集合的运算

Operations on Sets

刘铎
liuduo@bjtu.edu.cn

集合的运算

- 设 U 为全集，A、B 为 U 的两个子集，则：
  - (a) A 与 B 的**交集（intersection）**

    $$A\cap B = \{ x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B \};$$
  - (b) A 与 B 的**并集（union）**

    $$A\cup B = \{ x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B \};$$
  - (c) B 关于 A 的**相对补（complement of B with respect to A）**或 A 与 B 的**差集（difference）**$A–B$ 定义为 $A–B = \{ x \mid x\in A$ 且$x\notin B\}$，也记作 $A\backslash B$；
  - (d) A 关于全集 U 的相对补称作A的**绝对补**或**补集（complement）**，记作$\overline{A}$（或 $\sim A$），即$\overline{A}=\{x|x\in U$且$x\notin A\}$；
  - (e) A 与 B 的**对称差（symmetric difference）**$A\oplus B$ 定义为 $A\oplus B = \{ x \mid x\in A$或$x\in B$且$x$不同时属于$A$和$B \}$。

集合的运算

- $U = \{0, 1, \ \ldots, 9\}$,

  $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A - B = \{0, 2\}$
- $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\overline{B} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $A \oplus B = \{0,2,5,7,9\}$

集合的运算

- 交运算、并运算也可以扩展到多个集合上
  - $A \cup B \cup C = \{ x \mid x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C \}$
  - $A \cap B \cap C = \{ x \mid x \in A$ 且 $x \in B$ 且 $x \in C \}$
  - $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
  - $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

集合的运算

- 交换律
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- 结合律
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

集合的运算

- 分配律
  - $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
- 吸收律
  - $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$
- 幂等律
  - $A\cup A = A$，$A\cap A = A$

集合的运算

- 双重否定律
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- 矛盾律
  - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- 排中律
  - $A \cup \overline{A} = U$
- 余补律
  - $\overline{\varnothing} = U$，$\overline{U} = \varnothing$

集合的运算

- 零律
  - $A \cup U = U$， $A \cap \varnothing = \varnothing$
- 同一律
  - $A \cup \varnothing = A$， $A \cap U = A$

集合的运算

- 德·摩根律
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$
  - $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

$U-(B \cup C) = (U-B) \cap (U-C)$
$U-(B \cap C) = (U-B) \cup (U-C)$

集合的运算

- 例

  设 A、B、C 为任意集合，证明

  $$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)。$$

- 证明. 证明两个集合 X 和 Y 相等的一般方法是分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$ 。
  - (1) 首先证明 $(A-B)\cup(A-C)\subseteq A-(B\cap C)$ 。
    - 假设$x\in(A-B)\cup(A-C)$，由定义有 $x\in A-B$ 或 $x\in A-C$
    - 若 $x\in A-B$ 则有 $x\in A$ 且 $x\notin B$，于是 $x\notin B\cap C$
    - 若 $x\in A-C$ 则有 $x\in A$ 且 $x\notin C$，于是 $x\notin B\cap C$
    - 总之有 $x\in A$ 且 $x\notin B\cap C$，故得 $x\in A-(B\cap C)$ ，因此

      $$(A-B)\cup(A-C)\subseteq A-(B\cap C)$$
  - (2) 接着证明 $A-(B\cap C)\subseteq(A-B)\cup(A-C)$ ……
- 综合(1)和(2)，即得 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

集合的运算

练习

- 证明若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$ 则
  - $A \cap B \subseteq C$
  - $A \cup B \subseteq C$
  - $A \oplus B \subseteq C$
- 证明若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 则
  - $A \cap B \subseteq C \cap D$
  - $A \cup B \subseteq C \cup D$
- 证明或反驳：若$A \subseteq C$ 且$B \subseteq D$ 则 $A \oplus B \subseteq C \oplus D$

End