

homework1

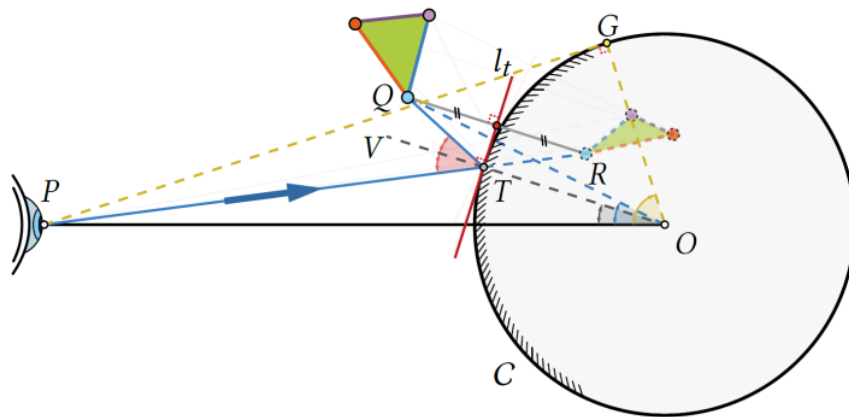
Xiaoma

2023 年 3 月 18 日

1 实验要求

设计一个算法来计算圆柱形镜面反射中像的位置的问题。

在三维空间中，给定观察者位置 P ，圆柱形镜面的位置 O 和半径 r （假设高度无穷长），一点 Q ，求 Q 被观察到的像的位置 R 。我们进一步注意到，由于镜面是圆柱形的，所以 R 和 Q 一定有相同的高度。因此我们将该问题转化到二维平面上，由此进一步设计算法求解该问题。



- 假设：在 xy 平面上有一个镜面圆，可以反射光线，圆的圆心在 origin 处，半径为 1；观察点在 x 轴负半轴上；物点 Q 在第二象限且在圆外。
- 输入：

观察点 $P, P \in \{(x, y) | x < -1, y = 0\}$

物点 $Q, Q \in \{(x, y) | x < 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1\}$

- 输出：反射点 T 的位置，像点 R 的位置，都用二维坐标 (x, y) 表示

2 算法原理

2.1 光路长度的计算

由费马定理可知，设光路的长度为 L ，当始于点 P ，经过单位圆上一点且终点为 Q 的光路长度 L 最小时，光路满足反射条件，即此时的光路为所求光路。

设点 P 的横坐标为 P_x ，点 Q 的横坐标为 Q_x ，纵坐标为 Q_y ，线段 OT 与 x 轴负半轴的夹角为 θ ，则可得 L 的计算公式

$$L = \sqrt{(P_x + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{(Q_x + \cos \theta)^2 + (Q_y - \sin \theta)^2}$$

计算 L 关于 θ 的导数 L'

$$L' = -\left(\frac{P_x \sin \theta}{\sqrt{P_x^2 + 2P_x \cos \theta + 1}} + \frac{Q_x \sin \theta + Q_y \cos \theta}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + 2Q_x \cos \theta - 2Q_y \sin \theta + 1}}\right)$$

令 $L' = 0$ ，则对应的 θ 即为问题的解。

2.2 二分法求解方程

已知该物理模型不会出现两个极值点的情况，故使用二分法求近似解。

设迭代的两个初始值分别为 $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ$ ，开始迭代直至结果小于阈值。

2.3 点 T, R 坐标的计算

根据上面的假设，根据几何性质可以分别得到点 T, R 的坐标的计算公式

$$T_x = -\cos \theta$$

$$T_y = \sin \theta$$

$$R_x = \frac{(Q_y + Q_x \tan \theta)(\cos \theta + P_x) - P_x \sin \theta}{\tan \theta(\cos \theta + P_x) - \sin \theta}$$

$$R_y = \frac{\sin \theta(P_x - x)}{\cos \theta + P_x}$$

3 实验结果

分别对给定样例进行了测试，结果如下

表 1: 测试结果

P	Q	T	R
(-2,0)	(-1,1)	(-0.885669, 0.464316)	(-0.380058, 0.674993)
(-10, 0)	(-2,1)	(-0.959311, 0.282350)	(0.304209, 0.321811)
(-1.000001, 0)	(-2,1)	(-1.000000, 1.000042e-6)	(-4.415403e-5, 0.999998)
(-2,0)	(-1,0.000001)	(-1.000000, 9.999959e-7)	(-0.999998, 9.999979e-0)
(-2.33,0)	(-3,1)	(-0.989279, 0.146037)	(1.182441, 0.382590)
(-3,0)	(-1,0.5)	(-0.922616, 0.385721)	(-0.786918, 0.410916)
(-3,0)	(-2,10)	(-0.827029, 0.562159)	(8.380323, 2.944150)
(-3,0)	(-3,1)	(-0.987409, 0.158190)	(1.187486, 0.329136)
(-10,0)	(-2,1)	(-0.959311, 0.282350)	(0.304209, 0.321811)
(-1024,0)	(-8,4)	(-0.970066, 0.242841)	(7.001020, 0.244733)

4 实验分析

python 作为科学计算语言在数值计算过程中具有较高的精度，但对于样例 $P(-2, 0)$, $Q(-1, 0.000001)$ ，会出现除数为 0 的情况，故在计算过程中增加一个非常小的常数 $1e-12$ ，在保证计算稳定性的同时，极大降低对结果造成的误差。