基于非线性负阻元件的蔡氏电路动力学分析

何子宁

Jan. 2026

1 问题来源

本题灵感来源于本学期的《大学物理实验》课程。在“非线性电路混沌现象”实验中，我实际搭建了蔡氏电路并观察到了双涡卷吸引子。结合《电路理论》课程中关于非线性电阻和动态电路分析的内容，我将实验电路抽象为如下理论模型，并尝试从电路原理角度求解其静态工作点，以解释电路起振的初始条件。

2 自编题目

【题目描述】

图 ?? 所示为蔡氏电路（Chua's Circuit）的简化模型。电路包含四个线性动态/静态元件：电感 L、电阻 R、电容 C_1 和 C_2。最右侧的元件 N_R 是一个非线性有源电阻（蔡氏二极管），其伏安特性曲线 $i_R = g(v_R)$ 如图 ?? 所示。

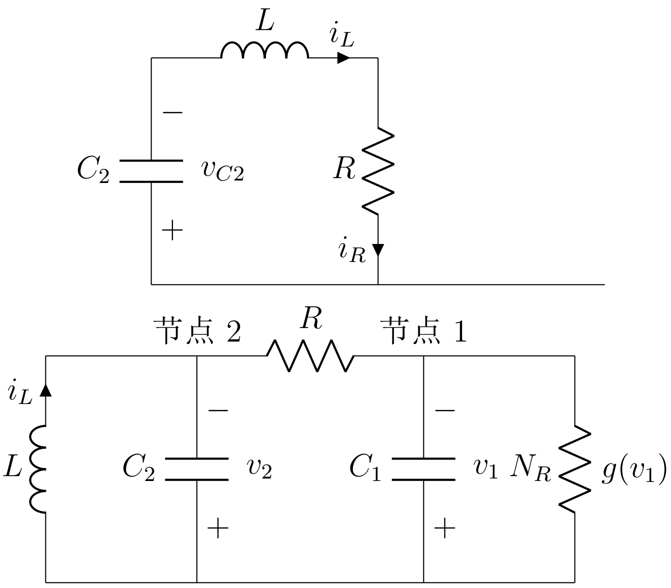

图 1: 蔡氏电路原理图

非线性电阻 N_R 的伏安特性 $i_R = g(v_1)$ 满足以下分段线性关系（其中 v_1 为电容 C_1 两端电压）：

$$g(v_1) = m_1 v_1 + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|v_1 + E| - |v_1 - E|) \tag{1}$$

其几何含义如图 ?? 所示：在 $|v_1| < E$ 区域斜率为 m_0，在 $|v_1| > E$ 区域斜率为 m_1。通常实验中配置 $m_0 < m_1 < 0$，即表现为负阻特性。

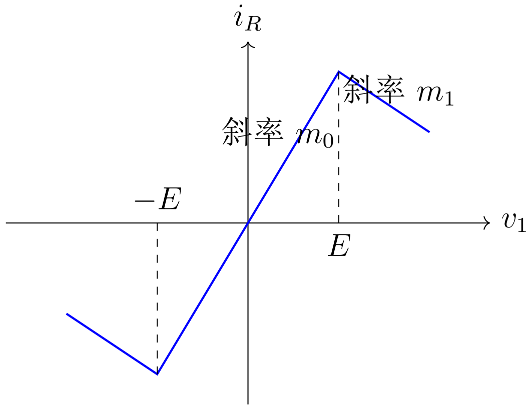

图 2: 非线性电阻 N_R 的 $i - v$ 特性曲线

问题：

1. 选取电容电压 v_1, v_2 和电感电流 i_L 作为状态变量，列写该电路的状态方程。
2. 设电路参数满足 $G = 1/R$，且 $m_0 < -G < m_1 < 0$。当电路处于**直流稳态**时（即电容相当于开路，电感相当于短路），试求此时电路的**静态工作点**（即 v_1, v_2, i_L 的值）。
3. （选做）结合第四章非线性电阻的**负载线法**（Load Line Method）思想，讨论为什么在 $m_0 < -G$ 的条件下会存在非零的静态工作点。

3 解答过程

3.1 1. 建立状态方程

选取独立电容电压 v_1, v_2 和独立电感电流 i_L 为状态变量。

(1) 对节点 1 应用 KCL：流出节点的电流之和为零。

$$C_1\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1-v_2}{R}+g(v_1)=0$$

整理得：

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{1}{C_1}[G(v_2-v_1)-g(v_1)] \tag{2}$$

其中 $G=1/R$ 为线性电阻的电导。

(2) 对节点 2 应用 KCL：

$$C_2\frac{dv_2}{dt}+\frac{v_2-v_1}{R}+i_L=0$$

整理得：

$$\frac{dv_2}{dt}=\frac{1}{C_2}[G(v_1-v_2)-i_L] \tag{3}$$

(3) 对电感支路应用 KVL：电感电压等于节点 2 电压（注意参考方向，图中 i_L 从下往上流则 $v_L=-v_2$，若 i_L 定义为从左向右流入电感，则需根据图示调整）。假设图 ?? 中 i_L 方向定义为流出节点 2 进入地（或电感两端电压为 v_2-0），则：

$$L\frac{di_L}{dt}=-v_2 \quad (\text{假设}i_L\text{ 方向如图中流向电感支路且电感接地})$$

注：通常蔡氏电路标准方程中，电感电流方向定义不同会相差一个负号。若定义 i_L 为流过 L 的电流，且 L 两端电压为 $v_L=v_2$，则：

$$\frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{L}v_2 \tag{4}$$

综上，电路的状态方程组为：

$$\begin{cases}\dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{1}{C_1}[G(v_2-v_1)-g(v_1)]\\ \dfrac{dv_2}{dt}=\dfrac{1}{C_2}[G(v_1-v_2)-i_L]\\ \dfrac{di_L}{dt}=-\dfrac{1}{L}v_2\end{cases} \tag{5}$$

3.2 2. 求解静态工作点

当电路处于直流稳态时，所有状态变量对时间的导数为零，即 $\frac{d}{dt}=0$。令状态方程左边为 0：

$$\begin{cases}G(v_2-v_1)-g(v_1)=0 & \cdots(a)\\ G(v_1-v_2)-i_L=0 & \cdots(b)\\ v_2=0 & \cdots(c)\end{cases} \tag{6}$$

由 (c) 式直接得：

$$v_2 = 0 \tag{7}$$

将 $v_2 = 0$ 代入 (a) 式：

$$G(0 - v_1) - g(v_1) = 0 \implies g(v_1) = -Gv_1 \tag{8}$$

该式即为非线性电阻的负载线方程。我们需要求解非线性电阻特性曲线 $i = g(v_1)$ 与通过原点的直线 $i = -Gv_1$ 的交点。

根据 $g(v_1)$ 的分段线性定义：

$$g(v_1) = \begin{cases} m_1 v_1 + (m_0 - m_1)E & v_1 > E \\ m_0 v_1 & |v_1| \le E \\ m_1 v_1 - (m_0 - m_1)E & v_1 < -E \end{cases}$$

我们需要解方程 $g(v_1) + Gv_1 = 0$：

情况 1：$|v_1| \le E$

$$m_0 v_1 + Gv_1 = 0 \implies (m_0 + G)v_1 = 0$$

由于 $m_0 \ne -G$，故解得 $v_1 = 0$。此时 $v_2 = 0$，代入 (b) 式得 $i_L = G(0 - 0) = 0$。**工作点** Q_0**：** $(0, 0, 0)$。

情况 2：$v_1 > E$

$$m_1 v_1 + (m_0 - m_1)E + Gv_1 = 0$$
$$(m_1 + G)v_1 = (m_1 - m_0)E$$
$$v_1 = \frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E$$

题目给定条件 $m_0 < -G < m_1 < 0$。

- 分子 $m_1 - m_0 > 0$（因为 m_1 大于 m_0）
- 分母 $m_1 + G$：因为 $-G < m_1$，所以 $G + m_1 > 0$。

因此 v_1 为正值。我们需要验证求出的 v_1 是否满足前提 $v_1 > E$：

$$\begin{aligned} \frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E > E &\iff \frac{m_1 - m_0}{m_1 + G} > 1 \\ &\iff m_1 - m_0 > m_1 + G \\ &\iff -m_0 > G \\ &\iff m_0 < -G \end{aligned}$$

该结果满足题目给定条件 $m_0 < -G$，故解有效。此时 $v_2 = 0$，代入 (b) 式得 $i_L = Gv_1 = G\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E$。**工作点** Q_+**：**$(\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E, 0, G\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E)$。

情况 3：$v_1 < -E$ 根据对称性，必然存在另一个工作点 Q_-。

$$v_1 = -\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E$$

同理可证该解满足 $v_1 < -E$。**工作点** Q_-**：**$(-\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E, 0, -G\frac{m_1 - m_0}{m_1 + G}E)$。

4 结果讨论

- 计算结果表明，在 $m_0 < -G$ 条件下，电路存在 **3 个静态工作点**：原点 Q_0 和两个对称的非零工作点 Q_+, Q_-。
- 结合实验现象分析，系统的轨迹围绕这三个工作点进行复杂的运动，最终在特定的参数下形成了双涡卷（Double Scroll）混沌吸引子。
- 本题通过建立蔡氏电路的状态方程，并利用非线性电阻的分段线性特性求解了电路的静态工作点，展示了如何利用基础电路理论工具研究非线性动力学问题。