正定矩阵的算术平方根

张姗梅[1]，**刘 雁**[2]

（1. 太原师范学院 数学系，山西 太原 030012； 2. 黑龙江大学 数学科学学院，黑龙江 哈尔滨 150080）

摘　要　对正定矩阵的算术平方根的唯一性进行探讨. 根据 Lagrange 插值多项式以及可逆矩阵的唯一分解性，用两种方法证明正定矩阵的算术平方根是唯一的，并通过实例说明正定矩阵的算术平方根的求法及应用.

关键词　正定矩阵；特征值；正交矩阵

中图分类号　O151.21　**文献标识码**　A　**文章编号**　1008-1399(2012)01-0010-04

定义 1　n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵，如果对任何 n 维实非零列向量 $\boldsymbol{X}$ 都有

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0.$$

定义 2　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个平方根.

值得注意：并非每一个方阵都有平方根，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

就没有平方根；一个方阵如果有平方根，平方根未必唯一，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的平方根不唯一.

定义 3[1]55　设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，若存在正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得

$$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{A},$$

则称 $\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的算术平方根，记作

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1[2]379　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

引理 2[2]　对 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，有等价命题

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值大于 0.

(3) 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

(4) 若可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\},$$

则有

$$d_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

定理 1[3]373　正定矩阵都有算术平方根.

证明　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，由引理 1 与引理 2，存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$
$$(\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n),$$

不妨记

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\},$$

于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{U}'.$$

可令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}',$$

那么

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$$

且 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 因此 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的算术平方根.

引理 3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 不全相同，若正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}'.$$

则有

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}' = f(\boldsymbol{A}),$$

其中 $f(\lambda)$ 是一个与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 有关的实系数多项式，而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 Q 是如定理 1 中的对角矩阵.

证明　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有 t 个互不相同，不妨设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 互不相同. 于是 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ 中有且仅有 t 个互不相同的值 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_t}$. 构造一个 lagrange 插值多项式

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{t} \sqrt{\lambda_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{t} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k},$$

则有

$$f(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, t).$$

收稿日期：2010-06-04；修改日期：2011-12-24

基金项目：山西省重点学科资助项目（2009021）

作者简介：张姗梅（1964—），女，山西霍州人，硕士，副教授，主要从事代数学及其应用研究. Email: smzhangty@sina.com
刘雁（1990—），女，河北阳原人，2008 级统计学专业本科在读. Email: zyliu6980@xnmsn.cn

于是

$$Q = f(\boldsymbol{\Lambda}).$$

从而

$$\boldsymbol{UQU}' = \boldsymbol{U}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}' = f(\boldsymbol{U\Lambda U}') = f(\boldsymbol{A}).$$

引理 4　设 A 是 n 阶实对称矩阵，B 是 n 阶正定矩阵. 则存在可逆实矩阵 C 使 $C'AC$ 为对角矩阵，而

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{E}.$$

证明　B 是正定矩阵，故存在实可逆矩阵 P 使

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{E},$$

而由 A 是实对称矩阵知 $P'AP$ 仍是实对称矩阵，从而由引理 1 知，存在正交矩阵 U 使

$$(\boldsymbol{PU})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PU}) = \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

$$(\boldsymbol{PU})'\boldsymbol{B}(\boldsymbol{PU}) = \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{BP})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{EU} = \boldsymbol{E}.$$

可令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PU},$$

则 C 是可逆实矩阵且 $C'AC$ 为对角矩阵，而

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{E}.$$

引理 5　可逆实矩阵 A 必有唯一分解式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PB},$$

其中 P 为正交矩阵，B 为正定矩阵.

证明　因 A 是可逆实矩阵，$A'A$ 是正定矩阵. 由定理 1，存在正定矩阵 B 使

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2,$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{B}^2 = ((\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PB}.$$

其中 B 是正定矩阵，而

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{B}$$

是正交矩阵. 因为

$$\boldsymbol{PP}' = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{BB}'((\boldsymbol{A}')^{-1})' = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{BBA}^{-1} = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}.$$

若还有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}_1,$$

其中 P_1 是正交矩阵，B_1 是正定矩阵. 则

$$\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}_1,$$

于是

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1}.$$

因 B_1 和 B 是正定矩阵，故由引理 4 可知，存在可逆实矩阵 C 使

$$\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\Lambda C}^{-1},$$

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}.$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

并且由引理 2 可知

$$\lambda_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\Lambda C}^{-1}\boldsymbol{CC}' = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\Lambda C}'.$$

因 P_1 和 P 是正交矩阵，$P_1{}^{-1}P$ 也是正交矩阵，而正交矩阵的实特征值只有 ± 1，所以

$$\lambda_i = 1,$$

从而

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{EC}' = \boldsymbol{E}.$$

因此

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{P}.$$

定理 2　正定矩阵的算术平方根唯一.

证法 1　设 A 是正定矩阵，B 是 A 的算术平方根. 则 B 是满足

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$$

的正定矩阵. 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 B 的特征值，则

$$\mu_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

并且

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$$

的特征值就是 $\mu_1{}^2,\mu_2{}^2,\cdots,\mu_n{}^2$. 不妨设 A 的特征值

$$\lambda_i = \mu_i{}^2 (i = 1,2,\cdots,n),$$

则有

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} (i = 1,2,\cdots,n).$$

因 B 是正定矩阵，所以存在正交矩阵 U 使

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{BU} = \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

于是

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{UQU}',$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{U\Lambda U}'.$$

其中 Λ 如前所定义. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不全相等，则由引理 3 可得

$$\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A}),$$

其中 $f(\lambda)$ 是一个与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 有关的实系数多项式. 如果

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n,$$

那么有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}.$$

证法 2　设 B 和 B_1 都是 A 的算术平方根，则

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}_1^2 = \boldsymbol{A}$$

并且 B 和 B_1 是正定矩阵. 由 A 是正定矩阵，存在可逆实矩阵 C 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C},$$

于是

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^2,\quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}_1^2,$$

由此得

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{PB},$$

$$C=(C')^{-1}B_1=P_1B_1,$$

其中

$$P=(C')^{-1}B,\quad P_1=(C')^{-1}B_1$$

是正交矩阵,B 和 B_1 是正定矩阵. 根据引理5可知

$$B=B_1.$$

推论1 设 A 是半正定矩阵,则必存在唯一的半正定矩阵 B 使

$$B^2=A.$$

定理1与定理2的证明也给出了正定矩阵的算术平方根的求法,

例1 求 A 的算术平方根,其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}.$$

分析 因为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&A_1\end{pmatrix}$$

是一个准对角矩阵,求 A 的算术平方根关键在求 A_1 的算术平方根.

解法1 容易求得 A_1 的特征值

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=5,$$

及其相应的单位特征向量

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

构造矩阵

$$U=(\eta_1,\eta_2),$$

则 U 为正交矩阵且

$$U'A_1U=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix},$$

由定理1的证明知 A_1 的算术平方根为

$$B_1=U\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{5}\end{pmatrix}U'=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\\frac{-1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

从而 A 的算术平方根为

$$B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&B_1\end{pmatrix}.$$

解法2 同解法1,求得 A_1 的特征值为1和5. 构造 lagrange 插值多项式

$$f(\lambda)=\frac{\lambda-5}{1-5}+\frac{\sqrt{5}(\lambda-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\lambda+\frac{5-\sqrt{5}}{4},$$

由定理2的证明知 A_1 的算术平方根为

$$B_1=f(A_1)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}A_1+\frac{5-\sqrt{5}}{4}E=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}+\frac{5-\sqrt{5}}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\\frac{-1+\sqrt{5}}{2}&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

从而 A 的算术平方根为

$$B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&B_1\end{pmatrix}.$$

利用正定矩阵的算术平方根,可方便证明一些结论.

例2 设 A 是实对称矩阵,B 是正定矩阵,则 AB 的特征值全是实数.

证明 因 B 是正定矩阵,$B^{\frac{1}{2}}$ 有意义且 $B^{\frac{1}{2}}$ 也是正定矩阵. 于是

$$AB=(B^{\frac{1}{2}})^{-1}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}},$$

所以 AB 与 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 相似. 又因为

$$(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})'=(B^{\frac{1}{2}})'A'(B^{\frac{1}{2}})'=B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}},$$

所以 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 是实对称矩阵. 由实对称矩阵的特征值全是实数及相似矩阵有相同的特征值知,AB 的特征值全是实数.

例3 设有实向量

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',$$
$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)',$$

矩阵 A 是任一 n 阶正定矩阵,试证明

$$(X'Y)^2\leqslant(X'AX)(Y'A^{-1}Y).$$

证明 由柯西-布涅柯夫斯基不等式,对任意向量 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$ 有

$$(\alpha'\beta)^2\leqslant(\alpha'\alpha)(\beta'\beta).$$

于是

$$(X'Y)^2=(X'EY)^2=(X'A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}})^{-1}X)^2=[(A^{\frac{1}{2}}X)'(A^{\frac{1}{2}})^{-1}Y]^2\leqslant[(A^{\frac{1}{2}}X)'(A^{\frac{1}{2}}X)]\{[(A^{\frac{1}{2}})^{-1}Y]'(A^{\frac{1}{2}})^{-1}Y\}=(X'A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}X)[Y'(A^{\frac{1}{2}})^{-1}(A^{\frac{1}{2}})^{-1}Y]=(X'AX)(Y'A^{-1}Y).$$

参考文献

[1] 张维荣,宋桂安. 半正定矩阵算术平方根的表示[J]. 南京工业大学学报,2003,25(1):55-58.
[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2003:226-228;379.
[3] 张禾瑞,郝炳新. 高等代数[M]. 5版. 北京:高等教育出版社,2007:373.

一类反应扩散方程局部解的存在性与唯一性

王云花[1]，李 冰[1]，张智倍[2]
(1. 哈尔滨师范大学 数学科学学院，黑龙江 哈尔滨 150025； 3. 黑龙江民族职业学院 基础部，黑龙江 哈尔滨 150081)

摘 要 应用 Hahn-Banach 不动点定理，刻画 Banach 空间内一类反应扩散方程弱解的局部存在性，再利用 Gronwall 不等式证得局部解的唯一性.

关键词 Hahn -Banach 不动点定理；反应扩散方程；局部解的存在性与唯一性
中图分类号 O177.26 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2012)01-0013-03

定义 1[1] 设 (X,ρ) 是一个度量空间，则称

$$T:(X,\rho)\to(X,\rho)$$

是一个压缩映射，如果存在 $\alpha\in(0,1)$，使得对于任意的 $x,y\in X$，有

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y).$$

引理 1 若 $T:(X,\rho)\to(X,\rho)$ 是一个压缩映射，则 T 在 X 上连续.

证明 任给 $\varepsilon>0$，对任意 $x_0\in X$，取

$$\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha},$$

则当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时，对任意 $x\in X$，有

$$\rho(Tx,Tx_0)\leqslant\alpha\rho(x,y)<\varepsilon.$$

由 x_0 的任意性知，度量空间 X 上的压缩映射一定是连续映射.

定义 2 称集合 $\{x\mid Tx=x,x\in X\}$ 为映射 T 在 X 上的不动点集.

定义 3 度量空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 称为基本列，指对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对任意自然数 p，都有

$$\rho(x_{n+p},x_n)<\varepsilon.$$

定义 4 若度量空间 (X,ρ) 上的所有基本列都是收敛的，称该空间是完备的.

定义 5 完备的线性赋范空间称为 Banach 空间.

定理 1（不动点定理） 设 (X,ρ) 是完备空间，而 $T:(X,\rho)\to(X,\rho)$ 是一个压缩映射，则 T 在 X 上存在唯一的不动点.

证明 对任何初值 $x_0\in X$，作迭代序列

$$x_{n+1}=Tx_n,$$

则 $\{x_n\}$ 是 X 上的一个基本列. 事实上，由 T 是 (X,ρ) 上的一个压缩映射知，存在 $\alpha\in(0,1)$，使得对于任

收稿日期：2010-11-07；修改日期：2011-12-09
作者简介：王云花（1976—），女，黑龙江克东人，硕士，讲师，从事泛函分析和偏微分方程研究. Email：Wyh1018@126.com
李冰（1981—），女，辽宁抚顺人，硕士，讲师，主要从事生物数学研究. Email：leeice@126.com

Arithmetic Square Root for Positive Definite Matrixes

ZHANG Shanmei[1]， LIU Yan[2]
(1. Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Taiyuan 030012, PRC;
2. Department of Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080, PRC)

Abstract: In this note, the uniqueness of the arithmetic square root for a positive definite matrix is discussed. It's proved that the arithmetic square root is unique in two ways, by the virtue of the Lagrange interpolation polynomial and by using the result of every inverse matrix can be uniquely decompose to the product of an orthogonal matrix with a positive definite matrix. In the end, some examples are given to illustrate the method of finding the arithmetic square root of a positive definite matrix.

Keywords: positive definite matrix, characteristic value, orthogonal matrix