Midterm exam (Partiel) M1 2024-25 (K. Meziani)

No document, 2h

Contents

Correction Exercice 1: QCM

1. C-D
2. C-G-H-I-K
3. C
4. A-C

Correction Exercice 2

On considère le modèle linéaire suivant

$$Y = X\beta + \xi, \tag{1}$$

où $Y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ is an unknown vector and X est la matrice *design* de taille $n \times p$ et de rang plein $p < n$. On suppose que $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 D^{-2})$ où $\sigma^2 > 0$ est inconnues et D est la n-matrice carré diagonale

$$D^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{pmatrix}$$

1

1. Montrer que $X^\top D^2 X$ est inversible.

- Notons que $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ est de rang plein.

- De plus, $(X^\top D^2 X)^\top = X^\top D^2 X$ est une matrice symétrique.

- Pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, on calcule

$$z^\top X^\top D^2 X z = \|DXz\|^2 \geq 0$$

- Pour tout $z \in \mathbb{R}^p$

$$\text{Et} \quad \|DXz\|^2 = 0 \Leftrightarrow DXz = \mathbf{0}_n$$

- Pour tout $z \in \mathbb{R}^p$

$$\Leftrightarrow Xz = \underline{0}_n \quad \text{Car } D \text{ est inversible}$$

- Or X est de rang plein donc $z = \mathbf{0}_p$.

- Donc $X^\top D^2 X$ est symétrique et définie positive donc inversible.

2

2. Quelle est la loi de Y (justifier). Écrire explicitement $f_Y(y)$ la densité de probabilité de Y.

$Y = X\beta + \xi$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien ξ donc Y est gaussien .

$$Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 D^{-2}),$$

Comme $Det(D^{-2}) = \prod_{i=1}^n 1/i = 1/(n!)$, la densité de Y s'écrit

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}\sqrt{1/(n!)}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|D(Y - X\beta)\|^2\}$$

3

3. Calculer la fonction de log-vraisemblance $\ell_n(\beta, \sigma^2) = -\frac{1}{n} \ln f_Y(y)$.

$$\begin{aligned} \ell_n(\beta, \sigma^2) &= -\frac{1}{n}\ln(f_Y(y)) = -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}\sqrt{n!}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|D(Y - X\beta)\|^2\}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\sigma^2\right) + \frac{1}{2n\sigma^2}\|D(Y - X\beta)\|^2 + \frac{1}{n}\ln\left((2\pi)^{n/2}\sqrt{n!}\right) \end{aligned}$$

4

4. En déduire (écriture matricielle demandée) les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\sigma}^2$ de β et σ^2. On admettra que l'Hessienne de la fonction de log-vraissemblance est définie strictement positive au point $(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ell_n(\beta, \sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{2n(\sigma^2)^2}\|D(Y - X\beta)\|^2 \\ \nabla_\beta[\ell_n](\beta, \sigma^2) &= -\frac{2}{2n\sigma^2}(DX)^\top D(Y - X\beta) = -\frac{1}{n\sigma^2}X^\top D^2(Y - X\beta) \end{aligned}$$

Comme $\left[X^\top D^2 X\right]$ est inversible (question 1.), il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ell_n(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2) = 0 \\ \nabla_\beta[\ell_n](\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2) = \mathbf{0}_p \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\|D(Y - X\widehat{\beta})\|^2 \\ \widehat{\beta} = \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y \end{array}\right.$$

5 Soient $\widetilde{D} := (DX)\left[(DX)^\top(DX)\right]^{-1}(DX)^\top = (DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top$ et $\mathcal{M}^*$ de dimension p le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de (DX) :

$$\mathcal{M}^* := \{v \in \mathbb{R}^n : \; v = (DX)\beta, \; \beta \in \mathbb{R}^p\}.$$

Le but de la question 5. est de montrer que $\widetilde{D}$ est un projecteur orthogonal sur le sous espace $\mathcal{M}^*$ de rang p.

5.a. Montrer que $\widetilde{D}$ est un projecteur orthogonal.

Notons que $[X^\top D^2 X]^{-1}$ est une matrice symétrique (question 1.)

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^\top &= \left[(DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top\right]^\top = (DX)^\top [X^\top D^2 X]^{-1}(DX) = \widetilde{D} \\
\widetilde{D}^2 &= \left[(DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top\right]\left[(DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top\right] \\
&= (DX)\underbrace{[X^\top D^2 X]^{-1} X^\top DDX}_{\boldsymbol{I}_p}[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top = \widetilde{D}
\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{D}$ est un projecteur.

5.b. Montrer que $\widetilde{D}$ projette sur $\mathcal{M}^*$.

(i) $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\widetilde{D}v = (DX)\underbrace{[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top v}_{:=\beta \in \mathbb{R}^p} := (DX)\beta \in \mathcal{M}^*$$

Donc $\widetilde{D}$ projette sur un sous epace de $\mathcal{M}^*$

(ii) $\forall v \in \mathcal{M}^*$, $\exists \beta \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = (DX)\beta$

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}v &= \widetilde{D}(DX)\beta = (DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top (DX)\beta \\
&= (DX)\underbrace{[X^\top D^2 X]^{-1}[X^\top D^2 X]}_{\boldsymbol{I}_p}\beta = (DX)\beta = v
\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{D}$ projette tout élément de $\mathcal{M}^*$ dans lui même.

$(i) + (ii)) + (Question\ 5.a.) \Leftrightarrow \widetilde{D}$ projette orthogonalement sur $\mathcal{M}^*$.

6

6. Cette question a pour but l'étude de $\widehat{\sigma}^2$

6.a. On définit $V = D(Y - X\widehat{\beta})$. Montrer que $V = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})D\xi$.

$$\begin{aligned}
V &= DY - DX\widehat{\beta} = DY - DX\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y \\
&= DY - \widetilde{D}DY = \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) DY \\
&= \underbrace{\left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right)}_{projette\ sur\ (\mathcal{M}^*)^\perp} \underbrace{(DX)\beta}_{\in \mathcal{M}^*} + \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\xi \\
&= \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\xi
\end{aligned}$$

6.b. Montrer que V suit une loi gaussienne centrée dont on précisera la matrice de variance-covariance.

Comme $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 D^{-2})$ alors $V = \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\xi$ a une transformation linéaire d'un vecteur gaussien est gaussien

$$V \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right))$$

car

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[V] &= \mathbb{E}[\left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\xi] = \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\mathbb{E}[\xi] = \mathbf{0}_n \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[V] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\xi] = \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) D\mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi] = \sigma^2 \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right) \underbrace{DD^{-2}D^\top}_{\boldsymbol{I}_n} \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right)^\top \\
&= \sigma^2 \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right)^2 = \sigma^2 \left(\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}\right)
\end{aligned}
$$

6.c. Calculer $\mathbb{E}_\beta[\|V\|^2]$.

Comme $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 D^{-2})$ alors $\xi^* := \frac{1}{\sigma} D\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$. De plus

$$\frac{1}{\sigma} V = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})\frac{1}{\sigma} D\xi = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})\xi^*$$

Comme $dim((\mathcal{M}^*)^\perp) = n - p$, il vient par le théorème de Cohran

$$\frac{1}{\sigma^2} \|V\|^2 = \left\| \frac{1}{\sigma} V \right\|^2 = \left\| (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})\xi^* \right\|^2 \sim \mathcal{X}^2_{n-p}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_\beta \left[\frac{1}{\sigma^2} \|V\|^2 \right] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}_\beta[\|V\|^2] = n - p$$

Et $\mathbb{E}_\beta[\|V\|^2] = (n-p)\sigma^2$.

6.d. En déduire un estimateur sans biais $\widetilde{\sigma}^2$ de σ^2.

Comme

$$\mathbb{E}_\beta[\widehat{\sigma}^2] = \mathbb{E}_\beta \left[\frac{\|V\|^2}{n} \right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}_\beta \left[\|V\|^2 \right] = \frac{(n-p)}{n} \sigma^2$$

L'estimateur $\widehat{\sigma}^2$ est biaisé. Un estimateur non biaisé de σ^2 est donc

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{n}{(n-p)} \widehat{\sigma}^2 = \frac{\|V\|^2}{n-p}$$

6.e. Donner la loi de

$$\mathcal{X} := (n-p)\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^2},$$

où $\widetilde{\sigma}^2$ est l'estimateur sans biais de la question précédente.

Par le théorème de Cochran

$$\mathcal{X} := (n-p)\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\|V\|^2}{\sigma^2} = \left\| (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})\xi^* \right\|^2 \sim \mathcal{X}^2_{n-p}$$

7

7. Donner la loi de $\widehat{\beta}$. Justifier.

Comme Y est gaussien (Question 2.), alors $\widehat{\beta} = \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y$ est gaussien comme transformation linéaire d'un vecteur gaussien .

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{\beta}] &= \mathbb{E}\left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y\right) = \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \mathbb{E}\left(Y\right) \\
&= \underbrace{\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 X}_{I_p} \beta = \beta \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\widehat{\beta}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y\right) \\
&= \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(Y\right) D^2 X \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} \\
&= \sigma^2 \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top \underbrace{D^2 D^{-2}}_{I_n} D^2 X \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} \\
&= \sigma^2 \underbrace{\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 X}_{\boldsymbol{I}_p} \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} \\
&= \sigma^2 \left[X^\top D^2 X\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2 \left[X^\top D^2 X\right]^{-1}\right)$$

8

8. Montrer que $\widehat{\beta}$ et $V = D(Y - X\widehat{\beta})$ sont indépendants.

Remarquons que

$$\widehat{\beta} = \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 Y = \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 X \beta + \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \xi = \beta + \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \xi$$

Et rappelons que $V = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) D\xi$, alors

$$W := \begin{pmatrix} \widehat{\beta} \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \xi \\ (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) D\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \\ (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) D \end{pmatrix} \xi$$

Alors W est gaussien comme transformation affine du vecteur gaussien ξ.

De plus

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\widehat{\beta}, V\right) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \xi, (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) D\xi\right) \\
&= \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi, \xi) D (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) \\
&= \sigma^2 \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top \underbrace{D^2 D^{-2}}_{\boldsymbol{I}_n} D (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D}) \\
&= \sigma^2 \left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D - \left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D \widetilde{D}\right) \\
&= \sigma^2 \left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D - \underbrace{\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D^2 X}_{\boldsymbol{I}_p} [X^\top D^2 X]^{-1} (DX)^\top\right) \\
&= \sigma^2 \left(\left[X^\top D^2 X\right]^{-1} X^\top D - [X^\top D^2 X]^{-1} (DX)^\top\right) \\
&= \mathbf{0}_{p\times n}
\end{aligned}
$$

Donc $\widehat{\beta}$ et V sont indépendants.

9

9. On rappelle que σ^2 est supposé inconnu. On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : \ \beta = \beta_0 \in \mathbb{R}^p$ contre l'alternative $H_1 : \ \beta \neq \beta_0$. Proposer un test de taille $\alpha \in]0, 1[$.

On a demontré que $\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2 \left[X^\top D^2 X\right]^{-1}\right)$ alors

$$\frac{\left[X^\top D^2 X\right]^{1/2} (\widehat{\beta} - \beta)}{\sqrt{\sigma^2}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{I}_p\right)$$

Par cohran

$$\left\| \frac{\left[X^\top D^2 X\right]^{1/2} (\widehat{\beta} - \beta)}{\sqrt{\sigma^2}} \right\|^2 \sim \mathcal{X}_p^2$$

Alors sous H_0

$$\eta := \left\| \frac{\left[X^\top D^2 X\right]^{1/2} (\widehat{\beta} - \beta_0)}{\sqrt{\sigma^2}} \right\|^2 \sim \mathcal{X}_p^2$$

On a montrer que

$$\mathcal{X} := (n-p)\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

De plus, comme $\widehat{\beta}$ et V sont indépendants alors η et $\mathcal{X}$ sont indépendants . Ainsi sous H_0

$$F := \frac{\eta/p}{\mathcal{X}/(n-p)} = \frac{\left\| \left[X^\top D^2 X\right]^{1/2} (\widehat{\beta} - \beta_0) \right\|^2}{p\widetilde{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}_{p,(n-p)}$$

Un test de taille $\alpha \in (0, 1)$ est donc

$$\{F > q_{1-\alpha}^{\mathcal{F}_{p,(n-p)}}\}$$

English version

Exercise 1 : Multiple Choice questionnaires

We consider the general regression model $Y = X\beta + \boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ with

$$\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad X = [\mathbf{1}_n, X_1, \cdots, X_q] \in \mathbb{R}^{n\times(1+q)}, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_q)^\top \in \mathbb{R}^{(1+q)},$$

We assume that the postulate **[P1]-to-[P4]** are satisfied and X is of full rank matrix. We denote by P_X the orthogonal projection matrix onto the vectorial sub-space $[X]$ of $\mathbb{R}^n$ generated by the columns of X, $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ the vector $(1, \cdots, 1)^T$, $\widehat{\sigma}^2$ the unbiased estimator of σ^2 presented in class and $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ the ordinary least squares estimator.

Without justifying, answer by giving the list of the true assertions. For each question: A negative response cancels out a positive response.

---

1. $\widehat{\beta}$ is

- **A.** optimal among the unbiased estimators.
- **B.** a gaussian vector whose variance-covariance matrix is diagonal.
- **C.** unbiased and linear with respect to $\boldsymbol{Y}$.
- **D.** equal to the maximum likelihood estimator.

---

2. Which assertions are true?

A. $\widehat{\sigma}^2$ and $\boldsymbol{Y}$ are pairwise independent.
B. The $\{Y_i\}_i$ are *i.i.d.*.
C. The $\{\varepsilon_i\}_i$ are *i.i.d.*.
D. For a given i, Y_i and ε_i are independent.
E. The $\{\widehat{\beta}_k\}_k$ are pairwise independent.
F. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ and $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ are independent.
G. The $\{Y_i\}_i$ are pairwise independent.
H. The $\{\varepsilon_i\}_i$ are pairwise independent.
I. $\widehat{\beta}$ and $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ are independent.
J. $\boldsymbol{Y}$ and $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ are independent.
K. $\widehat{\sigma}^2$ and $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ are independent.

---

3. The dimension of $[X]$ is

A. $q-1$
B. q
C. $q+1$
D. $n-q$
E. n

---

4. Which assertions are true?

A. $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ and $\mathbb{1}_n$ are orthogonal.
B. $\boldsymbol{Y}$ and $P_X\boldsymbol{Y}$ are orthogonal.
C. $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ and $(Y - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ are orthogonal.
D. $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ and $X\boldsymbol{\beta}$ are orthogonal.
E. $\boldsymbol{Y}$ and $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ are orthogonal.
F. $\boldsymbol{Y}$ and $\mathbb{1}_n$ sont orthogonaux.

Exercise 2 (Heteroscedasticity)

We consider the following linear model

$$Y = X\beta + \xi, \tag{2}$$

where $Y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ is an unknown vector and X the *design* matrix of size $n \times p$ and full rank $p < n$. We assume $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 D^{-2})$ where $\sigma^2 > 0$ is unknown and D the n-diagonal square matrix such that

$$D^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{pmatrix}$$

1. Show that $X^\top D^2 X$ is invertible.

2. What is the distribution of Y (justify). Write explicitly $f_Y(y)$ the probability density of Y.

3. Compute the log-likelihood function $\ell_n(\beta, \sigma^2) := -\frac{1}{n} \ln f_Y(y)$.

4. Deduce (matrix writing required) the maximum likelihood estimators $\widehat{\beta}$ and $\widehat{\sigma}^2$ of β and σ^2. We admit that the Hessian of the log-likelihood function is strictly positive at the point $(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2_{ML})$.

5. Let $\widetilde{D} := (DX)\left[(DX)^\top (DX)\right]^{-1}(DX)^\top = (DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top$ and $\mathcal{M}^*$ of dimension p be the vector subspace generated by the columns of (DX) :

$$\mathcal{M}^* := \{v \in \mathbb{R}^n : \ v = (DX)\beta, \ \beta \in \mathbb{R}^p\}.$$

The goal of question 5. is to show that $\widetilde{D}$ is an orthogonal projector on the subspace $\mathcal{M}^*$ of rank p.

a. Show that $\widetilde{D}$ is an orthogonal projector.
b. Show that $\widetilde{D}$ projects onto $\mathcal{M}^*$.

6. The purpose of this question is to study $\widehat{\sigma}^2_{ML}$

a. We define $V = D(Y - X\widehat{\beta})$. Show that $V = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})D\xi$.
b. Show that V follows a centered Gaussian distribution whose variance-covariance matrix will be specified.

c. Calculate $\mathbb{E}_\beta[||V||^2]$.
d. Deduce an unbiased estimator $\widetilde{\sigma}^2$ of σ^2.
e. For $\widetilde{\sigma}^2$ the unbiased estimator from the previous question, give the distribution of

$$\mathcal{X} := (n-p)\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^2}.$$

7. Give the law of $\widehat{\beta}$. Justify.

8. Show that $\widehat{\beta}$ and $V = D(Y - X\widehat{\beta})$ are independent.

9. Recall that σ^2 is assumed to be unknown. We wish to test the null hypothesis $H_0 :\ \beta = \beta_0 \in \mathbb{R}^p$ against the alternative $H_1 :\ \beta \neq \beta_0$. Propose a test of size $\alpha \in]0,1[$. A **RIGOROUS** justification is expected

Version Française

Exercice 1 (QCM)

On considère le modèle de regression linéaire suivant : $Y = X\beta + \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ avec

$$\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad X = [\mathbf{1}_n, X_1, \cdots, X_q] \in \mathbb{R}^{n\times(1+q)}, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_q)^\top \in \mathbb{R}^{(1+q)},$$

On suppose que les postulats **[P1]-à-[P4]** sont satisfaits et X est une matrice de rang plein. On note P_X le projecteur orthogonal sur le sous-espace $[X]$ de $\mathbb{R}^n$ généré par les colonnes de X, $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(1, \cdots, 1)^T$, $\widehat{\sigma}^2$ l'estimateur sans biais de σ^2 vu en cours et $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ l'estimateur des moindres carrés ordinaire.

Sans justification, précisez la (les) vraie(s) assertion(s) dans la liste.. Pour chaque question : si une réponse est négative, elle annule toute réponse positive.

---

1. $\widehat{\beta}$ **est :**

A. optimal (dans le sens vu en cours) parmi les estimateurs sans biais.
B. un vecteur gaussien de matrice de variance-covariance diagonale.
C. sans biais et linéaire en $\boldsymbol{Y}$.
D. égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

---

2. Quelles assertions sont vraies?

A. $\widehat{\sigma}^2$ et $\boldsymbol{Y}$ sont indépendants.
B. Les $\{Y_i\}_i$ sont *i.i.d.*
C. Les $\{\varepsilon_i\}_i$ sont *i.i.d.*
D. Pour un i donné, Y_i et ε_i sont indépendants
E. Les $\{\widehat{\beta}_k\}_k$ sont mutuellement indépendants.
F. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ et $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ sont indépendants.
G. Les $\{Y_i\}_i$ sont mutuellement indépendants.
H. Les $\{\varepsilon_i\}_i$ sont mutuellement indépendants.
I. $\widehat{\beta}$ et $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ sont indépendants.
J. $\boldsymbol{Y}$ et $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ sont indépendants.
K. $\widehat{\sigma}^2$ et $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ sont indépendants.

---

3. La dimension de $[X]$ **est :**

A. $q-1$
B. q
C. $q+1$
D. $n-q$
E. n

---

4. Quelles assertions sont vraies?

A. $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ et $\mathbb{1}_n$ sont orthogonaux.

B. $\boldsymbol{Y}$ et $P_X\boldsymbol{Y}$ sont orthogonaux.

C. $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ et $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ sont orthogonaux.

D. $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ et $X\boldsymbol{\beta}$ sont orthogonaux.

E. $\boldsymbol{Y}$ et $(\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}})$ sont orthogonaux.

F. $\boldsymbol{Y}$ et $\mathbb{1}_n$ sont orthogonaux.

Exercice 2 (Hétéroscédasticité)

On considère le modèle linéaire suivant

$$Y = X\beta + \xi,$$

où $Y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur inconnu et X est la matrice *design* de taille $n \times p$ et de rang plein $p < n$. On suppose que $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 D^{-2})$ où $\sigma^2 > 0$ est inconnu et D est la n-matrice carré diagonale telle que

$$D^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $X^\top D^2 X$ est inversible.

2. Quelle est la loi de Y (justifier). Écrire explicitement $f_Y(y)$ la densité de probabilité de Y.

3. Calculer la fonction de log-vraisemblance $\ell_n(\beta, \sigma^2) := -\frac{1}{n} \ln f_Y(Y)$.

4. En déduire (écriture matricielle demandée) les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ de β et σ^2. On admettra que l'Hessienne de la fonction de log-vraissemblance est définie strictement positive au point $(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2)$.

5.vSoient $\widetilde{D} := (DX)\left[(DX)^\top (DX)\right]^{-1} (DX)^\top = (DX)[X^\top D^2 X]^{-1}(DX)^\top$ et $\mathcal{M}^*$ de dimension p le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de (DX) :

$$\mathcal{M}^* := \{v \in \mathbb{R}^n : \ v = (DX)\beta, \ \beta \in \mathbb{R}^p\}.$$

Le but de la question 5. est de montrer que $\widetilde{D}$ est un projecteur orthogonal sur le sous espace $\mathcal{M}^*$ de rang p.

a. Montrer que $\widetilde{D}$ est un projecteur orthogonal.
b. Montrer que $\widetilde{D}$ projette sur $\mathcal{M}^*$.

6. Cette question a pour but l'étude de $\widehat{\sigma}^2_{MV}$.

a. On définit $V = D(Y - X\widehat{\beta})$. Montrer que $V = (\boldsymbol{I}_n - \widetilde{D})D\xi$.
b. Montrer que V suit une loi gaussienne centrée dont on précisera la matrice de variance-covariance.
c. Calculer $\mathbb{E}_\beta[||V||^2]$.
d. En déduire un estimateur sans biais $\widetilde{\sigma}^2$ de σ^2.
e. Pour $\widetilde{\sigma}^2$ est l'estimateur sans biais de la question précédente, Quelle est la loi de

$$\mathcal{X} := (n-p)\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^2}.$$

7. Donner la loi de $\widehat{\beta}$. Justifier.

8. Montrer que $\widehat{\beta}$ et $V = D(Y - X\widehat{\beta})$ sont indépendants.

9. On rappelle que σ^2 est supposé inconnu. On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : \ \beta = \beta_0 \in \mathbb{R}^p$ contre l'alternative $H_1 : \ \beta \neq \beta_0$. Proposer un test de taille $\alpha \in]0, 1[$. Une justification **RIGOUREUSE** est attendue.