标度假定和重整化群（一个初步的认识）

XH Yang

2021 年 3 月 7 日

1　简单的背景介绍

重整化的方法最早可以追溯到上世纪六十年代人们对量子电动力学高能行为的研究，这套方法并不是QFT的一个基本的组成部分，而只是一种处理无穷大的理论框架。之后，Wilson, Kadanoff, Fisher等人将这套方法引入统计物理之中，用于处理在临界点处具有标度不变性的统计系统，获得了很大的成功。

在此份笔记中，我们将从临界点附近的齐次性假设（homogeneity assumption）出发，逐步引出在临界点处的dilation symmetry和self-similarity，并自然给出重整化群的框架以及两个计算例子：一维Ising model和d维Gaussian model的重整化计算。

2　齐次假设

2.1　自由能的齐次性假设

以顺磁-铁磁相变的Landau-Ginzburg理论为例。体系的配分函数可以写成对场构型$\{\vec{m}(\vec{x})\}$的泛函积分：我们知道，在连续相变的相变点附近，物理量的临界行为可以用一组临界指数$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta, ...\}$来描述，观测量和响应函数在临界点附近的行为由它们刻画：

$$C_{\pm}(t,h\to 0)\sim |t|_{\pm}^{-\alpha} \tag{1}$$
$$m(t,h=0)\sim |t|^{\beta}, t<0 \tag{2}$$
$$\chi_{\pm}(t,h=0)\sim |t|^{\gamma_{\pm}} \tag{3}$$
$$m(t=0,h)\sim h^{\frac{1}{\delta}} \tag{4}$$
$$\xi_{\pm}(t,h=0)\sim |t|^{-\nu_{\pm}} \tag{5}$$
$$G_{X,X}^{c}\sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} \tag{6}$$

其中C是热容，m是平均磁化强度，χ是磁化率，ξ和$G_{X,X}^{c}$分别是实空间的关联长度和（连带）关联函数（注意对不同物理量的关联η一般是不同的），而参数t和h分别代表约化温度和外磁场的大小。事实上，这些临界指数之间满足一定的关系，而且仅有有限个独立的临界指数。

考虑顺磁-铁磁相变的LG理论：

$$\mathcal{Z}=\int \mathcal{D}\vec{m}(\vec{x})\exp\{-\beta\mathcal{H}[\vec{m}(\vec{x})]\} \tag{7}$$

其中有效哈密顿量$\beta\mathcal{H}[\vec{m}(\vec{x})]$为：

$$\beta\mathcal{H}=\beta F_0+\int \mathsf{d}^d x\left[\frac{t}{2}m^2+um^4+vm^6+\cdots+\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2+\frac{L}{2}(\nabla^2\vec{m})^2+\cdots-\vec{h}\cdot\vec{m}\right] \tag{8}$$

忽略掉有效哈密顿量中的常数项（这一项是由体系粗粒化之后忽略掉的微观自由度产生的）并做鞍点近似，我们可以体系的平均自由能为(保留到m^4)：

$$\frac{\beta f(t,h)}{V}=\mathsf{min}\{\frac{t}{2}m^2+um^4-\vec{h}\cdot\vec{m}\} \tag{9}$$

由简单的求导步骤，我们可以知道自由能的取值：

$$\frac{\beta f(t,h)}{V}=\begin{cases}-\dfrac{1}{16}\dfrac{t^2}{u} & ,h=0,t<0\\ 0 & ,h=0,t\geq 0\\ -\dfrac{3}{4^{4/3}}\dfrac{h^{4/3}}{u^{1/3}} & ,h\neq 0,t=0.\end{cases} \tag{10}$$

这个函数在临界点处的行为可以用一个函数$f(t,h)=|t|^2 g_f(\frac{h}{|t|^{\Delta}})$来描述（注意是仅在临界点附近的渐进行为），其中$g_f$是以$\frac{h}{|t|^{\delta}}$为自变量的广义齐次函

数（至于为什么这里的argument选t的绝对值之后讨论中有涉及，其实也可以写t啦）。通过考察$\frac{h}{|t|^\delta}\to 0$和$\frac{h}{|t|^\delta}\to\infty$时自由能的行为，我们可以知道:$\lim_{x\to 0} g_f(x)\sim 1/u$, $\lim_{x\to\infty}\sim\frac{x^{4/3}}{u^{1/3}}$，且因为$t\to 0$时，$f(t,h)$与t无关，因此得到$\Delta=\frac{3}{2}$. 我们是在鞍点近似下得到$f(t,h)$的齐次形式的，相当于只考虑了最可几的构型而忽略掉了鞍点附近的涨落，于是，我们将临界点附近自由能是系统参数的广义齐次函数（以及相关的热力学量）这一结论推广到考虑了涨落的情形，只是此时形式略有不同，我们假设当考虑了涨落时，平均自由能的奇异性仍可以用一广义齐次函数[1]刻画：

$$f_{sing}(t,h)=|t|^{2-\alpha}g_f(h/|t|^\Delta) \tag{11}$$

式中α和Δ取决于我们所考虑的临界点，下标$sing$表示自由能的singular part。由此可得：

$$E_{sing}\sim\frac{\partial f}{\partial t}\sim|t|^{1-\alpha}(2-\alpha)[g_f(h/|t|^\Delta)-\frac{h}{|t|^\Delta}g_f'(\frac{h}{|t|^\Delta})]\sim|t|^{1-\alpha}g_E(h/|t|^\Delta),\ \ (t>0) \tag{12}$$

不难证明式中$g_E(x)$仍然是x的广义齐次函数。进而得到比热的行为：

$$C_{sing}\sim-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\sim|t|^{-\alpha}g_C(h/|t|^\Delta) \tag{13}$$

我们可以假设当$t>0$和$t<0$时，比热的指数α和Δ均不同，且广义齐次函数$g_C(h/|t|^\Delta)$的形式也不同，亦即：

$$C_\pm(t,h)=|t|^{-\alpha_\pm}g_\pm(h/|t|^{\Delta_\pm}) \tag{14}$$

但这其实是没有必要的。因为我们知道，自由能仅在$h=0$和$t\le 0$上是非解析的。因此对于$t=0$以及有限的h，自由能是解析的，在$(0,h)$邻域内对比热Taylor展开：

$$C(t,h)=A(h)+tB(h)+\mathcal{O}(t^2) \tag{15}$$

[1]一个广义齐次函数$f(x_1,x_2,\cdots)$满足

$$f(b^{p_1}x_1,b^{p_2}x_2,\cdots)=b^{p_f}f(x_1,x_2,\cdots)$$

这时我们可以将b选为x_1^{-1/p_1},从而$f(x_1,x_2,\cdots)=x_1^{p_f/p_1}f(1,x_1^{-p_2/p_1})$,从而消去$f$的一个argument。

对(14)式渐进展开，得到：

$$C_{\pm} = |t|^{-\alpha_{\pm}} \left[A_{\pm} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta_{\pm}}} \right)^{p_{\pm}} + B_{\pm} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta_{\pm}}} \right)^{q_{\pm}} + \cdots \right] \tag{16}$$

对比两式，可知$p_{\pm} = -\frac{\alpha_{\pm}}{\Delta_{\pm}}$和$q_{\pm} = -\frac{\alpha_{\pm}+1}{\Delta_{\pm}}$，又根据解析性，由于$h$是任意的有限值，要使得$c_+$和$C_-$match的话，就应当有：

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_+}{\Delta_+} = \dfrac{\alpha_-}{\Delta_-} \\ \dfrac{\alpha_+ + 1}{\Delta_+} = \dfrac{\alpha_- + 1}{\Delta_-} \\ A+ = -A_- \\ B+ = -B_- \end{cases} \tag{17}$$

所以α_+和α_-，Δ_+和Δ_-是相同的。再来看看磁化强度$m(t,h)$和磁化率$\chi(t,h)$的临界行为。

$$m \sim \frac{\partial f}{\partial h} \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} g'(h/|t|^{\Delta}) \equiv |t|^{2-\alpha-\Delta} g_m(h/|t|^{\Delta}) \tag{18}$$

当$h \to 0$，

$$g_m(x \to 0) \to const \qquad \Longrightarrow \qquad m(t,0) \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} \tag{19}$$

当$t \to 0$，

$$g_m(x \to \infty) \sim x^p \qquad \Longrightarrow \qquad m(0,h) \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta}} \right)^p \tag{20}$$

因为此时m与t无关，因此有$p = \frac{2-\alpha-\Delta}{\Delta}$，

$$m(0,h) \sim h^{(2-\alpha-\Delta/\Delta} \tag{21}$$

对于临界点附近的磁化率，有：

$$\chi \sim \frac{\partial m}{\partial h} \sim |t|^{2-\alpha-2\Delta} g_{\chi}(h/|t|^{\Delta}) \tag{22}$$

结合之前关于临界指数的讨论，得到临界指数：

$$\begin{aligned} \beta &= 2 - \alpha - \Delta \\ \delta &= \frac{\Delta}{2-\alpha-\Delta} = \frac{\Delta}{\beta} \\ \gamma &= 2\Delta - 2 + \alpha \end{aligned} \tag{23}$$

现在回过头来看，我们可以从标度假设得到以下结论（推论，毕竟这里只是一个铁磁-顺磁转变的例子）：

- 对一个一般的物理量，在临界点两边，它的singular的部分都是以齐次函数的形式出现的，并且临界指数相同；
- 临界指数之间并不独立，在这个例子里面，我们可以看到所有的临界指数都可以用α和Δ表示出来；
- 临界指数之间满足一定的关系：

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ &\delta = \frac{\Delta}{\beta} = \frac{\gamma+\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} + 1 \end{aligned} \tag{24}$$

			α	β	γ	δ	ν	η
$d=3$	$n=1$	Ising	0.12	0.31	1.25	5	0.64	0.05
	$n=2$	XY-spin	0.00	0.33	1.33	5	0.66	0.00
	$n=3$	Heisenberg	-0.14	0.35	1.4	5	0.7	0.04
$d=2$	$n=1$	Ising	0	1/8	7/4	15	1	1/4

图 1: 一些模型的临界指数

和理论以及实验的测量值进行比对可以近似地验证以上两个等式。

2.2 关联长度的齐次性假设

我们知道，临界点往往对应着关联长度的发散和(bulk)响应函数的发散，但在上面的讨论中并未出现关联长度的信息。为了将关联长度ξ纳入讨论的范围，我们试着用ξ的齐次假设代替自由能的齐次假设：
关联长度的齐次假设：

- 在临界点处关联长度有齐次函数的形式：

$$\xi(t,h) \sim |t|^{-\nu} g(h/|t|^{\Delta}) \tag{25}$$

- 在临界点处，关联长度是最重要的尺度，且它决定了体系体系的物理量在临界点处的奇异行为。

因为$ln\mathcal{Z}$是一个广延的、无量纲的量，及是说其领头项$\sim L^d$且需要约去一个有L^d量纲的物理量，结合上述的第二点，我们认为它有这样的形式：

$$ln\mathcal{Z} = \left(\frac{L}{\xi}\right)^d \cdot g_s + \cdots + \left(\frac{L}{a}\right)^d \cdot g_a \tag{26}$$

其中a是体系的微观的特征长度，比如晶格常数。g_s和g_a是非奇异的函数，式中出现$\sim\left(\frac{L}{a}\right)$的这一项与之前所说的自由能中积掉的那部分微观自由度有关。那么平均自由能的奇异部分是：

$$f_{sing} \sim \frac{ln\mathcal{Z}}{L^d} \sim \xi^{-d} \sim |t|^{d\nu} g_f(h/|t|^{\Delta}) \tag{27}$$

我们又重新得到了自由能的齐次形式，并且得到一个临界指数间的关系：

$$2-\alpha = d\nu \tag{28}$$

这个被称为超标度关系，可以看到它包含了空间的维数d。当$d>4$时的时候，由于涨落的影响较小，我们可以取鞍点近似的结果$\nu \sim \frac{1}{2}$和$\alpha = 0$，此时这个等式不成立了，但在$d<4$的时候实验的结果可以验证这一等式。任何关于临界行为的理论一定要和这个等式在$d<4$和$d>4$时的成立与否的情况相吻合。

2.3 临界关联函数和自相似

由朗道平均场理论的计算，我们有关联函数$G(\vec{x}) \sim \frac{e^{-\frac{|\vec{x}|}{\xi}}}{|\vec{x}|^{d-2+\eta}}$，其中$\eta$是和关联有关的临界指数。在临界点处，关联长度$\xi$是发散到无穷的（虽然我们这里是考虑临界点附近的），因此关联函数没有一个指数压低的行为，而完全是以power law随距离变化而变化的。磁化强度和能量的关联分别是：

$$G^C_{m,m}(\vec{x}) \equiv \langle m(\vec{x})m(\vec{0})\rangle - \langle m\rangle^2 \sim 1/|\vec{x}|^{d-2+\eta} \tag{29}$$

$$G^C_{E,E}(\vec{x}) \equiv \langle \mathcal{H}(\vec{x})\mathcal{H}(\vec{0})\rangle - \langle \mathcal{H}\rangle^2 \sim 1/|\vec{x}|^{d-2+\eta'} \tag{30}$$

响应函数是关联函数对空间自由度的积分：

$$\chi \sim \int \mathbf{d}^d\vec{x} G^C_{m,m}(\vec{x}) \sim \int^{\xi} \frac{\mathbf{d}^d\vec{x}}{|\vec{x}|^{d-2+\eta}} \sim \xi^{2-\eta} \sim |t|^{-\nu(2-\eta)} \tag{31}$$

$$C \sim \int \mathbf{d}^d\vec{x} G^C_{E,E}(\vec{x}) \sim \int^{\xi} \frac{\mathbf{d}^d\vec{x}}{|\vec{x}|^{d-2+\eta'}} \sim \xi^{2-\eta} \sim |t|^{-\nu(2-\eta')} \tag{32}$$

所以我们又有两个临界指数的等式：

$$\gamma = (2-\eta)\nu \tag{33}$$

$$\alpha = (2-\eta')\nu \tag{34}$$

由于α和γ都可以用ν、Δ表示，因此η和η'都可以写成ν和Δ的函数。可以看到，我们只需要两个独立的临界指数就能描述所有的临界行为。标度理论还向我们揭示了很重要的一点：处于临界点的系统具有伸缩（dilation）对称性。在标度变换下，临界点处关联函数满足：

$$G_{critical}(\lambda\vec{x}) = \lambda^p G_{critical}(\vec{x}) \tag{35}$$

式（35）说明了在临界点处，系统（的涨落）具有标度不变性（或者说是自相似性）。如果将临界系统的一张图像进行放大($\lambda < 1$)或者缩小($\lambda > 1$)，那么我们观察到的新的涨落图像和原本的除了相差一个常数的因子之外，整体的结构是不变的。只有将LG理论中的local的对称性（比如O(n)）和伸缩对称性结合起来，我们才能得到真正的临界点处的理论（尽管一般情况下，标度不变不会限制有效哈密顿量的形式）。在二维，标度不变蕴含了共形不变性，因此二维的理论必须具有共形不变的特点。