

线性二阶倒立摆设备文档

一、线性二阶倒立摆的结构和工作原理

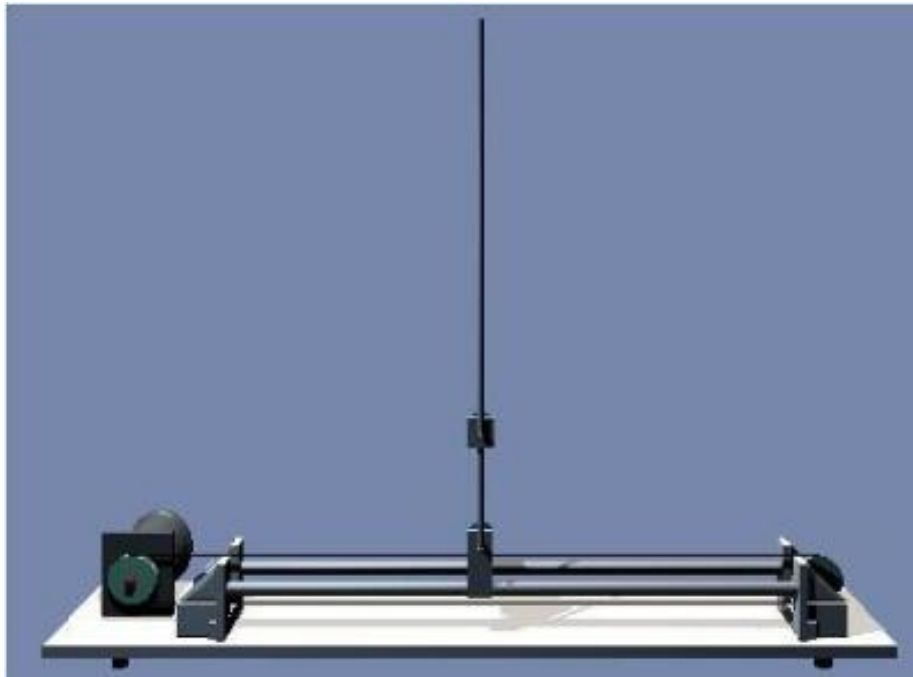


图 1 线性二阶倒立摆示意图

线性二阶倒立摆系统主要由以下几部分组成，如图 1 所示。其机械本体主要包括底座（导轨）、小车、驱动小车的交流伺服电机、同步皮带、一阶摆杆、二阶摆杆、限位开关及光电码盘等。通过控制交流伺服电机，带动皮带转动，在皮带的带动下小车可以在导轨上运动从而控制两阶摆杆的运动状态。交流伺服电机带有光电式脉冲编码盘，根据脉冲数目可得出工作轴的回转角度，由传动比换算出小车线性位移。在小车的运动导轨上有用于检测小车位置的传感器，小车位置的信号被传送给控制系统，通过控制算法计算出控制量控制电机，从而控制小车的位置，使两阶摆杆垂直于水平面。我们的目的是设计一个控制器，通过控制电机的转动，使两阶摆杆稳定在垂直于水平面的位置。

二、线性二阶倒立摆的数学模型

若忽略空气阻力和各种摩擦力之后，可将线性二阶倒立摆系统抽象成小车和质量均匀的摆杆组成的系统，如图 2 所示。

其中符号意为：

F —— 小车所受力

θ_1 —— 一阶摆杆与垂直向上方向的夹角（摆杆初始位置为垂直向下）

θ_2 —— 二阶摆杆与垂直向上方向的夹角（摆杆初始位置为垂直向下）

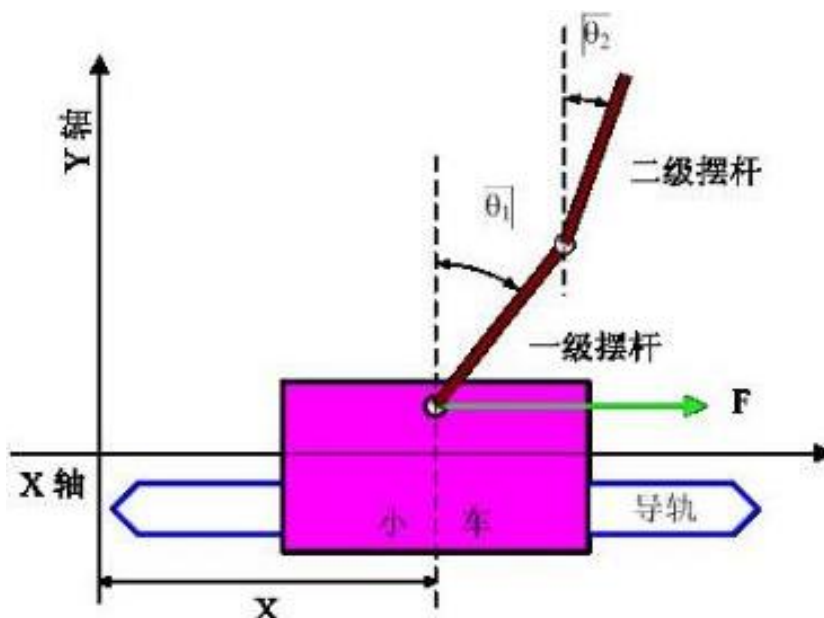


图 2 线性二阶倒立摆受力示意图

通过动力学分析建立拉格朗日方程可得到系统分析非线性动力学方程。若设定如下的状态：

$$x_1 = x, x_2 = \theta_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{x}, x_5 = \dot{\theta}_1, x_6 = \dot{\theta}_2$$

其中

x_1 —— 小车相对于初始位置的位移

x_2 —— 一阶摆杆（下摆杆）的转角

x_3 —— 二阶摆杆（上摆杆）的转角

x_4 —— 小车的速度

x_5 —— 一阶摆杆（下摆杆）的角速度

x_6 —— 二阶摆杆（上摆杆）的角速度

带入参数可得系统在竖直向上位置处的状态空间方程如下式所示：

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX$$

其中

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11.689 & 1.2821 & -20.2945 & 0.0624 & -0.02 & 0 \\ 0 & 114.8452 & -44.3562 & 70.7948 & -0.7292 & 0.3119 & 0 \\ 0 & -123.5638 & 102.0255 & -21.6317 & 0.9825 & -0.5335 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 1.6236 \ -5.6636 \ 1.7305]^T$$

$$C = I_{6 \times 6}$$

三、演示算法：LQR 控制方法

在 Command Window 中输入

```
A=[0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1; 0 -11.689 1.2821 -20.2945
0.0624 -0.02; 0 114.8452 -44.3562 70.7948 -0.7292 0.3119; 0 -123.5638
102.0255 -21.6317 0.9825 -0.5335];
```

```
B=[0; 0; 0; 1.6236; -5.6636; 1.7305];
```

```
Q=[10 0 0 0 0 0; 0 10 0 0 0 0; 0 0 10 0 0 0; 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0
0 0 0 0 1];
```

```
R=0.2;
```

```
K=lqr (A, B, Q, R)
```

得反馈矩阵

```
K = 7.0711 -185.9545 276.7819 5.1163 4.0862 30.1920
```

设定摆杆初始位置为导轨的中点，导轨长度为 1.4m，设定小车的期望平衡位置为 50cm 处，建立如图 3 的 Simulink 控制框图，其中模型部分根据线性一阶倒立摆非线性模型由 S 函数编写，控制模块根据 LQR 控制方法建立。得到如图 4 的输出曲线（小车位置）、如图 5 的输出曲线（一阶摆杆角度）和如图 6 的输出曲线（二阶摆杆角度）。

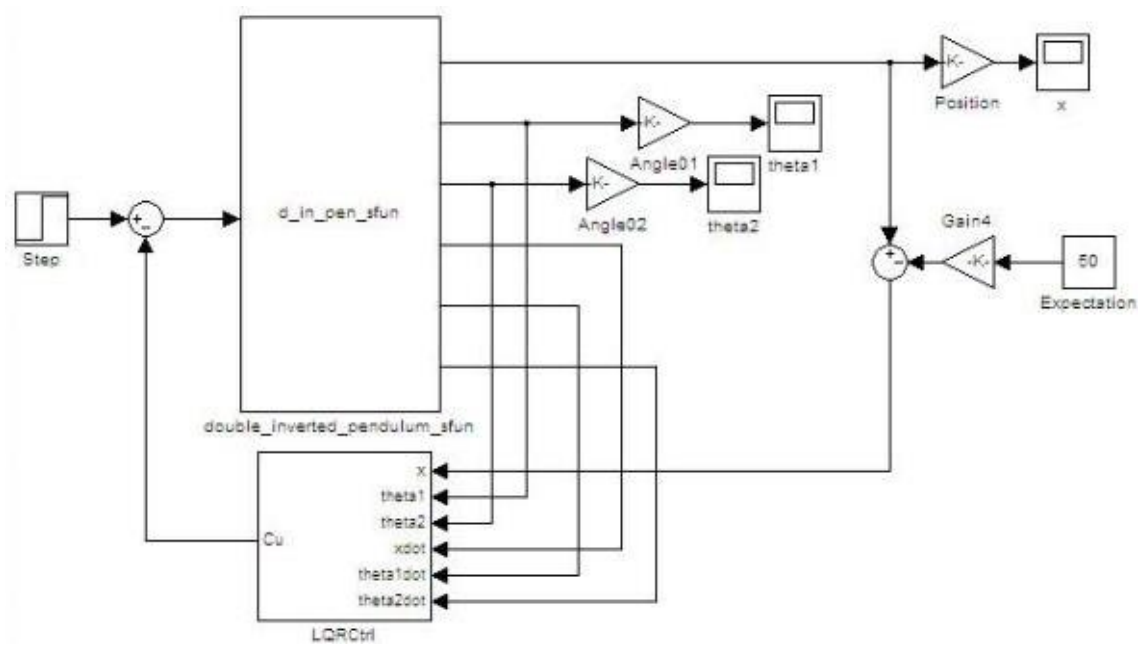


图 3 线性二阶倒立摆的 Simulink 框图

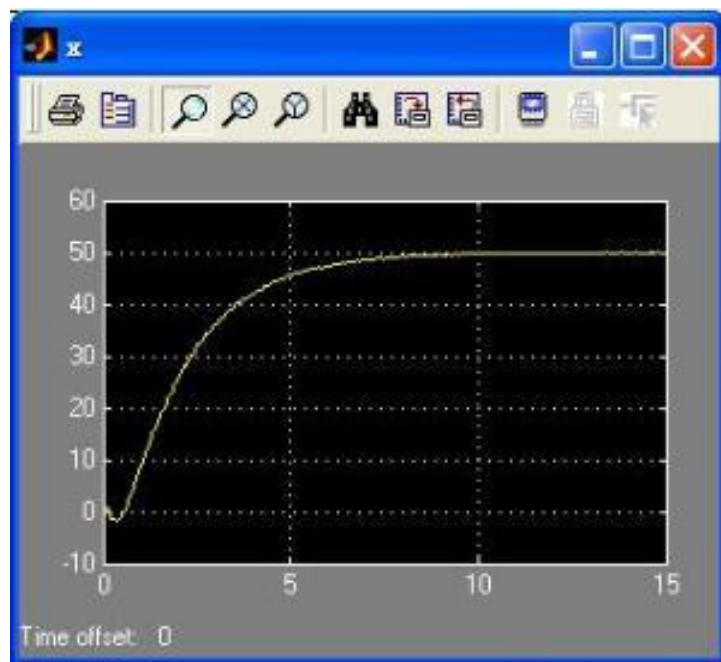


图 4 小车位置图

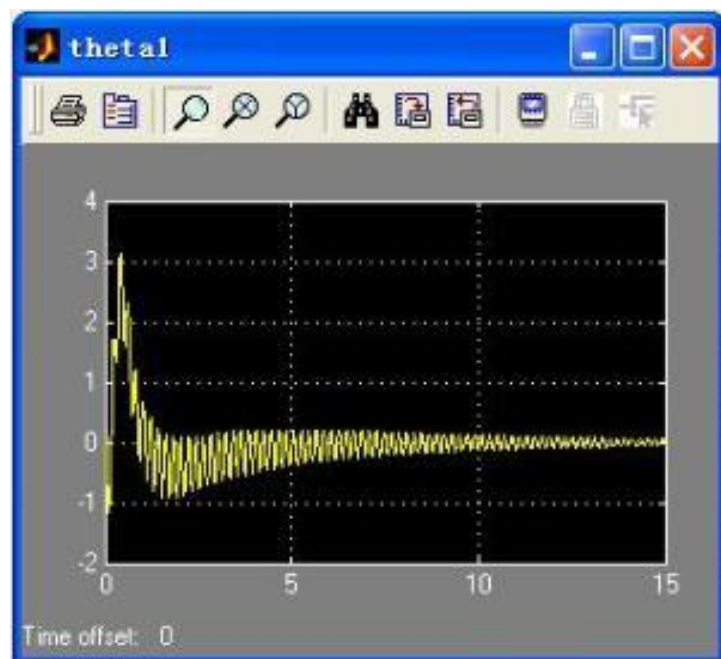


图 5 一阶摆杆与垂直方向角度图

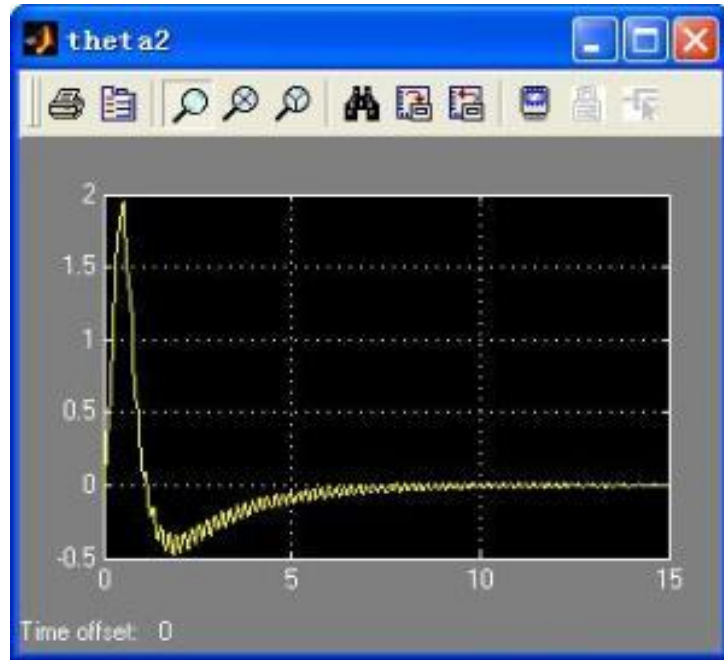


图 6 二阶摆杆与垂直方向角度图