CVAE 公式推导

1. 问题定义

CVAE 的目标是学习一个条件生成模型 $p_\theta(x|y)$，其中：

- x 是生成的数据。
- y 是条件信息（如类别标签）。
- z 是隐变量，通常假设服从标准正态分布 $z \sim \mathcal{N}(0, I)$。

我们希望最大化条件对数似然 $\log p_\theta(x|y)$。

2. 引入变分下界（ELBO）

由于直接最大化 $\log p_\theta(x|y)$ 是困难的，我们引入变分推断来近似后验分布 $p(z|x,y)$。

(1) 条件对数似然的分解

首先，将条件对数似然分解为：

$$\log p_\theta(x|y) = \log \int p_\theta(x|y,z)p(z)\,dz$$

(2) 引入变分分布 $q_\phi(z|x,y)$

为了近似后验分布 $p(z|x,y)$，我们引入变分分布 $q_\phi(z|x,y)$，并利用 Jensen 不等式得到下界：

$$\log p_\theta(x|y) = \log \int p_\theta(x|y,z)p(z)\,dz$$

$$= \log \int \frac{p_\theta(x|y,z)p(z)}{q_\phi(z|x,y)} q_\phi(z|x,y)\,dz$$

$$\geq \int q_\phi(z|x,y) \log \frac{p_\theta(x|y,z)p(z)}{q_\phi(z|x,y)}\,dz$$

$$= \mathbb{E}_{q_\phi(z|x,y)}\left[\log p_\theta(x|y,z)\right] - D_{KL}(q_\phi(z|x,y) \| p(z))$$

(3) 变分下界（ELBO）

最终，我们得到变分下界（ELBO）：

$$\log p_\theta(x|y) \geq \mathbb{E}_{q_\phi(z|x,y)}\left[\log p_\theta(x|y,z)\right] - D_{KL}(q_\phi(z|x,y)\|p(z))$$

3. 损失函数

CVAE 的损失函数是负 ELBO：

$$\mathcal{L}(\theta,\phi) = -\mathbb{E}_{q_\phi(z|x,y)}\left[\log p_\theta(x|y,z)\right] + D_{KL}(q_\phi(z|x,y)\|p(z))$$

CVAE 公式推导

以下是所有公式的对齐和编号：

$$\begin{aligned}
\log p_\theta(x|y) &= \log \int p_\theta(x|y,z)p(z)\,dz && (1)\\
&= \log \int \frac{p_\theta(x|y,z)p(z)}{q_\phi(z|x,y)} q_\phi(z|x,y)\,dz && (2)\\
&\geq \int q_\phi(z|x,y) \log \frac{p_\theta(x|y,z)p(z)}{q_\phi(z|x,y)}\,dz && (3)\\
&= \mathbb{E}_{q_\phi(z|x,y)}\left[\log p_\theta(x|y,z)\right] - D_{KL}(q_\phi(z|x,y)\|p(z)) && (4)
\end{aligned}$$