第一章　线性空间与线性变换

1.1 线性空间基本概念

1.线性空间的定义

设 V 是一个非空集合，其元素用 x, y, z 等表示；K 是一个数域，其元素用 k, l, m 等表示。如果 V 满足如下 8 条性质，分两类（加法+数乘）：

(a)在 V 中定义一个“加法”运算，即当 x, y ∈V 时，有唯一的和 x+y ∈V（封闭性），且加法运算满足下列性质：

（1）结合律: x+(y+z)=(x+y)+z；

（2）交换律: x+y=y+x ；

（3）零元律：存在零元素 0 使 x+ 0=x ；

（4）负元律：对于任一元素 x∈V，存在一元素 y∈V，使 x+y=0，则称 y 为 x 的负元素，记为(-x)，则有 x+(-x)=0。

(b) 在 V 中定义一个“数乘”运算，即当 x∈V，k∈K 时，有唯一的 kx∈V（封闭性），且数乘运算满足下列性质：

（5）数因子分配律: k(x+y)=kx+ky ；

（6）分配律: (k+l)x=kx+lx ；

（7）结合律: k(lx)=(kl)x ；

（8）恒等律: 1x=x ；

则称 V 为数域 K 上的线性空间。

例 1.设R^+为所有正实数组成的数集，其加法与数乘运算分别定义为

$$m \boxplus n = mn, \quad k \circ m = m^k$$

证明R^+是 R 上的线性空间。

证　设 $m, n \in \mathbf{R}^+$，$k \in \mathbf{R}$，则有

$$m \boxplus n = mn \in \mathbf{R}^+, \quad k \circ m = m^k \in \mathbf{R}^+$$

即 $\mathbf{R}^+$ 对所定义的加法运算“$\boxplus$”与数乘运算“$\circ$”是封闭的，且有

(1) $(m \boxplus n) \boxplus p = (mn) \boxplus p = mnp = m \boxplus (np) = m \boxplus (n \boxplus p)$

(2) $m \boxplus n = mn = nm = n \boxplus m$

(3) 1 是零元素，因为 $m \boxplus 1 = m \times 1 = m$

(4) m 的负元素是$\frac{1}{m}$，因为 $m \boxplus \frac{1}{m} = m \times \frac{1}{m} = 1$

(5) $k \circ (m \boxplus n) = k \circ (mn) = (mn)^k = m^k n^k = (k \circ m) \boxplus (k \circ n)$

(6) $(k+l) \circ m = m^{k+l} = m^k m^l = (k \circ m) \boxplus (l \circ m)$

(7) $k \circ (l \circ m) = k \circ m^l = (m^l)^k = m^{lk} = m^{kl} = (kl) \circ m$

(8) $1 \circ m = m^1 = m$

成立，故 $\mathbf{R}^+$ 是实线性空间。

2.线性相关性

•**线性组合：**$\forall x_1, x_2, \ldots, x_m \in V, c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$，使 $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$，则称 x 为向量组$x_1, x_2, \ldots, x_m$的线性组合或称 x 可有由$x_1, x_2, \ldots, x_m$线性表示。

•**线性相关性**：若$c_1, c_2, \ldots, c_m$不全为 0，且使$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m = 0$，则称向量组$x_1, x_2, \ldots, x_m$线性相关，否则称其线性无关。

3.线性空间的维数

线性空间 V 中最大线性无关元素组所含元素个数称为 V 的维数，记为 dimV。

4.线性空间的基与坐标

•基的定义：设 V 是数域 K 上的线性空间，$x_1,x_2,\dots,x_r$是属于 V 的 r 个任意向量，如果它满足

（1）$x_1,x_2,\dots,x_r$线性无关

（2）V 中任一向量均可由$x_1,x_2,\dots,x_r$线性表示

则称$x_1,x_2,\dots,x_r$为 V 的一个基，并称$x_i(i=1,2,\dots,r)$为该基的基向量。

说明：基正是 V 中最大线性无关元素组；V 的维数正是基中所含元素的个数；基是不唯一的，但不同的基所含元素个数相等。

•坐标的定义：称线性空间V^n的一个基$x_1,x_2,\dots,x_n$为V^n的一个坐标系，设向量 $x\in V^n$，它在该基下的线性表示为：$x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\dots+\xi_nx_n$，则称$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$为 x 在该坐标系中的坐标，记为$(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T$

5.基变换与坐标变换

在线性空间V^n中，基不是唯一的。

设$x_1,x_2,\dots,x_n$是V^n的旧基，$y_1,y_2,\dots,y_n$为其新基，则有（$y_1,y_2,\dots,y_n$）=（$x_1,x_2,\dots,x_n$）C，称该式为基变换公式，C 称为由旧基转变为新基的过渡矩阵。

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

现在讨论向量的坐标变换问题，设 $x\in V^n$在上述旧新基下的坐标依次是$(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T$与$(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)^T$，即有 $x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\dots+\xi_nx_n=\eta_1y_1+\eta_2y_2+\dots+\eta_ny_n$，则有：

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}=C\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

旧基坐标=C*新基坐标

（C=旧基坐标*新基坐标$^{-1}$）

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}=C^{-1}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

新基坐标=C^{-1}*旧基坐标

•例题：

已知$R^{2\times2}$的两个基：$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$B_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}1&1\\ \text{[redacted]}&0\end{bmatrix}$，$B_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

求由基A改变为基B的过渡矩阵.

解:

选取 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

显然 $(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$

$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

设由基A到基B的过渡矩阵为C，即

$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(A_1,A_2,A_3,A_4)C$

代入上式有：$(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&0&\text{[redacted]}\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&-1&0&1\end{pmatrix}C$

故 $C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\ \text{[redacted]}&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

6.线性子空间

•定义：设V_1是数域 K 上的线性空间 V 的一个非空子集合，且对 V 已有的线性运算满足以下条件：

（1）如果 x、y ∈ V_1，则 x+y ∈V_1；

（2）如果 x ∈ V_1，k ∈ K，则 kx ∈ V_1

则称V_1是 V 的一个线性子空间或子空间。

•例题：

② (1) 给定$R^{2\times2}=\{A=(a_{ij})_{2\times2}\mid a_{ij}\in R\}$的子集

$V=\{A=(a_{ij})_{2\times2}\mid a_{ij}\in R$ 且 $a_{11}+a_{22}=0\}$

证明V是$R^{2\times2}$的子空间；求V的维数和一个基

② 解析：V_1满足(i)若$x,y\in V_1$，则$x+y\in V_1$，则称V_1为V的线性子空间

(ii)若$x\in V_1$，$k\in K$，则$kx\in V_1$

(1) 解：设 $A=(a_{ij})_{2\times2}\in V$，$B=(b_{ij})_{2\times2}\in V$

由题知：$a_{11}+a_{22}=0$　　$b_{11}+b_{22}=0$

因为：$A+B=(a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$

$a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}=(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})=0$ 证明条件(i)

$kA=(ka_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}\\ka_{21}&ka_{22}\end{pmatrix}$

$ka_{11}+ka_{22}=k(a_{11}+a_{22})=0$ 证明条件(ii)

故有$\begin{cases}A+B\in V\\kA\in V\end{cases}$，所以V为$R^{2\times2}$的子空间

在V中满足$a_{11}+a_{22}=0$的矩阵有：

$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$　$A_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$　$A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

显然A_1,A_2,A_3线性无关，故其可作为V的一组基

且对任何 $A=(a_{ij})_{2\times2}\in V$，有

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&-a_{11}\end{pmatrix}=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{21}A_3$

补充：$(a_{11},a_{12},a_{21})^T$称为A在基A_1,A_2,A_3下的坐标

故 $\dim V=3$

7.子空间的交与和

•**定义：**设V_1、V_2是数域 K 上的线性空间 V 的两个子空间，则：

$$\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1, \mathbf{x} \in \mathbf{V}_2\}$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_2\}$$

分别称为V_1和V_2的交与和。

•**定理：**若V_1和V_2是线性空间 V 的两个子空间，则 $V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$均为 V 的子空间。

•**维数公式：**设V_1、V_2是数域 K 上的线性空间 V 的两个子空间，则有：

$$\dim(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)+\dim(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2)=\dim\mathbf{V}_1+\dim\mathbf{V}_2$$

1.2 线性变换及其矩阵

1.线性变换及其运算

•**定义：**设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使得对于 V 中的任意元素 x 均存在唯一的 y ∈V 与之对应，则称 T 为 V 的一个变换或算子，记为：

$$Tx = y$$

称 y 为 x 在变换 T 下的象，x 为 y 的原象。

若变化 T 还满足 T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty) ，x, y∈ V；k, l ∈K，称 T 为线性变换。

•**性质：**线性变换 T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)

（1）线性变换把零元素仍变为零元素：T(0)=T(0x)=0(Tx)=0

（2）负元素的象为原来元素的象的负元素：T(-x)=(-1)(Tx)=-(Tx)

（3）线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组

•**运算：**

（1）恒等变换T_e：$\forall x \in V, T_e x = x$

（2）零变换T_0：$\forall x \in V, T_0 x = 0$

（3）相等的变换：T_1，T_2 是 V 的两个线性变换，$\forall x \in V$ 均有$T_1 x = T_2 x$，则称T_1=T_2

（4）线性变换的和：$\forall x \in V, (T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$

（5）线性变换的数乘：$\forall x \in V, (kT)x = k(Tx)$

负变换：$(-T)x = -(Tx)$

（6）线性变换的乘积：$(T_1 T_2)x = T_1(T_2 x)$

（7）逆变换：$\forall x \in V$，存在线性变换 S 使得$(ST)x = (TS)x = x$，则称 S 为 T 的逆变换，记为：$S = T^{-1}$。且有$T^{-1}T = TT^{-1} = T_e$

（8）线性变换的多项式：

$$\mathbf{T}^n = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdots \mathbf{T}}_{n个} \quad 并规定 \quad \mathbf{T}^0 = \mathbf{T}_e$$

$$T^{m+n} = T^m T^n, \quad (T^m)^n = T^{mn}, \quad T^{-n} = (T^{-1})^n$$

2.线性变换的矩阵表示

设 T 是线性空间V^n的线性变换，$x \in V^n$，且$x_1, x_2, \ldots, x_n$是V^n的一个基，则有：

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

$$Tx = a_1(Tx_1) + a_2(Tx_2) + \ldots + a_n(Tx_n)$$

即 $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)A$，其中 A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

•**定义：** 把 A 称为 T 在基$x_1,x_2,\ldots,x_n$下的矩阵，简称 A 为 T 的矩阵。

•**定理：** 设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是V^n的一个基，T_1，T_2在该基下的矩阵分别为 A，B。则有：

（1）$(T_1+T_2)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)(A+B)$

（2）$(kT_1)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)(kA)$

（3）$(T_1T_2)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)AB$

（4）${T_1}^{-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,A^{-1}$

推论 1：设 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_mt^m$为 t 的 m 次多项式，T 是线性空间$V^n$的一个线性变换，且在$V^n$的基下的矩阵为 A，则 $f(T)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)f(A)$。其中：

$$f(T)=a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_mT^m$$
$$f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2\ldots++a_mA^m$$

称 $f(A)$为方阵 A 的多项式。

推论 2：设线性变换 T 在V^n的基$x_1,x_2,\ldots,x_n$下的矩阵是 A，向量 x 在该基下的坐标是$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T$，则 T$x$ 在该基下的坐标$(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)^T$可由下式计算：

$$(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)^T=A(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T$$

•**例题：**

(2) 已知 $R^{2\times 2}$ 的一个基为：$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

线性变换 T 满足：$T(A_1)=B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　$T(A_2)=B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，求 T 在基 A_1,A_2,A_3,A_4 下的矩阵

$T(A_3)=B_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$　$T(A_4)=B_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

解：

设 T 在基 A_1,A_2,A_3,A_4 下的矩阵为 C，则有

$$T(A_1,A_2,A_3,A_4)=(A_1,A_2,A_3,A_4)C$$
$$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(A_1,A_2,A_3,A_4)C$$

选取 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

代入上式有：$(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}C$

故 $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&0&0\\-1&1&0&-2\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

3. 线性变换及矩阵的值域与核

•**定义：**

设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，称：

$R(T)=\{Tx\mid x\in V^n\}$为 T 的值域

$N(T)=\{x\mid x\in V^n, Tx=0\}$称为 T 的核

R(T) 和 N(T) 均为 V^n 的子空间。

设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，称：

$R(A)=\{Ax\mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n\}$为矩阵 A 的值域

$N(A)=\{x\mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n, Ax=0\}$为 A 的核

$\dim R(T)$、$\dim N(T)$ 称为 T 的秩和零度；$\dim R(A)$、$\dim N(A)$ 称为 A 的秩和零度。

•定理：

（1）$\dim R(T)+\dim N(T)=\dim V^n$

（2）$\dim R(A)=\operatorname{rank}(A)$

（3）$\dim R(A)+\dim N(A)=n$， n 为 A 的列数。

若 A 是线性变换 T 的矩阵，则

$\dim R(T)=\dim R(A)=\operatorname{rank}(A)$

$\dim N(T)=\dim N(A)=n-\operatorname{rank}(A)$

步骤：

$R(T)$，$N(T)$ 的基和维数：　T 在某基下的矩阵为 A

维数：$\dim R(T)=\operatorname{rank}A$

$\dim N(T)=n-\operatorname{rank}A$

基：　对 A 进行初等行变换化为最简式

(1) 找出最简式中最大无关组，选取最大无关组位置对应于 A 的列向量 α_j

则 $R(T)$ 的基：$\boxed{y_i=(\text{某基})\cdot\alpha_j}$，为最大无关组包含个数

(2) 对最简式进行：$Ax=0$

最简式 $\cdot x=0$　解出 x（x 包含 β_i）

A 的秩为多少，x 包含列向量的个数就为多少

则 $N(T)$ 的基：$z_i=(\text{某基})\cdot\beta_i$

•例题：

④ 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为 V 的一组基，定义 $T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=$

$(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\varepsilon_4,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3-2\varepsilon_4)$

(1) 求线性变换 T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵

(2) 求 T 的值域 $R(T)$ 和零空间 $N(T)$ 的基和维数

(1) $T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A$

故 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1+2x_3+x_4=0$

$x_2+\frac{3}{2}x_3+2x_4=0$

令 $\begin{cases}x_3=1\\x_4=0\end{cases}$ 得 $x=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

令 $\begin{cases}x_3=0\\x_4=1\end{cases}$ 得 $x=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) 先求零空间：　对 $Ax=0$ 有

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得它的一个基础解系：

$(-2,-\frac{3}{2},1,0)^T,(-1,-2,0,1)^T$

则 $N(T)$ 的一个基为：

$z_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}=-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3$

$z_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$

因为 $\operatorname{rank}A=2$，故 $\dim N(T)=n-\operatorname{rank}A=4-2=2$

再求值域：　由 A 可经初等行变换为 $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 知

A 的前 2 列的列向量为一个最大无关组（线性无关）

故 $R(T)$ 的一个基为：

$y_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4$

$y_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4$

$\dim R(T)=\operatorname{rank}A=2$

4.相似矩阵

设线性变换 T 对于V^n的两个基$x_1,x_2,\ldots,x_n$和$y_1,y_2,\ldots,y_n$的矩阵分别是 A 和 B，并且

$$(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)C$$

那么有：$B=C^{-1}AC$，即 A 和 B 为相似矩阵，记 A~B。

按此定义，线性变换在不同基下的矩阵是相似的；反之，若两个矩阵相似，那么它们可以看成同一个线性变换在两个不同基下的矩阵。

5.特征值与特征向量

•定义：对 m 阶方阵 A，若存在数λ，及非零向量 x（列向量），使得 $Ax=\lambda x$，则称λ为 A 的特征值，x 为 A 的属于特征值λ的特征向量。

说明：特征向量不唯一；特征向量非零；A 的特征矩阵$\lambda I-A$ 的行列式 $\det(\lambda I-A)$称为矩阵 A 的特征多项式。

6.对角矩阵

•定理 1：设 T 为V^n的线性变换，T 在某一基下的矩阵 A 为对角矩阵的充要条件是 T 有 n 个线性无关的特征向量。

•定理 2：n 阶矩阵 A 相似于对角矩阵的充要条件是：A 有 n 个线性无关的特征向量。

[例 1] $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，求其特征值和特征向量。

[解] $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=0$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1\qquad\lambda_3=5$$

属于特征值$\lambda=-1$的特征向量 $(-I-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=0\qquad\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\qquad\begin{cases}\xi_1=\xi_1\\\xi_2=\xi_2\\\xi_3=-\xi_1-\xi_2\end{cases}$$

可取基础解系为 $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

属于$\lambda=5$的特征向量 $(5I-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=0\qquad\xi_1=\xi_2=\xi_3$$

可取基础解系为 $x_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

例 2.求与例 1 中的 A 相似的对角矩阵。

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ x_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

令

$$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,-1,5)$$

•矩阵的迹与行列式

设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$为矩阵 A 的特征值，则有：

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$=trA(矩阵的迹)

（2）$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=|A|$=detA

•定理：

（1）设A、B 分别为 $m\times n$和$n\times m$ 阶矩阵，则

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

（2）sylvster定理：设A、B 分别为 $m\times n$和$n\times m$ 阶矩阵，则

$$\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^{m-n}\det(\lambda I_n-BA)$$

即：AB与BA的特征值只差零特征值的个数，非零特征值相同。

7.三角矩阵

•**定义：**任意 n 阶矩阵与三角矩阵相似

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，它的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

对矩阵的阶数 n 用归纳法来证明之．

当 $n=1$ 时，定理显然成立．假定对 $n-1$ 阶矩阵定理成立，为了证明定理对 n 阶矩阵也成立，设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 n 个线性无关的列向量（不一定全是特征向量），其中 $\boldsymbol{x}_1$ 是属于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$．记

$$\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n)$$

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{C}^n$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$ 可由 $\mathbf{C}^n$ 的基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 唯一地线性表示，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=b_{1i}\boldsymbol{x}_1+b_{2i}\boldsymbol{x}_2+\cdots+b_{ni}\boldsymbol{x}_n\quad(i=2, 3, \cdots, n)$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n)=$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\left[\begin{array}{c:ccc}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

根据定理 1.14，可设 $n-1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征多项式为

$$\varphi_1(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)=(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

再由归纳法假定，有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)=\boldsymbol{P}_2^{-1}(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{P}_2=$$

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\left[\begin{array}{c:ccc}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & *\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

证毕

•例题：

(1) 求与矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&5&1\\-3&2&5\end{bmatrix}$ 相似的三角矩阵.

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\2&\lambda-5&-1\\3&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)^3$

对 $\lambda_1=4$，其特征向量为 $(1,1,1)^T$

取 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}4&2&1\\0&4&0\\0&1&4\end{bmatrix}$

对 $A_1=\begin{bmatrix}4&0\\1&4\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2$

故 $\lambda_2=4$，其特征向量为 $(0,1)^T$

取 $Q=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

有 $Q^{-1}A_1Q=\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$

令 $P_2=\begin{bmatrix}1&0^T\\0&Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

则 $P=P_1P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

有 $P^{-1}AP=P_2^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_2=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&4&1\\0&0&4\end{bmatrix}$

(2) 把矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 变为上三角矩阵

解：$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

对 $\lambda_1=2$，其特征向量为 $(0,0,1)^T$

取 $P_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

有 $P_1^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&-4\\0&1&-1\end{bmatrix}$

对 $A_1=\begin{bmatrix}3&-4\\1&-1\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-3&4\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$

故 $\lambda_2=1$，其特征向量为 $(2,1)^T$

取 $Q=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$

有 $Q^{-1}A_1Q=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$

令 $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

则 $P=P_1P_2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

8.Jordan 标准形

任何 n 阶方阵 A 的特征多项式可以因式分解为：

$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$，　$m_1+m_2+\ldots+m_s=n$

A 可通过某一相似变换化为如下 Jordan 标准形：

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

$J_i(\lambda_i)$称为因式$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$对应的 Jordan 块。

例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} j & 1 \\ & j \end{bmatrix}$$

都是不同阶的 Jordan 块；而

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & -j & 1 & \\ & & & & -j & 1 \\ & & & & & -j \end{bmatrix}$$

是某个 6 阶矩阵的 Jordan 标准形．

•多项式矩阵（λ −矩阵）：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中，$a_{ii}(\lambda)$为λ的多项式。此外，任何 n 阶方阵 A 的特征矩阵$\lambda I-A$ 就是一个特殊的多项式矩阵。多项式矩阵 $A(\lambda)$可通过初等变换化为 Smith 标准形：

$$A(\lambda)\to\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中：

（1）多项式$d_i(\lambda)$称为首 1 多项式（首项系数为 1 的多项式），且$d_1(\lambda)|d_2(\lambda)$,$d_2(\lambda)|d_3(\lambda)$，即$d_i(\lambda)$是$d_{i+1}(\lambda)$的因式。由于$d_i(\lambda)$不随初等变换的改变而改变，故称其为不变因子。

（2）以$D_i(\lambda)$表示 $A(\lambda)$的一切 i 阶子式的最大公因式（常称为 $A(\lambda)$的 i 阶行列式因子），且有：

$$d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)},\quad D_0(\lambda)=1\ (i=1,2,\ldots,s)$$

（3）把 $A(\lambda)$的每个次数大于 0 的不变因子$d_i(\lambda)$分解为不可约因式的乘积，这些不可约因式称为 $A(\lambda)$的初等因子，初等因子的全体称为初等因子组。由初等因子可以构成 Jordan 块，继而由 Jordan 块构成 Jordan 标准形。

（4）初等变换：互换两行(列)；以非零常数乘以某行(列) ；将某行(列)乘以λ的多项式加到另一行(列)。

•Jordan 标准形的求法

（1）初等变换法：

步骤：

第一步：用初等变换化 A 的特征矩阵$\lambda I-A$ 为 Smith 标准形，求出 A 的不变因子$d_i(\lambda)$

第二步：把 $A(\lambda)$的每个次数大于 0 的不变因子$d_i(\lambda)$分解为不可约因式的乘积(即求初等因子)。

第三步：写出每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$对应的 Jordan 块$J_i$:

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$$

由这些 Jordan 块构成 Jordan 标准形：

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix}_{n\times n}$$

例题：

求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解：求 $\lambda I-A$ 的不变因子，

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]}\begin{bmatrix}-1 & \lambda+1 & 0\\ \lambda-3 & 4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]\times(\lambda+1)+[2]}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)\times(\lambda-3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)\times(\lambda-1)^2+(2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

故 $\lambda I-A$ 的不变因子：$d_1(\lambda)=1$

$d_2(\lambda)=1$

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

故 A 的初等因子为：$(\lambda-2)$，$(\lambda-1)^2$

$(\lambda-2)$ 对应的 Jordan 块：$J_1=(2)$

$(\lambda-1)^2$ 对应的 Jordan 块：$J_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}$

故 $J=\begin{pmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$

可以看出进行初等变换的过程有些复杂，尤其当 A 的阶数为 4 阶及以上时会难以处理，故选择行列式因子法。

（2）行列式因子法：

步骤：

第一步：求$\lambda I - A$的 n 个行列式因子$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots, D_n(\lambda)$

第二步：由$\begin{cases} d_1(\lambda) = D_1(\lambda) \\ d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}, \ k = 2,3,\ldots,n \end{cases}$，求 A 的不变因子

第三步：求 A 的初等因子和 Jordan 标准形

例题：

1、求$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$的Jordan标准形

解：$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}$

$\lambda I - A$的1阶行列式因子为$D_1(\lambda) = 1$（所有1阶子式的公因子为1）

$\lambda I - A$的2阶如下：

第一行、第二行 \ 第1列、第2列	1，2	1，3	2，3
$\frac{1}{2}$：	$(\lambda-1)(\lambda-2)$	$-2(\lambda-2)$	$-(\lambda-2)$
$\frac{1}{3}$：	$(\lambda-2)$	$(\lambda-2)(\lambda-4)$	$-(\lambda-2)$
$\frac{2}{3}$：	$-(\lambda-2)$	$2(\lambda-2)$	$(\lambda-1)(\lambda-2)$

（所有2阶子式的行列式的最大公因式为$(\lambda-2)$）

故 $D_2(\lambda) = \lambda - 2$

$D_3(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda-2)^3$

故A的不变因子：$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$

$d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda - 2$

$d_3(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda-2)^2$

故A的初等因子为$(\lambda-2)$，$(\lambda-2)^2$

所以 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$

说明：(1) 在做这种类型题时，随机组合A的次阶子式进行行列式计算（如A为3阶找2阶子式，A为4阶找3阶子式），只要发现没有带有λ的公因式，则$D_{n-1}(\lambda) = 1$

(2) $D_1(\lambda) | D_2(\lambda)$，$D_2(\lambda) | D_3(\lambda)$，…，$D_{n-1}(\lambda) | D_n(\lambda)$ 即高阶行列式因子需整除以低阶时，故只要高阶行列式因子为1，其阶数低于它的行列式因子全为1

(3) 这样大大节省计算时间！

2、求$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$的Jordan标准形

解：$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}$

选取第1，2，3行与第1，2，3列构成的三阶子式

其行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3$

选取第1，2，3行与第1，2，4列构成的三阶子式

其行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(2\lambda-5)$

可以看出这两个三阶公因式为1，故$D_3(\lambda) = 1$

从而 $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$

$D_4(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda-3)(\lambda-1)^3$

故A的不变因子：$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$

$d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = 1$

$d_3(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = 1$

$d_4(\lambda) = \frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)} = (\lambda-3)(\lambda-1)^3$

故A的初等因子为$(\lambda-3)$，$(\lambda-1)^3$

所以 $J = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

•**定理：** 任意 n 阶方阵 A，总存在 n 阶非奇异矩阵 P，使$P^{-1}AP=J.$
由于 P 的计算牵扯到很复杂的计算问题，故仅以例题介绍如何求解 P
例题：

求 $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$，可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=J$

解：先求出 A 的 Jordan 标准形 J，由前面例题知 $J=\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$

令 $P=(x_1,x_2,x_3)$，由 $P^{-1}AP=J$

$$AP=PJ$$

$$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$$

有 $\begin{cases}Ax_1=2x_1\\Ax_2=2x_2\\Ax_3=x_2+2x_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(2I-A)x_1=0\\(2I-A)x_2=0\\(2I-A)x_3=-x_2\end{cases}$

$2I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 故可得 $x_1=(0,1,1)^T$
$x_2=(1,0,1)^T$

若取 $x_2=(1,0,1)^T$，则 $(2I-A)x_3=-x_2$ 无解 $\left(\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-1&1&-1\\2&2&-2&0\\1&1&-1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-1&1&-1\\0&0&0&2\\0&0&0&-2\end{array}\right)\right.$ 秩不同，无解 $\Big)$

故取 $x_2=k_1(0,1,1)^T+k_2(1,0,1)^T=(k_2,k_1,k_1+k_2)^T$

则 $(2I-A,-x_2)=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-1&1&-k_2\\2&2&-2&-k_1\\1&1&-1&-k_1-k_2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&k_2\\0&0&0&-k_1-2k_2\\0&0&0&-k_1-2k_2\end{array}\right)$ 当 $-k_1-2k_2=0$ 有解
令 $k_2=1$
$k_1=-2$

$\therefore\ x_2=(1,-2,-1)^T,\quad x_3=(1,0,0)^T$

$\therefore\ P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

不用担心，这道题比较例外属于难题，一般的会直接求出三个不同的x_1,x_2,x_3，继而求出 P

1.3 内积空间

1.Euclid 空间

设 V是实线性空间（$k\in\mathbf{R}$），对于 V中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个实数与之对应，记为 (x,y)，若它满足

(1) 交换律 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$
(2) 分配律 $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$
(3) 齐次律 $(k\mathbf{x},\mathbf{y})=k(\mathbf{x},\mathbf{y})$
(4) 非负性 $(\mathbf{x},\mathbf{x})\geq 0$，当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时，$(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ 则称 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为x 与 y的内积，定义了内积的实线性空间称为 Euclid空间。

2.酉空间

设 V 是复线性空间（$k\in C$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个复数与之对应，记为 (x,y)，若它满足以下4项，则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的复线性空间称为酉空间。

(1) 交换律 $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(2) 分配律 $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

(3) 齐次律 $(kx,y)=k(x,y)$ or $(x,ky)=\bar{k}(x,y)$

(4) 非负性 $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$

3.正交性

若 $(x,y)=0$，则称 x 与 y 正交。

x 与 y 的夹角：$\cos\alpha=\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$，$\alpha$ 称为 x 与 y 的夹角。

4.施密特（Schimidt）正交化过程

例 1.33 试把向量组 $x_1=(1,1,0,0)$，$x_2=(1,0,1,0)$，$x_3=(-1,0,0,1)$，$x_4=(1,-1,-1,1)$ 正交单位化.

解 先把它们正交化. 使用式(1.3.18)，可得

$$y_1'=x_1=(1,1,0,0)$$

$$y_2'=x_2-\frac{(x_2,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)$$

$$y_3'=x_3-\frac{(x_3,y_2')}{(y_2',y_2')}y_2'-\frac{(x_3,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$$

$$y_4'=x_4-\frac{(x_4,y_3')}{(y_3',y_3')}y_3'-\frac{(x_4,y_2')}{(y_2',y_2')}y_2'-\frac{(x_4,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=(1,-1,-1,1)$$

再单位化，便有

$$y_1=\frac{1}{|y_1'|}y_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$$

$$y_2=\frac{1}{|y_2'|}y_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)$$

$$y_3=\frac{1}{|y_3'|}y_3'=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right)$$

$$y_4=\frac{1}{|y_4'|}y_4'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

一般考题只考三个向量。

补充：

零空间的定义： 记 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，称集合$\{x|Ax=0\}$为 A 的零空间，记为 $N(A)$，即：

$$N(A)=\{x|Ax=0\}$$

显然 $N(A)$是方程组 $Ax=0$ 的解空间。A 的零空间的维数称为 A 的零度，记为 $n(A)$，即：

$$n(A)=dimN(A)$$

例. $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，求A的秩及零度

解： A已经是行阶梯标准形，故 $rank\,A=2$

由 $Ax=0$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

解得：$x=(1,1,-1)^T$

对 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，即 $rank\,x=1$

故 $n(A)=1$

公式：

$rank\,A+n(A)=n$

$n(A)-n(A^T)=n-m$

$rank(A^T)+n(A^T)=m$

对 $A^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，故 $rank\,A^T=2$

$A^Tx=0$ 只有零解 （零向量的秩为0）

故 $n(A^T)=0$

最小多项式：

设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为$\varphi(\lambda)$（$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$），特征矩阵$\lambda I-A$ 的全体 n-1 阶子式的最大公因式为 $d(\lambda)$，则 A 的最小多项式为：

$$m(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}$$

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&-3&2\\-1&5&-2\\-1&3&0\end{bmatrix}$ 的最小多项式

解： $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3&3&-2\\1&\lambda-5&2\\1&-3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\0&\lambda-2&2-\lambda\\1&-3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4(\lambda-2)&-\lambda(\lambda-2)\\0&\lambda-2&2-\lambda\\1&-3&\lambda\end{vmatrix}$

$=4(\lambda-2)(2-\lambda)+\lambda(\lambda-2)^2$

$=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$

对 $\lambda I-A$ 的2阶子式

	1,2	1,3	2,3
$\frac{1}{2}$	$(\lambda-2)(\lambda-6)$	$2(\lambda-2)$	$2(\lambda-2)$
$\frac{1}{3}$	$-3(\lambda-2)$	$(\lambda-1)(\lambda-2)$	$3(\lambda-2)$
$\frac{2}{3}$	$-(\lambda-2)$	$\lambda-2$	$(\lambda-2)(\lambda-3)$

故 $d(\lambda)=\lambda-2$

$\therefore\ m(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda-4)$