第三章 矩阵分析及其应用

3.1 矩阵级数与矩阵函数

1. 矩阵序列

•定义：

设有矩阵序列 $\left\{A^{(k)}\right\}$，其中 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$，且当 $k\to\infty$ 时 $a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$，则称 $\left\{A^{(k)}\right\}$ 收敛，并把 $A=\left(a_{ij}\right)$ 叫做 $\left\{A^{(k)}\right\}$ 的极限，或称 $\left\{A^{(k)}\right\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}=A \text{或} A^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to} A$$

不收敛的级数则称为发散的，其中又分为有界和无界的情况.

•收敛矩阵序列性质：

设 $A^{(k)}$，$B^{(k)}$ 分别收敛于 A,B 则

(1) $\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to}\alpha A+\beta B$

(2) $A^{(k)}B^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to}AB$

(3) $(A^{(k)})^{-1}\underset{k\to\infty}{\to}A^{-1}$，若 $(A^{(k)})^{-1}$，A^{-1} 存在

(4) $PA^{(k)}Q\underset{k\to\infty}{\to}PAQ$

•收敛矩阵：

设 A 为方阵，且当 $k\to\infty$ 时 $A^{k}\to 0$，则称 A 为收敛矩阵.

•定理：

方阵 A 为收敛矩阵的充要条件是 A 的所有特征值的模值均小于 1

2. 矩阵级数

•定义：

矩阵序列$\{A^{(k)}\}$的无穷和$A^{(0)}+A^{(1)}+\ldots+A^{(k)}+\ldots$称为矩阵级数，记为$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$. 记$S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}A^{(k)}$，称其为矩阵级数的部分和，若$\{S^{(N)}\}$收敛，且有极限 S，即有：

$$\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$$

则称该矩阵级数收敛，且有和 S，记为：

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$$

不收敛的矩阵级数称为是发散的。

•绝对收敛矩阵的性质：

(1) 绝对收敛级数一定收敛，且任意调换它的项所得的级数仍收敛，并具有相同的和.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty}PA^{(k)}Q$ 也绝对收敛且等于 $P\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}Q$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$，$\sum_{k=1}^{\infty}B^{(k)}$ 均绝对收敛，且和分别为 S_1,S_2 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A^{(i)}B^{(k+1-i)}\right)=S_1S_2$$

3. 方阵的幂级数

A 为方阵，$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots$，称为 A 的 Neumann 级数。$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$称为 A 的幂级数。

•**定理：** Neumann 级数收敛的充要条件是 A 为收敛矩阵，且在收敛时其和为$(I-A)^{-1}$.

•**收敛圆：** 设幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$的收敛半径为 r，若矩阵 A 的特征值全部落在幂级数 $f(z)$的收敛圆内，则矩阵幂级数 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$是绝对收敛的；反之，若 A 存在落在 $f(z)$的收敛圆外的特征值，则 $f(A)$是发散的。

4. 矩阵函数

•**定义：** 由幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ ($|z|<r$)，当 A 的全部特征值$\rho(A)<r$，则称 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$为矩阵函数。例如：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\qquad e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

$$cosz=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\qquad cosA=I-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n}$$

$$sinz=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\qquad sinA=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}$$

对任何方阵 A，上述三种矩阵函数均绝对收敛，分别称其为矩阵指数函数、矩阵余弦函数、矩阵正弦函数。

•**性质：**

$$e^{jA}=\cos A+j\sin A$$

$$\cos A=\frac{1}{2}(e^{jA}+e^{-jA})$$

$$\sin A=\frac{1}{2j}(e^{jA}-e^{-jA})$$

$$\cos(-A)=\cos A$$

$$\sin(-A)=-\sin A$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(A\pm B)&=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B\\ \sin(A\pm B)&=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B\end{aligned}\right\}\leftarrow AB=BA$$

但是一般来说，e^Ae^B, e^Be^A, e^{A+B}三者互不相等；

•**定理：**

若 $AB=BA$，则$e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$.

推论 1：$e^Ae^{-A}=e^{-A}e^A=I$，$(e^A)^{-1}=e^{-A}$，e^A总存在逆矩阵。

推论 2：设 m 为整数，则$(e^A)^m=e^{mA}$

$(e^A)^T=e^{A^T}$，$(e^{jA})^H=e^{(jA)^H}$

4. Hamilton-Cayley 定理

n 阶矩阵 A 是其特征多项式的零点，即令

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

$$\text{则}\varphi(A)=A^n+c_1A^{n-1}+\cdots+c_{n-1}A+c_nI=0$$

3.2 矩阵函数的求法

1. 数项级数求和法

例 1：

设 $A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$. 由于 $\varphi(A)=O$，所以

$A^4=\pi^2A^2,\ A^5=\pi^2A^3,\ A^7=\pi^4A^3,\ \cdots$. 于是有

$$\begin{aligned}\sin A &= A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\frac{1}{7!}A^7+\frac{1}{9!}A^9-\cdots=\\ &A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}\pi^2A^3-\frac{1}{7!}\pi^4A^3+\frac{1}{9!}\pi^6A^3-\cdots=\\ &A+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\pi^2-\frac{1}{7!}\pi^4+\frac{1}{9!}\pi^6-\cdots\right)A^3=\\ &A+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}A^3=A-\pi^{-2}A^3=\\ &\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 对角形法

例 2：

设 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求 e^A，$e^{tA}(t\in R)$ 及 $\cos A$

解： $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

第一步：求 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ 得出所有特征值

故 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

对 $\lambda_1=-2$： $(-2I-A)=\begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{pmatrix}$，故 $\xi_1=(1,-1,-1)^T$

第二步：用特征值对应的特征向量构成 P

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$： $(I-A)=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}$，故 $\xi_2=(2,-1,0)^T$

$\xi_3=(0,0,1)^T$

注：此处 ξ_i 的选择不同则 P 的选择不同，但最后 $f(A)$ 的结果不会改变

构造矩阵 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

则有：

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},\quad A=P\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}P^{-1}$$

故

$$e^A=P\begin{bmatrix}e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2e-e^{-2} & 2e-2e^{-2} & 0\\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-e & 0\\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-2e & e\end{bmatrix}$$

第三步： $f(A)=e^A$

$f(\lambda)=e^{\lambda}$

故：

$$f(A)=P\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{-2t} & & \\ & e^t & \\ & & e^t\end{bmatrix}P^{-1}=\text{省略}$$

$$\cos A=P\begin{bmatrix}\cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1\end{bmatrix}P^{-1}=\text{省略}$$

3. Jordan 标准形法

设 A 的 Jordan 标准形为 J，则有非奇异矩阵 P 使得：$P^{-1}AP = J$

其中，

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix} \quad J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

对于函数 $f(z)$，若 $f(\lambda_i)$，$f'(\lambda_i)$，$f''(\lambda_i)$,…,$f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$均有意义，则称矩阵函数 $f(A)$由意义，且有：

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f(J_1) & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中，$f(J_i)$=
$$\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

•步骤：

（1）求出 A 的 Jordan 标准形 J 与变换矩阵 P

（2）对于 J 中的各 Jordan 块J_i，求出 $f(J_i)$

（3）由 $f(J_i)$合成 $f(J)$

（4）$f(A) = Pf(J)P^{-1}$

例 3：

对例 1 使用 Jordan 标准形法。

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}，求 \sin A$$

解：可以看出 A 是一个 Jordan 标准形

故 $\underset{\lambda_1=\pi}{J_1 = \pi}$，$\underset{\lambda_2=-\pi}{J_2 = -\pi}$，$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\lambda_3=0}$

由于 A 已经是 Jordan 标准形，故选 $P = I$

计算：

$$f(J_1) = \sin \overset{(\lambda_1)}{J_1} = \sin\pi = 0$$

$$f(J_2) = \sin \overset{(\lambda_2)}{J_2} = \sin(-\pi) = 0$$

$$f(J_3) = \begin{bmatrix} f(\lambda_3) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_3) \\ 0 & f(\lambda_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 0 & \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $$f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & f(J_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = I\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 4：

设 $f(z)=\frac{1}{z}$，$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，求$f(A)$

解：显然A是一个Jordan块，其阶数为4，$\lambda=2$，$P=I$

计算：$f(2)=\frac{1}{2}$

$f'(2)=-\frac{1}{4}$

$f''(2)=\frac{1}{4}$

$f'''(2)=-\frac{3}{8}$

故 $f(J)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\ &\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\ & &\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\ & & &\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

则 $f(A)=\frac{1}{A}=If(J)I^{-1}$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\ &\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\ & &\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\ & & &\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

本题推广至一般的矩阵函数f(A)，并无差异

4. 零化多项式法

•步骤：

（1）求出最小多项式$\varphi_0(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$，$\sum_{i=1}^{r}m_i=m$

（2）形式上写出待定多项式 $g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$

（3）求解关于c_0~c_{m-1}的线性方程组：$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i)$，$k=1,2,\ldots,m_i$；$i=1,2,\ldots,r$.

（4）求出 $g(A)$，即可得 $f(A)=g(A)$

例 5：

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &1&2&3\\ & &1&2\\ & & &1\end{pmatrix}$，求$\sqrt{A}$　$\begin{pmatrix}f(A)=\sqrt{A}\\ f(\lambda)=\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}$

$g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$
$g'(\lambda)=c_1+2c_2\lambda+3c_3\lambda^2$
$g''(\lambda)=2c_2+6c_3\lambda$
$g'''(\lambda)=6c_3$

$f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$
$f'(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$
$f''(\lambda)=-\frac{1}{4}\lambda^{-\frac{3}{2}}$
$f'''(\lambda)=\frac{3}{8}\lambda^{-\frac{5}{2}}$

解：(1) $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\varphi_0(\lambda)=d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$

故 $\lambda_1=1$，$m_1=m=n=4$

(2) $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$

(3) 解方程组：

$$\begin{aligned}g(1)=f(1)&=c_0+c_1+c_2+c_3=1\\ g'(1)=f'(1)&=c_1+2c_2+3c_3=\frac{1}{2}\\ g''(1)=f''(1)&=2c_2+6c_3=-\frac{1}{4}\\ g'''(1)=f'''(1)&=6c_3=\frac{3}{8}\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}c_0=\frac{5}{16}\\ c_1=\frac{15}{16}\\ c_2=-\frac{15}{16}\\ c_3=\frac{1}{16}\end{cases}$$

(4) $g(A)=\frac{1}{16}(5I+15A-5A^2+A^3)=f(A)=\frac{1}{16}\left\{\begin{bmatrix}5&&&\\&5&&\\&&5&\\&&&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15&30&45&60\\&15&30&45\\&&15&30\\&&&15\end{bmatrix}+\cdots\right\}$

$=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$

•总结：

λ为单根高次，用零化多项式法；

λ为多根低次，用对角形法；

λ有迭代关系，用数项级数求和法；

A 为 Jordan 标准形，用 Jordan 标准形法。

3.3 矩阵微分方程

1. 矩阵的微分与积分

•矩阵导数的定义：

若矩阵$A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{ij}(t)$是变量$t$的可微函数，则称$A(t)$可微，其导数定义为：

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=(\frac{da_{ij}}{dt})_{m\times n}$$

由此出发，函数可以定义高阶导数，类似地，又可以定义偏导数。

•性质：

（1）$\frac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt}$

（2）$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$

（3）$\frac{d}{dt}[a(t)A(t)]=\frac{da}{dt}A+a\frac{dA}{dt}$

（4）$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)=Ae^{tA}=e^{tA}A$　　$\frac{d}{dt}\left(\cos\left(tA\right)\right)=-A\sin\left(tA\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\sin\left(tA\right)\right)=A\cos\left(tA\right)$

(A 与 t 无关)

•矩阵积分的定义：

若矩阵$A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$的每个元素$a_{ij}(t)$都是区间$[t_0,t_1]$上的可积函数，则称$A(t)$在区间$[t_0,t_1]$上可积，并定义$A(t)$在$[t_0,t_1]$上的积分为：

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

•性质：

（1）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$

（2）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)B]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)B,\int_{t_0}^{t_1}[AB(t)]dt=A\left(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt\right)$

（3）$\frac{d}{dt}\int_a^t A(t')dt'=A(t),\int_a^b A'(t)dt=A(b)-A(a)$

2. 一阶线性齐次常系数常微分方程

设有一阶线性齐次常系数常微分方程组为：

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)\end{cases}$$

式中 t 是自变量，$x_i = x_i(t)$ 是 t 的一元函数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是常系数。

令

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则原方程组变成如下矩阵方程:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

其解为:

$$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}c$$

更一般的:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$$

3. 一阶线性非齐次常系数常微分方程

设有一阶线性非齐次常系数常微分方程组为:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

令

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$$
$$b(t) = [b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^T$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

方程组化为矩阵方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b$$

采用常数变易法求解之；齐次方程的解为 $e^{tA}c$，可设非齐次方程的解为 $e^{tA}c(t)$，

代入方程，得：

$$x(t) = e^{tA}\left[x(0) + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds\right]$$

更一般的:

$$x(t) = e^{tA}\left[e^{-t_0A}x(0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds\right]$$

例题：

⑬ 微分方程组

(1) $\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = 3\xi_1 + 8\xi_3 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = 3\xi_1 - \xi_2 + 6\xi_3 \\ \dfrac{d\xi_3}{dt} = -2\xi_1 - 5\xi_3 \end{cases}$ 满足 $\xi_1(0)=1$, $\xi_2(0)=1$, $\xi_3(0)=1$ 的解

(2) $\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = -2\xi_1 + \xi_2 + 1 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = -4\xi_1 + 2\xi_2 + 2 \\ \dfrac{d\xi_3}{dt} = \xi_1 + \xi_3 + e^t - 1 \end{cases}$ 满足 $\xi_1(0)=1$, $\xi_2(0)=1$, $\xi_3(0)=-1$ 的解

⑬ (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda+1)^3$

$d(\lambda) = \lambda + 1$

故 $m(\lambda) = \dfrac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)} = (\lambda+1)^2$

记 $f(\lambda) = e^{t\lambda}$

设 $f(\lambda) = g(\lambda)m(\lambda) + c_0 + c_1\lambda$

$$\begin{cases} f(-1) = e^{-t} = c_0 - c_1 \\ f'(-1) = te^{-t} = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = (1+t)e^{-t} \\ c_1 = te^{-t} \end{cases}$$

故 $e^{tA} = (1+t)e^{-t}I + te^{-t}A$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 1+4t & 0 & 8t \\ 3t & 1 & 6t \\ -2t & 0 & 1-4t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+12t \\ 1+9t \\ 1-6t \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}$ $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - \lambda^2$

故有 $\varphi(A) = A^3 - A^2 = 0$

即 $A^3 = A^2$

从而 $A^4 = A^3 = A^2$

$A^5 = A^2$

$\vdots$

$$e^{At} = I + (At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots$$

$$= I + At + A^2\left(\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots\right)$$

$$= I + At + A^2(e^t - 1 - t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ 1+2t-e^t & e^t-t-1 & e^t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-As}b(s)\,ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 1+2s & -s & 0 \\ 4s & 1-2s & 0 \\ 1-2s-e^{-s} & e^{-s}+s-1 & e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ e^s-1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

故 $x(t) = e^{At}\left[x(0) + \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$$= e^{At}\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ (t-1)e^t \end{pmatrix}$$