

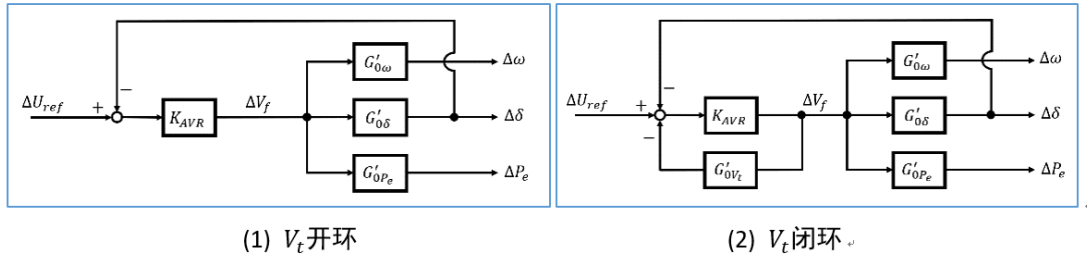
## 作业六 频域方法校正

电 02 肖锦松 2020010563

### 实验任务

在含 AVR 闭环的系统中，增加快速励磁器，同时保持 AVR 的比例增益  $K \geq 100$ （确保机端电压对  $u_{ref}$  的跟随性能）。通过频域方法，校正含 AVR 闭环系统（串联校正、反馈校正均可），使以  $\omega$  为输出反馈的闭环系统保持稳定。通过校正使得在输入  $u_{ref}$  施加  $\Delta u_{ref} = 0.05$  的阶跃时，1) 系统频率变化维持在  $\pm 0.2\text{Hz}$  以内；2) 系统机端电压变化量（稳态值）在  $[0.04766, 0.05]$  之间：

综合作业 5 中主要分析的是以下这 2 个系统结构的频域特性。



系统的结构框图如上， $G'_{0V_t}(s)$  为输入  $V_f$ ，输出  $V_t$  的系统； $G'_{0\omega}(s)$  等为输入  $V_f$ ，输出  $\omega$  等状态量的系统。

因此，整体系统的开环传递函数  $G_0(s)$  如下：（以  $\omega$  为例）

$$G_0(s) = \frac{K}{1 + K G'_{0V_t}(s)} \times G'_{0\omega}(s)$$

其中， $G'_{0V_t}(s)$  对应着代码中的 sys\_generator，具体为

$$G'_{0V_t}(s) = \frac{0.07552 s^2 + 0.00151 s + 0.009872}{s^3 + 0.572 s^2 + 0.1879 s + 0.04846} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$G'_{0\omega}(s)$  对应着代码中的 sys\_generator\_omega 具体为

$$G'_{0\omega}(s) = \frac{-0.03089 s}{s^3 + 0.572 s^2 + 0.1879 s + 0.04846} = \frac{N_\omega(s)}{D_1(s)}$$

$$G'_{0\delta}(s) = \frac{-0.03089}{s^3 + 0.572 s^2 + 0.1879 s + 0.04846} = \frac{N_\delta(s)}{D_1(s)}$$

$$G'_{0P_e}(s) = \frac{0.1544 s^2 + 0.003089 s}{s^3 + 0.572 s^2 + 0.1879 s + 0.04846} = \frac{N_{P_e}(s)}{D_1(s)}$$

• 不同输出下系统的传递函数

$$\frac{\begin{cases} K(-0.03089) & , \text{for } \delta \\ K(-0.03089s) & , \text{for } \omega \\ K(0.1544s^2 + 0.003089s) & , \text{for } P_e \\ K(0.07552s^2 + 0.00151s + 0.009872) & , \text{for } V_t \end{cases}}{s^3 + (0.5720 + 0.07552K)s^2 + (0.1879 + 0.00151K)s + (0.08742 + 0.009872K)}$$

由于利用 MATLAB 计算会导致无法进行零极点相消，此处手动代入公式。

$$G_0(s) = \frac{KG_2(s)}{1 + KG_1(s)} = \frac{K \frac{N_2(s)}{D_1(s)}}{1 + K \frac{N_1(s)}{D_1(s)}} = \frac{KN_2(s)}{D_1(s) + KN_1(s)}$$

选取开环增益： $K = 100$

$$G_{0\omega}(s) = \frac{-3.089s}{s^3 + 8.124s^2 + 0.3389s + 1.036}$$

$$G_{0\delta}(s) = \frac{-3.089}{s^3 + 8.124s^2 + 0.3389s + 1.036}$$

$$G_{0P_e}(s) = \frac{15.44s^2 + 0.3089s}{s^3 + 8.124s^2 + 0.3389s + 1.036}$$

分别对应代码中的：sys\_AVR\_omega、sys\_AVR\_delta、sys\_AVR\_Pem。  
本次任务中主要研究的是  $G_{0\omega}(s)$  系统。

1. 绘制超前-滞后环节控制器与 PID 控制器的 Bode 图，分析此两类控制器与纯放大环节控制器的幅频特性异同。并思考上述控制器的物理实现方式。

PID 控制器的数学形式为：

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_i(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s}$$

超前-滞后环节控制器的数学形式为：

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{\alpha T_1s + 1}{T_1s + 1} \right) \left( \frac{\beta T_2s + 1}{T_2s + 1} \right), \alpha > 1, \beta < 1, T_1 < T_2$$

取 PID 控制器：

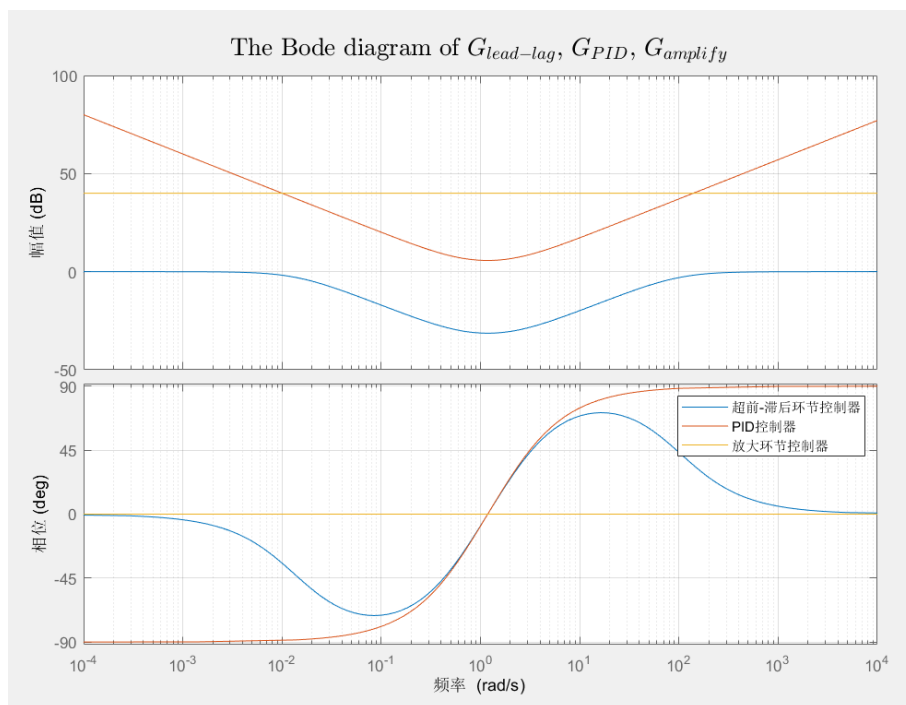
$$G_{PID}(s) = \frac{(\frac{1}{0.7}s + 1)(\frac{1}{2}s + 1)}{s}$$

取超前-滞后环节控制器：

$$G_{lead-lag}(s) = \left( \frac{\frac{1}{2}s + 1}{\frac{1}{100}s + 1} \right) \left( \frac{\frac{1}{0.7}s + 1}{\frac{1}{0.014}s + 1} \right)$$

取放大环节控制器：

$$G_{amp}(s) = 100$$



超前-滞后环节控制器、PID 控制器与纯放大环节控制器的幅频特性异同：

超前-滞后环节控制器（蓝）与 PID 控制器（红）的幅频特性相同之处在于：提升低频增益，增加稳态精度；降低中频增益，保持稳定裕量；提升高频增益，增加带宽和速度。不同之处在于：超前-滞后环节控制器并不增加系统的积分和微分环节，也就是说低频和高频段的增益并不会无限增加，而是有一个最大的增益，当频率更低或更高时系统的增益就保持不变；而 PID 控制器直接利用了微分、积分环节，无限大提高低频段增益可能会引起系统不稳定，无限大提高高频段增益作用，可能使高频噪声影响增加，应用中要慎重。

纯放大环节控制器（黄）与前二者的幅频特性相同之处在于：在各个频段都有增益作用（也可能是减小）。不同之处在于：纯放大环节控制器对各频段的增益效果相同，可能在增加稳态精度的同时带来稳定裕量很小甚至不稳定的副作用；只改变幅频特性，不改变相角特性。

### 物理实现方式

(1) 超前-滞后环节控制器：

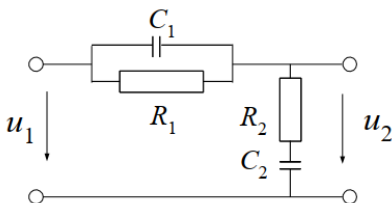


图-超前-滞后校正控制器的阻容电路

$$G_c(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{R_1}{sC_1R_1 + 1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1R_2C_1C_2s + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

$$= \frac{\alpha T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha} T_2 s + 1}{T_2 s + 1}$$

$$T_1 = \frac{R_1 C_1}{\alpha}, T_2 = \alpha R_2 C_2, T_1 < T_2$$

(2)PID 控制器：PID 控制器包含了放大器、微分器和积分器。微分环节可以用 RC 微分电路实现，积分环节可以用 RC 积分电路实现。放大环节其实包含在微分环节和积分环节中了。

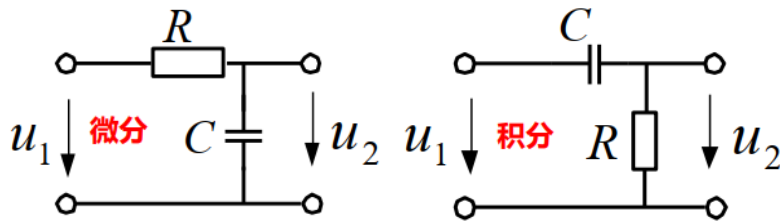


图-微分电路和积分电路

微分环节

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$u_2(t) = RC \frac{du_1(t)}{dt}$$

积分环节

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{RC} \int u_1(t) dt$$

(3)纯放大环节控制器：可以利用各种放大电路实现，如共射放大电路。

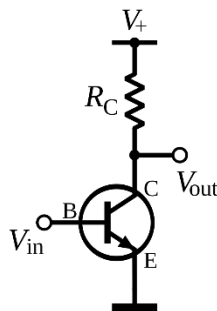


图-共射放大电路简图

$$A_i = \beta$$

$$A_u = -\frac{\beta R_C}{r_{\pi} + (\beta + 1)R_E}$$

2. 从低频、中频和低频放大倍数的角度，分析采用超前-滞后校正后含 AVR 闭环系统的频域特性，计算幅值裕度和相角裕度。结合作业二中非线性和线性模型，将未校正系统的时域仿真结果和频域校正后的时域仿真结果进行对比与校验。

### 配置串联超前滞后校正

#### 要求性能指标：

通过校正使得在输入  $u_{ref}$  施加  $\Delta u_{ref} = 0.05$  的阶跃时，1) 系统频率变化维持在  $\pm 0.2\text{Hz}$  以内； 2) 系统机端电压变化量（稳态值）在  $[0.04766, 0.05]$  之间。

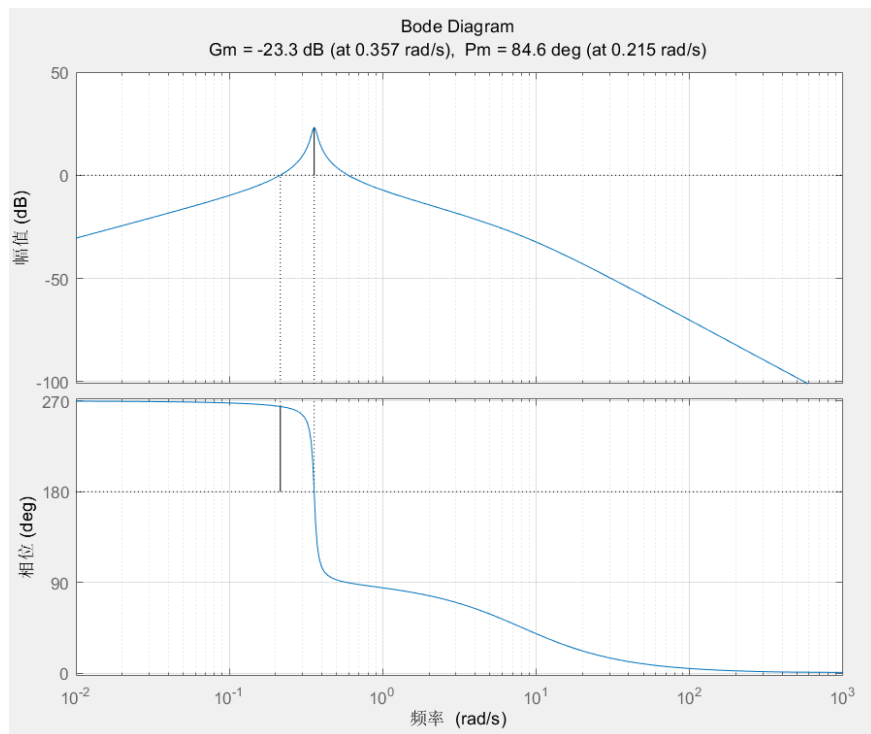
1) 说明  $\omega$  的标么值变化应该维持在  $\pm 4 \times 10^{-3}$  以内；

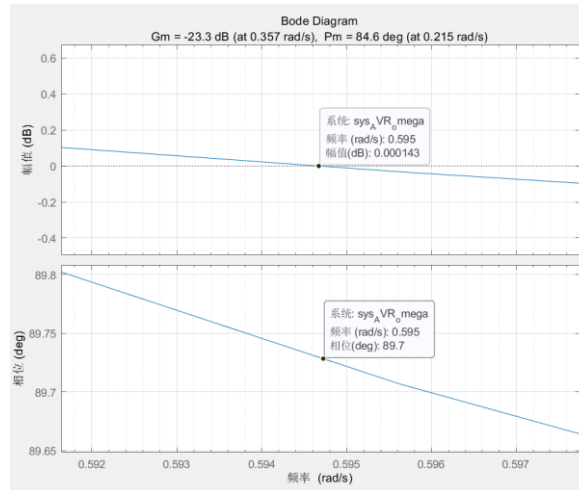
2) 说明最终系统的闭环低频段放大倍数应该在  $[0.9532, 1.0]$  之间，设为 0.98

#### 绘制原系统的 bode 图，较算原系统的性能：

$$\begin{aligned}
 G_{0\omega}(s) &= \frac{-3.089 s}{s^3 + 8.124 s^2 + 0.3389 s + 1.036} \\
 &= \frac{-3.089 s}{(s + 8.098)(s^2 + 0.02606s + 0.1279)} \\
 &= \frac{-2.9824 s}{\left(\frac{1}{8.098}s + 1\right)\left(\frac{1}{0.1279}s^2 + 0.2038s + 1\right)}
 \end{aligned}$$

超前-滞后校正前含 AVR 闭环系统的频域特性如下：





系统转折频率:  $\omega_1 = 0.3576 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 8.098 \text{ rad/s}$

相角穿越频率  $\omega_g = 0.357 \text{ rad/s}$ , 幅值穿越频率  $\omega_c = 0.595 \text{ rad/s}$

幅值裕度为  $-23.3 \text{ dB}$ , 相角裕度为  $-270.3^\circ$ , 系统不稳定。

设计思路: 超前校正提升动态响应, 滞后校正提升开环增益。

超前-滞后环节控制器的数学形式为:

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{\alpha T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \right) \left( \frac{\beta T_2 s + 1}{T_2 s + 1} \right), \alpha > 1, \beta < 1, T_1 < T_2$$

① 配置滞后校正的参数

假定  $\omega_c$  变化不大, 设定  $\omega_c = 0.6 \text{ rad/s}$ 。根据靠近中频段的转折频率为  $\omega_c$  的  $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10}$  的原则, 取转折频率为  $\frac{0.6}{5} = 0.12 \text{ rad/s}$ , 则  $\beta T_2 = 8.3333$ 。原先最大增益约为 14.62, 现期望最大增益小于 1, 取 0.5, 则期望低频段增益减小约 50 倍, 则  $\beta = 1/50$ ,  $T_2 = 416.665$ 。因此滞后校正的传递函数为

$$\frac{8.3333s + 1}{416.665s + 1}$$

② 配置超前校正的参数

为保证开环幅频特性曲线在  $0 \text{ dB}$  线有足够宽度的  $-20 \text{ dB/dec}$  斜率, 需要在  $\omega = 0.3576 \text{ rad/s}$  处对消原系统转折频率对幅频特性曲线的影响, 因此超前校正网络分子需要有一个因子  $\left( \frac{1}{0.3576} s + 1 \right) = (2.7964s + 1)$ 。相应地, 另一个转折频率取  $17.88 \text{ rad/s}$ 。因此超前校正的传递函数为

$$\frac{2.7964s + 1}{0.05593s + 1}$$

因此最终滞后超前校正网络传递函数为:

$$G_c(s) = k \frac{2.7964s + 1}{0.05593s + 1} \cdot \frac{8.3333s + 1}{416.665s + 1}$$

校正后的开环传递函数为:

$$G_0(s) = k \frac{2.7964s + 1}{0.05593s + 1} \cdot \frac{8.3333s + 1}{416.665s + 1} \cdot \frac{-3.089 s}{s^3 + 8.124 s^2 + 0.3389 s + 1.036}$$

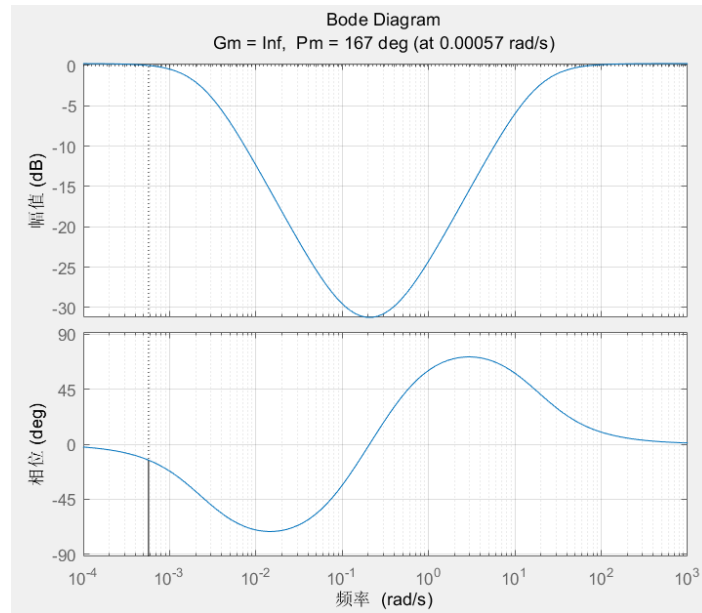


图-滞后超前校正网络的 Bode 图

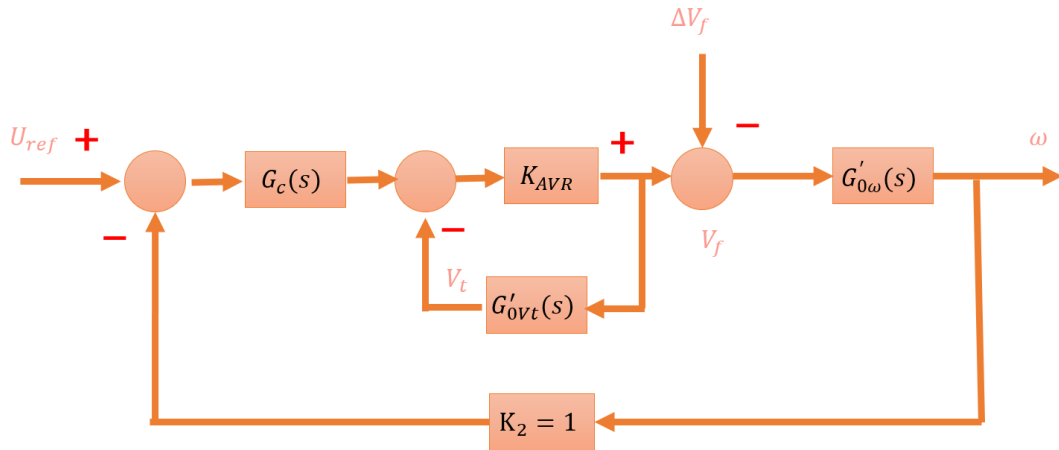


图-经过超前滞后校正后系统结构框图

最终得到系统输出为 $U_{ref}$ ，输出为 $\omega$ 的开环传递函数：

$$\begin{aligned}
 G_{0\omega}(s) &= 1.0278 \frac{2.7964s + 1}{0.05593s + 1} \cdot \frac{8.3333s + 1}{416.665s + 1} \cdot \frac{-3.089s}{s^3 + 8.124s^2 + 0.3389s + 1.036} \\
 &= \frac{-73.98s^3 - 35.33s^2 - 3.174s}{23.3s^5 + 606s^4 + 3394s^3 + 173.5s^2 + 431.9s + 1.036} \\
 &= \frac{-3.1745s(s + 0.3576)(s + 0.12)}{(s + 17.88)(s + 8.098)(s + 0.0024)(s^2 + 0.02606s + 0.1279)}
 \end{aligned}$$

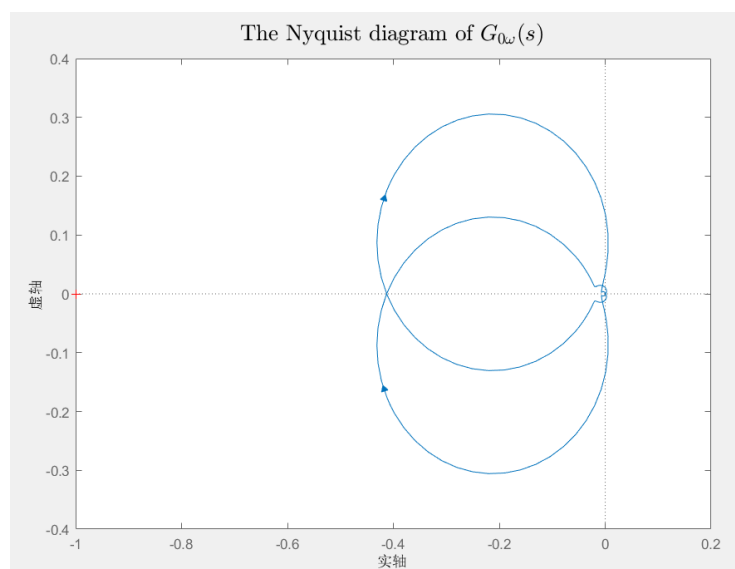


图-

此时，系统 $G_{0\omega}(s)$ 的 Nyquist 图不包围 $(-1, j0)$ 点，且 $n = 0$ ，故闭环系统稳定

又由 Mason 公式可以得到输出为 $U_{ref}$ ，输出为 $V_t$ 的传递函数为：

$$G_{ovt}(s) = \frac{G_c(s) \cdot K \cdot G'_{0V_t}(s)}{1 + K \cdot G'_{0V_t}(s) + G_c(s) \cdot K \cdot G'_{0V_t}(s)}$$

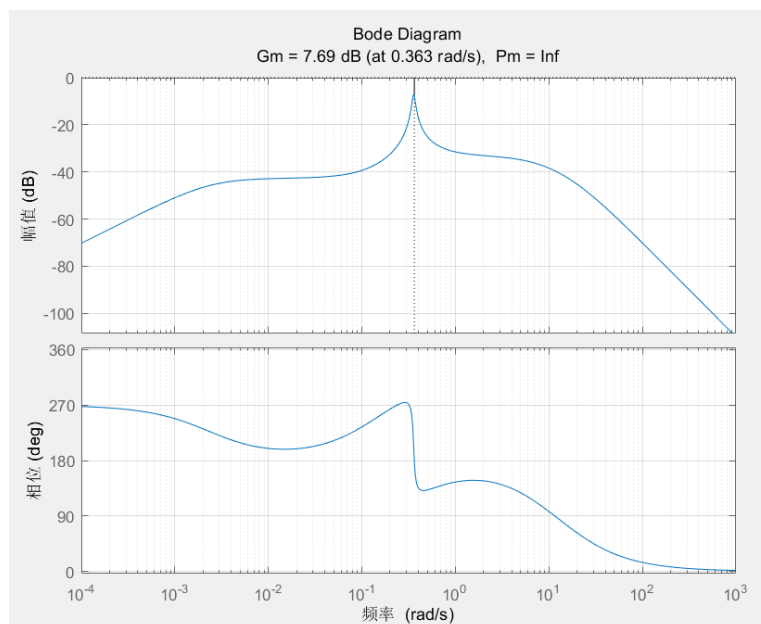
$$\frac{4215 s^{12} + 8.23e04 s^{11} + 1.301e05 s^{10} + 1.139e05 s^9 + 7.261e04 s^8 + 3.502e04 s^7 + 1.322e04 s^6 + 3980 s^5 + 922.5 s^4 + 160.9 s^3 + 19.34 s^2 + 1.038 s + 0.002383}{543.1 s^{13} + 2.446e04 s^{12} + 3.576e05 s^{11} + 1.782e06 s^{10} + 1.898e06 s^9 + 1.34e06 s^8 + 7.184e05 s^7 + 2.808e05 s^6 + 8.885e04 s^5 + 2.105e04 s^4 + 3502 s^3 + 435.7 s^2 + 2.039 s + 0.002432}$$

$$\frac{7.7619 (s+17.88) (s+0.4039)^2 (s+0.3576) (s+0.12) (s+0.0024) (s^2 + 0.1681s + 0.12)^2 (s^2 + 0.01999s + 0.1307)}{(s+18.19) (s+17.88) (s+7.802) (s+0.4039)^2 (s+0.002417) (s+0.0024) (s^2 + 0.1681s + 0.12)^2 (s^2 + 0.01562s + 0.1296)}$$

此时闭环系统的低频段增益为： $0.9535k = 0.98$ ，得到 $k = 1.0278$ 。

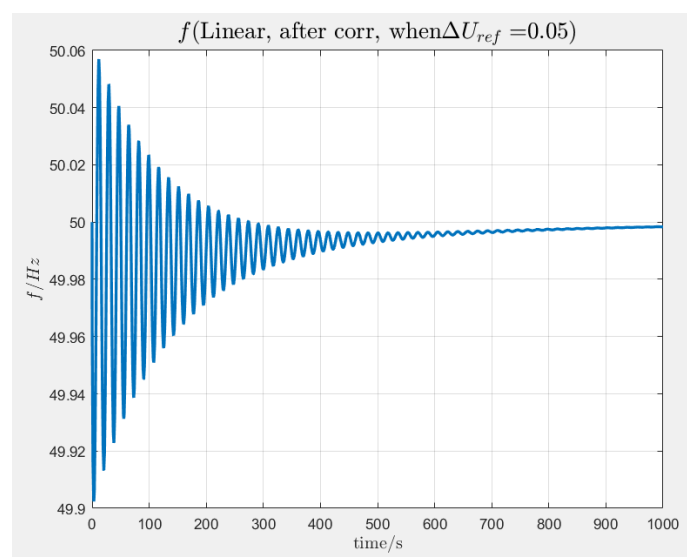
校算校正后的幅值裕度和相角裕度

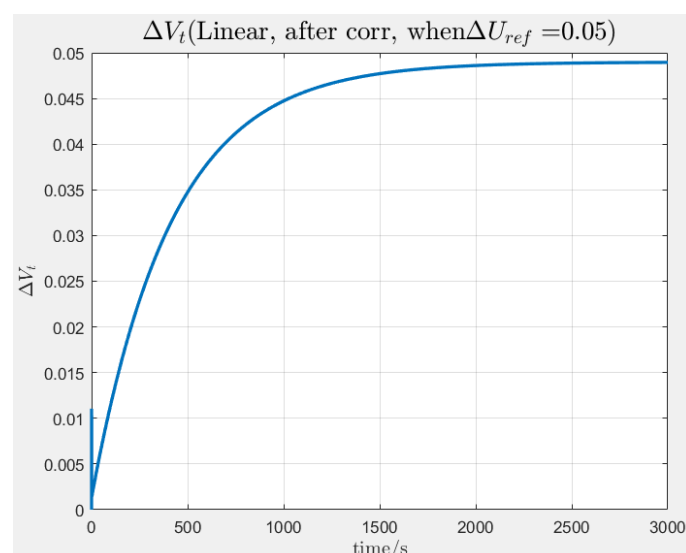




校正后幅值裕度 $G_m = 7.69\text{dB}$ ，相角裕度 $P_m = \infty$ ，这也说明闭环系统已处于稳定状态。

线性模型（校正后），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $f$ 和 $\Delta V_t$ 的波形如下：





系统频率在 $[49.9\text{Hz}, 50.06\text{Hz}]$ ，满足频率变化 $\pm 0.2\text{Hz}$ 的设计要求；而系统机端电压变化量（稳态值）约为0.04895，在 $[0.04766, 0.05]$ 之间，满足设计要求。

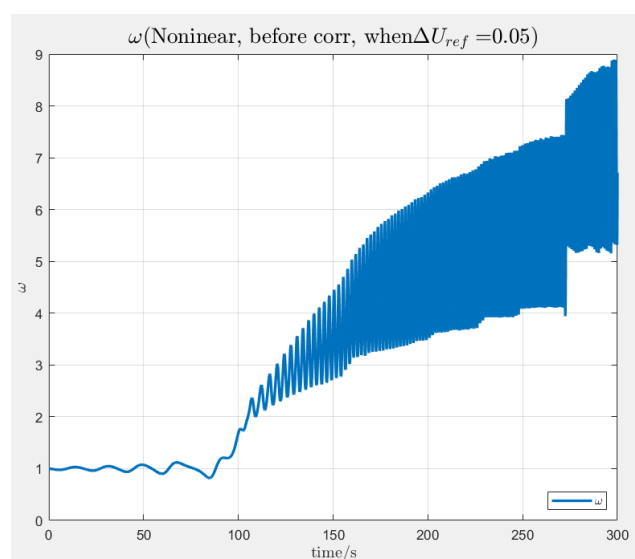
### 时域仿真结果

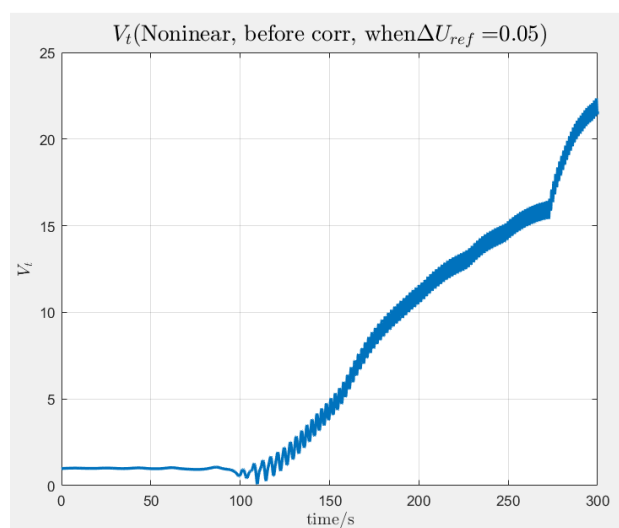
结合作业二中非线性和线性模型，将未校正系统的时域仿真结果和频域校正后的时域仿真结果进行对比与校验。

### 未校正系统的时域仿真结果

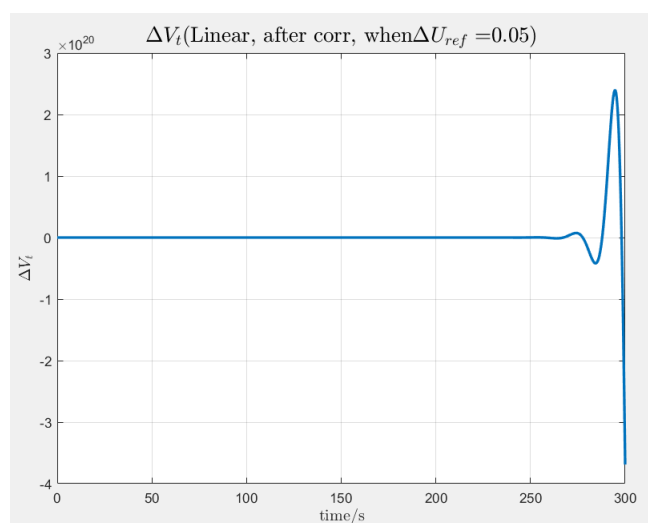
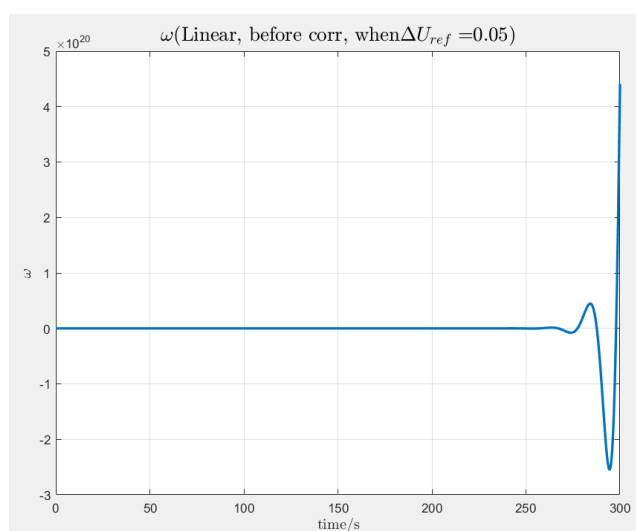
非线性模型（校正前），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $\omega$ 和 $V_t$ 的波形如下：

此处取 $K = 5$ ，因为 $K = 100$ 时难以绘制。





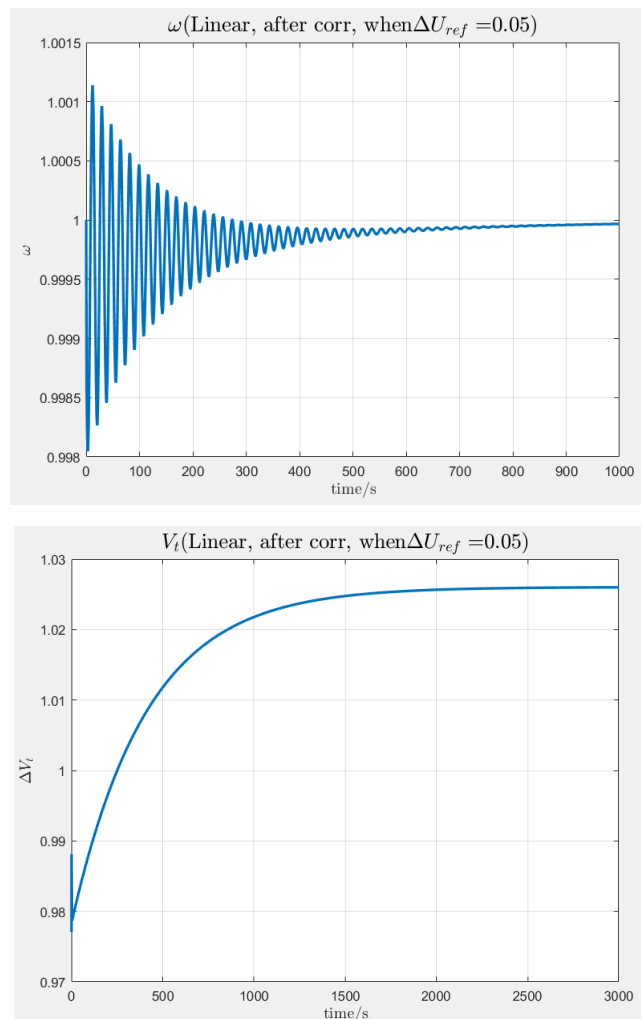
线性模型（校正前），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $\omega$ 和 $V_t$ 的波形如下：



从上面的 $\omega$ 和 $V_t$ 的波形图可以发现，当 $K = 100$ 时，校正前的线性和非线性模型的 $\omega$ 和 $V_t$ 在时域上均不稳定。

### 频域校正后的时域仿真结果

线性模型（校正后），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $f$ 和 $\Delta V_t$ 的波形如下：



比较校正前后 $\omega$ 和 $V_t$ 的波形图，校正前的非线性模型的 $\omega$ 和 $V_t$ 在时域上均不稳定，反之，校正后的线性模型的 $\omega$ 和 $V_t$ 在时域上均稳定。

3. 从“稳、准、快”的角度，调节低频、中频和高频的放大倍数，优化超前-滞后控制器参数（可串联校正、可反馈校正，也可改换成 PID 控制器），使其满足任务题干中所给出动态性能和静态性能，结合作业二中非线性和线性模型，将未校正系统的时域仿真结果和频域校正后的时域仿真结果进行对比与校验。

在 2 中，虽然已经较好地满足了以下性能指标：

通过校正使得在输入  $u_{ref}$  施加  $\Delta u_{ref} = 0.05$  的阶跃时，1) 系统频率变化维持在  $\pm 0.2\text{Hz}$  以内，实际范围为  $[49.9024, 50.0569]$ ；2) 系统机端电压变化量（稳态值）在  $[0.04766, 0.05]$  之间。

但是，在 2 中的校正后系统中，由于相角裕度为无穷大，已无法优化，而幅值裕度为  $7.69\text{dB}$ ，根据书本幅值裕度在  $5\sim 15\text{dB}$  是合理的。但是  $V_t$  到达稳态的时间非常长！。在现实中是无法忍受的。以下对参数进行一些优化：

- ① 令闭环系统（输出  $V_t$  的低频段增益从 0.98 增大到 1，这样能让  $V_t$  的增加更快一些。  $0.9535k = 1$ ，得到  $k = 1.048$ 。

- ② 在 2 中，我采取了常用的规则，先假定了  $\omega_c$  变化很小，然后让靠近中频段的转折频率为  $\omega_c$  的  $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10}$ ，以这种方法做出来的校正后系统的  $V_t$  变化速度很慢，需要很长一段时间才会到达稳态值。而这个规则主要是为了保证系统的稳定性，在这里我们已经能够保证系统稳定了，因此我抛弃了这条做题的规则，让转折频率变得更大，这样  $V_t$  到达稳态的时间大大缩短。

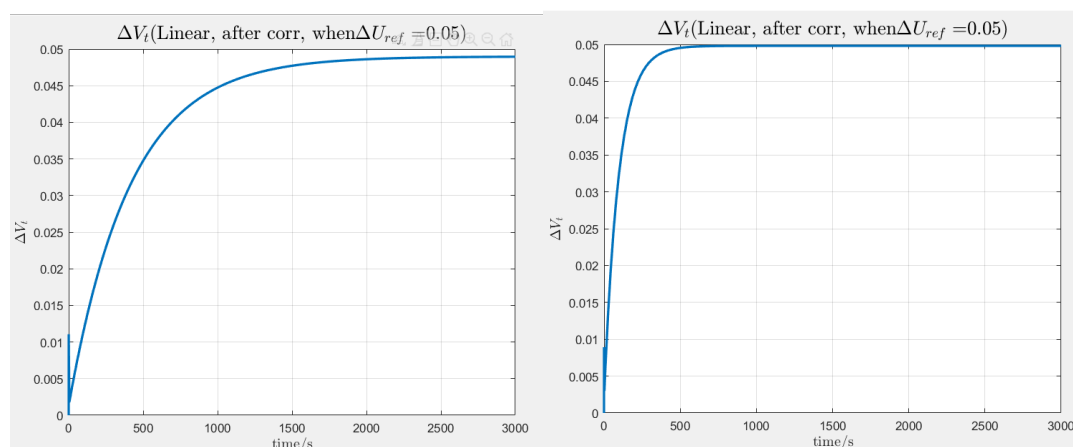
③ 将  $\alpha$  与  $\beta$  解耦合，虽然一般来说为了物理实现的方便性都会让  $\alpha\beta = 1$ ，但是这里为了调节更好的性能，将二者分开调节，最终  $\alpha = 60$ ， $\beta = 50$ 。

经过优化后，系统频率变化范围为  $[49.8181, 50.0376]$ ，系统机端电压变化量（稳态值）在  $[0.04766, 0.05]$  之间，但是到达稳态的时间大大缩短。幅值裕度为  $5.14\text{dB}$ ，仍可以接受。

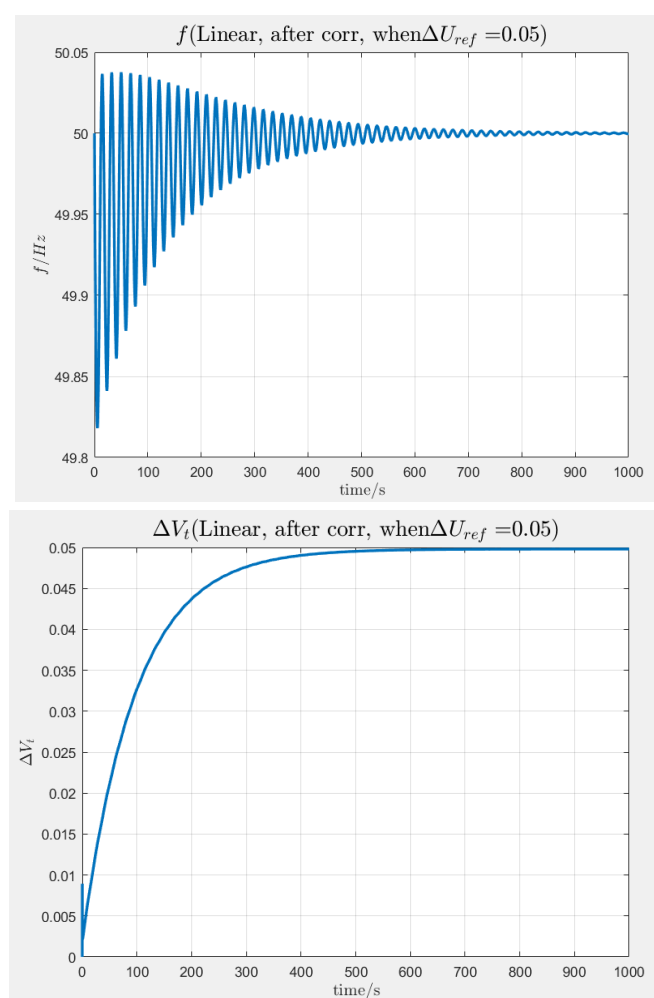
校正网络的参数和传递函数如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{corr\_lead} = \frac{1.667 s + 1}{0.02778 s + 1} \quad \text{corr\_lag} = \frac{2 s + 1}{100 s + 1} \\
 & k\_corr = 1.045 \\
 & G\_corr = \frac{3.483 s^2 + 3.832 s + 1.045}{2.778 s^2 + 100 s + 1}
 \end{aligned}$$

优化前后  $V_t$  到达稳态的速度对比如下：

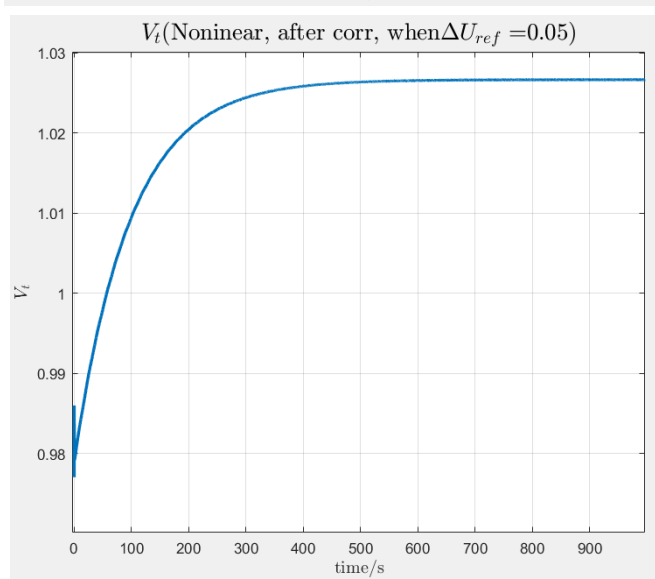
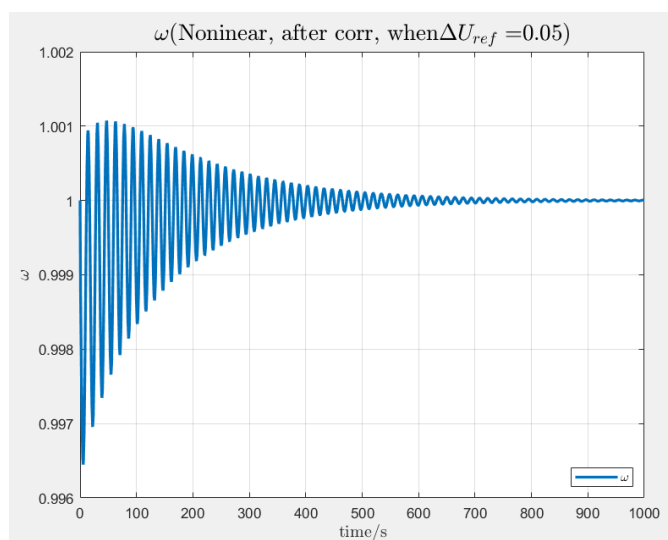


线性模型（校正后，优化后），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $f$ 和 $\Delta V_t$ 的波形如下：

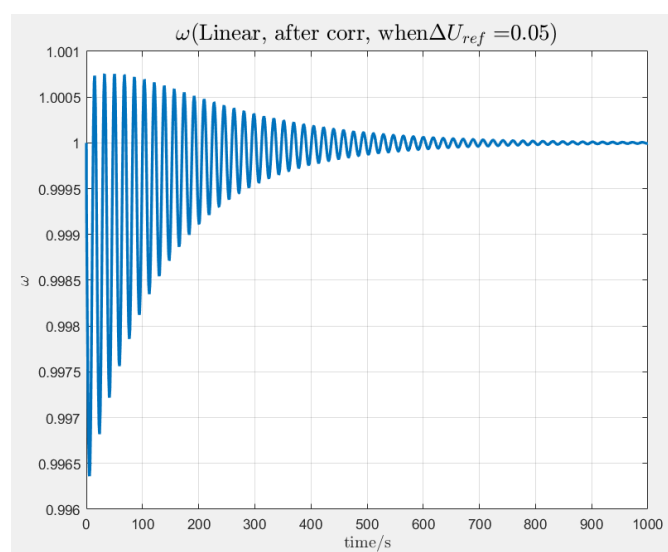


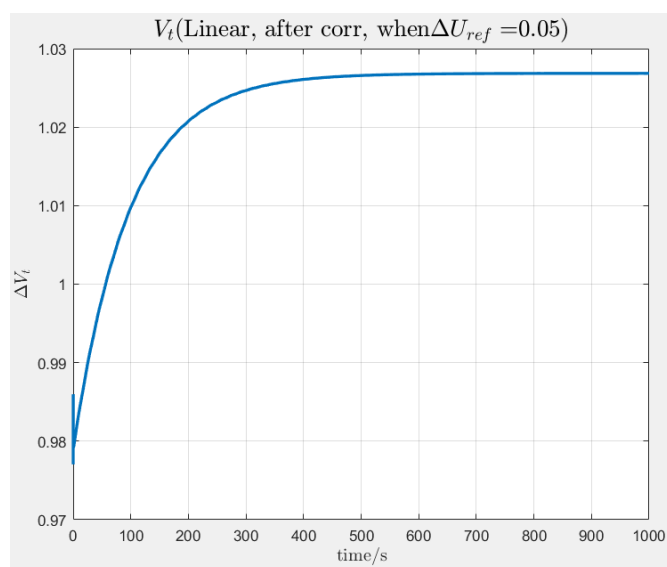
结合作业二中非线性和线性模型，将未校正系统的时域仿真结果和频域校正后的时域仿真结果进行对比与校验，这一要求中，未校正部分与 2 相同，见 2。

非线性模型（校正后，优化后），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $\omega$ 和 $V_t$ 的波形如下：



线性模型（校正后，优化后），在输入 $u_{ref}$ 施加 $\Delta u_{ref} = 0.05$ 的阶跃时， $\omega$ 和 $V_t$ 的波形如下：







#### d. 总结

总结频域校正的一般方法，以及每种方法的优劣。思考频域校正给系统带来何种的性能改善；

串联超前校正：用于校正系统的动态性能，适用于稳态精度满足，稳定性和动态性能不满足的系统。基本方法是配置超前校正环节，使闭环主导极点在合适位置。

串联滞后校正：用于校正系统稳态精度，适用于动态性能满足，稳态精度不满足的系统。基本方法是在原点附近放置滞后零极点对，增加开环增益。

PI 控制器：PI 可消除稳态误差，但使系统响应变慢，两个 I 环节将不稳定。

PD 控制器：PD 改善系统动态响应，但高频段增益不可能无限提高，易受扰。

PID 控制器：提升低频增益，增加稳态精度；降低中频增益，保持稳定裕量；提升高频增益，增加带宽和速度。

编程时间：约 6 小时。

撰写报告时间：4 小时。

总结与反馈：😊