

离散数学：引子：形式化及其极限

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

“离散”数学

- 离散数学 Discrete Mathematics
- 关于“离散结构”的数学
- 离散 Discrete 含义：分离的，不连续的
separate, discontinuous
- 研究分立的对象之间所形成的关系
- 离散结构源于人们对时间相继性的感知和原子性世界的经验

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

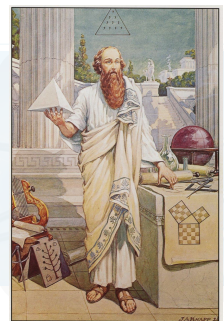
连续以及世界的本质

- 连续，通俗来说就是**无限可分**
- "一尺之棰，日取其半，万世不竭"
《庄子·天下篇》
- 物质世界的本质是连续？还是离散？这是个哲学家们争论不休的问题.....
- 但在理性王国中，从自然数到有理数，再到实数，涉及到无限的连续已经被创造了。
- 数学，是如何超越直觉与经验做到的呢？

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

“数”学

- 数学源于人们对计量的需要：
- 计数问题：从结绳法的1、2、3.....开始
- 测量问题：长度、面积、体积
- 出现了整数——最原始的数，源于人们对“相继出现”和“次序”的感知
- 毕达哥拉斯信奉“万物皆数”
Number Rules the Universe
数是宇宙的本原，是现实秩序的根据
- 数学脱离观察、直觉和经验，成为纯粹思维的产物——现代科学以至现代文明的起源



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无理数：第一次数学危机

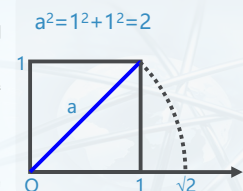
- 数还具有了几何解释——**数轴**，数和直线上的点一一对应
- 整数：间隔为单位长度的点
- 分数 p/q ：将单位长度 q 等分，取 p 个等分
- 计数和测量统一在一起
- 一切都是完美的，以至于整数和分数被称为**有理数** (rational number)
rational: 理性的、合理的
- 直到.....



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无理数：第一次数学危机

- 毕达哥拉斯自己痛苦地证明了 $\sqrt{2}$ 既不是整数，也不是分数——**不是有理数**
- 与人的**常识矛盾**：存在**不能用单位长度来测量**的线段？
- 摧毁了毕达哥拉斯学派的基础，学派花了很长时间来保密。
- 据说，毕达哥拉斯的一个学生希帕苏斯，由于泄露了这个秘密而被扔进了大海。
- 人们不情愿地把这种“不合理性”的数称为**无理数** (irrational number)



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

第一次数学危机的解决及启示

- 最后BC370由欧多克斯通过给比例（即分数）下新定义的方法所解决。
- 和1872年狄德金所给出的无理数的现代解释基本一致
- 第一次数学危机给我们的启示：
- 直觉和经验不一定靠得住，**推理和证明才是可靠的。**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

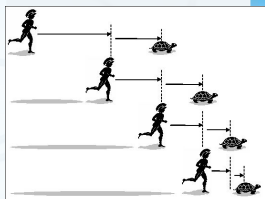
古文明的际遇

- 古希腊人通过演绎推理建立形成了欧几里得《几何原本》的**公理体系**与亚里士多德的**逻辑体系**。
- 埃及、巴比伦、中国、印度等古文明的数学，并没有经历过这样的危机与革命，
- 所以也就一直停留在计量所需的“**算学**”阶段。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无穷：第二次数学危机

- 危机的潜伏：**芝诺Zeno of Elea**四个悖论（~BC450）
- 反对空间时间无限可分的两个悖论：运动不存在和**阿基里斯追不上乌龟**；
- 反对空间时间有限可分的两个悖论：飞矢不动和游行队伍。
- 古希腊人已经认识到无穷小和“很小很小”的矛盾
<http://baike.baidu.com/view/9383.htm>



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

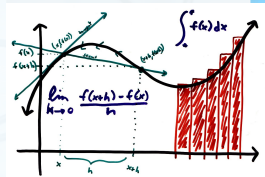
危机的爆发：微积分的基础（18世纪早期）

- 求曲线长度、包围面积、速度、切线、极大值、极小值采用的“**穷竭法**”导致了微积分的创立。
- 牛顿和莱布尼兹被公认为微积分的奠基者
- 他们把上述各种问题的解法统一成一种方法，**微分法和积分法**，并有明确的计算微分法的步骤，微分法和积分法互为逆运算

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

微积分里的“无穷小”是什么？

- 无穷小量究竟**是不是零**？两种答案都会导致矛盾。
- 牛顿对它曾作过三种不同解释，但始终无法解决上述矛盾：
1669年说它是一种常量；
1671年又说它是一个趋于零的变量；
1676年又说它是“两个正在消逝的量的最终比”。
- 大主教贝克莱讽刺它是“消失了的量的鬼魂”



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无穷级数的求和

- 格兰迪级数(Grandi's series, 1703)
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$
- $= 1/2 ?$
- $= 1 ?$
- $= 0 ?$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

危机的解决：1820s~1870s

- › 从波尔查诺Bolzano、阿贝尔Abel、柯西Cauchy、狄里赫利Dirichlet等人对**连续**的定义和**极限论**开始。
- › 到魏尔斯特拉斯、狄德金、康托等人独立地建立了**实数理论**，在实数理论上建立极限论的基础。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

第二次数学危机的结果和启示

- › 数学分析建立在实数理论的严格基础之上
- › 导致**数理逻辑**和**集合论**的诞生，由此把数学分析的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题
- › 整个数学看来都具备了**严格的形式化**基础
- › 再次提醒人们直觉和经验是不可靠的
- › 无限、无穷都已经**超出了人类的经验范围**

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

理发师？第三次数学危机

- › 1901年5月，罗素Russell发现的悖论沉重打击了集合论和逻辑基础。
- ›**理发师困境**
- ›**说谎的克利特人**
- › 悖论动摇了整个数学的根本
- › 罗素提出类型论，策梅罗Zermelo提出**公理化集合论**来对朴素集合论进行限制，解决悖论问题。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

对形式系统的验证

- › 第三次数学危机解决以后，整个数学界非常乐观
- › 希尔伯特Hilbert的形式化思想占统治地位
- › 数学建立在公理化集合论和数理逻辑两块基石之上
- › 整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论，它们都已经公理化
- › 如果能够证明这些形式系统的一致性和完全性，整个数学基础就比较牢靠了

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

形式化的极限？

- › 1928年，希尔伯特提出四个问题，希望能够把整个数学理论系统形式化，并证明无矛盾。
- › 1930年，哥德尔Godel宣布了**不完全性定理**，这是一个具有哲学意义的普适定理。
- › 2003年，霍金以“哥德尔和物理学的终结”的演讲公开放弃对“万有理论”的追求。
- › 人们认识到对整个数学形式化的努力是注定要失败的。
- › 无矛盾的系统不完备，完备的系统却是存在自相矛盾的。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：引子：悖论、版画、卡农

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

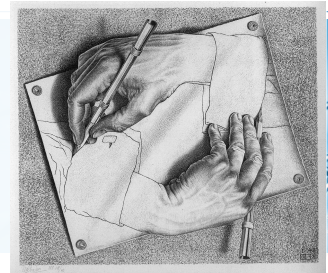
“完美”的数学终结于“自我相关”

- › “自我相关”的逻辑悖论
下面这句话是错的
上面这句话是对的
- › 哥德尔不完全性定理也运用“自我相关”
- › 证明了一切包含了自然数定义的形式系统，
要么不完备（不能证明所有真理），要么不一致（包含自相矛盾）。
- › “自我相关，层次缠绕”的怪圈无处不在

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

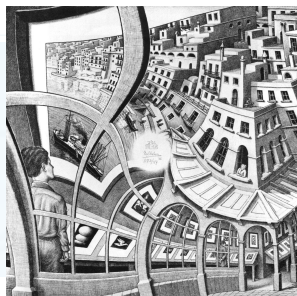
- › Drawing Hands



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

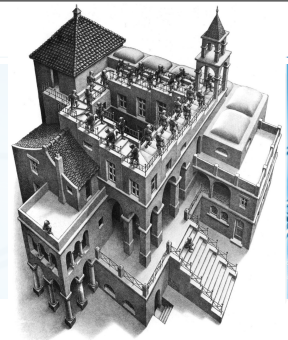
- › Print Gallery



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

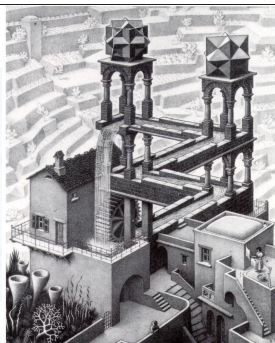
- › Ascending and Descending



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

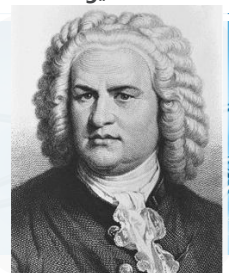
- › Waterfall



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

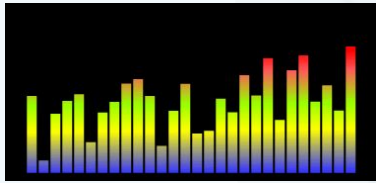
巴赫J. S. Bach《音乐的奉献Musical Offering》

- › 卡农canon：一种重复演奏同一主题的音乐形式，通常用不同的音部来重复，每个音部都比前一个延迟一段时间。
- › 主题中的每个音符都必须巧妙和延迟的音部中同一主题的其他音符保持和谐。
- › 《音乐的奉献》里运用了一种特殊的卡农技巧构成自我相关的怪圈。
- › 用不同音部首尾相接的变调使听众有一种不断增调的感觉。



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

巴赫J. S. Bach 《音乐的奉献Musical Offering》



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

以有限把握无穷

- › 人所能理解的概念和调动的资源都是有限的
- › 以少数的规则包含无限多的事实
- › 从有限的推导抓住无限丰富的未知
- › 自我相关，是一种在有限中包含无限的概念，一种以有限体现无限的过程
- › 如果把自我相关称作“递归”，大家就很熟悉了

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

以有限把握无穷

- › 人类思维过程和认知概念中包含着大量的自我相关和层次缠绕
- › 自省、自指
- › 对逻辑的研究，对智能的模拟
(以逻辑研究逻辑，以智能模拟智能)
- › 自我相关是产生思维和智能很重要的基础？
- › 但，哥德尔不完全性定理指出自我相关恰恰就是限制形式系统的幽灵。
- › 人类一思考，上帝就发笑？

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

欢迎来到《离散数学》

- › 当然，不必太悲观，我们还是来欣赏一下人类已取得的辉煌成就
- › 让我们开始查看人类知识大厦的基础！
 - 数理逻辑
 - 集合论
 - 图论
 - 抽象代数
 - 形式语言与自动机

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015