

离散数学：集合论：有序组

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

有序组

- 元素的**无序**性是集合的特征之一
- 元素的**有序**组合如何从集合定义？
- 二元有序组，或者二元组(2-tuple)，或者序偶(ordered pairs)
- 设 a, b 为任意对象，称集合族 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 为二元有序组，简记为 $\langle a, b \rangle$
- 称 a 为 $\langle a, b \rangle$ 的**第一分量**， b 为**第二分量**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

“有序”的含义？

- 定理：对于任意序偶 $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$ ， $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ 当且仅当 **$a=c$ 且 **$b=d$****
- 充分性是显然的
- 证明必要性：设 $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ ，也就是 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$
- $\Rightarrow \bigcup \{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcup \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a, b\} = \{c, d\}$
- 以及， $\{a\} = \{c\}$
- $\Rightarrow \bigcap \{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcap \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\}$
- 综合两式，有 **$a=c$ 且 **$b=d$****

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

有序的含义

- 当 $a \neq b$ 时： $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$
- 但 $\{a, b\} = \{b, a\}$
- 有序组 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的巧妙定义
- 利用元素和集合的两个不同层次实现两个对象 a, b 的有序排列

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

n元有序组的定义

- n 元有序组(n -tuple) $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$
- 递归定义：
- $n=2$ 时， $\langle a_1, a_2 \rangle = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$
- $n>2$ 时， $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$
- a_i 称为 n 元组的第 i 分量
- 定理：对于任意 n 元组 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ 当且仅当 $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：笛卡儿积

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合的一种运算

- 对任意集合 A_1, A_2, \dots, A_n , $A_1 \times A_2$ 称作集合 A_1, A_2 的**笛卡儿积**, 定义如下:
- $A_1 \times A_2 = \{ \langle u, v \rangle \mid u \in A_1, v \in A_2 \}$
- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$
- 例子: $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, 则:
- $A \times B$ 等于 $\{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$
- $B \times A$ 等于 $\{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

笛卡儿积例子

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $R^2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \text{ 是实数} \}$, R^2 为笛卡儿平面
- R^3 为三维笛卡儿空间
笛卡尔是解析几何创始人, 首次用三元组表示空间中的点, 统一了代数与几何
- 一般来说:
- $A \times B \neq B \times A$ (不满足交换律)
- $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (不满足结合律)

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

笛卡儿积对集合运算的分配律

- 定理: 设 A, B, C 为任意集合, $\$$ 表示 \cup, \cap 或 $-$ 运算, 那么: $A \times (B \$ C) = (A \times B) \$ (A \times C)$, $(B \$ C) \times A = (B \times A) \$ (C \times A)$
- 证明: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$
- $\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C)$
- $\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$
- $\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$
- $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$
- $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

笛卡儿积的基数

- 定理: 对于任意有限集合 A_1, \dots, A_n , 有 $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| * \dots * |A_n|$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：集合论：关系定义

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系的基本概念

- 关系是各个对象之间的联系和对应
- 最常见到是两组对象之间的联系和对应
职员-部门的隶属关系
- 也有三组或者更多对象之间的联系和对应
供应商-工程-零件的供应关系
- 采用**二元组或者多元组的集合来表示关系**
 $ED = \{ \langle \langle \text{张三}, \text{人事部} \rangle, \langle \text{李四}, \text{销售部} \rangle, \langle \text{王五}, \text{技术部} \rangle \rangle \}$
 $SPJ = \{ \langle \langle \text{公司甲}, \text{大堤}, \text{水泥} \rangle, \langle \text{公司甲}, \text{公路}, \text{水泥} \rangle, \langle \text{公司乙}, \text{大堤}, \text{钢筋} \rangle, \langle \text{公司丙}, \text{公路}, \text{沥青} \rangle \rangle \}$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关系的定义

- › R称为集合 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 到 A_n 的**n元关系**，如果R是 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的一个**子集**。当 $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = A_n$ 时，也称R为**A上的n元关系**
- › 如果R是 $A \times B$ 的一个子集，称R是A到B的**二元关系**，如果R是 $A \times A$ 的一个子集，则称R是**A上的二元关系**
- › 我们主要研究二元关系

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系的例子

- › 自然数的**相等关系**
 $E_N = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \dots \}$ (列举法)
- › **整除关系** $D = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 整除 } y \}$ (描述法)
- › **小于关系** L: 归纳法
- › 基础条款: $\langle 0, 1 \rangle \in L$
- › 归纳条款: 若 $\langle x, y \rangle \in L$, 则 $\langle x, y+1 \rangle \in L$, $\langle x+1, y+1 \rangle \in L$
- › 终极条款 (略)

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

几个特殊的二元关系

- › **空关系** \emptyset , $\emptyset \subseteq A \times B$, 称 \emptyset 为A到B的空关系
- › **全关系** $A \times B$, 笛卡儿积 $A \times B$ 是A到B的全关系
- › **相等关系** $E_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$, 称作A上的相等关系

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系的几个概念

- › 定义: 设R为A到B的二元关系($R \subseteq A \times B$)
- › xRy 表示 $\langle x, y \rangle \in R$, $\neg xRy$ 表示 $\langle x, y \rangle \notin R$
- › R的**定义域** domain:
- › $\text{Dom}(R) = \{ x \mid x \in A \wedge \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \}$
- › R的**值域** range:
- › $\text{Ran}(R) = \{ y \mid y \in B \wedge \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \}$
- › 称A为R的**前域**, B为R的**陪域**

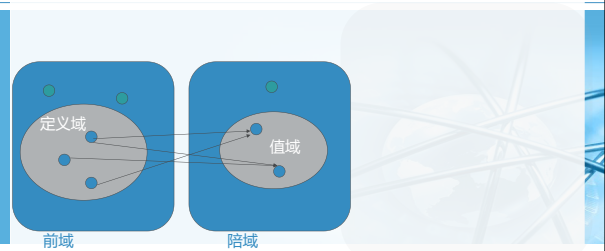
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系的表示法

- › **集合表示法**
- › $R = \{ \langle x, y \rangle \mid P(x, y) \}$
- › 适合于表示集合的几种方法均可, 如前面的关系例子
- › **关系图法**
- › 前域和陪域都是有限集合
- › 一般的关系图, 有向箭头表示元素之间存在关系
- › 可以表示前域和陪域相同的关系图

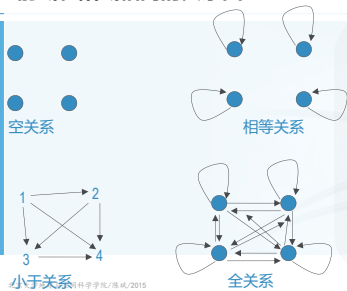
北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

前域和陪域不同的关系图



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

前域和陪域相同的关系图



科学学院/陈斌/2015

关系矩阵法表示

- 前域和陪域都是有限集合
- 设关系 $R \subseteq A \times B$, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
- 关系 R 的关系矩阵 M_R 的定义：
- $m_{ij} = 1$ 当且仅当 $a_i R b_j$
- $m_{ij} = 0$ 当且仅当 $\neg a_i R b_j$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系矩阵例子

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

空关系

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

相等关系

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

小于关系

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

全关系

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：关系基本运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

运算基本定义

- 关系相等
- 如果关系 R 和 S 具有相同的前域和陪域，并且 $\forall x \forall y (x R y \leftrightarrow x S y)$
- 关系运算中的前域和陪域
- $R \subseteq A \times B$, A 为前域, B 为陪域
- 参与关系运算的两个关系应该具有相同的前域和陪域
- 这个条件不是本质的，因为总可以对关系的前域和陪域做适当的扩充，使之满足条件

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

作为集合的关系运算

- R 和 S 为 A 到 B 的二元关系, $R, S \subseteq A \times B$
- 并: $R \cup S = \{ \langle x, y \rangle \mid x R y \vee x S y \}$
- 交: $R \cap S = \{ \langle x, y \rangle \mid x R y \wedge x S y \}$
- 差: $R - S = \{ \langle x, y \rangle \mid x R y \wedge \neg x S y \}$
- 补: $R^c = A \times B - R = \{ \langle x, y \rangle \mid \neg x R y \}$
并不是全集 $U - R$ ，而是全关系与 R 的差

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

对应的关系矩阵运算

- › M_R 和 M_S 为 R 、 S 的关系矩阵
- › 并： $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ (矩阵对应分量做析取)
- › 交： $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ (矩阵对应分量做合取)
- › 补： $M_{S^-} = (M_S)^-$ (矩阵对应分量做否定)
- › 差： $M_{R-S} = M_{R \cap S^-} = M_R \wedge M_{S^-}$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系逆运算(converse)

- › $R^- = \{ \langle y, x \rangle \mid xRy \}$, $R \subseteq A \times B$
- › 显然, R 的逆关系是**B到A**的关系: $R^- \subseteq B \times A$
- › 逆关系**关系矩阵**的运算: $M_{R^-} = M_{RT}$, 矩阵转置
- › 逆运算例子
 $E_A = E_A$; $\emptyset^- = \emptyset$; $(A \times B)^- = B \times A$
自然数“小于 $<$ ”关系的**逆关系**是“大于 $>$ ”
自然数“小于 $<$ ”关系的**补关系**是“大于或等于 \geq ”

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系逆运算的性质

- › 逆运算和并交差补等运算都满足**分配律**
- › $R, S \subseteq A \times B$, $\$$ 代表并交差运算之一
- › $R^{- -} = R$ (**两次逆复原**)
- › $R^{- -} = R^{- -}$ (**逆的补等于补的逆**)
- › $(R \$ S)^- = R^- \$ S^-$ (对并交叉运算分配律)
- › $R \subseteq S$ 当且仅当 $R^- \subseteq S^-$
- › 从矩阵转置角度来看, 表现为转置运算不会改变矩阵分量的值

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

离散数学：集合论：关系合成运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系合成运算(composition)

- › R 为 A 到 B 的二元关系, $R \subseteq A \times B$
- › S 为 B 到 C 的二元关系, $S \subseteq B \times C$
- › R 和 S 的**合成关系** $R \circ S$ 定义为:
- › $R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y (y \in B \wedge xRy \wedge ySz) \}$
- › **简化形式**: $R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y (xRy \wedge ySz) \}$
- › $R \circ S \subseteq A \times C$, 是**A到C**的二元关系
- › 由于参与合成的第一个关系的陪域要等于第二个关系的前域, 所以合成关系**不满足交换律**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

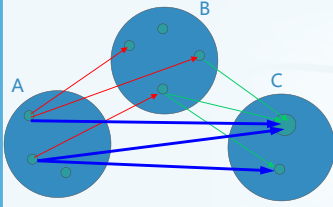
关系合成运算的例子

- › 设 E_A 是 A 上的相等关系, E_B 是 B 上的相等关系, $R \subseteq A \times B$
- › $E_A \circ R = R \circ E_B = R$
- › $\emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$
- › $R \circ R^- = E_A$ ($A \times B$, $B \times A$)
- › $\{ \langle x, x \rangle \mid \exists y (xRy \wedge yRx) \}$
- › $R^- \circ R = E_B$ ($B \times A$, $A \times B$)
- › $\{ \langle y, y \rangle \mid \exists x (yRx \wedge xRy) \}$
- › 兄弟关系和父子关系的合成是“**叔侄**”关系

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

用关系图表示合成运算

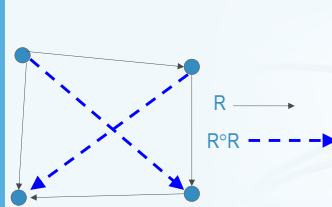
前域和陪域不同



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

用关系图表示合成运算

前域和陪域相同



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

用关系矩阵表示合成运算

关系合成运算对应关系矩阵的乘法

将数换成合取，将数加换成析取

设 $|A|=m$, $|B|=n$, $|C|=p$,

$R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$,

则 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$, $M_S = [s_{ij}]_{n \times p}$

$T = R \circ S$, 有 $T \subseteq A \times C$,

$M_T = M_R * M_S = [t_{ij}]_{m \times p}$

其中 $t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$)

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

合成运算的性质

$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ (左分配律)

$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$ (右分配律)

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \models \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \models \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

$(R \circ S)^- = S^- \circ R^-$

$R \circ (S^* T) = (R \circ S)^* T$ (结合律, 下页证明)

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

证明 $R \circ (S^* T) = (R \circ S)^* T$

$\langle x, y \rangle \in R \circ (S^* T)$

$\Leftrightarrow \exists u (\langle x, u \rangle \in R \wedge \langle u, y \rangle \in S^* T)$

$\Leftrightarrow \exists u (\langle x, u \rangle \in R \wedge \exists v (\langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in T))$

$\Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B) \models \exists x(A(x) \wedge B)$

$\Leftrightarrow \exists v \exists u (\langle x, u \rangle \in R \wedge \langle u, v \rangle \in S \wedge \langle v, y \rangle \in T)$

$\Leftrightarrow \exists v (\exists u (\langle x, u \rangle \in R \wedge \langle u, v \rangle \in S) \wedge \langle v, y \rangle \in T)$

$\Leftrightarrow \exists v (\langle x, v \rangle \in R \circ S \wedge \langle v, y \rangle \in T)$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R \circ S)^* T$

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

关系的幂运算 R^n

定义为自身的n次合成

$R^n = R \circ \dots \circ R$ (n个R合成)

$R^0 = E_A$

幂运算的性质

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

$(R^m)^n = R^{mn}$

可以把m看作参数, 对n进行归纳法证明

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

幂关系有限定理

- 设集合A的基数为n, R是A上的二元关系, 则存在自然数i,j使得 $0 \leq i < j \leq 2^{n^2}$, 有 $R_i = R_j$
- 证明:
- R的任意次幂运算仍是A上的二元关系
- 有限集A上不同的二元关系数量是有限
- 因为 $R \subseteq A \times A$, 而 $A \times A$ 子集的个数有限
- 如果 $|A| = n$, A上的二元关系的数量是 2^{n^2}
- 根据“鸽笼原理”, 在 $0 \sim 2^{n^2}$ 共计 $2^{n^2} + 1$ 个R的幂关系中, 一定有两个是相同的

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：集合论：关系基本特性

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

A上一些特殊性质的二元关系

- 自反关系(reflexive)**
- $\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$
- 关系图：每个节点都有环
- 关系矩阵：对角线全为1
- 反自反关系(irreflexive)**
- $\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx)$
- 关系图：每个节点都没有环
- 关系矩阵：对角线全为0



北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

A上一些特殊性质的二元关系

- 对称关系(symmetric)**
- $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$
- 关系图：两个节点之间有边的就有反向边
- 关系矩阵：对称矩阵
- 反对称关系(antisymmetric)**
- $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$
- 关系图：两个节点之间只能有一条单向边
- 关系矩阵： $c_{ij} = 1 (i=j)$ 时 $c_{ji} = 0$

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

A上一些特殊性质的二元关系

- 传递关系(transitive)**
- $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
- 关系图：如果有边 $v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$, 则有边 v_1v_n
- 例子:
- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, R是A上的二元关系
- $R = \{<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>\}$ 是自反的
- $R = \{<1, 3>, <3, 1>\}$ 是反自反的, 不是自反的
- $R = \{<1, 1>\}$ 不是自反, 也不是反自反

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

特殊性质二元关系的例子

- A上的空关系 \emptyset 是反自反的, 不是自反的
- 如果 $A = \emptyset$, 那么A上的空关系就是自反的, 同时也是反自反的
因为注意定义谓词的前件 $x \in A$ 始终为假
- $R = \{<1, 3>, <3, 1>, <1, 2>, <1, 1>\}$ 不是对称的, 也不是反对称的
- $R = \{<1, 2>, <2, 1>\}$ 是对称的
- $R = \{<1, 2>, <3, 1>\}$ 是反对称的
- A上的相等关系 E_A 既是对称的, 又是反对称的

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

特殊性质二元关系的例子

- › $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ 是传递的，但 $R - \{ \langle 1, 3 \rangle \}$ 不是传递的
- › 空关系是传递的， $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$ 也是传递的，因为它们使得传递定义的前件为假
- › 所有非空集合上的：
空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；
全关系是自反、对称、传递的；
相等关系是自反、对称、反对称、传递的；
- › 整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；
- › 三角形的相似关系、全等关系都是自反、对称、传递的

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

离散数学：集合论：关系特性定理

陈域 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

关系特性的一些定理

- › R 自反当且仅当 $E_A \subseteq R$
- › R 反自反当且仅当 $E_A \cap R = \emptyset$
- › R 对称当且仅当 $R \subseteq R^{-1}$
- › 设 R 对称，则：
 $\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$
- › 设 $R \subseteq R^{-1}$ ，则：
 $xRy \Rightarrow xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$ ，所以 R 对称

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关系特性的一些定理

- › R 反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq E_A$
- › 设 R 反对称，则：
 $\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x=y$
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in E_A$
- › 设 $R \cap R^{-1} \subseteq E_A$ ，由 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in E_A$
 $\Leftrightarrow x=y$ ，所以 R 是反对称

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关系特性的一些定理

- › R 传递当且仅当 $R^2 \subseteq R$
- › 设 R 传递：
 $\langle x, y \rangle \in R^2$
 $\Leftrightarrow \exists u (xRu \wedge uRy) \Rightarrow \exists u (xRy)$
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R$
- › 设 $R^2 \subseteq R$ ：
 $xRy \wedge yRz \Rightarrow xR^2z \Rightarrow xRz$ ，所以 R 传递

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关系基本特性的运算封闭性

- › 具有某特性的关系，在运算后，运算结果是否保持这个特性，称为运算封闭性
- › 所有5个特性对交运算封闭，即如果 R_1, R_2 都具有某个特性，则 $R_1 \cap R_2$ 仍具有这个特性：
例证：对称性， $xR_1 \cap R_2 y \Leftrightarrow xR_1 y \wedge xR_2 y \Leftrightarrow yR_1 x \wedge yR_2 x \Leftrightarrow yR_1 \cap R_2 x$
- › 自反、反自反、对称性对并运算封闭
例证：自反性， $xR_1 x \Rightarrow xR_1 x \vee xR_2 x \Leftrightarrow xR_1 \cup R_2 x$ （并不要求 R_2 具有特性）
- › 反自反、对称、反对称对差运算封闭
例证：反对称： $xR_1 - R_2 y \wedge yR_1 - R_2 x \Rightarrow xR_1 y \wedge yR_1 x \Rightarrow x=y$
- › 实际上，只要 R_1 反对称，任何 R_2 ， $R_1 - R_2$ 都是反对称的

北京大学地球与空间科学学院/陈域/2015

关系基本特性的运算封闭性

- › 对称性对**补运算**封闭
- › $xR \cdot y$, 假设 $\neg yR \cdot x$, 那么 yRx , 即 xRy , 和已知矛盾, 所以有 $yR \cdot x$
- › 所有5个特性对**求逆运算**均封闭
- › 例证: 传递, $xR \cdot y \wedge yR \cdot z$
- › $\Leftrightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Leftrightarrow xR \cdot z$
- › 自反对**合成运算**封闭, 其它性质对合成运算均不封闭:
- › $xR1x \wedge xR2x \Rightarrow xR1 \circ R2x$