Homework3

Xiaoma

2023 年 4 月 13 日

1 实验要求

使用 C/C++ 实现反幂法求给定矩阵的最小特征值及其对应的特征向量。

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 16 & -2 & -2 & 5 \\ 16 & -3 & -1 & 7 \\ 6 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2 算法原理

2.1 幂法

在实际问题中，矩阵的按模最大特征值往往起着更重要的作用。例如谱半径即矩阵的按模最大特征值，决定了迭代矩阵是否收敛。幂法是计算按模最大特征值及相应特征向量的数值方法。

简单的说，任取初始向量 $X^{(0)}$，进行迭代运算

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)}$$

得到近似迭代序列 $\{X^{(k)}\}$，分析 $X^{(k+1)}$ 与 $X^{(k)}$ 之间的关系，得到 A 的最大特征值及特征向量的近似解。

2.1.1 幂法的规范运算

在幂法迭代计算中，当 k 充分大时，若 A 的按模最大特征值其绝对值较大时，$X^{(k)}$ 的某些分量迅速增大，可能造成上溢，同理，若 A 的按模特征值绝对值较小时，$X^{(k)}$ 的某些分量迅速缩小，可能会造成下溢。

规范运算可按照下面公式进行

$$\begin{cases} Y^{(k)} = X^{(k)}/\|X^{(k)}\| \\ X^{(k+1)} = AY^{(k)} \end{cases}$$

2.2 反幂法

反幂法是计算矩阵按模最小的特征值以及相应的特征向量的数值方法。

2.2.1 反幂法的规范运算

已知用幂法计算 A^{-1} 的按模最大特征值正是 A 的按模最小特征值的倒数，故反幂法的规范运算方法为

$$\begin{cases} Y^{(k)} = X^{(k)}/\|X^{(k)}\| \\ AX^{(k+1)} = Y^{(k)} \end{cases}$$

2.3 Doolittle 分解

在上述问题中，反幂法的迭代过程需要求解同系数矩阵的线性方程组，故采用 Doolittle 分解法计算。

设矩阵 $A=(a_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ 的各阶顺序主子式不为雲，A 有分解式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \cdots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \cdots & \mathrm{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a_{n1}} & \mathrm{a_{n2}} & \cdots & \mathrm{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1_{\mathrm{n1}} & 1_{\mathrm{n2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{u_{11}} & \mathrm{u_{12}} & \cdots & \mathrm{u_{1n}} \\ & \mathrm{u_{22}} & \cdots & \mathrm{u_{2n}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{u_{nn}} \end{bmatrix} \equiv \mathrm{LU}$$

可得出关系

$$\mathrm{a_{ir}} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} \mathrm{l_{ik}u_{kr}}(\mathrm{i}=\mathrm{r}+1,\cdots,\mathrm{n};\mathrm{r}=1,\cdots,\mathrm{n}-1)$$

由这两个关系可以解出 L 和 U: 当 r=1 时，

$$\mathrm{u_{1i}} = \mathrm{a_{1i}} \quad (\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n})$$
$$\mathrm{l_{i1}} = \frac{\mathrm{a_{il}}}{\mathrm{u_{11}}} \quad (\mathrm{i}=2,3,\cdots,\mathrm{n})$$

假设求出了 U 的第 1 至 r-1 行，L 的 1 至 r-1 列，由上面两式得出 U，L 的第 r 行，列的计算公式

$$\mathrm{u_{ri}} = \mathrm{a_{ri}} - \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r-1}} \mathrm{l_{ik}u_{kr}} \quad (\mathrm{i}=\mathrm{r},\cdots,\mathrm{n};\mathrm{r}=1,2,\cdots,\mathrm{n})$$

$$l_{\mathrm{ir}} = \frac{\mathrm{a_{ir}} - \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r-1}} \mathrm{l_{ik}u_{kr}}}{\mathrm{u_{rr}}} \quad (\mathrm{i}=\mathrm{r}+1,\cdots,\mathrm{n};\mathrm{r}=1,2,\cdots,\mathrm{n}-1)$$

规定 $\sum_{\mathrm{k=1}}^{0} \mathrm{l_{ik}u_{kr}} = 0$ 称上面所表示的矩阵分解为 Doolittle 分解，也称 LU 分解

3 实验结果 (详见程序生成的 md 文件)

k	Lambda	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
0	1	1	1	1	1						
1	-1120	630	-1120	630	-120	5	-0.5625	1	-0.5625	0.107143	-0.00446429
2	297849	-146253	297849	-196175	45114.4	-2377.25	-0.49103	1	-0.658639	0.151467	-0.00798141
3	304047	-149113	304047	-200595	46244.7	-2446.56	-0.490426	1	-0.65975	0.152097	-0.00804664
4	304142	-149157	304142	-200661	46261.1	-2447.54	-0.49042	1	-0.659762	0.152104	-0.00804735
5	304143	-149158	304143	-200662	46261.3	-2447.55	-0.49042	1	-0.659762	0.152104	-0.00804736
6	304143	-149158	304143	-200662	46261.3	-2447.55	-0.49042	1	-0.659762	0.152104	-0.00804736
7	304143	-149158	304143	-200662	46261.3	-2447.55	-0.49042	1	-0.659762	0.152104	-0.00804736
8	304143	-149158	304143	-200662	46261.3	-2447.55					

Minimum eigenvalue is : 3.28793e-06

Eigenvector is : (-0.49042,1,-0.659762,0.152104,-0.00804736)

图 1: A1 的实验结果

k	Lambda	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	1	1	1	1					
1	2	0	2	-0	1	0	1	-0	0.5
2	5.625	-0.625	5.625	-2.375	3.5	-0.111111	1	-0.422222	0.622222
3	8.07778	-0.933333	8.07778	-3.43333	5.04444	-0.115543	1	-0.425034	0.624484
4	8.08992	-0.93621	8.08992	-3.44378	5.05433	-0.115725	1	-0.425687	0.624769
5	8.09382	-0.936712	8.09382	-3.44549	5.05681	-0.115732	1	-0.425694	0.624774
6	8.09386	-0.936719	8.09386	-3.44551	5.05684	-0.115732	1	-0.425695	0.624775
7	8.09386	-0.93672	8.09386	-3.44552	5.05684				

Minimum eigenvalue is : 0.12355

Eigenvector is : (-0.115732,1,-0.425695,0.624775)

图 2: A2 的实验结果

4 实验分析

1. $A1$ 的按模最小特征值小于 $A2$，但迭代次数比 $A2$ 多，则“A 的按模最小特征值越接近于 0，收敛越快”不成立。

2. 估计每次迭代的特征值中未遇到问题