§ 22 实对称矩阵

22.1 实对称矩阵的特征值与特征向量

若矩阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵.

本节主要讨论实对称矩阵的性质. 这类矩阵应用广泛，理论丰富、优美.

一个实矩阵的特征值可能是虚数, 如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 但

定理：实对称矩阵的特征值都是实数.

证明：设实对称矩阵 A 有 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 则

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}, \\ \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T \bar{A}^T\mathbf{x} = (\overline{A\mathbf{x}})^T\mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}, \end{array}\right\} \Longrightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = 0.$$

因 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} > 0$, 故 $\bar{\lambda} = \lambda$, 即 λ 为实数.

22.1 实对称矩阵的特征值与特征向量

属于不同特征值的特征向量线性无关, 对实对称矩阵有更强的结果.

定理：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明：设 λ 与 μ 是实对称矩阵 A 的两互异特征值(由前面定理 λ, μ 是实数), $\mathbf{x}, \mathbf{y}$是相应特征向量, 即 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$.

于是

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{x}, \\ \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T A^T\mathbf{x} = (A\mathbf{y})^T\mathbf{x} = \mu\mathbf{y}^T\mathbf{x}, \end{array}\right\} \Longrightarrow (\lambda - \mu)\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0.$$

而 $\lambda \neq \mu$, 故 $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0$.

22.1 实对称矩阵的特征值与特征向量

例：$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1.$

$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 为分别属于 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ 的特征向量.

易见 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 正交.

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

回忆：矩阵 A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A 有一组特征向量作为空间的基.

故若 A 是可对角化的实对称阵, 则存在 A 的一组特征向量构成空间的单位正交基.

事实上,

定理：任何实对称阵正交相似于对角阵, 即对实对称阵 A, 存在正交阵 Q, 使 Q^TAQ 为对角阵.

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

证明：对矩阵 A 的阶数用数学归纳法.

$n=1$ 时结论成立. 假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立.

对 n 阶实对称阵 A, 设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, \lambda_1\in\mathbb{R}, \alpha_1\in\mathbb{R}^n$, 且 $||\alpha_1||=1$.

则 α_1 可扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 进一步正交化，得一组标准正交基, 记为 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

则 $P=(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为正交阵，且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

由 $A^T=A$ 得 $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$ 且 $A_1^T=A_1$.

由归纳假设知, 对 $n-1$ 阶实对称矩阵 A_1, 存在正交阵 U_1, 使

$$U_1^TA_1U_1=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令 $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}$, 则 $Q=PU$ 为正交阵, 且

$$Q^TAQ=U^TP^TAPU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

例：设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交阵 Q, 使 $Q^T AQ$ 为对角阵.

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

解：

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1-\lambda & -\lambda & -1 & 1\\ 1-\lambda & -1 & -\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2(\lambda^2+2\lambda-3)=(1-\lambda)^2(\lambda-1)(\lambda+3).$$

因此 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=-3.$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 可求出齐次线性方程组 $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对 $\lambda_4 = -3$, 可求出齐次线性方程组 $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系:

$$\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

作正交化(只需对 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 进行),

$$\xi_1 = \mathbf{x}_1,$$

$$\xi_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^T \xi_1}{\xi_1^T \xi_1} \xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3^T \xi_1}{\xi_1^T \xi_1} \xi_1 - \frac{\mathbf{x}_3^T \xi_2}{\xi_2^T \xi_2} \xi_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\xi_4 = \mathbf{x}_4.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

再作单位化，得

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

则 $Q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ 为正交阵，且

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

由前面定理知, 对任何实对称阵 A, $Q^TAQ = \Lambda$, 其中 $Q = (\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n)$ 为正交阵, $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $A\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$.

于是

$$A = Q\Lambda Q^T = (\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{pmatrix},$$

即

$$A = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

注记：$P_j := \mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T$ 为到由特征向量 $\mathbf{q}_j$ 张成的一维空间的投影矩阵.

$\Longrightarrow$ 任意实对称阵可表示为秩 1 投影矩阵的和.

可类似证明：

Schur定理：任意一个复方阵 A 均酉相似于上三角阵，即对任何复方阵 A, 存在酉矩阵 $U(\bar{U}^TU = U\bar{U}^T = I)$ 使 $\bar{U}^TAU = T$ 为上三角阵.

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

例：设 A 是 n 阶实对称阵，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，则存在实数 $c > 0$ 满足对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x}^T A\mathbf{x}| \leq c\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

证明：因 A 为实对称阵，故存在正交阵 Q, 使

$$Q^T AQ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Lambda.$$

则对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 记 $Q^T\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$, 有

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(Q\Lambda Q^T)\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

令 $c = max\{|\lambda_i|, 1 \leq i \leq n\}$, 则

$$|\mathbf{x}^T A\mathbf{x}| = |\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y}| \leq c\mathbf{y}^T\mathbf{y} = c\mathbf{x}^T QQ^T\mathbf{x} = c\mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

22.2 实对称阵正交相似于对角阵

例：设 λ_{max} 是实对称阵 A 的最大特征值.

求证：A 的对角线元素 $a_{ii} \leq \lambda_{max}$.

证明：因 A 实对称，故存在正交阵 Q, 使

$$Q^T AQ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Lambda.$$

注意到 $a_{ii} = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{e}_i$, 其中 $\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

令 $Q^T\mathbf{e}_i = \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^T$, 则

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \mathbf{e}_i^T Q\Lambda Q^T \mathbf{e}_i = \beta^T \Lambda \beta = \lambda_1 \beta_1^2 + \cdots + \lambda_n \beta_n^2 \\ &\leq \lambda_{max}(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2) = \lambda_{max}\beta^T\beta = \lambda_{max}\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_i = \lambda_{max}. \end{aligned}$$

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

矩阵特征值的符号与主元的符号一般无关，如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

特征值为$-1, -2$ (两负)

主元为$1, 2$ (两正)

但对实对称阵而言，二者符号一致，如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

特征值为$4, -2$ (一正一负)

主元为$1, -8$ (一正一负)

定理：实对称阵的正特征值数与正主元数相同.

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

引理：设矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} I_q & \\ & -I_{n-q} \end{pmatrix} C,$$

则 $p=q$.

证明：假设 $p>q$, 则齐次线性方程组 $\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots+c_{1p}x_p=0 \\ \cdots \\ c_{q1}x_1+\cdots+c_{qp}x_p=0 \end{cases}$

有非零解 $(x_1,\cdots,x_p)^T$.

令 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p,0,\cdots,0)^T\in\mathbb{R}^n, \mathbf{y}=C\mathbf{x}$, 则

$$\mathbf{y}=(0,\cdots,0,y_{q+1},\cdots,y_n)^T.$$

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

于是

$$\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T C^T \begin{pmatrix} I_q & \\ & -I_{n-q} \end{pmatrix} C\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} I_q & \\ & -I_{n-q} \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

上式左边 $= x_1^2 + \cdots + x_p^2 > 0(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$,

右边 $= -y_{q+1}^2 - \cdots - y_n^2 \leq 0.$

矛盾！ 故 $p \leq q.$

同理可证 $p \geq q.$ 故 $p = q.$

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

定理的证明：

由于实对称阵的主元数等于其非零特征值数，故不失一般性，可对可逆实对称阵讨论.

设 A 的正主元数为 p, 正特征值数为 q, 则

$A=LDL^T$, 其中 L 是对角元为 1 的下三角阵, $D=diag(d_1,\cdots,d_n)$, d_i 为主元.

又 $A=Q^T\Lambda Q$, 其中 Q 是正交阵，$\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, λ_i 为特征值.

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

于是

$$
\begin{aligned}
A &= L\begin{pmatrix}\sqrt{|d_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|d_n|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_p & \\ & -I_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{|d_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|d_n|}\end{pmatrix}L^T \\
&= Q^T\begin{pmatrix}\sqrt{|\lambda_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|\lambda_n|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q & \\ & -I_{n-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{|\lambda_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|\lambda_n|}\end{pmatrix}Q
\end{aligned}
$$

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

令 $U=\begin{pmatrix}\sqrt{|d_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|d_n|}\end{pmatrix}L^T, V=\begin{pmatrix}\sqrt{|\lambda_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{|\lambda_n|}\end{pmatrix}Q,$

则 U,V 可逆，且

$$\begin{pmatrix}I_p & \\ & -I_{n-p}\end{pmatrix}=(U^T)^{-1}V^T\begin{pmatrix}I_q & \\ & -I_{n-q}\end{pmatrix}VU^{-1}.$$

由引理知 $p=q$. 定理得证.

注记：事实上，我们证明了惯性定理.

22.3 实对称阵特征值和主元的关系

小结：

1.实对称阵的特征值都是实数.

2.实对称阵属于不同特征值的特征向量相互正交.

3.实对称阵正交相似于对角阵.

4.实对称阵的正特征值数与正主元数相同.