

# 数值分析作业

cxld@tongji.edu.cn

September 23, 2024

- **重要事项:** 作业布置于周四中午.
- **注意事项:** 请确定你交作业的方式, 线下或者线上, 同一次作业不能兼用两种方式(否则两边都按照没做全评分), 最好也不要在学习过程中改变提交方式.
- 纸质作业提交要求: 请下周四在课前提交到D202讲台。所有题目及程序写(不能打印!)在作业本上, 只提交画图的程序, 不必画图.
- 线上作业提交要求: 请下周四中午13:00前提交。请提交word或者pdf版本, 字体只能是楷书、黑体、宋体和仿宋, 不能有任何手写痕迹(ipad等方式完成的, 请做OCR), 不得提交扫描、拍照、截图, 否则退回。要求有图形的题目必须插入matlab生成的图形.

## 3 第二章

1. (手算)用乔列斯基分解计算下述线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2. (编程)已知Hilbert矩阵 $H \in R^{n \times n}$ 定义为 $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ , matlab中的命令为hilb. 尝试用下面四种不同方法求解方程组 $Hx = d$ , 其中 $d_i = n+1-i$ , 矩阵阶数 $n$ 可以取值为5, 10, 20, 40. 哪一种方法效果最好? 你可以把这些方法同matlab 的左除相比较.

- 高斯消去法;
- 列主元高斯消去法;
- 全主元高斯消去法;
- 平衡加权高斯消去法. 以第一次选主元为例, 此方法应用于方程组  $Ax = b$  时, 下面的最大值由第  $i$  个值取得, 则第  $i$  行为主元所在行:

$$\max \left\{ \frac{|a_{11}|}{\max_i |a_{1i}|}, \frac{|a_{21}|}{\max_i |a_{2i}|}, \dots, \frac{|a_{n1}|}{\max_i |a_{ni}|} \right\}.$$

3. 设计一个方法求解方程组  $Ax = b$ , 其中  $B, I \in R^{n \times n}$ ,  $A \in R^{n^2 \times n^2}$ ,  $I$  是单位矩阵。你可以令  $n = 80$  或者  $100$ :

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & & \\ -I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

而  $b = (0, 1, 2, 3, \dots, n^2 - 1)^T$ . 写明你设计这个算法的理由.

4. 第三版现代数值计算, 习题二2,3,4, 数值实验二1

## 1 第一章

1. 用最少的计算量和存储量计算给定矩阵的逆矩阵的(1,1)元素, 该给定矩阵为  $n$  阶矩阵, 其对角元全部为3, 上下次对角元(即行列下标差为1 的元素)都是-1, 未涉及元素全部为0. 要求输入  $n$ , 输出所求逆矩阵(1,1)元素的小数点后16位.  $n$  可能的输入值为1, 10, 100, 1000, 10000. 列表给出你的计算量和存储量关于阶数  $n$  的关系.
2. 有效数  $a = 3.1416$ ,  $b = 2.72$  分别是数  $a^*$  和  $b^*$  的近似值, 请估算  $a^*b^*$ ,  $a^* - b^*$  以及  $a^*/b^*$  的近似值, 并把它们写成有效数.
3. 第三版现代数值计算, 习题一5,6, 数值实验一6,9

## 2 第一章答案

1.1 **ANSWER:**记该 $n$ 阶矩阵为 $A_n$ . 因为 $A_n^{-1} = \frac{1}{|A_n|}A_n^*$ , 其中 $A_n^*$  为 $A_n$  的伴随矩阵.

因此,  $(A_n^{-1})_{1,1} = \frac{(A_n^*)_{1,1}}{|A_n|} = \frac{|A_{n-1}|}{|A_n|}$ . 由行列式 $|A_n|$  最后一列展开, 得

$$|A_n| = 3|A_{n-1}| - |A_{n-2}|.$$

两边除以 $|A_{n-1}|$ 得

$$((A_n^{-1})_{1,1})^{-1} = \frac{|A_n|}{|A_{n-1}|} = 3 - \frac{|A_{n-2}|}{|A_{n-1}|} = 3 - (A_{n-1}^{-1})_{1,1}.$$

此即

$$(A_n^{-1})_{1,1} = \frac{1}{3 - (A_{n-1}^{-1})_{1,1}}.$$

因此, 有程序如下:

```
function v = ex1_1(n)
    a(1) = 1/3;
    for k = 2:n
        a(k) = 1 / (3-a(k-1));
    end
    v = a(end);
```

$n = 1, 10, 100, 1000, 10000$ 时的值分别为0.333333333333333, 0.381966009824403, 0.381966011250105, 0.381966011250105, 0.381966011250105. 列表略。

1.2 **ANSWER:**由于 $a, b$ 是有效数, 因此 $3.14155 \leq a^* < 3.14165$ ,  $2.715 \leq b^* < 2.725$ .

因此,  $8.52930825 \leq a^*b^* < 8.56099625$ .  $a^*b^*$ 不论写成8或8.5都可能没有有效位。只能写成9.

同理,  $0.41655 \leq a^* - b^* < 0.42665$ .  $a^* - b^* \approx 0.4$ .

同理,  $1.1528623853211 \leq a^*/b^* < 1.15714548802947$ .  $a^*/b^* \approx 1.2$ .

1.3 略。