

离散数学：数理逻辑：介绍

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

什么是数理逻辑

- › 逻辑学是探索、阐述和确立有效**推理原则**的学科，最早由古希腊学者亚里士多德创立。
- › 亚里士多德在逻辑学上最重要的工作是提出三段论学说。
- › 只要符合三段论的推理就是正确的。
- › 一个三段论就是一个包括有大前提、小前提和结论三个部分的论证。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

什么是数理逻辑

› 三段论有许多不同种类，其中最著名的例子：

- ① 凡是人都会死（**大前提**）
- ② 苏格拉底是人（**小前提**）
- ③ 所以：苏格拉底会死（**结论**）

› 逻辑学还是以自然语言来表述，可能会因为自然语言的**模糊性**损害其准确和权威。

› 用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科就叫做**数理逻辑**（也叫做符号逻辑）。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

数理逻辑的萌芽

- › 利用**计算**的方法来**代替**人们思维中的逻辑**推理过程**，这种想法早在十七世纪就有人提出过。
- › 莱布尼茨（Leibniz）曾经设想能不能创造一种“**通用的科学语言**”，可以把推理过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。
- › 由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。
- › 但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的**萌芽**，从这个意义上讲，莱布尼茨的思想可以说是数理逻辑的先驱。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

数理逻辑的开创

- › 1847年，英国数学家布尔G.Boole发表了《逻辑的数学分析》，建立了“**布尔代数**”。
- › 布尔创造了一套符号系统，利用**符号**来表示逻辑中的各种概念。
- › 还建立了一系列的运算法则，利用**代数**的方法研究逻辑问题，初步奠定了**数理逻辑**的基础

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

数理逻辑的大发展

- › 1884年，德国数学家弗雷格Frege出版了《数论的基础》一书，在书中引入**量词**的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。
- › 美国人皮尔斯Peirce，他也在著作中引入了更多逻辑符号。
- › 从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

数理逻辑的四大分支

- › 数学史上的第三次大危机是由于发现了集合论的**逻辑悖论**引起的。
- › 悖论的提出，促使许多数学家去研究集合论的无矛盾性问题，从而产生了数理逻辑的一个重要分支——**公理集合论**。
- › 为了研究数学系统的无矛盾性问题，需要以数学理论体系的概念、命题、证明等作为研究对象，研究数学系统的逻辑结构和证明的规律，这样又产生了另一个分支——**证明论**。
- › **递归论**主要研究可计算性的理论，它和计算机的发展和应用有密切的关系。
- › **模型论**主要是研究形式系统和数学模型之间的关系。

- › 我们课程中介绍的是数理逻辑各个分支的共同基础部分：**命题演算**与**谓词演算**

离散数学：数理逻辑：命题

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

命题 (proposition)

- › 命题是数理逻辑中最基本的概念
- › 对确定的对象作出判断的陈述句称作命题
- › 如果判断正确，称命题**真** (true)
- › 否则称命题**假** (false)
- › “真、假”是命题的属性，称为“**真值**”

命题 (proposition)

- › 什么样的语句是命题？
- › 雪是白的。
- › $2+2=5$ 。
- › 您贵姓？
- › $x+y<10$ 。

命题 (proposition)

- › 三个识别要点：
- › 陈述句、
- › 判断、
- › 确定的对象

识别命题

- › 再来看看几个语句
- › 袁世凯称帝那天北京下雨。
- › 大于2的偶数均可分解为两个素数之和。
- › 请把脚挪一下！
- › 谁拿走了桌上的杯子？
- › 2是偶数而且3也是偶数。

识别命题

- › 真值是命题的固有属性
- › 不过，是否知道真值，能否知道真值是另一回事。
- › 悖论（自相矛盾）不能作为命题。如“这句话是错的”
- › 命题非真即假，不能兼有之，也不能不真不假
- › 非真即假，是一个基本假设？

离散数学：数理逻辑：排中律

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

排中律Law of Excluded Middle

- › 排中律是传统逻辑的基本规律之一
- › “是非之间，必居其一”。
- › 墨子也说过：“辩也者，或谓之是，或谓之非，当者胜也”——《经说下》。
- › 任一事物在同一时间里**具有某属性或者不具有某种属性**，而无其它可能。

反证法与排中律

- › 传统数学证明中经常采用的“反证法”即利用了排中律：
- › 要证明一个命题为真，并不直接证明；
- › 而是假设命题不为真，推出矛盾；
- › 根据排中律，此命题非假，即真；
- › 从而间接证明命题为真。

反证法的著名范例

- › 欧几里德：素数有无穷多个
假设命题不真，那么素数就是有限个，把它们按照大小顺序排列起来，记为 $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n$
接下来，我们构造一个新的数
 $N = a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n + 1$ 。
所有的这些素数 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都不是 N 的因子
这样，就有两种可能：
 - 1, N 有另外的素数真因子
 - 2, N 本身就是一个素数显然， N 比所有的 a_i 都要大，无论哪种情况，我们都发现了 a_i 之外的素数。
这跟假设矛盾，根据排中律，命题就是真的！

直觉主义对排中律的质疑

- 但直觉主义认为，数学的基础和出发点是人类直觉所构造；
- 数学理论可靠性依赖于心智上的可构造性；
- 对命题真假的确定必须给出**构造性证明**；
- 而反证法虽然对命题的**反面**推出矛盾；
- 但**不意味着**命题本身具有构造性证明。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

直觉主义对排中律的质疑

- 直觉主义否定排中律的普遍有效性；
- 从有穷事物中概括出来的排中律，不能贸然推广到对无穷事物适用；
- 涉及到有穷事物整体的命题，可以通过逐个检验来验证其真假；
- 但一旦涉及到无穷事物，一般是无法来做此种检验的。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：数理逻辑：命题符号化

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

原子命题和复合命题

- 我们回来再看看刚才的一个命题：
- 2是偶数**而且**3也是偶数。
- 这是由两个小命题和一个“**而且**”连接而成
- 联结词“**而且**”将两个命题**组合成新命题**，并产生了**新的真值**。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

原子命题和复合命题

- 这样，我们有了三个新概念：
- 逻辑联结词**(logical connectives)：连接命题，对真值进行运算的词；
- 原子命题**(atom proposition)：不含有逻辑联结词的命题；
- 复合命题**(compound proposition)：包含了原子命题和逻辑联结词的命题。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

复合命题

- 逻辑联结词有哪些呢？
- 我们来看看更多的复合命题：
- 雪**不是**白的
- 今晚我去看书**或者**看电影
- 你去了教室，我去了食堂（省略了“**且**”）
- 如果**天气好，**那么**我去车站接你
- 偶数 a 是素数，**当且仅当** $a=2$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

复合命题

- › 接下来，我们要回到数理逻辑创立的初衷：
- › 对逻辑和思维过程进行**形式化**，使之象**算术**那样简单明了，确切无误。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

如何把命题变成“算式”？

- › 形式化的第一步：**抽象**(abstraction)：
- › 仅关注**命题**的本质属性：**真值**，而抛弃其丰富的内涵；
- › 仅关注**逻辑联结词**的本质属性：对真值的**运算**，而抛弃多变的语言表达方式。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

如何把命题变成“算式”？

- › 然后将这两者都变成**符号**，以规则相连接
- › 真命题用**t**表示，假命题用**f**表示
- › 原子命题一般用**p, q, r, s**或 **p_i, q_i, r_i, s_i** 表示
- › 逻辑联结词用特殊符号来表示：
- › **并非**(not)： \neg
- › **并且**(and)： \wedge ；**或**(or)： \vee
- › **如果.....那么.....**(if ... then ...)： \rightarrow
- › **当且仅当**(if and only if)： \leftrightarrow

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

符号的定义

- › 命题的**真值**
- › 为真(true)用1表示，为假(false)用0表示
- › 真命题的真值为1，假命题真值为0
- › 逻辑联结词用**真值表**来定义
- › 真值表列出了原子命题的真值组合 (0、1)
- › 以及经过联结词作用后的真值

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

符号的定义

- › 符号体系对于数学乃至科学体系的发展至关重要
- › 简洁清晰的符号能使人的抽象思维效率飞跃。
- › 想象一下全中文、竖排的微分方程？
- › 形式主义者甚至认为，数学就是**符号变换的游戏**。

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：数理逻辑：联结词（上）

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

否定词(negation) “并非” (not) : \neg

› $\neg p$ 的逻辑关系为p**不**成立

如果p表示命题“雪是白的”，那么“雪**不**是白的”应该表示为 $\neg p$

p	$\neg p$
0	1
1	0

$$\neg p$$

否定词(negation) “并非” (not) : \neg

- › 注意在**包含多个对象**判断的命题否定时，其意义的变化：
 - › “天鹅**都是**白的”，其否定并不是“天鹅**都****不是**白的”
 - › 而是“天鹅**不都是**白的”或“**并非所有**天鹅**都是**白的”

合取词(conjunction) “并且” (and) : \wedge

› $p \wedge q$ 的逻辑关系为：p和q**同时**成立

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$p \wedge q$$

合取词(conjunction) “并且” (and) : \wedge

- › 自然语言中许多表示**并列**的连接词都可以符号化为“ \wedge ”：
 - › “既...又...”，“不但...而且...”，“虽然...但是...”
- › p：张三聪明；q：张三用功
 - 张三**既**聪明**又**用功： $p \wedge q$
 - 张三**不仅**聪明，**而且**用功： $p \wedge q$
 - 张三**虽然**不太聪明，**但他**很用功： $\neg p \wedge q$
 - 张三**不是**不聪明，**而是**不用功： $p \wedge \neg q$

合取词(conjunction) “并且” (and) : \wedge

- › 我们看到形式化确实通过**抽象**，抛弃了原语句的很多内容：
- › 抛弃了倾向、语气、价值判断等，
- › 只留下命题的本质属性：**真值**

析取词 (disjunction) “或” (or) : \vee

› $p \vee q$ 的逻辑关系为p和q中**至少一个**成立

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$p \vee q$$

析取词 (disjunction) “或” (or) : \vee

- 自然语言中的“或”可以符号化为 \vee ，但有时要注意原命题中的“或”可能表示**排斥性**选择：
- 李四学过德语或法语 (**相容或**) : $p \vee q$
p: 李四学过德语, q: 李四学过法语
- 张三生于1972年或1973年 (**排斥或**) :
 $p \vee q$
p: 张三生于1972年, q: 张三生于1973年
- 人固有一死, 或重于泰山, 或轻于鸿毛 (**排斥或**)
 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$: 异或
p: 人死重于泰山, q: 人死轻于鸿毛

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：数理逻辑：联结词（下）

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

蕴涵词 (implication) “如果...那么...” (if...then...) : \rightarrow

- $p \rightarrow q$ 的逻辑关系是, p是q的**充分条件**, 或者说q是p的**必要条件**

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$p \rightarrow q$$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

蕴涵词 (implication) “如果...那么...” (if...then...) : \rightarrow

- $p \rightarrow q$ 中的p称作**蕴涵前件**, q称作**蕴涵后件**
- 自然语言中的许多条件连接词都可以符号化为 \rightarrow , 但是要注意条件的**顺序**
“只要...就...”, “如果...那么...”, “只有...才...”
- 自然语言中, 条件语句一般都具有内在的联系, 而数理逻辑中的蕴涵则仅是命题的一种**连接**, **不一定具有什么内在联系**
- 在蕴涵式中, 只有p为真q为假时, $p \rightarrow q$ 才为假
和 $(\neg p \vee q)$ 真值表相同

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

蕴涵词 (implication) “如果...那么...” (if...then...) : \rightarrow

- 如果**天气好, **那么**我去接你: $p \rightarrow q$
p: 天气好, q: 我去接你
只有p真q假算是**谎言**
- 只要**2是偶数, **雪就是**黑的: $p \rightarrow q$
p: 2是偶数, q: 雪是黑的
p为真, q为假, 本命题为假
- 只有**天黑了, **夜猫子才**出来活动: $p \rightarrow q$
注意: p: 夜猫子出来活动, q: 天黑了

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

双向蕴涵词 (two-way implication) “当且仅当” (if and only if) : \leftrightarrow

- $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系是p与q**互为充分必要条件**, 在p, q真值相同的情况下, $p \leftrightarrow q$ 为真

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$p \leftrightarrow q$$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

双向蕴含词 (two-way implication) “ 当且仅当 ” (if and only if) : \leftrightarrow

- › 圆1和圆2面积相等**当且仅当**它们的半径相等 :
 $p \leftrightarrow q$
p: 圆1和圆2面积相等, q: 圆1和圆2半径相等
不管p和q的真值如何, $p \leftrightarrow q$ 为真
- › $2 + 3 = 5$ **当且仅当**5是有理数 : $p \leftrightarrow q$
p: $2 + 3 = 5$, q: 5是有理数
- › **除非**网断了, **否则**他一定QQ在线 : $p \leftrightarrow \neg q$
p: 网断了, q: 他QQ在线

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

两个组合的例子

- › **如果**3是合数, **则**4是素数, **并且如果**4是素数, **则**它不能被2整除 :
- › p: 3是合数
- › q: 4是素数
- › r: 4能被2整除
- › $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

两个组合的例子

- › **如果** $2 + 3 > 5$ **当且仅当**5是合数, **则**2和3都是有理数
- › p: $2 + 3 > 5$
- › q: 5是合数
- › r: 2是有理数
- › s: 3是有理数
- › $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge s)$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

符号组合的规则

- › 把符号组合起来, 看起来开始象一个算式了
- › 算式的组合不是随意的 ;
- › 那么逻辑符号组合的**规则**是什么 ?
- › 逻辑符号组合成的算式具有什么**意义** ?

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：数理逻辑：命题公式

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gisichen@pku.edu.cn

命题公式(proposition formula)的组成成分

- › **命题常元** (proposition constants)
表示**具体**命题及表示常命题的p, q, r, s等和t, f
- › **命题变元** (proposition variables)
以“真, 假”或者“1, 0”为取值范围的**变量**, 仍用p, q, r, s等表示
- › **命题公式** (proposition formula)
由命题常元、变元和联结词组成的形式更为**复杂**的命题

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

命题公式 (proposition formula) 定义

- ① 命题常元和命题变元是命题公式，特别的称作原子公式或原子
 - ② 如果A,B是命题公式，那么 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是命题公式
 - ③ 只有有限步引用上述两条所组成的符号串是命题公式
- 命题公式简称做公式，采用大写A,B,C等表示
注意大小写符号的差别 (A、B、C和p、q、r、s、t、f)
- 命题公式的这种定义方法称作归纳定义，在集合论中将会详细讨论归纳定义

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

命题公式的例子

- 根据定义：
- $(\neg(p \rightarrow (q \wedge r)))$ 是命题公式
- 以下式子都不是命题公式
- (qp)
- $(p1 \wedge (p2 \wedge \dots$
- $p \rightarrow r \wedge s$
- 严格按照定义的命题公式太繁琐，简化约定
公式最外层的括号一律可以省略
约定逻辑联结词的优先级，进一步减少括号

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

逻辑联结词优先级

- 联结词 $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ 中， \neg 是一元联结词，其它都是连接两个命题的二元联结词
- 我们定义优先级为： \neg , $[\wedge \vee]$, \rightarrow , \leftrightarrow
- 除非有括号，否则按照优先级从高到低，从左到右的次序结合
- $\neg p \vee q$ 等同于 $((\neg p) \vee q)$
- $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$ 并不是 $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s))$
- 其实是 $((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow s)$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

命题公式的意义

- 命题公式是一个按照归纳定义构成的字符串
- 其形式上具有既定的规则
- 那么其内容上具有什么意义呢？

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：数理逻辑：真值函数

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gisichen@pku.edu.cn

命题公式与真值函数 (truth function)

- 如果将联结词看作逻辑运算符，那么包含命题变元 p_1, p_2, \dots, p_n 的公式A可以看作是关于 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个真值函数
- 每个变元的取值范围是 $\{0, 1\}$
- 真值函数值的取值范围也是 $\{0, 1\}$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

赋值

- 对任意给定的 p_1, p_2, \dots, p_n 的一种取值状况组合，称为指派或者**赋值** (assignments)
- 赋值用希腊字母 α, β 等表示
- 对于每个赋值，公式A均有一个确定的真值
- 这样，命题公式在**形式**上是一个规则的字符串，**内容**上则对应一个真值函数

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

真值表

- 对于所有可能的赋值，公式A的真值可以用**真值表**来确定
- 当 $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 中包含有 k 个联结词时，公式A的真值表应为 2^n 行、 **$k+n$** 列
- 前 n 列是所有变元的**取值组合**
- 最后**1**列是公式A的**真值**

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

成真赋值和成假赋值

- 当公式A对赋值 α 为真时
- 称 α 是A的**成真赋值**，或者 α **弄真**A
- 记做 **$\alpha(A)=1$**
- 反之
- 称 α 是A的**成假赋值**，或者 α **弄假**A
- 记做 **$\alpha(A)=0$**

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：数理逻辑：命题形式化

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

自然语言句子的形式化

- 由自然语言表述的命题，经过**抽象**，可以**形式化**为命题公式
- 首先确定**原子命题**
- 其次确定**联结词**
- 最后处理命题之间的**联结关系及顺序**

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

自然语言句子的形式化

- 我和他既是兄弟又是同学 (p : 我和他是兄弟, q : 我和他是同学)
- 形式化命题: **$p \wedge q$**
- 狗急跳墙 (p : 狗急了, q : 狗跳墙)
- 形式化命题: **$p \rightarrow q$**
- 如果他不来那么是生病了或者不在本地 (p : 他来, q : 他生病, r : 他在本地)
- 形式化命题: **$\neg p \rightarrow (q \vee \neg r)$**

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

自然语言句子的形式化

- › 无论是否下雨，我都去上学 (p : 天下雨, q : 我去上学)
- › 形式化命题: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
- › 或者: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
- › 或者: q

自然语言句子的形式化：注意事项

- › 要善于确定**原子命题**，如兄弟这个概念就无需进一步拆分；
- › 要善于识别自然语言中的**联结词**；
- › 对于涉及多个对象进行否定的**否定词位置**要准确；
- › 不能省略**必要的括号**，另外，为了提高公式的可读性，要保留一些括号；
- › 有时候语句的形式化结果**不是唯一的**，可能具有**不同形式**，但是逻辑上是**等价的**。