摘要

ULF 理论可被视为一类在随机动力学约束下最大化长期效用的优化框架，其中系统状态以概率分布形式表述，动力学由 Fokker‑Planck 方程刻画，并以效用项与韧性项构成目标泛函

ULF-公理级压缩版本

。
在保持“状态—演化—目标”结构不变的前提下，可构造一个与量子开放系统理论形式平行的对应扩展：以密度算符替代概率分布，以量子主方程（Lindblad 生成元）替代扩散动力学，并以量子相对熵替代 KL 散度，从而得到量子态意义下的 ULF 表达（Quantum-ULF，简称 QULF）。

---

1. 经典 ULF 的结构化表述（作为对应基准）

定义 1.1（经典人生状态与分布）

设人生状态为随机过程 $X_t \in \mathbb{R}^n$，其概率密度为 $\rho(x,t)$。

定义 1.2（经典幸福映射）

给定幸福映射 $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。

定义 1.3（经典韧性泛函）

给定参考稳态分布 $p^*(x)$，韧性泛函定义为

$$R[\rho] = -\int \rho \log \rho \, dx - \int \rho \log p^*(x) \, dx,$$

该形式等价于负 KL 散度（在常数项意义下）

ULF-公理级压缩版本

。

定义 1.4（经典 ULF 目标泛函）

经典 ULF 定义为

$$\mathcal{U} = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha H(X_t) + \beta R[\rho(\cdot,t)])\ dt\right],$$

其中 $\alpha,\beta \geq 0$为权重

ULF-公理级压缩版本

。

---

2. 量子态扩展的核心对象替换

定义 2.1（量子人生状态）

设人生状态由 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$上的密度算符表征：

$$\hat{\rho}(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), \hat{\rho}(t) \geq 0, \mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)) = 1.$$

此处 $\mathcal{D}(\mathcal{H})$表示所有合法量子态的集合。

注：该替换对应于经典 ULF 中的 $\rho(x,t)$（概率密度），但包含更一般的相干性信息（非对角项）。

定义 2.2（量子幸福算符）

给定厄米算符 $\hat{G} = \hat{G}^\dagger$，定义量子幸福（瞬时期望效用）为

$$\mathrm{LHB}(t) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)\,\hat{G}).$$

该定义是经典效用期望 $\mathbb{E}[H(X_t)]$的量子对应物。

3. 量子动力学约束：量子主方程

经典 ULF 通常通过扩散型动力学约束（Fokker‑Planck）刻画 $\rho(x,t)$的演化

ULF-公理级压缩版本

。
量子态版本采用开放量子系统的标准生成元形式（Lindblad 主方程）。

假设 3.1（QULF 的动力学生成元）

设 $\hat{\rho}(t)$在控制输入 u_t下满足：

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}_{u_t}(\hat{\rho}),$$

其中 $\mathcal{L}_u$为完全正、迹保持的 Lindblad 生成元，可写为：

$$\mathcal{L}_u(\hat{\rho}) = -i[\hat{H}(u),\hat{\rho}] + \sum_k \left(\hat{L}_k\hat{\rho}\hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k,\hat{\rho}\}\right).$$

其中：

- $\hat{H}(u)$为控制哈密顿量（可由 u调制）；
- $\{\hat{L}_k\}$为耗散通道算符集合；
- $[A,B]$与 $\{A,B\}$分别为对易子与反对易子。

注：该动力学在结构角色上与经典扩散动力学（Fokker‑Planck）对应：前者为密度算符空间上的演化，后者为概率密度空间上的演化。

4. 量子韧性：量子相对熵与稳态偏离惩罚

经典 ULF 中韧性可解释为“偏离参考稳态的代价的负值”

。
量子态版本采用量子相对熵作为对应信息度量。

定义 4.1（量子相对熵）

给定参考态 $\hat{\sigma} > 0$，定义量子相对熵：

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}(\log \hat{\rho} - \log \hat{\sigma})).$$

定义 4.2（量子韧性泛函）

给定参考稳态 $\hat{\rho}^*$，定义量子韧性：

$$R_Q[\hat{\rho}] = -D(\hat{\rho} \parallel \hat{\rho}^*).$$

该定义与经典韧性 $R[\rho] \approx -D_{KL}(\rho \parallel p^*)$在形式角色上保持一致。

---

5. Quantum-ULF（QULF）目标泛函

定义 5.1（QULF 目标泛函）

在量子态动力学约束下，定义量子版 ULF：

$$\boxed{\mathcal{U}_Q[u(\cdot)] = \int_0^T \Big(\alpha\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)\hat{G}) + \beta\,R_Q[\hat{\rho}(t)]\Big)\,dt}$$

其中 $R_Q[\hat{\rho}] = -D(\hat{\rho} \parallel \hat{\rho}^*)$。

展开后得到：

$$\mathcal{U}_Q = \int_0^T \Big(\alpha\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{G}) - \beta\,D(\hat{\rho} \parallel \hat{\rho}^*)\Big)\,dt.$$

说明：该形式保持经典 ULF“效用项 + 韧性项”的结构

ULF-公理级压缩版本

；差别仅在于状态空间由概率密度函数扩展为密度算符。

---

6. QULF 的最优控制形式（量子庞特里亚金结构）

经典 ULF 中最优性条件可写成变分最优原则，并对应 HJB - Fokker - Planck 耦合系统

ULF-公理级压缩版本

。
量子态版本对应量子最优控制的算符变分条件。

定义 6.1（量子控制问题）

求控制 $u^*(t)$，使得

$$u^*(\cdot) = \arg\max_{u(\cdot)} \mathcal{U}_Q[u(\cdot)]$$

在约束

$$\dot{\hat{\rho}} = \mathcal{L}_u(\hat{\rho})$$

下成立。

定义 6.2（量子协态算符与 Hamiltonian）

引入量子协态算符 $\hat{\Lambda}(t)$，定义算符形式 Hamiltonian：

$$\mathfrak{H}_Q(\hat{\rho}, \hat{\Lambda}, u) = \alpha\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{G}) - \beta\, D(\hat{\rho} \parallel \hat{\rho}^*) + \mathrm{Tr}(\hat{\Lambda}\,\mathcal{L}_u(\hat{\rho})).$$

命题 6.3（QULF 的必要最优性条件：形式版本）

若 $u^*(t)$为最优控制，则存在协态 $\widehat{\Lambda}(t)$使得：

- 正向状态方程：

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{\partial \mathfrak{H}_Q}{\partial \widehat{\Lambda}} = \mathcal{L}_{u^*}(\hat{\rho}),$$

- 反向协态方程：

$$\dot{\widehat{\Lambda}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_Q}{\partial \hat{\rho}},$$

- 点态最优控制条件：

$$u^*(t) = \arg \max_u \mathfrak{H}_Q(\hat{\rho}, \widehat{\Lambda}, u).$$

该形式与经典最优控制中的庞特里亚金极值原理保持同构。

---

7. 经典极限：QULF 退化为经典 ULF 的条件

量子态版本的理论合理性要求其在适当极限下退化为经典 ULF（类似量子力学退化为经典力学）。

命题 7.1（退相干对角极限下的经典化）

若在某固定基底下满足：

1. $\hat{\rho}(t)$近似对角：$\hat{\rho}(t) \approx \mathrm{diag}(p(t))$；
2. $\hat{\rho}^* \approx \mathrm{diag}(p^*)$；

3. $\hat{G} \approx \mathrm{diag}(g)$；

则有：

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{G}) \to \sum_i p_i\, g_i, D(\hat{\rho} \parallel \hat{\rho}^*) \to D_{KL}(p \parallel p^*).$$

因此：

$$\mathcal{U}_Q \to \mathcal{U},$$

即 QULF 在退相干极限下恢复经典 ULF。

---

8. 结论

QULF 可被视为 ULF 理论的一种量子信息与量子动力学对应扩展。其关键特征为：

1. **状态表示扩展**：由概率密度 $\rho(x,t)$扩展为密度算符 $\hat{\rho}(t)$；
2. **动力学约束替换**：由 Fokker - Planck 扩展为 Lindblad 生成元；
3. **韧性项泛化**：由 KL 散度泛化为量子相对熵；
4. **目标结构保持**：效用项与韧性项的加权积分结构保持不变

   ULF-公理级压缩版本

   ；

5. **经典可恢复性**：在退相干对角极限下可回收经典 ULF 形式。

该扩展在理论层面提供一种将 ULF 置于更一般信息几何与开放系统框架中的表述方式。
