homework2

Xiaoma

2023年3月27日

1 实验要求

使用 C/C++ 实现两种解线性方程组的算法:

- 1. 列主元 Guass 消元法
- 2. Gauss-Seidel 迭代法

2 算法原理

2.1 待解线性方程组

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, & 0 < a < 1 \\ y(0) = 0, & y(1) = 1 \end{cases}$$

容易知道它们的精确解为

$$y = \frac{1 - a}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} (1 - e^{-\frac{x}{e}}) + ax$$

为了把微分方程离散,把 [0,1] 区间 n 等分,令 $h=\frac{1}{n}$,

$$x_i = ih, \quad i = 1, 2, ..., n - 1$$

得到差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1}}{h} = a$$

简化为

$$(\varepsilon + h)y_{i+1} - (2\varepsilon + h)y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

从而离散后得到的微分方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}$$

2.2 列主元 Guass 消元法

列主元 Guass 消元法是对顺序 Gauss 消元法的一种改进,顺序 Gauss 消元可行的充分必要条件是矩阵 A 的各阶顺序主子式不为 0,但是只要 $\det A \neq 0$,方程组 Ax = b 就有解,故顺序 Gauss 消元本身具有局限性。列主元 Guass 消元法对每个 $\{k, k = 1, 2, ..., n-1\}$ 在消元前,选出 $\{|a_{kk}^{(k-1)}|, |a_{k+1,k}^{(k-1)}|, ..., |a_{n,k}^{(k-1)}|\}$ 中绝对值最大的元素 $a_{mk}^{(k-1)}$,对 k 行和 m 行进行交换后,再做消元运算,由于 $\det A \neq 0$,可证 $\{a_{kk}^{(k-1)}, a_{k+1,k}^{(k-1)}, ..., a_{n,k}^{(k-1)}\}$ 中至少有一个元素不为 0,因此,列主行消元总是可行的。

2.3 Gauss-Seidel 迭代法

Gauss-Seidel 迭代法与 jacobi 迭代步骤大致相同,其迭代的核心部分是计算迭代式的过程中,要及时将 $x_i^{(k+1)}$ 放到 $x_i^{(k)}$ 的位置上。

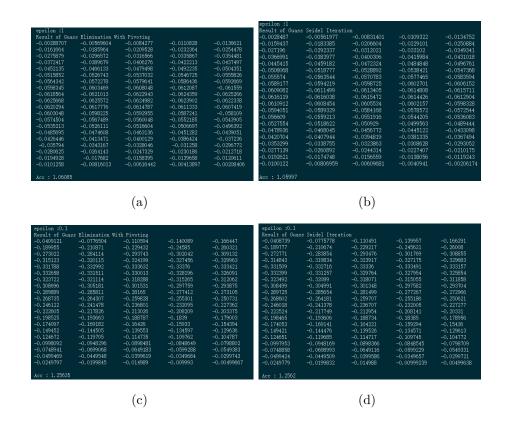
$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k + b_1 \\ x_2^{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^k + \dots + x_n^k + b_2 \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \dots + x_n^k + b_n \end{cases}$$

2.4 对实验结果的修正

事实上,对实验给定的待解方程组,部分初始值是已知的,若在计算过程中不对初值条件进行修正,将会产生较大误差,故根据已知条件 y(0)=0,y(1)=1 对初始条件进行修正 $b[99]=ah^2-\varepsilon-h$ 。

3 实验结果

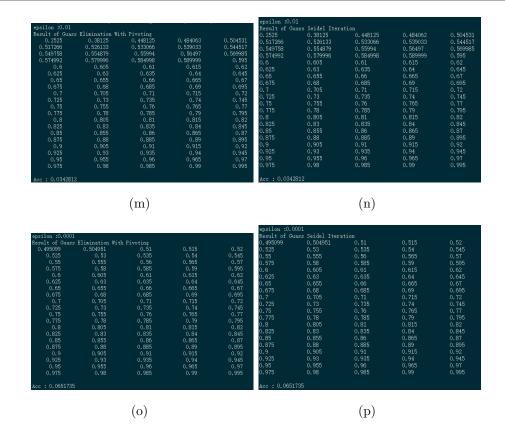
未修正前, $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.0001$ 的结果分别为



epsilon: 10.0 to 00 -0.2475 -0.467109 -0.449753 -0.424992 -0.375 -0.325 -0.325 -0.325 -0.25 -0.25 -0.175 -0.175 -0.185 -0.185 -0.185 -0.195 -0.195 -0.15	use Blimination -0.39875 -0.460075 -0.460075 -0.444877 -0.419996 -0.395 -0.37 -0.32 -0.325 -0.27 -0.245 -0.295 -0.17 -0.17 -0.145 -0.105 -0.107 -0.005 -0.07	With Privoting -0.429875 -0.489878 -0.489988 -0.41998 -0.385 -0.385 -0.385 -0.29 -0.265 -0.24 -0.215 -0.19 -0.105 -0.14 -0.115 -0.09 -0.005 -0.04 -0.015	-0, 453438 -0, 459014 -0, 49999 -0, 385 -0, 385 -0, 335 -0, 335 -0, 265 -0, 225 -0, 225 -0, 21 -0, 115 -0, 115 -0, 115 -0, 106 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005 -0, 005	-0. 464219 -0. 454507 -0. 454507 -0. 495905 -0. 405 -0. 355 -0. 355 -0. 28 -0. 255 -0. 23 -0. 205 -0. 155 -0. 13 -0. 105 -0. 08 -0. 055 -0. 03 -0. 005	epsilon: 10.0 Result of Ou -0.247493 -0.467102 -0.449751 -0.424992 -0.4 419751 -0.375 -0.355 -0.25 -0.	ass Seidel I ters -0.38374 -0.460049 -0.444875 -0.49996 -0.395 -0.37 -0.32 -0.27 -0.245 -0.295 -0.77 -0.145 -0.12 -0.195 -0.17 -0.145 -0.12 -0.095 -0.07 -0.045 -0.02	tion -0. 426865 -0. 463023 -0. 463023 -0. 493937 -0. 414998 -0. 39 -0. 955 -0. 34 -0. 315 -0. 29 -0. 265 -0. 24 -0. 215 -0. 19 -0. 165 -0. 14 -0. 115 -0. 09 -0. 065 -0. 04 -0. 015	-0. 453428 -0. 45901 -0. 43908 -0. 409999 -0. 308 -0. 305 -0. 305 -0. 305 -0. 205 -0. 205 -0. 21 -0. 185 -0. 105	-0. 46421 -0. 454504 -0. 429984 -0. 404999 -0. 385 -0. 33 -0. 355 -0. 255 -0. 255 -0. 255 -0. 215 -0. 155 -0. 105 -0. 105 -0. 005 -0. 005 -0. 005
		(e)					(f)		
epsilon: 0.00 Result of Gus -0.495 -0.475 -0.425 -0.425 -0.375 -0.325 -0.325 -0.225 -0.225 -0.225 -0.175 -0.15 -0.15 -0.055 -0.025 Acc: 1.31135	use Elimination -0. 49495 -0. 44995 -0. 47 -0. 445 -0. 42 -0. 37 -0. 32 -0. 32 -0. 225 -0. 27 -0. 27 -0. 17 -0. 145 -0. 12 -0. 195 -0. 17 -0. 105 -0. 107 -0. 107 -0. 107 -0. 107 -0. 107 -0. 07 -0. 07	With Pivoting -0, 49 -0, 405 -0, 445 -0, 415 -0, 415 -0, 395 -0, 305 -0, 315 -0, 29 -0, 205 -0, 215 -0, 19 -0, 105 -0, 115 -0, 09 -0, 004 -0, 015	-0. 485 -0. 435 -0. 437 -0. 437 -0. 385 -0. 39 -0. 395 -0. 395 -0. 285 -0. 26 -0. 235 -0. 115 -0. 115 -0. 115 -0. 115 -0. 115 -0. 105 -0. 095 -0. 095 -0. 095 -0. 095 -0. 095 -0. 095 -0. 095 -0. 01	-0. 48 -0. 485 -0. 437 -0. 405 -0. 438 -0. 405 -0. 338 -0. 335 -0. 335 -0. 235 -0. 225 -0. 225 -0. 125 -0. 131 -0. 105 -0. 108 -0. 008 -0. 005	speilon: 90.08 Result of Ou -0.495 -0.475 -0.45 -0.425 -0.45 -0.375 -0.375 -0.325 -0.3 -0.275 -0.225 -0.175 -0.125 -0.15 -0.125 -0.15 -0.05 -0.05 -0.05 -0.05	ass Saidel I terai -0. 49495 -0. 479 -0. 479 -0. 470 -0. 481 -0. 395 -0. 395 -0. 325 -0. 295 -0. 295 -0. 225 -0. 225 -0. 175 -0. 125 -0. 125 -0. 125 -0. 105 -0. 105	cion -0, 49 -0, 465 -0, 444 -0, 415 -0, 39 -0, 395 -0, 325 -0, 225 -0, 225 -0, 224 -0, 215 -0, 19 -0, 195 -0, 105 -0, 109 -0, 005 -0, 004 -0, 015	-0, 485 -0, 46 -0, 495 -0, 41 -0, 395 -0, 39 -0, 31 -0, 225 -0, 225 -0, 21 -0, 185 -0, 10 -0, 115 -0, 110 -0, 100 -0,	-0, 48 -0, 455 -0, 43 -0, 405 -0, 38 -0, 38 -0, 33 -0, 305 -0, 28 -0, 225 -0, 205 -0, 205 -0, 105 -0, 105 -0, 105 -0, 105 -0, 008 -0, 005
		(g)					(h)		

修正后, $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.0001$ 的结果分别为

epsilon :1				epsilon :1	ass Seidel Itera			
Result of Guass Elimination () 0.127399 () 0.0275822 () 0.0275825 () 0.0275825 () 0.0275825 () 0.137582 () 0.137582 () 0.147682 () 0.139592 () 0.252239 () 0.25223 ()	With Pivoting 0.0379638 0.0997488 0.159743 0.218041 0.274723 0.325988 0.3835549 0.435838 0.496803 0.535569 0.496803 0.535509 0.472508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508 0.172508	0. 0504673 0. 111885 0. 171535 0. 279504 0. 285873 0. 340719 0. 394116 0. 446135 0. 496843 0. 594576 0. 044172 0. 687738 0. 792835 0. 792835 0. 792835 0. 394576 0. 494382 0. 903751 0. 903751 0. 903751 0. 903751 0. 944382	0. 0628965 0. 123954 0. 183201 0. 249903 0. 299961 0. 351512 0. 404628 0. 45938 0. 509833 0. 559651 0. 60494 0. 651018 0. 696878 0. 741729 0. 78561 0. 89571 0. 902416 0. 952416	0.0129923 0.0750284 0.135599 0.194375 0.251564 0.307207 0.361383 0.414104 0.465619 0.564899 0.12962 0.795187 0.79518 0.7	383 3-101 1143 3 0.025396 0.08172759 0.08172759 0.0194 0.303814 0.318157 0.372049 0.424559 0.424559 0.525707 0.525707 0.525707 0.74183 0.76265 0.774183 0.886951 0.886951 0.886951	0. 0378495 0. 099452 0. 159226 0. 274002 0. 22905 0. 22905 0. 32905 0. 489845 0. 535552 0. 584064 0. 531490 0. 777841 0. 767529 0. 110964 0. 855517 0. 895227 0. 996123 0. 996123	0, 050316 0, 111557 0, 171048 0, 228878 0, 288513 0, 398824 0, 445192 0, 495883 0, 545351 0, 595354 0, 089897 0, 732118 0, 170299 0, 1819544 0, 803472 0, 903472 0, 903472	0.0627087 0.123593 0.122745 0.240252 0.996198 0.550662 0.403716 0.455431 0.505873 0.555103 0.60318 0.696092 0.741027 0.823089 0.8703 0.811684 0.952279 0.952279
Acc : 0.010442				Acc : 0.0096	3603			
	(j)							
epsilon :0.1 Result of Guass Elimination	epsilon :0.1 Result of Guass Seidel Iteration							
0.050003	0. 138107 0. 304096 0. 416639 0. 495997 0. 554748 0. 600705 0. 638718 0. 671798 0. 701815 0. 72993 0. 756804 0. 783065 0. 834274 0. 839562	0, 176919 0, 33009 0, 434675 0, 509091 0, 564774 0, 608826 0, 645656 0, 645656 0, 707562 0, 707562 0, 762152 0, 788244 0, 813922 0, 839343 0, 864605	0, 212656 0, 354176 0, 451526 0, 521449 0, 574343 0, 616663 0, 652417 0, 684095 0, 713241 0, 740816 0, 767414 0, 793407 0, 819023 0, 844406 0, 899643	0.0499691 0.245442 0.376304 0.467051 0.532892 0.583287 0.624038 0.658844 0.689944 0.718741 0.746106 0.772581 0.798501 0.824076 0.849435	0.0958504 0.275823 0.397069 0.481844 0.543975 0.992048 0.665306 0.695854 0.724308 0.751459 0.777801 0.803639 0.829162 0.8584489	0.138015 0.303906 0.410402 0.495747 0.554507 0.600485 0.671635 0.701681 0.725623 0.756781 0.783902 0.808764 0.83424 0.859538	0.176802 0.32988 0.434433 0.506841 0.5064536 0.607814 0.677844 0.707434 0.707434 0.75292 0.762073 0.788184 0.813878 0.839311 0.804582	0. 212518 0. 353962 0. 45128 0. 521201 0. 574109 0. 616454 0. 652237 0. 683944 0. 713118 0. 767339 0. 79335 0. 818981 0. 844376 0. 869623



4 实验分析

在执行解线性方程组的算法之前,首先考虑该方程组是否有已知的初始值, 若有则需要做相应的修正,否则将产生较大的误差。