

基于线性规划汽车租赁调度方案的研究

刘 敏¹, 朱家明², 汪 永², 刘茉莉²

(1. 安徽财经大学 金融学院, 安徽 蚌埠 233000; 2. 安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233000)

摘 要 针对汽车租赁调度, 依据所给条件, 分别构建单目标和多目标线性规划模型, 综合考虑在满足需求下, 使用 Excel、Lingo、Matlab7 编程, 得到最低转运费、最低缺损费或最高获利下的不同调运方案, 以及在需求不足和租赁公司长期获利下的购车计划。

关键词 汽车租赁; 线性规划; 多元分析; 调度; Lingo

中图分类号 U116 文献标志码 A 文章编号 1003-8078(2014)06-0009-06

收稿日期 2014-11-10

doi 10.3969/j.issn.1003-8078.2014.06.03

作者简介 刘敏, 女, 山西运城人, 在读硕士研究生, 研究方向为金融学;

朱家明, 男, 安徽泗县人, 副教授, 硕士, 研究方向为应用数学与数学建模。

基金项目 国家自然科学基金项目(11301001); 安徽财经大学教研项目(acjyzd201429)。

The study of car rental scheduling scheme based on linear programming

LIU Min¹, ZHU Jia-ming², WANG Yong², LIU Mo-li²

(1. Institute of Finance, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233000, China

2. Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233000, China)

Abstract This paper is aiming at the rental car scheduling, the single objective and multiple objective linear programming models were constructed according to the given conditions, considering to meet the needs, using Excel, Lingo, Matlab7 programming, progressive layers, different allocation schemes to get the lowest transport charges, fees or minimum defect highest profit, as well as in the lack of demand and rental company for a long time profit plan to purchase a car.

Key words car rental; linear programming; multivariate analysis; dispatch; Lingo

汽车租赁行业被称为交通运输服务行^[1], 它因为无须办理保险、无须年检维修、车型可随意更换等优点, 以租车代替买车来控制企业成本, 这种在外企中十分流行的管理方式, 正慢慢受到国内企事业单位和个人用户的青睐。国内汽车租赁市场兴起于 1990 年北京亚运会^[2], 随后在北京、上海、广州及深圳等国际化程度较高的城市率先发展, 近年来, 我国汽车租赁业快速发展, 产业规模不断扩大。至 2010 年年底, 全国汽车租赁车辆超过 10 万辆, 产值超过 140 亿元。预计到 2015 年, 我国汽车租赁市场的整体租车规模将达到 30 万辆, 整体市场规模将超过 350 亿元。不合理的汽车调度方案会增加车辆运输成本, 降低运输效率。本文通过构建模型, 层层递进, 得到了在不同情况下的最优调运方案。

具体研究背景: 某城市有一家汽车租赁公司, 此公司年初在全市范围内有 379 辆可供租赁的汽车, 分布于 20 个代理点中, 每个代理点的位置都以地理坐标 X 和 Y 的形式给出, 单位为千米。假定两个代理点之间的距离约为他们之间欧氏距离(即直线距离)的 1.2 倍。依据所给附件, 分别求出满足最低转运费、缺损费, 和满足最大获利、最低转运费、最低缺损费下的较为合理的车辆日调度方案, 并进一步得到使租赁公司可以获得长期的高利润的购车计划^[3]。

1 满足需求下使总的转运费最低的汽车调度方案

1.1 研究思路

由某天的每个代理点车辆可供租赁数量及次日每个代理点的需求量,很容易就得到每个代理点这天可以调出的汽车数或者需要调进的汽车数。只需要把多出的汽车调出去,不满足需求的就调进车辆。

假设第 k 天第 i 个代理点的可供租赁汽车量为 b_{ki} ($1 \leq k \leq 28, 1 \leq i \leq 20$), 第 $k+1$ 天第 j 个代理点的需求量为 d_{kj} ($0 \leq j \leq 20$)。设从第 i 个代理点往第 j 个代理点调运 x_{ij} 量汽车, 且每辆的调运费用 a_{ij} (这里假定每次调运发生在当天顾客还车后, 即第 k 次调运发生在第 k 天) 设第 k 天的总调运费用为 z_k 。

$$\text{目标函数: } \min z_k = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}$$

$$\text{若 } d_{kj} - b_{kj} \geq 0, \text{ 则 } \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj} - b_{kj}; \text{ 若 } d_{kj} - b_{kj} < 0, \text{ 则 } \sum_{j=1}^{20} x_{ij} b_{ki} - d_{ki}$$

这种模型虽然简单合理,但在模型中的建立过程中我们发现会有一种情况,可能某个代理点先调出的汽车数超过他多出的汽车数,然后又从其他代理点调进一些汽车来满足他的需求,这种调运方案的调运费会低于直接调出多余车辆的调运费,但这种调运方案不合理。因此,假设每个代理点的所有车辆都可以调出。

1.2 模型的建立

根据供需状况可分为三类情况建立以下模型:

1) 当各个代理点次日的车辆总需求等于当天可供租赁的总汽车量

$$\text{目标函数: } \min z_k = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}, \text{ 供给约束: } \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki} (i = 1, 2, \dots, 20), \text{ 需求约束: } \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj}, \\ j = 1, 2, \dots, 20, \text{ 非负约束: } x_{ij} \geq 0 (0 \leq i \leq 20, 0 \leq j \leq 20)。$$

由此可得模型一: 供需相等的线性规划模型^[4-6]

$$\min z_k = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij} \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20 \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj}, j = 1, 2, \dots, 20 \\ x_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, 20) \end{cases}$$

2) 当各个代理点次日的车辆总需求大于当天可供租赁的总汽车量

这里虚设第 21 个代理点, 可供租赁车辆 $\sum_{j=0}^{20} x_{21,j} = \sum_{j=1}^{20} d_{kj} - \sum_{i=1}^{20} b_{ki}$, 并且该代理点到其它各个代理点的调运费用为 0, 需求量 $d_{k,21} = 0$ 。

由此可得模型二: 供不应求的线性规划模型

$$\min z_k = \sum_{i=1}^{21} \sum_{j=1}^{21} a_{ij} x_{ij} \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{21} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 21 \\ \sum_{i=1}^{21} x_{ij} = d_{ki}, j = 1, 2, \dots, 21 \\ x_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, 21) \end{cases}$$

3) 当各个代理点次日的车辆总需求小于当天可供租赁的总汽车量

这里虚设一个代理点, 需求量为 $\sum_{i=0}^{20} x_{i,21} = \sum_{j=1}^{20} b_{ki} - \sum_{i=1}^{20} d_{kj}$, 并且其他各代理点到该点的调运费为 0, 可供租赁车辆 $b_{k,21} = 0$ 。

由此可得模型三: 供大于求的线性规划模型

$$\min z_k = \sum_{i=1}^{21} \sum_{j=1}^{21} a_{ij} x_{ij} \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{21} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 21 \\ \sum_{j=1}^{21} x_{ij} = d_{ki}, j = 1, 2, \dots, 21 \\ x_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, 21) \end{cases}$$

1.3 模型的求解

根据每天每个代理点可供租赁车辆数和次日需求量之间的三种关系,分别用三个模型的 Lingo^[7] 求解程序得出每天 20 个代理点之间的调运方案,并求出在尽量满足需求的情况下每天的最低调运费

用。未来四周最低的总转运费为 $Z = \sum_{k=1}^{28} z_k = 44.37$ 万元,未来四周每天的汽车调运方案见表 1。

表 1 使总的转运费最低的调运方案

次序	具体调运方案
第 1 次	A→B 7, B→M 3, F→K 1, G→D 4, H→D 1, H→T 14, I→K 3, J→C 3, N→M 5, O→D 1, Q→T 5, R→D 3, S→M 6
第 2 次	D→H 4, D→N 8, I→J 1, J→E 4, K→P 1, K→F 4, L→P 5, M→B 2, N→S 2, O→S 2, R→S 1, T→Q 12, T→H 3
第 3 次	B→A 4, B→M 3, C→T 1, E→J 7, F→R 3, F→S 4, H→T 5, I→J 1, J→G 3, K→D 5, K→F 1, M→N 6, Q→T 10
...
第 27 次	A→K 9, B→M 3, D→G 1, D→K 1, E→J 6, H→T 6, L→I 5, M→F 9, O→S 2, P→R 5, Q→E 6, Q→T 2, R→F 6, R→T 4
第 28 次	E→J 9, E→Q 4, F→K 1, F→M 8, G→D 10, H→O 3, J→G 13, K→D 5, N→M 2, R→P 7, S→M 8, S→O 1, T→R 2

2 使总的转运费和短缺损失费最低的汽车调度方案

2.1 研究思路

存在短缺损失费的情况,只有在后一天各站点需求量之和大于租赁公司的汽车的总的拥有辆。由于总可调运车辆不够,为了使出租车总调运费及总缺损费最低,这两点作为双目标综合考虑^[8],得到在尽量满足需求的情况下使得两种费用尽可能的小调运方案。可以利用增加虚拟站点的方法,假设存在虚拟站点 21,该站点拥有的汽车量刚好等于后一天需求不足的量。21 站点转运到其他站点的费用即为每个站点每天的短缺费,在考虑满足需求的情况下使得两种费用最小。21 站点运往其他各个站点的车量即为次日每个站点的缺损数量。从第 21 站点调往各站点的调运费即为缺损费 l_{21j} 。设第 k 次的总调运费为 z ,总的缺损费为 y 。

2.2 模型的建立

根据供需状况建立双目标线性规划模型^[9]:

$$\text{目标函数: } \min z = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}, \min y = \sum_{j=1}^{20} l_i (b_{k+1,i} - d_{ki}), \text{供给约束: } \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20,$$

$$\text{需求约束: } \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj}, j = 1, 2, \dots, 20.$$

将模型分为以下两种情况

1) 当 $d_{kj} > c$, 此时供给量小于需求量,可以假设 21 站点可供调运量: $d_{kj} - c$, 由此可得模型一: 供不应求的线性规划模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}, \min y = \sum_{j=1}^{20} l_i (b_{k+1,i} - d_{ki})$$

$$s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{21} x_{ij} = b_{ki} \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj} \\ i = 1, 2, \dots, 21 \\ j = 1, 2, \dots, 21 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

2) 当 $b_{kj} \leq c$ 时, 此时供给量大于需求量, 后一天每个站点都能得到满足, 不存在缺损费。由此可得模型一: 供大与求的线性规划模型

$$\min z_k = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij} \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki} \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = d_{ki} \\ x_{ij} \geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, 20 \\ j = 1, 2, \dots, 20 \end{cases}$$

2.3 模型的求解

根据模型代入每次调运前的数据, 利用 Lingo 和 Excel 求出每天 20 个代理点之间的调运方案, 并求出在尽量满足需求的情况下每天的最低调运费用。得到未来四周最低总转运费为 55.77 万元, 总的损失费为 15.83 万元, 未来四周内每天的汽车调运方案见表 2。

表 2 使总的转运费及短缺损失最低的汽车调运方案

次序	具体调运方案
第 1 次	A→B 6, A→L 1, B→M 2, E→J 9, F→K 6, G→D 4, H→D 4, H→T 1, I→K 3, J→C 1, J→F 7, N→M 5, O→D 1, Q→C 2, Q→T 3, R→F 3, R→P 7, R→T 3
第 2 次	D→G 12, F→J 6, G→J 2, I→J 1, J→E 13, K→F 10, L→A 1, L→P 5, M→B 4, O→B 4, R→P 1, S→H 2, S→J 1, S→N 6, T→C 3, T→H 5, T→Q 12
第 3 次	B→A 8, B→L 3, C→L 4, D→N 1, E→J 16, F→N 4, F→R 2, G→S 3, H→R 1, H→S 4, I→L 1, J→S 11, K→D 6, M→N 3, P→L 2, Q→L 1, Q→S 7, Q→T 2
...
第 28 次	C→L 3, E→M 9, E→Q 4, F→M 12, G→D 12, H→O 3, I→L 1, J→F 3, J→G 11, K→D 3, M→B 8, N→L 8, R→P 7, S→M 2, S→N 6, S→O 1, T→R 2

3 使总的转运费和短缺损失费最低以及公司获利最大的调度方案

3.1 研究思路

综合考虑公司获利、转运费和缺损费等因素, 因此要达到的目标是使总获利最大且总缺损费最低 (总获利 = 总收入 - 总转运费)。当可供车辆数大于或等于需求量时, 没有缺损费, 只需要建立使获利最大的单目标线性规划模型; 当可供车辆数小于需求量, 就要建立使获利最大和缺损费最小的双目标线性规划模型。每个代理点每辆车的一天收入为 r_i , 缺损费为 l_j 。

3.2 模型的建立

根据供需状况可分为三类情况建立以下模型:

1) 当各个代理点次日的车辆总需求等于或小于当天可供租赁的总汽车量。这里可供租赁的汽车数大于等于需求量, 没有缺损费用, 只需使获利最大。

$$\text{目标函数: } \max p_k = \sum_{i=1}^{20} r_i b_{ki} - \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}; \text{供给约束: } \sum_{j=1}^{20} x_{ij} \leq b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20; \text{需求约束: } \sum_{i=1}^{20} x_{ij}$$

$= d_{k,j}, j = 1, 2, \dots, 20$; 非负约束: $x_{ij} \geq 0 (0 \leq i \leq 20, 0 \leq j \leq 20)$ 。

由此可得模型一: 无短缺损失的线性规划模型^[10]

$$\max p_k = \sum_{i=1}^{20} r_i b_{ki} - \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij} \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{20} x_{ij} \leq b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20 \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = d_{kj}, j = 1, 2, \dots, 20 \\ x_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, 20) \end{cases}$$

2) 当各个代理点次日的车辆总需求大于当天可供租赁的总汽车量

这里可供租赁的汽车数不能满足需求, 因此有短缺损失, 所以加上短缺损失最小的目标函数。

目标函数: $\max p_k = \sum_{i=1}^{20} r_i b_{ki} - \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}, \min y_k = \sum_{j=1}^{20} l_j (d_{kj} - \sum_{i=1}^{20} x_{ij})$; 供给约束: $\sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20$; 需求约束: $\sum_{i=1}^{20} x_{ij} \leq d_{kj}, j = 1, 2, \dots, 20$; 非负约束: $x_{ij} \geq 0 (0 \leq i \leq 20, 0 \leq j \leq 20)$ 。

由此可得模型二: 有短缺损失的双目标线性规划模型

$$\max p_k = \sum_{i=1}^{20} r_i b_{ki} - \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} a_{ij} x_{ij}, \min y_k = \sum_{j=1}^{20} l_j (d_{kj} - \sum_{i=1}^{20} x_{ij}) \quad s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = b_{ki}, i = 1, 2, \dots, 20 \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} \leq d_{kj}, j = 1, 2, \dots, 20 \\ x_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, 20) \end{cases}$$

3.3 模型的求解

模型分为两类求解, 运用 Lingo 与 Excel 求出每天的调运方案, 最终可到最大获利和最小缺损费。未来四周内每天的调度方案见表 3。

表 3 综合考虑公司获利、转运费用以及短缺损失等因素的汽车调运方案

次序	具体调运方案
第 1 次	A→B 4, A→K 3, E→J 1, E→M 8, G→D 4, H→D 4, H→T 1, I→K 3, N→L 1, N→M 3, N→P 1, O→D 1, Q→K 2, Q→T 3, R→F 4, R→D 6, S→K 1, S→M 5, U→C 3, U→T
第 2 次	D→G 7, D→H 3, D→N 2, I→Q 1, J→G, K→A 1, K→F 4, K→P 4, K→Q 1, L→N 4, L→P 2, M→B 4, O→B 2, R→H 1, T→Q 10, U→C 6, U→E 13, U→H 3, U→S 16
第 3 次	B→A 7, B→L 4, E→J 3, F→N 5, F→R 1, G→J 2, G→S 1, H→R 2, I→L 1, K→A 1, K→D 5, M→N 3, P→L 2, Q→L 4, Q→S 6, U→C 2, U→S 9, U→T 9
...
第 28 次	C→L 3, E→M 9, E→Q 4, F→M 6, F→O 3, G→B 1, H→B 3, I→L 1, J→D 14, K→D 1, K→P 2, N→B 1, N→L 1, R→P 5, S→B 3, S→O 1, U→L 7, U→T 10

4 购车计划

4.1 研究思路

首先我们处理一些模型需要的数据, 新买的 k 辆车在一年内的获利我们只考虑他们租赁获得的收入, 不考虑他们的转运费及补偿缺损费。由于每个代理点的租赁费用不同, 计算获利时我们用均值代替。已知上一年每天每个代理点的汽车的需求量, 我们可以算出每一天 20 个代理点的总需求量。设每天的总需求量为 q_i , 一年中超出 379 辆的那些天短缺车辆数为 $m_i (1 \leq m_i \leq 66)$, 假设购买某种汽车 k 辆。若新买的 k 辆汽车在一年内总折损与维修保险之和小于 k 辆车一年的获利, 我们就购买新车。我们通过计算得到使最终收益最大的 k 值。

4.2 模型的建立

设每辆车租赁费用的均值为 \bar{r} , 购买了 k 辆新车. 假设一个变量 t_i 表示购买的 k 辆车在第 i 天可满足需求的汽车数.

$$t_i = \begin{cases} k & m_i \geq k \\ m_i & m_i \leq k \end{cases} \quad 1 \leq m_i \leq 66, 0 \leq i \leq 365, \text{ 则 } k \text{ 辆车一年的获利为 } S_k = \sum_{i=1}^{365} \bar{r} t_i, \text{ 扣除车辆的花}$$

费后的收益 $T_k = \sum_{i=1}^{365} \bar{r} t_i - 4.88k$; 若最大的 $T_k \leq 0$, 就不用购买新车.

若最大的 $T_k > 0$, 就购买使 T_k 最大值时的 k , 即买 k 辆车.

4.3 模型的求解

假设新车每年的折旧率为 15%, 根据每种新车的价格算出每年的折旧, 加上每年的维修和保险费用. 我们选取每年折旧、维修和保险花费最小的车辆. 由表 4 可知, 选择第四辆车的最优惠, 第一年的花费为 4.88 万元.

表 4 第 i 年折旧、维修、保险等费用总和(使用寿命均为 8 年) (单位: 万元/辆)

第 i 年	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5.13	4.07	3.36	2.92	2.57	3.06	3.42	4.00
2	5.32	4.22	3.58	3.27	3.01	3.52	3.97	4.61
3	5.44	4.41	3.81	3.51	3.23	3.75	4.10	4.82
4	4.88	3.94	3.40	3.16	2.91	3.45	3.91	4.54
5	6.90	5.51	4.64	4.14	3.58	4.17	4.50	5.02
6	6.34	5.03	4.17	3.65	3.13	3.74	4.22	4.76
7	6.61	5.23	4.38	3.82	3.41	3.78	4.05	4.54
8	5.02	4.02	3.33	2.89	2.47	2.83	3.04	3.44
9	7.24	5.80	4.81	4.25	3.66	4.12	4.46	5.02
10	7.08	5.60	4.52	3.91	3.23	3.64	3.91	4.31

通过上述模型, 将 k 依次取值利用 Excel 计算. 计算得当 k 取 6 时, 可获得最大收益. 因此, 我们需要购买 6 辆第四款新车.

本文建立的规划模型充分考虑了汽车数量不足、转运费、短缺损失费以及公司最大获利等因素, 层层递进, 逐步完善模型, 使得所得结果更具有现实意义, 贴近事实. 但是我们在构造模型时, 由于变量很多, 为使模型计算简便, 使所得结果更理想化, 忽略了一些次要的影响因素, 使得模型的精确性降低.

参考文献:

- [1] 杨吉胜. 国内汽车租赁行业发展现状及趋势[J]. 汽车零部件, 2013, 6: 20.
- [2] 方鹏. 论我国汽车租赁市场的前景研究[J]. 群文天地, 2012, 4: 258.
- [3] 2014 年吉林省第五届数学建模赛题 E 题, <http://mcm.dept.ccit.edu.cn/>.
- [4] 薛英. 线性规划在运输企业中的应用[J]. 大连大学学报, 1998, 19(5): 89—92.
- [5] 华中师范学院线性规划科研小组. 线性规划在汽车运输中的应用[J]. 华中师范学院学报, 1959, 2: 18—20.
- [6] 陈婷, 何中元. 线性规划算法在车辆调度中的应用[J]. 计算机工程与科学, 2005, 27(3): 52—55.
- [7] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型(第四版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [8] 程理民, 张亚光, 王克昌, 等. 运筹学[M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1988.
- [9] 袁新生, 邵大宏, 郁时炼, 等. LINGO 和 Excel 在数学建模中的应用[M]. 科学出版社, 2007. 3.
- [10] 朱家明, 钟梅, 张月茹, 等. 葡萄酒质量评价的定量分析[J]. 宜春学院学报, 2013, 35(3): 8—12.

责任编辑 王菊平