

# 线性一阶倒立摆（顺摆）

## 一、线性一阶倒立摆的结构和工作原理

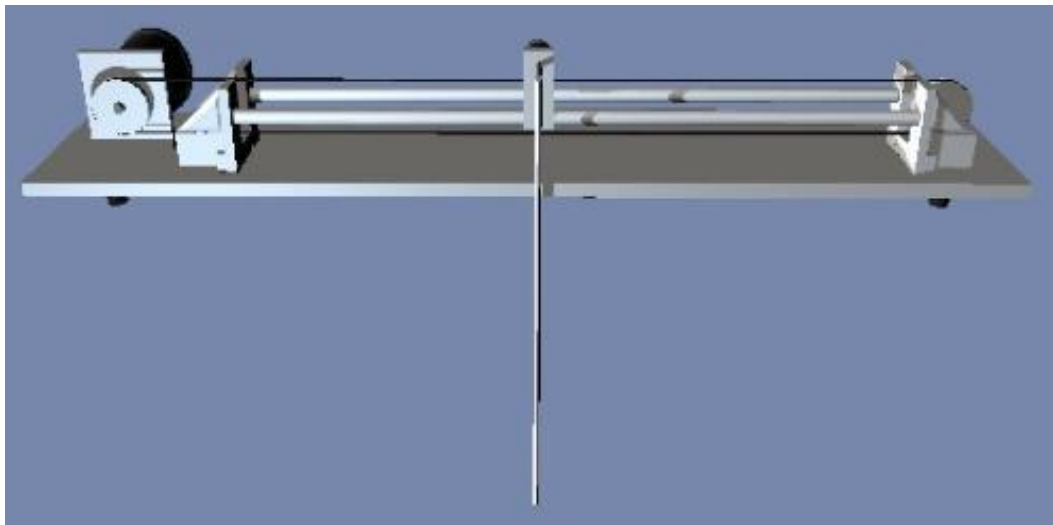


图 1 直线一阶倒立摆示意图

直线一阶倒立摆系统主要由以下几部分组成，如图 1 所示。其机械本体主要包括底座（导轨）、小车、驱动小车的交流伺服电机、同步皮带、摆杆、限位开关及光电码盘等。通过控制交流伺服电机，带动皮带转动，在皮带的带动下小车可以在导轨上运动从而控制摆杆的运动状态。交流伺服电机带有光电式脉冲编码盘，根据脉冲数目可得出工作轴的回转角度，由传动比换算出小车直线位移。在小车的运动导轨上有用于检测小车位置的传感器，小车位置的信号被传送给控制系统，通过控制算法计算出控制量控制电机，从而控制小车的位置，使摆杆垂直于水平面。我们的目的是设计一个控制器，通过控制电机的转动，使摆杆稳定在垂直于水平面的位置。

## 二、直线一阶倒立摆的数学模型

若忽略空气阻力和各种摩擦力之后，可将直线一阶倒立摆系统抽象成小车和质量均匀的摆杆组成的系统，如图 2 所示。图 2 中摆杆运动的正方向是逆时针方向。

我们做如下假设：

$F$  —— 小车所受力

$l$  —— 摆杆转动轴心到摆杆质心的长度

$\varphi$  —— 摆杆与垂直向下方向的夹角

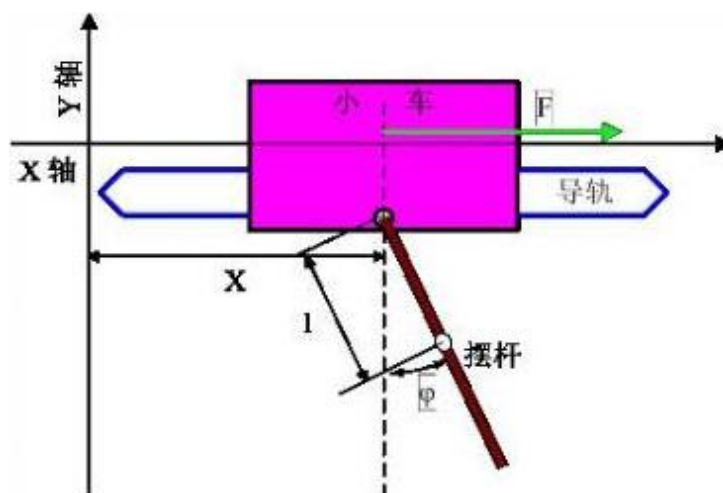


图 2 直线一阶倒立摆受力示意图

通过动力学分析建立拉格朗日方程可得到系统非线性动力学方程。设定状态变量如下：

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \varphi, x_4 = \dot{\varphi}$$

其中

$x_1$  —— 小车相对于初始位置的位移

$x_2$  —— 摆杆的转角

$x_3$  —— 小车的速度

$x_4$  —— 摆杆的角速度

输入为小车加速度，线性化后的系统状态空间方程为

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX$$

带入参数得其中参数矩阵为

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -29.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$C = I_4$$

### 三、演示算法：LQR 控制方法

在 Command Window 中输入

```
A=[0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0 -29.4 0];
```

```
B=[0; 1; 0; -3];
```

```
Q=[10 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 10 0; 0 0 0 1];
```

```
R=1;
```

```
K=lqr (A, B, Q, R)
```

得反馈矩阵

```
K = 3.1623 3.0774 -3.3253 -0.9818
```

设定导轨长度为 1.4m，小车的初始位置为导轨中央处，向右运动为正，向左运动为负，距离初始位置的最大距离为 0.7m。建立如图 3 的 Simulink 控制框图。得到如图 4 的输出曲线（小车位置）和如图 5 的输出曲线（摆杆角度）。

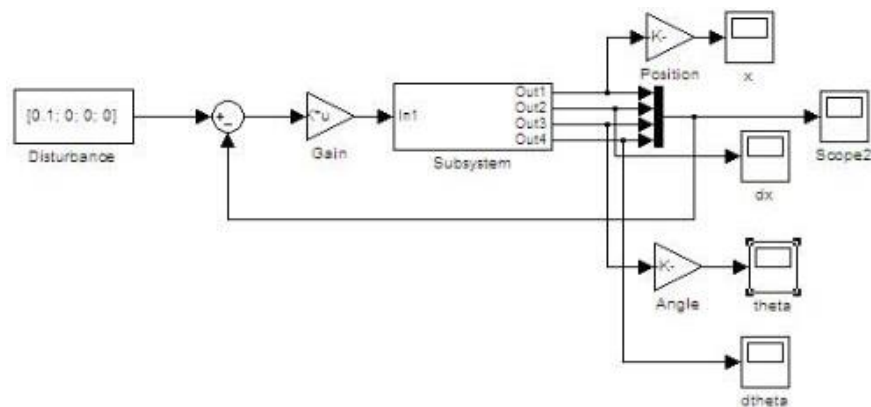


图 3 Simulink 框图

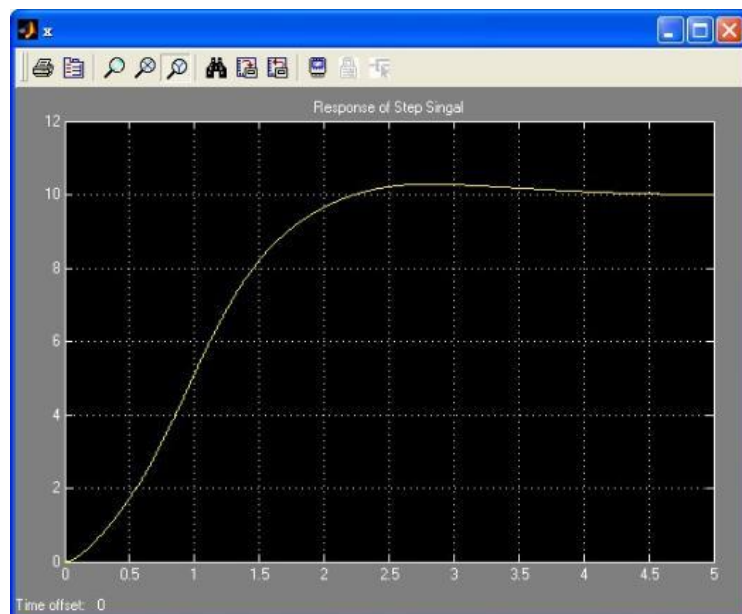


图 4 小车位置图

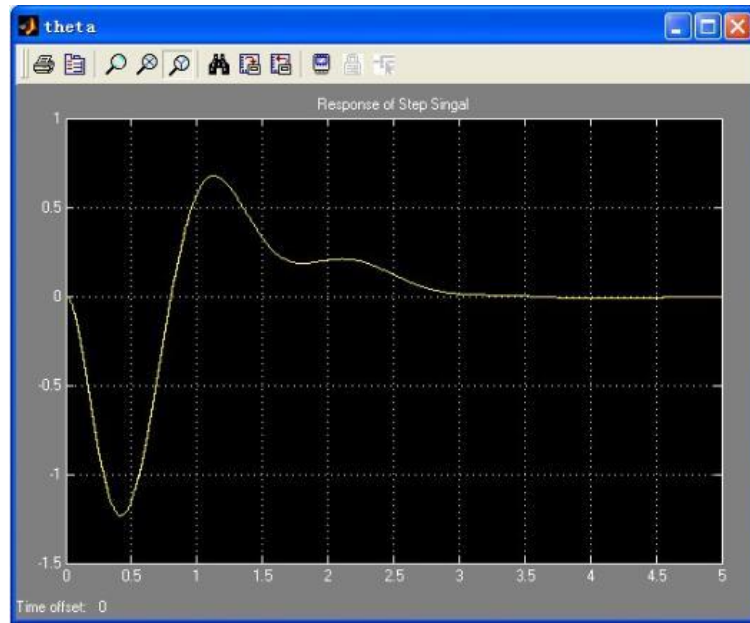


图 5 摆杆与垂直向下方向角度图