

# 线性一阶倒立摆（自起摆）设备文档

## 一、线性一阶倒立摆的结构和工作原理

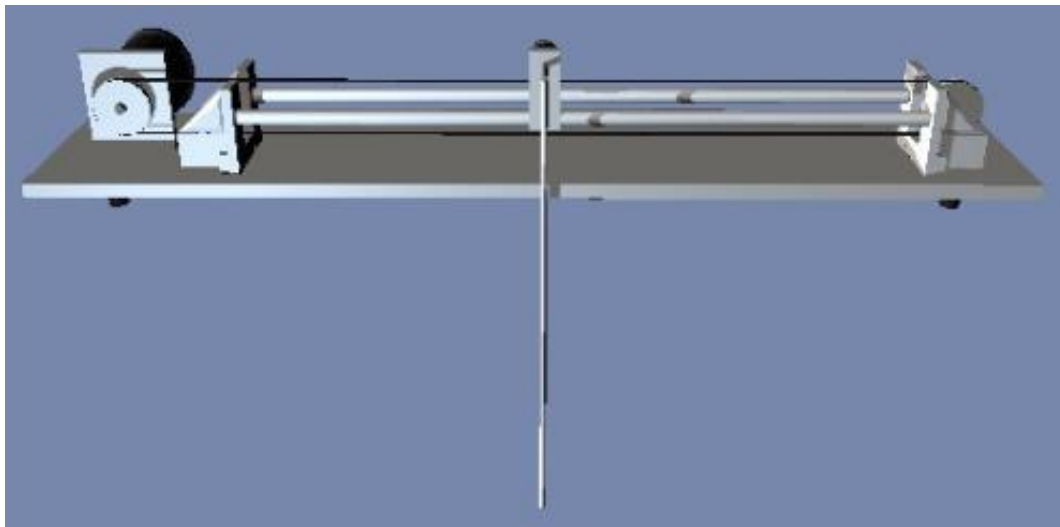


图 1 直线一阶倒立摆示意图

直线一阶倒立摆系统主要由以下几部分组成，如图 1 所示。其机械本体主要包括底座（导轨）、小车、驱动小车的交流伺服电机、同步皮带、摆杆、限位开关及光电码盘等。通过控制交流伺服电机，带动皮带转动，在皮带的带动下小车可以在导轨上运动从而控制摆杆的运动状态。交流伺服电机带有光电式脉冲编码盘，根据脉冲数目可得出工作轴的回转角度，由传动比换算出小车直线位移。在小车的运动导轨上有用于检测小车位置的传感器，小车位置的信号被传送给控制系统，通过控制算法计算出控制量控制电机，从而控制小车的位置，使摆杆垂直于水平面。我们的目的是设计一个控制器，通过控制电机的转动，使摆杆稳定在垂直于水平面的位置。

## 二、直线一阶倒立摆的数学模型

若忽略空气阻力和各种摩擦力之后，可将直线一阶倒立摆系统抽象成小车和质量均匀的摆杆组成的系统，如图 2 所示。图 2 中摆杆运动的正方向是顺时针方向。

$F$  —— 加在小车水平方向上的外力

$l$  —— 摆杆转动轴心到摆杆质心的长度

$\varphi$  —— 摆杆与垂直向下方向的夹角

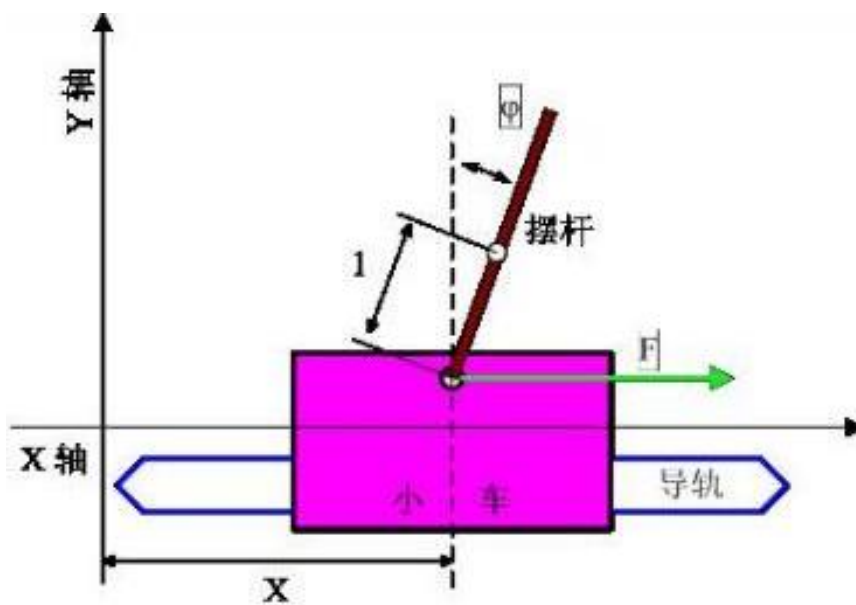


图 2 直线一阶倒立摆受力示意图

通过动力学分析建立拉格朗日方程可得到系统非线性动力学方程如下式所示

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = u \\ (I + ml^2)\ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml\ddot{x} \cos \varphi - c_1\dot{\varphi} \end{cases}$$

其中

$c_1$  —— 摆杆与转轴之间的摩擦系数

$u$  —— 施加给小车的推力

由于摆杆转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

系统线性化后动力学方程变为

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{3}{4ml^2} [mgl\varphi - ml\ddot{x} - c_1\dot{\varphi}] \\ \ddot{x} = \frac{1}{M + m} [-ml\ddot{\varphi} + u] \end{cases}$$

若设定状态变量如下：

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \varphi, x_4 = \dot{\varphi}$$

其中

$x_1$  —— 小车相对于初始位置的位移

$x_2$  —— 摆杆的转角

$x_3$  —— 小车的速度

$x_4$  —— 摆杆的角速度

带入参数可得系统的线性状态空间方程为

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX$$

其中

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3632 & 0.00037 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7.6274 & -0.0078 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0494 \\ 0 \\ -0.037 \end{bmatrix}$$
$$C = I_4$$

### 三、演示算法：能量控制+LQR 控制方法

控制策略为倒立摆在起摆阶段使用能量控制策略对起摆系统模型进行控制，当倒立摆角度趋近于竖直向上时，切换为稳摆控制对稳摆系统模型进行控制，即 LQR 控制。

能量控制策略分为两个模式，一个是起摆震荡模式，一个是起摆控制模式。初始状态为起摆震荡模式，当处于起摆震荡状态时摆杆角度距离竖直向下方向角度大于  $80^\circ$  且摆杆的运动趋势趋于远离竖直向下方向则切换至起摆控制模式；处于起摆控制模式时，当摆杆角度与竖直向上方向角度小于  $40^\circ$  则切换至稳摆控制模式。

在振荡起摆模式中，设置标志位为三个值分别为 1，2，3。默认标志位初始值为 1。当标志位为 1 时，摆杆顺时针方向加速时标志位值切换至 2；当标志位为 2 时，摆杆逆时针方向加速时标志位值切换至 3；当标志位为 3 时，摆杆顺时针方向加速时标志位值切换至 2。当标志位值为 1 时给倒立摆底部小车施加一个较小的向右的力；当标

志位值为 2 时给倒立摆底部小车施加较大的向左的力；当标志位值为 3 时给倒立摆底部小车施加较大的向右的力。

在起摆控制模式中当摆杆与竖直向下方向角度相差  $80^{\circ}$  以内时, 摆杆顺时针运动给倒立摆底部小车施加一个较小的向左的力, 摆杆逆时针运动给倒立摆底部小车施加一个较小的向右的力; 当摆杆与与竖直向上方向角度相差  $100^{\circ}$  以内时, 摆杆顺时针运动给倒立摆底部小车施加一个较大的向右的力, 摆杆逆时针运动给倒立摆底部小车施加一个较大的向左的力。

当摆杆角度与竖直向上方向角度小于  $40^\circ$ ，由起摆控制切换为稳摆控制。稳摆控制采用 LQR 控制方法，根据上一部分的倒立摆在平衡位置线性化状态空间模型可得 LQR 反馈矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -30 & -100 \end{bmatrix}$$

设定导轨长度为 3.6m，小车的初始位置为导轨中央处，向右运动为正，向左运动为负，距离初始位置的最大距离为 1.8m。

建立如图 3 的 Simulink 控制框图, 其中控制模块内部结构如图 4 所示。

得到如图 5 的输出曲线（小车位置）和如图 6 的输出曲线（摆杆角度）。

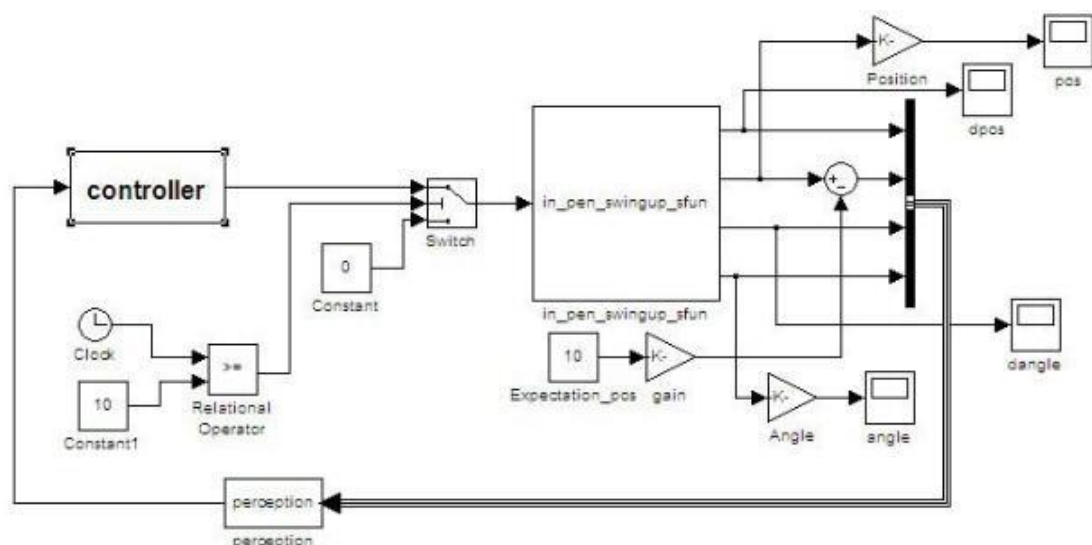


图 3 Simulink 框图

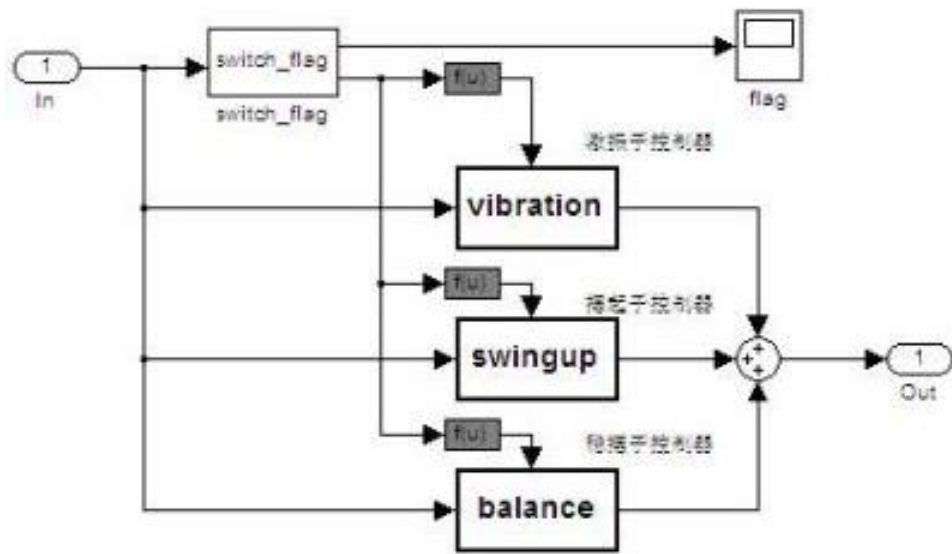


图 4 控制模块内部结构

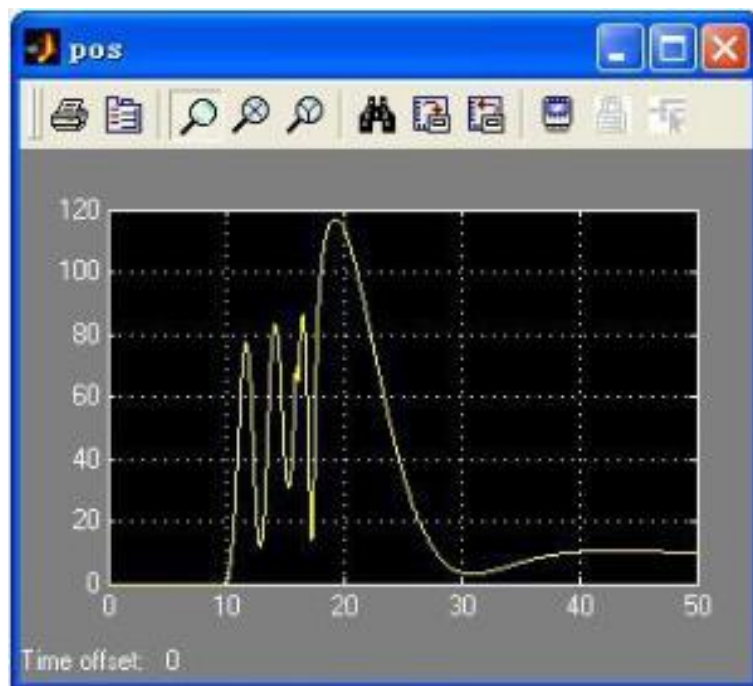


图 5 小车位置图

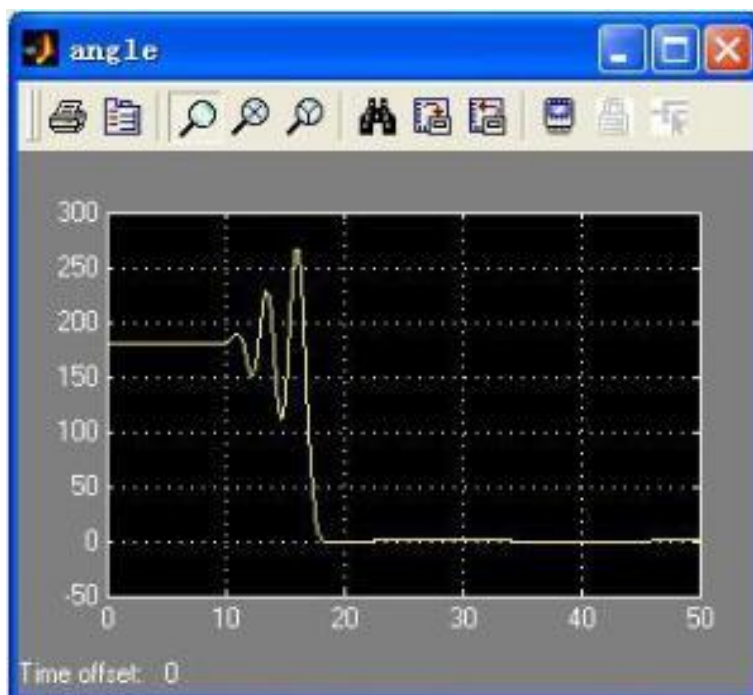


图 6 摆杆与垂直向上方向角度图