，再判定是否满足充分条件.

例 4 (2017 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题) 函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

大学视角下的中学数学(泰勒展开)

李尚志

（北京航空航天大学　100083）

例 1　（2018 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题）

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的值.

大学视角

用泰勒展开式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ 得

$$f(x)=(2+x+ax^2)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-2x$$

$$=\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\right)x^4+\cdots \qquad (1)$$

如果三次项系数 $a+\frac{1}{6}\neq 0$，在 0 附近足够小的区间 $(-d,d)$ 内，三次以上各项和绝对值比三次项小，$f(x)$ 的正负号与三次项 $(a+\frac{1}{6})x^3$ 相同，$f(x)$ 与 $f(-x)$ 异号，总有一个大于 0，$f(0)=0$ 不是极大值.

要使 $f(0)$ 极大，必须三次项系数 $a+\frac{1}{6}=0$，$a=-\frac{1}{6}$. 此时 $f(x)=-\frac{1}{12}x^4+\cdots$ 的最低次非零项是四次项 $-\frac{1}{12}x^4$. 在 0 附近足够小的区间内，$f(x)$ 的正负号与四次项 $-\frac{1}{12}x^4$ 相同，当 $x\neq 0$ 时都小于 0，$f(0)$ 确实是极大值.

一般地，设 $f(x)=f(c)+a_m(x-c)^m+a_{m+1}(x-c)^{m+1}+\cdots$ 是无穷级数且 $a_m\neq 0$ 是常数项之外最低次非零项的系数. 则当 $x\to c$ 时 $f(x)-f(c)=(x-c)^m[a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots]$，方括号内的 $\lambda(x)=a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots\to a_m$，在 c 附近足够小的区间 $(c-d,c+d)$ 内，$|x-c|$ 足够小，$\lambda(x)$ 足够接近 a_m，正负号与 a_m 相同. $f(x)-f(c)$ 与 m 次项 $a_m(x-c)^m$ 正负号相同.

当 m 是奇数，$x-c<0$ 与 $x-c>0$ 时 $f(x)-f(c)$ 的正负号相反，一正一负，$f(c)$ 既不是极大值也不是极小值.

当 m 是偶数，只要 $x-c\neq 0$ 都有 $(x-c)^m>0$. 当 $a_m<0$ 时都有 $f(x)-f(c)<0$，$f(c)$ 是极大值. 当 $a_m>0$ 时都有 $f(x)-f(c)>0$，$f(c)$ 是极小值.

中学生只要背熟了泰勒展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

就不难在草稿上完成以上解答，知道此题的正确答案. 他不能将这个解答写在高考试卷上，但既然知道了 $f(x)$ 展开式中的三次以下的项都等于 0，就知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶与二阶导数 $f'(0)=f''(0)=0$ 都等于 0. 也知道应该根据三阶导数 $f^{(3)}(0)=0$ 得到 $a=-\frac{1}{6}$，并且根据 0 附近的三阶导数 $f^{(3)}(x)<0$ 来论证 $f(0)$ 确实是极大值. 他已经胸有成竹，只需按照既定路线一步一步算导数达到预定目标. 别的考生也在一步一步算导数，却茫然不知前面的道路会遇到什么障碍，算出一阶和二阶导数都等于 0 就可能不知所措了.

中学解法

首先，$f(x)=0$.

(1) $a=0$，$h(x)=f'(x)=\ln(1+x)+\frac{2+x}{1+x}$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

大学视角下的中学数学(复数)

李尚志

(北京航空航天大学　100083)

1　复数的几何模型

例 1　(高考 2017 年理科数学全国卷 3)

设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$. 则 $|z|=$______.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

解　$|1+\mathrm{i}||z|=|2\mathrm{i}|\Rightarrow|z|=\frac{|2\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

答案　C.

点评　网上发表的一个答案是:先求出

$$z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{2}=1+\mathrm{i},$$

再求出 $|z|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

很多人喜欢这种做法,按部就班死算复数除法再算模,而不习惯于先求模再相除. 但是,按照这种思路能做出下面的题目吗?

例 2　(中国科大 2016 年自主招生题)

复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=2,|z_2|=3,|z_1+z_2|=4$. 则 $\frac{z_1}{z_2}=$________.

解法 1　(代数算法)设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i},z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,列方程组

$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=|z_1|^2=4 & (1)\\ x_2^2+y_2^2=|z_2|^2=9 & (2)\\ (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=|z_1+z_2|^2=16 & (3)\end{cases}$$

点评　4 个未知数 x_1,x_2,y_1,y_2,3 个方程,你能解出来吗?

题目要求的是 $\frac{z_1}{z_2}$,一定要把 x_1,x_2,y_1,y_2 都解出来吗?

则
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1\mathrm{i}}{x_2+y_2\mathrm{i}}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{(x_2+y_2\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}=\frac{[(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)\mathrm{i}]}{(x_2^2+y_2^2)},$$

$$\begin{aligned}&x_1x_2+y_1y_2\\&=\frac{[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]-(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)}{2}\\&=\frac{16-4-9}{2}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

由
$$\begin{aligned}&(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2\\&=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2)\\&=(x_1y_2)^2-2(x_1y_2)(x_2y_1)+(x_2y_1)^2\\&=(x_1y_2-x_2y_1)^2,\end{aligned}$$

得
$$\begin{aligned}&x_2y_1-x_1y_2\\&=\pm\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}\\&=\pm\sqrt{4\times9-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\\&=\pm\sqrt{\frac{135}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{15},\end{aligned}$$

于是
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{15}\mathrm{i}}{9}=\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}\mathrm{i}.$$

点评　怎么想出用等式(1),(2),(3)算 $x_1x_2+y_1y_2$ 和 $x_2y_1-x_1y_2$?

3 个复数 z_1,z_2,z_1+z_2 代表 3 个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,复数的模是向量的模(有向线段的长度):$|z_1|=|\boldsymbol{a}|,|z_2|=|\boldsymbol{b}|,|z_1+z_2|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

$x_1x_2+y_1y_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 是向量内积,α 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角. 由完全平方公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$(就是余弦定理)得到

$$\begin{aligned}x_1x_2+y_1y_2&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{2}\\&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha.\end{aligned}$$

$|x_2y_1-x_1y_2|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\alpha|$(见《借题发挥 1》),它的平方

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\alpha&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos\alpha^2)\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net