目　　录

第 1 课时　等比数列的概念

教　　材: 人教 A 版（2019）, 选择性必修第二册

教学内容: 第四章, 数列, 4.3.1 等比数列的概念

授课类型: 新授课

教学目标:

(1) 通过生活中的实例，理解等比数列的概念和通项公式的意义，了解等比中项的概念.

(2) 体会等比数列与指数函数的关系.

(3) 通过等比数列的概念、通项公式认识等比数列的性质.

教学重点: 等比数列、等比中项的概念、等比数列的通项公式、等比数列的性质、等比数列的应用.

教学难点: 等比数列的运算、等比数列的性质及应用.

教学过程设计:

一、概念引入

问题 1: 前面我们学习了等差数列，类比等差数列的研究思路和方法，从运算的角度出发，你觉得还有怎样的数列是值得研究的？

师生活动: 学生独立思考、讨论交流.

教师提示，类比已有的学习经验是一个好方法，比如“等差数列”；然后指引学生回顾等差数列相邻两项的关系，确定新数列的研究问题：相邻两项比是固定常数.

[设计意图] 意在引导学生从运算的角度，类比已有研究对象的主要特征，发现一个新的特殊数列作为研究对象，这样的过程有利于培养学生发现问题和提出问题的能力.

问题 2: “请看下面几个问题中的数列”，类比等差数列的研究，你认为可以通过怎样的运算发现以上数列的取值规律？你发现了什么规律？

(1) $9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^5, 9^6, 9^7, 9^8$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$

(3) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

师生活动: 学生独立观察，充分思考，交流讨论.

根据学生交流讨论情况，教师可以适时地选择以下问题进行追问.

追问:

(1) 你能用自然语言归纳每组数列的特征吗？（从相邻两项间的关系分析）

(2) 请归纳概括上述三个具体例子的共同特点.（类比等差数列的过程）

(3) 类比等差数列的概念，从上述几个数列的规律中，你能抽象出等比数列的概念吗？可以用符号语言表示吗？

师生活动: 教师引导学生梳理观察、讨论、分析的结果，抽象概括成数学定义，给出等比数列的定义.

[设计意图] 让学生充分经历从观察、分析到抽象、概括的过程，其中包括独立思考和交流讨论．这是一个提升学生数学抽象素养的时机．

二、概念理解

问题 3: 结合等比数列的定义，观察等比数列的相邻三项，你有什么新的发现？

师生活动: 让学生独立阅读这段内容，然后分别提出自己的新发现．

教师根据学生的回答情况，可以选择以下问题进行追问．

追问:

(1) 等比数列相邻三项有什么代数关系？

(2) 类比等差中项，你能得到等比中项的定义吗？能够用符号语言表示吗？

师生活动: 根据学生探究的情况，教师引导，帮助学生建立等比中项的定义．

[设计意图] 对于难度不大的内容，引导学生通过类比的方法去找到等比数列中相邻三项的关系，并抽象概念得到等比数列的定义．

问题 4: 你能等比数列的定义推导它的通项公式吗？

师生活动: 让学生先独立思考，教师展示学生推导并规范解答．

[设计意图] 内容难度不大，引导学生类比等差数列通项公式的推导过程进行推导，并得到等比数学的通项公式．这是一个提升学生数学抽象的时机．

问题 5: 在等差数列中，公差 $d \neq 0$ 的等差数列可以与相应的一次函数建立联系，通过类比，等比数列可以与那个函数建立联系？单调性如何？这里让学生“类比指数函数的性质，说明公比 q 的等比数列的单调性”.

师生活动: 学生独立思考、讨论交流．

教师提示，类比指数函数的性质，说明公比 $q > 0$ 的等比数列的单调性．

[设计意图] 让学生充分经历从观察、分析的过程，其中包括独立思考和交流讨论．

问题 6: 在等差数列中，如果 $p+q=s+t$，则有 $a_p+a_q=a_s+a_t$，等比数列有类似的性质么？

师生活动: 引导学生观察思考，类比等差数列的性质，推导等比数列的性质．

[设计意图] 通过等差数列与等比数列之间的联系，把等差数列的一些性质迁移到等比数列中，发展学生的数学抽象，数学运算、逻辑推理的数学素养．

三、概念巩固与应用

例 1 若等比数列 $\{a_n\}$ 的第 4 项和第 6 项分别为 48 和 12，求 $\{a_n\}$ 的第 5 项．

师生活动: 学生分析解题思路，给出解答并讨论交流，教师进行展示总结．

[设计意图] 例1与 4．2 节的例 7 类似，也给出了两个独立的条件．根据两个给定条件得到的关于首项 a_1 和公比 q 的方程组的解法往往不唯一，有时会得到两个 q 的值，也就是得到两个不同的等比数列．此例题可以让学生掌握分类讨论的方法．例1也可以直接利用等比中项的定义进行解决，鼓励学生从多角度思考问题．

例 2 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，试用 $\{a_n\}$ 的第 m 项 a_m 表示 a_n．

师生活动: 学生独立思考，教师给出解答示范．

[设计意图] 等比数列通项公式的应用，给你两个条件 a_1 与 q 可以表示数列的每一项，同时等比数列的任意一项都可以由数列的某一项和公比表示.

例 3 数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项，前三项成等比数列，后三项成等差数列，第 3 项等于 80，第 2 项与第 4 项的和等于 136，第 1 项与第 5 项的和等于 132．求这个数列.

师生活动: 学生独立思考，教师给出解答示范.

[设计意图] 例 3 安排了一道综合应用等差数列和等比数列的通项公式解决问题的题目．根据条件包含的等量关系，列出关于数列相关量的方程组是解决这类问题的常用策略．本题利用中间量去表示其他各项，可以减少所设未知数的个数．通过此题提高学生分析问题、解决问题的能力.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$，证明数列 $\{3^{a_n}\}$ 为等比数列；

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $\frac{1}{9}$，证明数列 $\{\log_3 a_n\}$ 为等差数列.

师生活动: 学生独立思考，教师给出解答示范.

[设计意图] 通过典型例题，加深对等差与等比数列概念的理解，体会等差与等比数列的内在联系．发展学生逻辑推理，直观想象、数学抽象和数学运算的核心素养.

四、课堂小结

本节课学习了等比数列、等比中项的概念、等比数列的通项公式、等比数列的性质.

五、课后作业

作业: 完成本节课课后习题.

第 2 课时　等比数列的前 n 项和

教　　材: 人教 A 版（2019）, 选择性必修第二册
教学内容: 第四章, 数列, 4.3.2 等比数列的前 n 项和公式
授课类型: 新授课
教学目标:

知识目标: 理解等比数列的前 n 项和公式的推导方法；掌握等比数列的前 n 项和公式并能运用公式解决一些简单问题;

能力目标: 提高学生的建模意识, 体会公式探求过程中从特殊到一般的思维方法, 渗透方程思想、分类讨论思想；

情感目标: 培养学生将数学学习放眼生活, 用生活眼光看数学的思维品质。

教学重点: 等比数列的前 n 项和公式；等比数列的前 n 项和公式的应用；
教学难点: 等比数列的前 n 项和公式的推导；
教学过程设计:

一、 复习提问

回顾等比数列定义, 通项公式。

(1) 等比数列的定义:$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, q = 0)$

(2) 等比数列通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1} (a_1, q \neq 0)$

(3) 等差数列前 n 项和公式的推导方法：倒序相加法。

二、 问题引入

“国王赏麦的故事”：国际象棋起源于古印度. 相传国王要奖赏国际象棋的发明者, 问他想要什么. 发明者说：“请在棋盘的第 1 个格子里放上 1 颗麦粒, 第 2 个格子里放上 2 颗麦粒, 第 3 个格子里放上 4 颗麦粒 $\cdots\cdots$ 依此类推, 每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍, 直到第 64 个格子. 请给我足够的麦粒以实现上述要求.” 国王觉得这个要求不高, 就欣然同意了. 已知 1000 颗麦粒的质量约为 40g, 据查, 2016—2017 年度世界小麦产量约为 7.5 亿吨, 根据以上数据, 判断国王是否能实现他的诺言. 让我们一起来分析一下. 如果把各格所放的麦粒数看成一个数列, 我们可以得到一个等比数列, 它的首项是 1, 公比是 2, 求第 1 个格子到第 64 个格子各格所放的麦粒数总和就是求这个等比数列前 64 项的和.

问题 1: 如何计算 $S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$

引出课题: 等比数列的前 n 项和。

三、 问题探讨

问题 2: 如何求等比数列 a_n 的前 n 项和公式

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_{n-2} \\ &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}. \end{aligned}$$

回顾: 等差数列的前 n 项和公式的推导方法。

倒序相加法：等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 它的前 n 项和是 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

根据等差数列的定义：$a_{n+1} - a_n = d$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \tag{2.1}$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \tag{2.2}$$

(2.1)−(2.2) 得：$2S_n = n(a_1 + a_n)$ 即 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

探究: 等比数列的前 n 项和公式是否能用倒序相加法推导?

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 q) + (a_1 q^2) + \cdots + (a_1 q^{n-1}) \\ S_n &= a_n + \frac{a_n}{q} + \frac{a_n}{q^2} + \cdots + \frac{a_n}{q^{n-2}} + \frac{a_n}{q^{n-1}} \end{aligned}$$

学生讨论分析, 得出等比数列的前 n 项和公式不能用倒序相加法推导。

回顾: 等差数列前 n 项和公式的推导方法本质。构造相同项, 化繁为简。

探究: 等比数列前 n 项和公式是否能用这种思想推导?

根据等比数列的定义：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, q \neq 0)$

变形:$a_n q = a_{n+1}$

具体:$a_1 q = a_2, a_2 q = a_3, \cdots, a_{n-1} q = a_n$

学生分组讨论推导等比数列的前 n 项和公式, 学生不难发现：

由于等比数列中的每一项乘以公比 q 都等于其后一项。

所以将这一特点应用在前 n 项和上。

由此构造相同项。数学具有和谐美, 错位相减, 从而化繁为简。

$$S_n = a_1 + (a_1 q) + (a_1 q^2) + \cdots + (a_1 q^{n-1}) \tag{2.3}$$

$$qS_n = a_1 q + (a_1 q^2) + (a_1 q^3) + \cdots + (a_1 q^n) \tag{2.4}$$

(2.3)−(2.4) 得：$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$

当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

由等比数列的通项公式推出求和公式的第二种形式：

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$

四、 知识整合

1. 等比数列的前 n 项和公式：

当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$
当 $q\neq 1$ 时, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

2. 公式特征：

(1) 等比数列求和时, 应考虑 $q=1$ 与 $q\neq 1$ 两种情况。

(2) 当 $q\neq 1$ 时, 等比数列前 n 项和公式有两种形式, 分别都涉及四个量, 四个量中“知三求一”。

(3) 等比数列通项公式结合前 n 项和公式涉及五个量,a_1, q, n, a_n, S_n 五个量中“知三求二”（方程思想）。

3. 等比数列前 n 项和公式推导方法：错位相减法。

五、 例题精讲

1. 运用公式解决国王赏麦故事中的难题

$S_{64}=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$
查阅资料, 进行估算, 你觉得国王能实现他得诺言吗?

2. 变式练习

(1) 求等比数列 1,2,4,8⋯的前 n 项和, 并求出前多少项的和是 63?

(2) 求等比数列 1,2,4,8⋯第 4 项到第 7 项的和;

[设计意图] 已知等比数列基本量会直接求其前 n 项和，强化对等比数列的前 n 项和公式的理解和记忆，渗透分类讨论的思想，提升思维层次。

3. 巩固练习

(1) 已知等比数列 a_n 中,$a_1=3, q=2$, 求 S_6 ;

(2) 已知等比数列 a_n 中, $a_1=-2.7, q=-\frac{1}{3}, a_n=\frac{1}{90}$, 求 n, S_n ;

(3) 已知等比数列 a_n,$a_3=\frac{3}{2}, S_3=\frac{9}{2}$, 求 a_1 与 q.

[设计意图] 已知前 n 项和会合理选择公式逆向求解数列基本量，进一步理解公式特点，深化对公式的理解和应用。

六、 课堂小结

(1) 等比数列的前 n 项和公式
当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$
当 $q\neq 1$ 时, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

(2) 等比数列的前 n 项和推导方法：错位相减法

(3) 数学思想：类比, 分类讨论, 方程的数学思想

七、 课后作业

教材第 40 页练习 1-3

第 3 课时　变化率问题

教　　材: 人教 A 版（2019）, 选择性必修第二册
教学内容: 第五章, 一元函数的导数及其应用, 5.1.1 变化率问题
授课类型: 新授课
教学目标:

(1) 体会由平均速度过渡到瞬时速度的过程，理解平均速度、瞬时速度的区别和联系.

(2) 掌握瞬时速度的概念，会求解瞬时速度的相关问题.

(3) 掌握割线与切线的定义，会求其斜率.

教学重点: 瞬时速度的概念、割线与切线的定义及斜率求法.
教学难点: 割线与切线的斜率.
教学方法: 问题探索法及启发式讲授法
教学过程设计:

一、新课导入

在之前的学习中，我们研究了函数的单调性，并利用函数单调性等知识定性地研究了一次函数、指数函数、对数函数增长速度的差异，知道了对数增长是越来越慢的，指数爆炸比直线上升快得多，那么能否精确定量地刻画变化速度的快慢呢？这节课我们就来研究一下这个问题.

二、探索新知

1.　平均速度

问题 1: 高台跳水运动员的速度

探究: 在一次高台跳水运动中，某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$. 如何描述运动员从起跳到入水的过程中运动的快慢程度呢？

例如，在 $0 \le t \le 0.5$ 这段时间里，$\bar{v}=\dfrac{h(0.5)-h(0)}{0.5-0}=2.35(\mathrm{~m/s})$；

在 $1 \le t \le 2$ 这段时间里，$\bar{v}=\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=-9.9(\mathrm{~m/s})$.

一般地，在 $t_1 \le t \le t_2$ 这段时间里，$\bar{v}=\dfrac{h\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)}{t_2-t_1}=-4.9\left(t_1+t_2\right)+4.8$.

思考：计算运动员在 $0 \le t \le \frac{48}{49}$ 这段时间里的平均速度，发现了什么？用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗？

运动员在 $0 \le t \le \frac{48}{49}$ 这段时间里的平均速度为 0. 显然，在这段时间内，运动员并不处于静止状态. 因此，用平均速度不能准确反映运动员在这一时间段里的运动状态.

2. 瞬时速度

(1) 瞬时速度的概念：物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.

(2) 求运动员在 s 时刻的瞬时速度

设运动员在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度是 $\bar{v}$，可以想象，如果不断缩短这一时间段的长度，那么 $\bar{v}$ 将越来越趋近于运动员在 t_0 时刻的瞬时速度.

为了求运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度，在 $t=1$ 之后或之前，任意取一个时刻 $1+\Delta t$，Δt 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为 0. 当 $\Delta t>0$ 时，$1+\Delta t$ 在 1 之后；当 $\Delta t<0$ 时，$1+\Delta t$ 在 1 之前. 当 $\Delta t>0$ 时，把运动员在时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内近似看成做匀速直线运动，计算时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内的平均速度 $\bar{v}$，用平均速度 $\bar{v}$ 近似表示运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度. 当 $\Delta t<0$ 时，在时间段 $[1+\Delta t,1]$ 内可作类似处理. 为了提高近似表示的精确度，我们不断缩短时间间隔，得到如下表格.

当 $\Delta t<0$ 时，在时间段 $[1+\Delta t,1]$ 内		当 $\Delta t>0$ 时，在时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内	
Δt	$\bar{v}=\dfrac{h(1)-h(1+\Delta t)}{1-(1+\Delta t)}=\dfrac{4.9(\Delta t)^2+5\Delta t}{-\Delta t}=-4.9\Delta t-5$	Δt	$\bar{v}=\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{(1+\Delta t)-1}=\dfrac{-4.9(\Delta t)^2-5\Delta t}{\Delta t}=-4.9\Delta t-5$
-0.01	-4.951	-0.01	-5.049
-0.001	-4.9951	-0.001	-5.0049
-0.0001	-4.99951	-0.0001	-5.00049
-0.00001	-4.999951	-0.00001	-5.000049
-0.000001	-4.9999951	-0.000001	-5.0000049
-0.0000001	-4.99999951	-0.0000001	-5.00000049
……		……	

思考: 给出 Δt 更多的值，利用计算工具计算对应的平均速度 $\bar{v}$ 的值. 当 Δt 无限趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么变化趋势？

当 Δt 无限趋近于 0，即无论 t 从小于 1 的一边，还是从大于 1 的一边无限趋近于 1 时，平均速度 $\bar{v}$ 都无限趋近于-5 .

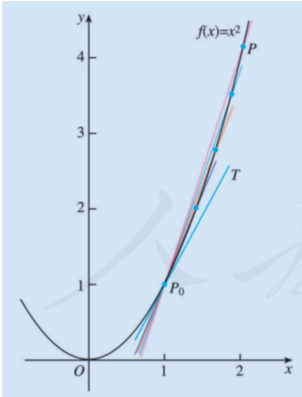
事实上，由 $\bar{v}=\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{(1+\Delta t)-1}=-4.9\Delta t-5$ 可以发现，当 Δt 无限趋近于 0 时，$-4.9\Delta t$ 也无限趋近于 0，所以 $\bar{v}$ 无限趋近于-5，这与前面得到的结论一致. 数学中，我们把叫做“当 Δt 无限趋近于 0 时，$\bar{v}=\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{(1+\Delta t)-1}=-4.9\Delta t-5$ 的极限”，记为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-5$.

从物理的角度看，当时间间隔 $|\Delta t|$ 无限趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于 $t=1$ 时的瞬时速度. 因此，运动员在 $t=1\text{ s}$ 时的瞬时速度 $v(1)=-5\text{ m/s}$.

3. 割线与切线的斜率

(1) 割线与切线的定义

问题 2: 抛物线的切线的斜率



为了研究抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线，我们通常在点 $P_0(1,1)$ 的附近任取一点 $P(x,x^2)$，考察抛物线 $f(x)=x^2$ 的割线 P_0P 的变化情况.

当点 P 无限趋近于点 P_0 时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线.

(2)　割线与切线的斜率

（a）割线的斜率

抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线 P_0T 的斜率与割线 P_0P 的斜率有内在联系. 记 $\Delta x=x-1$，则点 P 的坐标是 $\left(1+\Delta x,(1+\Delta x)^2\right)$.

于是，割线 P_0P 的斜率 $k=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{(1+\Delta x)-1}=\Delta x+2$.

（b）切线的斜率

我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0，并且可以通过不断缩短横坐标间隔 $|\Delta x|$ 来提高近似表示的精确度.

当 Δx 无限趋近于 0 时，即无论 x 从小于 1 的一边，还是从大于 1 的一边无限趋近于 1 时，割线 P_0P 的斜率 k 都无限趋近于 2.

事实上，由 $k=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{(1+\Delta x)-1}=\Delta x+2$ 可以直接看出，当 Δx 无限趋近于 0 时，k 无限趋近于 2. 我们把 2 叫做“当 Δx 无限趋近于 0 时，$k=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{(1+\Delta x)-1}$ 的极限”，记为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$.

从几何图形上看，当横坐标间隔 $|\Delta x|$ 无限变小时，点 P 无限趋近于点 P_0，于是割线 P_0P 无限趋近于点 P_0 处的切线 P_0T. 这时，割线 P_0P 的斜率 k 无限趋近于点 P_0 处的切线 P_0T 的斜率 k_0. 因此，切线 P_0T 的斜率 $k_0=2$.

三、课堂总结

(1) 平均速度、瞬时速度的概念及其关系。

(2) 瞬时速度的求法。

(3) 曲线割线与切线斜率的概念及其关系。

(4) 曲线切线斜率的求法。

(5) 平均速度与割线斜率、瞬时速度与切线斜率的关系。

四、课后练习

(1) 教材第 61 页思考（2）、练习 1，2

(2) 教材第 64 页练习 1，2

第 4 课时 导数的概念及其几何意义

教　　材: 人教 A 版（2019）, 选择性必修第二册
教学内容: 第五章, 一元函数的导数及其应用, 5.1.2 导数的概念及其几何意义
授课类型: 新授课
教学目标:

(1) 从具体案例中抽象概括出函数平均变化率与导数的概念，并以此培养数学抽象素养.

(2) 通过函数在某点的导数就是函数图象在该点的切线斜率的事实，揭示导数的几何意义，并由此加强直观想象素养的培养.

(3) 通过求简单函数的导数，掌握由导数定义求函数导数的步骤，进一步体会极限思想，加强数学运算素养的培养.

教学重点: 从求瞬时速度和求曲线的切线斜率等问题中抽象概括出导数的概念，利用信息技术工具揭示导数的几何意义，并以此进一步体会极限思想.
教学难点: 从求函数瞬时变化率的具体案例中抽象概括出导数的概念，理解导数就是特殊的“极限”.
教学过程设计:

一、温故知新

引言1: 上节课我们学习了变化率问题，并探究了两个具体的变化率问题. 这节课让我们继续探究导数的概念及其几何意义.

师生活动: 教师板书本课时标题

引言2: 让我们首先重温上节课的两个问题. 问题 1——高台跳水问题，涉及物理学中的平均速度和瞬时速度，问题 2——抛物线的切线问题，涉及到几何学中的割线斜率和切线斜率. 上节课，老师布置了课前作业，请同学们以学习小组为单位，每个小组写出一个与“变化率”有关的实例，写出具体问题与解答过程. 请三个小组的同学进行分享.

师生活动: 教师用 PPT 展示情境.

[设计意图] 让学生搜集“变化率”实例，写出完整的解答过程，能够较好地反馈学生对上一课时中平均变化率和瞬时变化率的掌握与理解. 学生课前搜集，教师提前筛选，提高课堂效率的同时，使得实例涉及不同领域，对数学共性的说明更具说服力，为引出导数概念做好充分铺垫.

探究: 虽然上面的实例涉及不同领域，但从数学的角度思考上述实例，在“过程与方法”、“结果的形式”上有哪些共性？

师生活动: 教师要着重引导学生从“数学的角度”观察问题的一致性，从“过程与方法”和“结果的形式”进行归纳小结. 学生小组合作探究，教师巡视，深入小组活动，倾听学生交流. 教师请小组代表分享交流，其他组进行补充. 教师用 PPT 展示“数学共

性”。

[设计意图] 培养学生的观察、概括能力. 让学生体会微积分的重要思想——用运动变化的观点研究问题. 体会极限思想. 感受用“平均变化率”趋近“瞬时变化率”的研究方法. 关注结果形式的一致性——都是一个确定的数值. 引导学生用数学的眼光观察世界，用数学的思维思考世界，用数学的语言表达世界.

问题 1: 如果研究更一般的问题，对于函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率如何表示？

师生活动: 教师提问，学生回答. 教师要关注学生的数学表达，让学生感受从具体到一般的抽象过程和研究方法. 教师板书. 对于函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率为：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

[设计意图] 让学生深刻体会概念的建构过程.

引言3: 其实函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率就称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，这就是导数的概念.

师生活动: 教师板书补充导数的概念.

问题 2: 让我们应用导数的概念，再来重温两个情境. 如何用导数表示运动员在 $t = 2$ 时的瞬时速度 $v(2)$ ？如何用导数表示抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $P(0, 0)$ 处的切线的斜率 k ？它们的意义是什么？

师生活动: 教师要注意引导学生用导数的表达形式 $f'(x_0)$ 来表示 $v(2)$ 和 k . 用导数的本质——瞬时变化率解释两个情境的意义. 教师用 PPT 展示问题与答案. 学生独立思考、回答问题.

[设计意图] 理解导数的概念，体会导数的本质就是瞬时变化率.

问题 3: 同样，抛物线 $y = x^2$ 在点 $P(1, 1)$ 处的切斜斜率是谁的导数？它的意义是什么？

[设计意图] 让学生理解导数的概念，体会导数的本质就是瞬时变化率.

二、学以致用

引言4: 下面，让我们学以致用，来解决一道数学问题.

例 1 设 $f(x) = \frac{2}{x}$，求 $f'(-1)$.

问题 4: 请问 $f'(-1)$ 表示什么？

追问: 如何用导数的定义求 $f'(-1)$ ？

师生活动: 教师要引导学生关注导数的符号表达, 引导学生用导数的定义解决问题，体会导数的求解步骤. 教师提问，学生独立思考、作答在学案上，教师巡视，请学生回答，并板书.

[设计意图] 让学生学以致用，加深对导数概念的理解，明确求导数的步骤. 教师板书，示范解题格式，展示数学的严谨.

引言5: 让我们再来解决一道实际问题.

例 2 将原油精炼为汽油. 柴油. 塑胶等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加热.

已知在第 xh 时，原油的温度（单位：°C）为 $y = f(x) = x^2 - 7x + 15(0 \le x \le 8)$. 计算第 2h、第 3.5h 和第 6h 时，原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

问题 5: 原油温度在第 2h、第 3.5h 和第 6h 时的瞬时变化率，从数学角度，求的是什么？

师生活动: 教师要引导学生体会原油温度在第 2h、第 3.5h 和第 6h 时的瞬时变化率就是函数 $y = f(x) = x^2-7x+15(0 \le x \le 8)$ 在 $x = 2, 3, 5, 6$ 处的导数，即：$f'(2), f'(3.5), f'(6)$. 引导学生将实际问题抽象成数学问题，用导数的定义解决问题，注意结果的形式是一个确定的数值. 引导学生将导数值放回情境，就表示原油温度的瞬时变化率，深刻体会导数的本质. 教师提问，学生先独立思考，然后作答，组内互评，教师巡视，将学生答案同屏展示分享.

[设计意图] 经历用导数的概念解决实际问题，让学生感受数学源于生活，更能用于生活. 教师巡视时，要关注学生导数符号的书写，解题格式的完整，要关注学生对实际意义的表达. 三个计算结果分别为正数、负数、零，让学生感受导数值的多样性，体会瞬时变化率的实际意义，为下一个单元分讲——应用导数探究函数的单调性埋下伏笔.

问题 6: 将原油温度问题一般化，那么 $f'(x_0)$ 表示什么意义？

师生活动: 教师引导学生说出 $f'(x_0)$ 表示原油温度在 $t = x_0$ 时刻的瞬时变化率. 深刻体会导数的数学表达和本质. 教师提问，学生独立思考、回答问题.

[设计意图] 引导学生用数学的思维解决问题，将实际问题抽象为数学问题. 深化对导数概念的理解. 理解导数的本质就是瞬时变化率.

引言6: 可见，导数可以描述任何运动变化事物的瞬时变化率.

师生活动: 教师小结提升.

三、自主探究

探究: 从“数”的角度，我们已经得知导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率，反映了函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的变化情况，那么从“形”的角度，导数 $f'(x_0)$ 具有什么几何意义呢？

让我们再回忆情境 2，抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线斜率就是函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 处的导数 $f'(0)$ ，这就是导数 $f'(0)$ 的几何意义.

请类比探究，一般曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义?

师生活动: 上一课时学生已经探究了“抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线斜率”，结合本课时“导数的概念”，学生不难发现抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线斜率就是函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 处的导数 $f'(0)$ ，这就是特殊函数 $f(x) = x^2$ 的导数的几何意义. 本课时教师意在让学生抽象生成一般函数 $y = f(x)$ 的导数的几何意义. 教师要关注学生的动手实践过程. 教师引导学生用运动变化的观点研究问题，体会割线的极限位置就是切线，体会割线斜率的极限就是切线斜率，割线斜率的极限的数学表达就是导数. 感受从特殊到一般、类比的研究方法. 教师提出问题，学生小组合作探究，教师巡视，深入小组活动，倾听小组交流，请小组代表陈述本组的探究过程和结论. 其他小组补充、

互评.

[设计意图] 学生进行探究，激发求知欲和学习兴趣的同时，提高了探究效率，能够直观感受“用割线逼近切线”的过程，类比生成一般函数导数的几何意义，突破难点，体验成功. 体会用运动变化观点研究问题的必要性，感受从特殊到一般、从具体到抽象、类比概括在研究问题时的一般性和有效性.

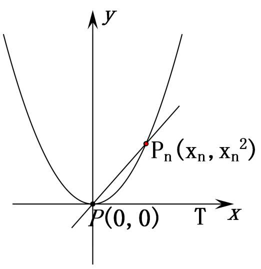
引言7: 通过刚刚同学们的探究、分享，我们确实发现当点 P_1 趋近于点 P 时，割线斜率 k_n 趋近于切线斜率 k ，k_n 趋近于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 因此，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是切线 PT 的斜率 k ，即：$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，这就是导数的几何意义.

师生活动: 教师小结提升，注重小结“割线的极限位置就是切线板书”，“割线斜率极限的数学表达就是导数”. 用 PPT 将导数的“数”与几何意义的“形”同屏播放. 教师板书导数的几何意义。

[设计意图] 让学生感受“数形结合”的思想方法，深化对导数概念的理解.

探究: 此处的切线定义与初中学过的切线定义有什么不同？

再回忆问题 2，抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $(0,0)$ 处的切线的定义是：当点 P_n 趋近于点 P 时，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $(0,O)$ 处的切线.



请类比探究，一般曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线如何定义？

师生活动: 上一分讲学生在探究“函数 $f(x)=x^2$ 在点 $(0,0)$ 处的切线是 x 轴，而不是 y 轴”时发现“圆的切线”的定义并不适用于抛物线，进而用“运动变化的观点”给出了“特殊曲线”——$f(x)=x^2$ 的切线定义. 本课时意在引导学生抽象生成“一般曲线”——$y=f(x)$ 的切线定义. 感受一般曲线 $y=f(x)$ 的切线定义对圆的切线同样适用. 教师引导学生用运动变化的观点研究问题，再次体会割线的极限位置就是切线，感受从特殊到一般、从具体到抽象、类比的研究方法. 教师提出问题，学生独立思考、回答问题，教师板书.

[设计意图] 让学生经历“提出问题——分析问题——解决问题”的探究过程，深刻感受知识的形成过程. 再次感受从特殊到一般、从具体到抽象在研究问题上的一般性和有效性，体会类比的研究方法.

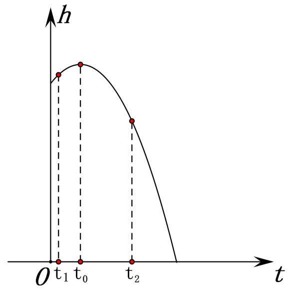
引言8: 下面，老师用 GGB 再次为大家演示“割线逼近切线”的过程，请同学们观察在点 P 处哪条直线最接近 P 点附近的曲线？老师将图像放大，你能否发现 P 点处的切线与曲线的位置关系？

师生活动: 教师引导学生直观感受点处的切线最接近 P 点附近的曲线. 感受当图像逐渐放大时，P 点处的切线越来越贴近 P 点附近的曲线，感受“以直代曲”的极限思想. 教师用 GGB 演示“割线逼近切线”，并将图像不断放大，学生观察、思考、回答. 教师小结提升.

[设计意图]GGB 的动态演示，能够让学生直观感受“以直代曲”的必要，巧妙突破

难点. 引导学生再次感受极限思想，体会微积分的重要思想——以直代曲.

例 3 如图，它表示跳水运动中高度随时间变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ 的图像. 根据图像，描述运动员在 $t = t_0, t_1, t_2$ 附近的变化情况.



师生活动: 教师着重引导学生用导数的几何意义研究问题. "曲线"描述的是运动员的高度变化，要描述运动员的瞬时变化率可以应用函数的导数, 而导数的几何意义就是切线斜率. 因此，应用"切线斜率"研究"曲线变化"是十分必要的，让学生感悟"以直代曲"的意义. 引导学生感知：因为可以"局部以直代曲"，所以可以用切线的上升、下降近似替代曲线的上升、下降. 而切线的上升、下降可以用斜率反映. 引导学生应用切线的斜率解释运动员的瞬时变化率. 体会"数"与"形"的结合，深刻体会导数几何意义的应用价值. 教师提问，学生独立思考、作答，教师将学生答案分享，学生互评.

[设计意图] 学以致用，应用导数的几何意义解释情境中的瞬时变化率问题. 体会导数的几何意义就是切线斜率，感受"以直代曲"重要思想的应用价值. 将"高台跳水"情境贯穿本单元、本课时教学，让学生感知数学源于生活、用于生活. 既可以从"数"的角度解释瞬时变化率，也可以从"形"的角度解释瞬时变化率. 深化对导数概念及其几何意义的理解. 通过切线斜率的正、负、零，为下个课时——用导数研究函数的性质埋下伏笔，使学生的思维延伸到课堂之外.

四、小结提升

问题 7: 请同学们从知识和方法两个方面谈谈本节课你的收获和感受吧！

师生活动: 教师着重引导学生从"知识"和"方法"两个方面进行小结. 让学生梳理本节课的知识收获：导数的概念、导数的几何意义、切线的定义. 让学生感受应用的思想方思想方法和研究方法：极限思想、以直代曲思想、数形结合思想、类比归纳方法. 教师提问，学生独立思考、回答，相互补充.

[设计意图] 培养学生归纳总结的能力. 让学生回味本节课生成的知识和应用的方法, 积累数学知识和活动经验. 感知导数的意义，为下一分讲用导数研究函数的性质奠定基础.

五、课后练习

教材第 70 页习题 5.5

第 5 课时　基本初等函数的导数

教　　材: 人教 A 版（2019）, 选择性必修第二册
教学内容: 第五章, 一元函数的导数及其应用, 5.2.1 基本初等函数的导数
授课类型: 新授课
教学目标:

(1) 能根据导数定义求常用函数的导数，掌握导数公式表并学会应用

(2) 能利用给出的基本初等函数的导数公式求简单函数的导数.

教学重点: 导数公式表的识记以及利用给出的基本初等函数的导数公式求简单函数的导数.
教学难点: 导数公式表的识记以及求简单函数的导数.
教学过程设计:

一、新课导入

由导函数的定义可知，一个函数的导数是唯一确定的. 那么思考一下，如何求函数 $y=f(x)$ 的导数呢？

二、探索新知

根据导数的定义，求函数 $y=f(x)$ 的导数，就是求当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近的那个定值. 下面我们求几个常用函数的导数.

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{c-c}{\Delta x}=0$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0.$

若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0，即一直处于静止状态.

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 1}0=1$.

若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速直线运动.

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数

因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\dfrac{x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 的图象上点处切线的斜率为 $2x$，说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化. 另一方面，从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看，$y'=2x$ 表明：当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，$|y'|$ 越来越小，$y=x^2$ 减少得越来越慢；当 $x>0$ 时，随着 x

的增加，$|y'|$ 越来越大，$y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动，它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

4.　**函数函数 $y=f(x)=x^3$ 的导数的导数**

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$ $3x^2+3x-\Delta x+(\Delta x)^2$ ，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right]=3x^2$.

$y'=3x^2$ 表示函数 $y=x^3$ 的图象上点 (x,y) 处切线的斜率为 $3x^2$ ，这说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化，且恒为非负数.

5.　**函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数**

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\frac{1}{x^2+x-\Delta x}$ ，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x^2}$.

6.　**函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 的导数**

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}==\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$ $\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ ，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

前面我们根据导数的定义求出了一些常用函数的导数. 一般地，有下面的基本初等函数的导数公式表，这些公式可以直接使用.

(1) 若 $f(x)=c($ c 为常数)，则 $f'(x)=0$ ；

(2) 若 $f(x)=x^\alpha$ ($\alpha\in Q$，且 $\alpha\neq 0$)，则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ ；

(3) 若 $f(x)=\sin x$ ，则 $f'(x)=\cos x$ ；

(4) 若 $f(x)=\cos x$ ，则 $f'(x)=-\sin x$;

(5) 若 $f(x)=a^x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)，则 $f'(x)=a^x\ln a$ ；特别地，若 $f(x)=e^x$ ，则 $f'(x)=e^x$ ；

(6) 若 $f(x)=\log_a x(a>0$ ，且 $a\neq 1$)，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ ；特别地，若 $f(x)=\ln x$ ，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$ ；

三、巩固练习

下面让我们通过两道例题来加深对导数公式的学习吧.

例 1 求下列函数的导数：

(1) $y=x^{\frac{2}{3}}$

(2) $y=\log_2 x$

例 2 假设某地在 20 年间的年均通货膨胀率为 5%，物价（单位：元）与时间：（单位：年）有如下函数关系 $p(t)=p_0(1+5\%)^t$ ，其中 P_0 为 $t=0$ 时的物价，假定某种商品

的 $P_0 = 1$ ，那么在第 10 个年头，这种商品的价格上涨的速度大约是多少（精确到 0.01 元/年）？

四、课堂小结

本节课学习了导数公式表的识记以及求简单函数的导数.

五、课后练习

教材第 75 页练习