基于SVD与RSVD方法的图像压缩

Xiaoma

2023 年 3 月 26 日

摘要

在现实世界中，我们经常需要对图像进行传输或存储，图像的大小与传输和存储的成本密切相关，所以我们需要在尽可能保证图像质量的前提下，采用相应的技术，对图像进行压缩。第一种方法是基于SVD对图像进行压缩，可以使图像在保证部分重要特征的同时采用更小规模的数据来表示，另外一种为基于Randomized-SVD方法的图像压缩，该方法在保证精度与前者相同的情况下，大幅提高了压缩速度。

一、前言

现实世界中每天都会产生大量的数据，如文本、音频、视频、图像等。通过图片来传递信息对于我们来说是非常普遍的。智能手机和智能设备领域的革命使使用者能更方便的使用数据。[3]就存储成本而言，存储未压缩的图像的成本是十分高昂的，传输未压缩的图像往往也要占用更大的带宽，所以对图像传输与存储前的压缩是一个非常重要的问题，且在压缩过程中，应在压缩率与特征保留之间进行权衡。

二、相关工作

1. 实现基于SVD方法的图像压缩算法
2. 实现基于Randomized-SVD方法的图像压缩算法
3. 分别对两种方法进行比较
4. 启发式分析

三、问题分析

3.1 分析

由于对本问题的分析应尽量接近显示生活，故我们将对彩色图像进行压缩。彩色图像由RGB三种基本颜色构成，若图像的尺寸为$m*n$，则在计算机中以$m*n*3$的矩阵形式存储，所以在压缩过程中应分别压缩三个矩阵。

四、建模的假设

4.2 假设1

需要进行压缩的图片不考虑无损压缩方式（如哈夫曼编码）。

4.3 假设2

需要进行压缩的图片要保留一定的特征。

五、符号说明

表 1: **符号说明**

符号	说明
M	原输入矩阵
U	M的左奇异向量
Σ	对角线为M奇异值的实对角矩阵
V^*	M的左奇异向量
A_R	M的R通道压缩矩阵
Q	M的近似基
Ω	随机向量矩阵

六、数学模型建立

奇异值分解

奇异值分解是线性代数中一种重要的矩阵分解，现在被广泛应用于信号处理、机器学习等领域。假设 M是一个$m*n$阶矩阵，其中的元素全部属于域K，则存在一个分解使得$\mathbf{M} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$，其中$\mathbf{U}$是$m*m$阶酉矩阵，$\Sigma$是$m*n$阶非负实对角矩阵，$\mathbf{V}^*$是$n*n$阶酉矩阵，这样的分解就成为奇异值分解。 Σ对角线上的元素即为$\mathbf{M}$的奇异值。

基于SVD的图像压缩

通过SVD方法可以更多的利用图像的冗余特征，将这部分区域消除后，可以降低图像所需的存储空间并尽可能保证图像完整性。即SVD方法可以使用一个低维矩阵去近似高维矩阵，将特征值按照降序排

列，则再图像压缩过程中，将排在后面的特征丢弃，保留排在前面的特征，以将信息损失最小化。若假设压缩后的图像要保留k个特征，则最终得到的图像矩阵为

$$\mathrm{A_R} = \mu_1 \mathrm{u_1 v_1^T} + \mu_2 \mathrm{u_2 v_2^T} + \ldots + \mu_\mathrm{k} \mathrm{u_k v_k^T}$$

$$\mathrm{A_G} = \mu_1 \mathrm{u_1 v_1^T} + \mu_2 \mathrm{u_2 v_2^T} + \ldots + \mu_\mathrm{k} \mathrm{u_k v_k^T}$$

$$\mathrm{A_B} = \mu_1 \mathrm{u_1 v_1^T} + \mu_2 \mathrm{u_2 v_2^T} + \ldots + \mu_\mathrm{k} \mathrm{u_k v_k^T}$$

$$\mathrm{A} = [\mathrm{A_R}, \mathrm{A_G}, \mathrm{A_B}]$$

基于Randomized-SVD的图像压缩

通过一种随机化思想，使用随机投影来识别子空间，以获得矩阵的主要特征。首先从原式矩阵M的列空间中获得一个近似基Q且满足$M \approx QQ^*M$，其中Q的列向量是正交的，通过设置需要获得的奇异值个数k以及过采样参数p，构建一个由$k+p$个n维的随机列向量组成的矩阵 Ω，要求$(k+p) <= minm, n$，每一个列向量中的值均采样自标准正态分布，因此，这些采样的列向量线性独立，进行矩阵乘积运算$\mathrm{Y} = \mathrm{M}\Omega$，由于向量集合Y也是线性独立的，则$Y$为矩阵$M$的列向量空间。通过求取向量集合$Y$的正交基，从而得到$M$的近似基$Q$。

然后构建低维矩阵B，满足$B = Q^*M$，并计算低维矩阵B的SVD分解，使得$B = \bar{U}\Sigma V^*$，B是一个$k+p$行n列的矩阵，相比初始矩阵$M(mn)$，B的行数非常小，更易于进行SVD分解。矩阵M实际的左奇异向量U为$U = Q\bar{U}$。

该算法的步骤如下

Algorithm **1** basic rSVD [1]

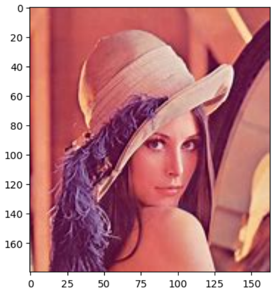
Input: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, rank parameter k, power parameter p

Output: $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times k}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times k}$

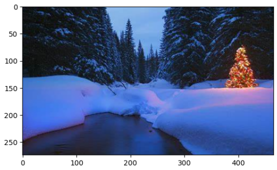
1: $\mathbf{\Omega} = \mathrm{randn}(n, k+s)$
2: $\mathbf{Q} = \mathrm{orth}(\mathbf{A\Omega})$
3: for $i = 1, 2, \cdots, p$ do
4: $\quad \mathbf{G} = \mathrm{orth}\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}\right)$
5: $\quad \mathbf{Q} = \mathrm{orth}(\mathbf{AG})$
6: end for
7: $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^\mathrm{T}\mathbf{A}$
8: $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \mathrm{svd}(\mathbf{B})$
9: $\mathbf{U} = \mathbf{QU}$
10: $\mathbf{U} = \mathbf{U}(:, 1:k), \mathbf{S} = \mathbf{S}(1:k, 1:k), \mathbf{V} = \mathbf{V}(:, 1:k)$

七、结果（与对比）

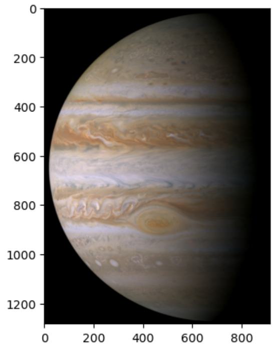
将SVD方法压缩的图像与RSVD方法压缩的图像进行对比



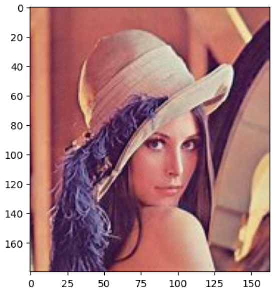
(a) 1



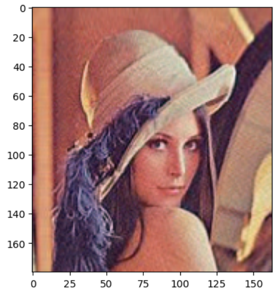
(b) 2



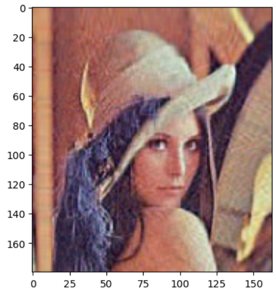
(c) 3



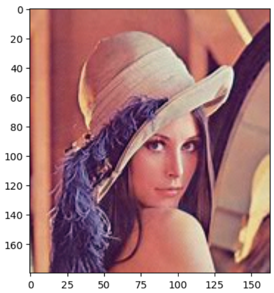
(d) $SVD1_{100}$



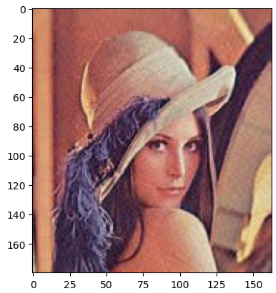
(e) $SVD1_{50}$



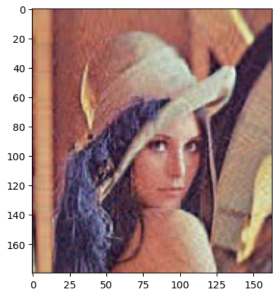
(f) $SVD1_{30}$



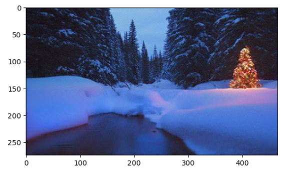
(g) $RSVD1_{100}$



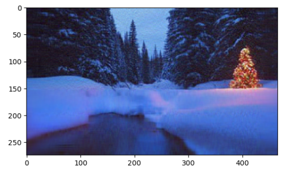
(h) $RSVD1_{50}$



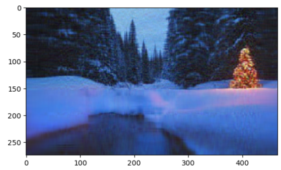
(i) $RSVD1_{30}$



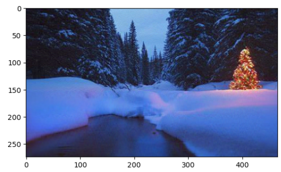
(j) $SVD2_{100}$



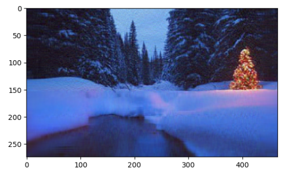
(k) $SVD2_{50}$



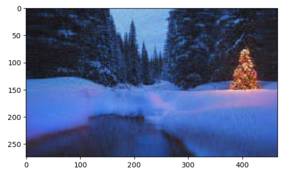
(l) $SVD2_{30}$



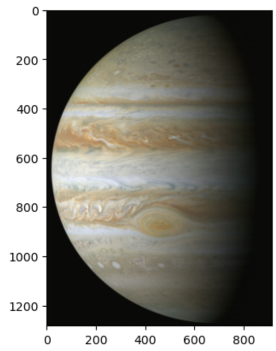
(m) $RSVD2_{100}$



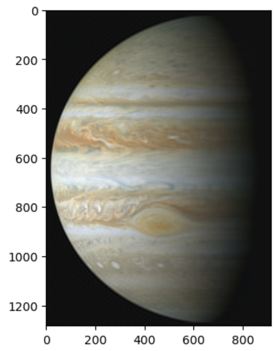
(n) $RSVD2_{50}$



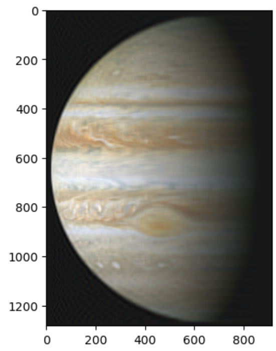
(o) $RSVD2_{30}$



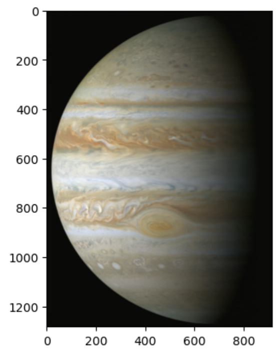
(p) $SVD3_{100}$



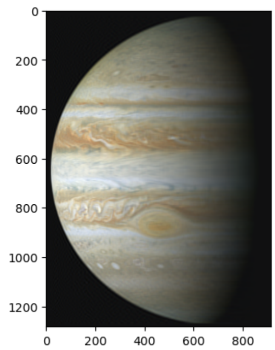
(q) $SVD3_{50}$



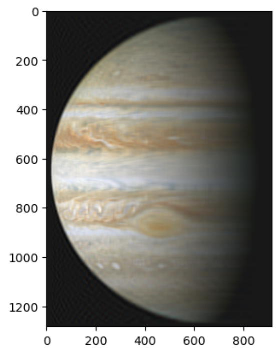
(r) $SVD3_{30}$



(s) $RSVD3_{100}$



(t) $RSVD3_{50}$



(u) $RSVD3_{30}$

八、结论

基于Randomized-SVD方法的图像压缩在保证图像质量相同的情况下，压缩速度较SVD方法相比快6-7倍。

九、问题

两种算法都需要手动调整特征数参数k，在处理大规模数据时手动调整参数时间成本过高，设定固定参数又不能保证所有图像的质量。

此外，对于整个图像来说，全局SVD可以得到全局的奇异值的对应排列，但在全局相对不重要的特征可能在图像的某个部分是十分重要的，因此全局SVD会造成图像局部信息丢失的问题。将图像中的数据用一个与其无关的称之为shuf的排列S打乱，然后使用SVD分解得到的矩阵$X = S(M)$，假设$X_r = \mathbf{U}_r\Sigma_r\mathbf{V}_r^*$表示对$X$获得的近似值。实验发现，对于相同的$r$值，图像$S^{`1}(X_r)$是一个比$M_r$更好的近似值。[2]

参考文献

[1] Xu Feng, Wenjian Yu, and Yaohang Li. Faster matrix completion using randomized svd. In *2018 IEEE 30th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI)*, pages 608–615, 2018.

[2] Abhiram Ranade, Srikanth S Mahabalarao, and Satyen Kale. A variation on svd based image compression. *Image and Vision computing*, 25(6):771–777, 2007.

[3] H R Swathi, Shah Sohini, Surbhi, and G Gopichand. Image compression using singular value decomposition. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 263(4):042082, nov 2017.