第二章 范数理论及其应用

2.1 向量范数

1. 定义

设 v 为数域 k 上的向量空间，若对于 v 的任一向量 x，对应一个实值函数$\|x\|$，并满足以下三个条件：

（1）非负性：$\|x\| \geq 0$，等号当且仅当 x=0 时成立；

（2）齐次性：$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in k, x \in V$；

（3）三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in V$。

则称$\|x\|$为 V 中向量 x 的范数，简称为向量范数。

2. 几类常见的向量范数

（1）2-范数：$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$

(1) 对于 $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$，当 $x \neq 0$ 时，显然 $\|x\| > 0$；当 $x = 0$ 时，则 $\|x\| = \sqrt{0^2 + \cdots + 0^2} = 0$.

(2) 对任意的复数 a，因为

$$ax = (a\xi_1, a\xi_2, \cdots, a\xi_n)$$

所以

$$\|ax\| = \sqrt{|a\xi_1|^2 + |a\xi_2|^2 + \cdots + |a\xi_n|^2} = |a| \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} = |a| \, \|x\|$$

(3) 对于任意两个复向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，有

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

所以

$$\|x + y\| = \sqrt{|\xi_1 + \eta_1|^2 + |\xi_2 + \eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n + \eta_n|^2}$$

$$\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots |\xi_n|^2}$$

$$\|y\| = \sqrt{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\eta_n|^2}$$

借助于 C^n 中内积式(1.3.24)及其性质，可得

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2\mathrm{Re}(x, y) + (y, y)$$

因为

$$\mathrm{Re}(x, y) \leqslant |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)} = \|x\| \, \|y\|$$

所以

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

即 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

（2）1-范数：$||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$

证　当 $x\neq 0$ 时，显然 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i| > 0$；当 $x=0$ 时，由于 x 的每一分量都是零，故 $\|x\| = 0$.

又对于任意 $a\in\mathbf{C}$，有

$$\|ax\| = \sum_{i=1}^{n}|a\xi_i| = |a|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| = |a|\,\|x\|$$

对任意两个向量 $x, y\in\mathbf{C}^n$，有

$$\|x+y\| = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(|\xi_i|+|\eta_i|) = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i| + \sum_{i=1}^{n}|\eta_i| = \|x\| + \|y\|$$

于是由定义 2.1 知 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数.

（3）∞-范数：$||x||_\infty=\max_i|\xi_i|$

证　当 $x\neq 0$ 时，有 $\|x\| = \max_i|\xi_i| > 0$；当 $x=0$ 时，显然有 $\|x\| = 0$.

又对任意的 $a\in\mathbf{C}$，有

$$\|ax\| = \max_i|a\xi_i| = |a|\max_i|\xi_i| = |a|\,\|x\|$$

对 $\mathbf{C}^n$ 的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，有

$$\|x+y\| = \max_i|\xi_i+\eta_i| \leqslant \max_i|\xi_i| + \max_i|\eta_i| = \|x\| + \|y\|$$

因此，$\|x\| = \max_i|\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数.

（4）p-范数：$||x||_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

（5）**椭圆范数**：对任意一个 n 阶对称正定矩阵 A，列向量 $x\in R^n$，则函数：

$$||x||_A = (x^TAx)^{\frac{1}{2}}$$

为椭圆范数。

3. 向量范数的等价性

设 $\|\ \|_\alpha$、$\|\ \|_\beta$ 为 $\mathbf{C}^n$ 的两种向量范数，则必定存在正数 m、M，使得 $m\|x\|_\alpha\le\|x\|_\beta\le M\|x\|_\alpha$，（m、M 与 x 无关），它就称为向量范数的等价性。同时有：

$$\frac{1}{M}\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le\frac{1}{m}\|x\|_\beta$$

2.2 矩阵范数

1. 定义

设 $A \in C^{m\times n}$，定义一个实值函数$||A||$，它满足以下条件：

（1）非负性：当 $A \neq O$ 时，$||A|| > 0$；当 $A = O$ 时，$||A|| = 0$

（2）齐次性：$||\alpha A|| = |\alpha|||A||$（$\alpha \in C$）

（3）三角不等式：$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$（$B \in C^{m\times n}$）

满足前三条称$||A||$为广义矩阵范数。

（4）相容性：$||AB|| \leq ||A||||B||$（$B \in C^{n\times l}$）

全部满足称$||A||$为 A 的矩阵范数。

例题：

例 2.7 已知 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，试证明下面两个函数

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$$

都是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数．

证 对于函数 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 而言，它显然具有非负性与齐次性，现仅就三角不等式与相容性加以验证于下．

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_{m_1} &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \\ &\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = \\ &\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} + \|\boldsymbol{B}\|_{m_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\|_{m_1} &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i1}a_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}| \leqslant \\ &\sum_{i,j=1}^{n} (|a_{i1}||b_{1j}| + \cdots + |a_{in}||b_{nj}|) \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|) \times \\ &\sum_{j=1}^{n} (|b_{1j}| + \cdots + |b_{nj}|) = \\ &\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \sum_{j,i=1}^{n} |b_{ij}| = \|\boldsymbol{A}\|_{m_1} \|\boldsymbol{B}\|_{m_1}\end{aligned}$$

因此，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵范数．

同理可证，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵范数．

2. 矩阵范数与向量范数相容

对于$C^{m\times n}$上的矩阵范数$||\cdot||_M$和C^m与C^n上的同类向量范数$||\cdot||_V$，如果：

$$||Ax||_V \leq ||A||_M||x||_V \quad (\forall A \in C^{m\times n}, \forall x \in C^n)$$

则称矩阵范数$||\cdot||_M$与向量范数$||\cdot||_V$是相容的。

3. 几种常见的矩阵范数

（1）F-范数：

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,\ j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

证　显然，$\| A \|_F$ 具有非负性与齐次性．设 A 的第 j 列为 $a_j (j=1,2,\cdots,n)$，$B \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的第 j 列为 $b_j (j=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned}\| A+B \|_F^2 = & \| a_1+b_1 \|_2^2 + \cdots + \| a_n+b_n \|_2^2 \leqslant \\ & (\| a_1 \|_2 + \| b_1 \|_2)^2 + \\ & \cdots + (\| a_n \|_2 + \| b_n \|_2)^2 = \\ & (\| a_1 \|_2^2 + \cdots + \| a_n \|_2^2) + \\ & 2(\| a_1 \|_2 \| b_1 \|_2 + \cdots + \| a_n \|_2 \| b_n \|_2) + \\ & (\| b_1 \|_2^2 + \cdots + \| b_n \|_2^2)\end{aligned}$$

对上式第二项应用式(1.3.12)，可得

$$\begin{aligned}\| A+B \|_F^2 \leqslant & \| A \|_F^2 + 2\| A \|_F \| B \|_F + \| B \|_F^2 = \\ & (\| A \|_F + \| B \|_F)^2\end{aligned}$$

即三角不等式成立．

再设 $B=(b_{ij})_{n\times l} \in \mathbf{C}^{n\times l}$，则 $AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times l} \in \mathbf{C}^{m\times l}$，于是有

$$\begin{aligned}\| AB \|_F^2 = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right|^2 \leqslant \\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}|\right)^2\end{aligned}$$

对上式括号内的项应用式(1.3.12)，可得

$$\begin{aligned}\| AB \|_F^2 \leqslant & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right)\right] = \\ & \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right) = \\ & \| A \|_F^2 \| B \|_F^2\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

即 $\| A \|_F$ 是 A 的矩阵范数．

在式(2.2.4)中取 $B = x \in \mathbf{C}^{n\times 1}$，则有

$$\| Ax \|_2 = \| AB \|_F \leqslant \| A \|_F \| B \|_F = \| A \|_F \| x \|_2$$

即矩阵范数 $\| \cdot \|_F$ 与向量范数 $\| \cdot \|_2$ 相容．

(2) 从属范数:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0}\left(\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

(3)

定理 2.5　设 $A=(a_{ij})_{m\times n} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，则从属于向量 x 的三种范数 $\| x \|_1$，$\| x \|_2$，$\| x \|_\infty$ 的矩阵范数依次是：

(1) $\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$；　(2.2.7)

(2) $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_1}$，　λ_1 为 $A^{\mathrm{H}}A$ 的最大特征值；　(2.2.8)

(3) $\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$．　(2.2.9)

通常称 $\| A \|_1$，$\| A \|_2$ 及 $\| A \|_\infty$ 依次为列和范数，谱范数及行和范数．

例题：

$y_3 = 2x_1+x_2+x_3$

⑨ (1) 已知 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是 C^n 上的两个范数，k_1, k_2 为正常数
证明 $k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta$ 为 C^n 上的范数

(2) $A=(a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$
证明 $\|A\|_{m_1} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ 为 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数

⑩ (1) 求向量 $e=(1,1,\cdots,1)$ 的 l_1, l_2 和 l_∞ 范数
(2) 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -j & 2 & 3 \\ 1 & 0 & j \end{bmatrix}$ 的 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 及 $\|\cdot\|_\infty$

⑨ (1) 记 $\|x\| = k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta$

因为 $\|x\|_\alpha$，$\|x\|_\beta$ 为 C^n 上的范数，故其均满足非负性，齐次性与三角不等式

非负性：当 $x\neq 0$ 时，$k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta = \|x\| > 0$
当 $x=0$ 时，$\|x\|=0$

齐次性：
$$\begin{aligned}\|kx\| &= k_1\|kx\|_\alpha + k_2\|kx\|_\beta \\ &= |k|k_1\|x\|_\alpha + |k|k_2\|x\|_\beta \\ &= |k|(k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta) \\ &= |k|\,\|x\|\end{aligned}$$

三角不等式：
$$\begin{aligned}\|x+y\| &= k_1\|x+y\|_\alpha + k_2\|x+y\|_\beta \\ &\le k_1(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha) + k_2(\|x\|_\beta+\|y\|_\beta) \\ &= (k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta) + (k_1\|y\|_\alpha + k_2\|y\|_\beta) \\ &= \|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

故 $\|x\|$ 为 C^n 上的范数

(2) 非负性：当 $A\neq 0$ 时，$\|A\|_{m_1} = \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| > 0$
$A=0$ 时，$\|A\|_{m_1}=0$

齐次性：$\|\alpha A\|_{m_1} = \sum_{i,j=1}^{n}|\alpha a_{ij}| = |\alpha|\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| = |\alpha|\,\|A\|_{m_1}$

三角不等式：
$$\|A+B\|_{m_1} = \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \le \sum_{i,j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}| = \|A\|_{m_1} + \|B\|_{m_1}$$

相容性：
$$\begin{aligned}\|AB\|_{m_1} &= \sum_{i,j=1}^{n}|a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}| \\ &\le \sum_{i,j=1}^{n}(|a_{i1}||b_{1j}|+|a_{i2}||b_{2j}|+\cdots+|a_{in}||b_{nj}|) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(|a_{i1}|+\cdots+|a_{in}|) \times \sum_{j=1}^{n}(|b_{1j}|+\cdots+|b_{nj}|) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| \cdot \sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}| = \|A\|_{m_1}\|B\|_{m_1}\end{aligned}$$

故 $\|A\|_{m_1}$ 为 A 的矩阵范数

⑩ (1)
$$l_1 = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i| = n$$
$$l_2 = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$
$$l_\infty = \|x\|_\infty = \max_i|\xi_i| = 1$$

(2)
$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \max\{|j|+1,\ 2+0,\ 3+|j|\} = 4$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \max\{|-j|+2+3,\ 1+0+|j|\} = 6$$
$$A^HA = \begin{pmatrix} j & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -j & 2 & 3 \\ 1 & 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2j & 4j \\ -2j & 4 & 6 \\ -4j & 6 & 10 \end{pmatrix}$$
$$|\lambda I - A^HA| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2j & -4j \\ 2j & \lambda-4 & -6 \\ 4j & -6 & \lambda-10 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-16\lambda+12) = \lambda[\lambda-(8+2\sqrt{13})][\lambda-(8-2\sqrt{13})]$$

故 $\lambda_1 = 8+2\sqrt{13}$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8+2\sqrt{13}}$$

2.3 范数的应用

1. 矩阵的谱半径及其性质：

定义 2.5 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，称

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| \qquad (2.3.3)$$

为 $\mathbf{A}$ 的谱半径．

定理 2.9 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(A) \le ||A||$$

性质 1：设 $A \in C^{n\times n}$，则$\rho(A^k) = (\rho(A))^k$

性质 2：设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 的谱范数为：

$$||A||_2 = \rho^{\frac{1}{2}}(A^H A) = \rho^{\frac{1}{2}}(AA^H)$$

当 A 是 Hermite 矩阵时，则：

$$||A||_2 = \rho(A)$$

例题：

$A = \begin{bmatrix} 1-j & 3 \\ 2 & 1+j \end{bmatrix}$ 对 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ 的正确性

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix} (c \in R)$，讨论 c 为何值时，A 为收敛矩阵

解：$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1+j & -3 \\ -2 & \lambda-1-j \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda-1)^2 - 5$

故 $\lambda_1 = \sqrt{5}+1 \quad \lambda_2 = -\sqrt{5}+1$

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = \sqrt{5}+1$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|1-j|+2,\ 3+|1+j|\} = 3+\sqrt{2}$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|1-j|+3,\ 2+|1+j|\} = 3+\sqrt{2}$

$A^H A = \begin{pmatrix} 1+j & 2 \\ 3 & 1-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-j & 3 \\ 2 & 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5+5j \\ 5-5j & 11 \end{pmatrix}$

$|\lambda I - A^H A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -5-5j \\ -5+5j & \lambda-11 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-11) - 50 = \lambda^2 - 17\lambda + 16 = (\lambda-1)(\lambda-16)$

故 $\lambda_1 = 16$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = 4$

有 $\rho(A) < \|A\|_1$，$\rho(A) < \|A\|_\infty$，$\rho(A) < \|A\|_2$ 故正确

(1) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -c & -c \\ -c & \lambda & -c \\ -c & -c & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3c^2\lambda - 2c^3 = (\lambda - 2c)(\lambda + c)^2$

故 $\lambda_1 = 2c$，$\lambda_2 = -c$

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = 2|c|$

由A为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A) < 1$

故 $2|c| < 1$

$|c| < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$

2. 逼近和误差估计：

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的元素$a_{ij}$带有误差$\delta a_{ij}$，则准确矩阵应为 $A+\delta A$，其中$\delta A=(\delta a_{ij})$.

定理：设 $A\in C^{n\times n}$非奇异，$B\in C^{n\times n}$，且对$C^{n\times n}$上的某种矩阵范数$||\cdot||$，有$||A^{-1}B<1||$，则有以下结论：

（1）$A+B$ 非奇异

（2）记 $F=I-(I+A^{-1}B)^{-1}$，$||F||\le\frac{||A^{-1}B||}{1-||A^{-1}B||}$

（3）$\frac{||A^{-1}-(A+B)^{-1}||}{||A^{-1}||}\le\frac{||A^{-1}B||}{1-||A^{-1}B||}$

矩阵条件数： $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

由相容性可知： $\|A\|\|A^{-1}\|\ge\|AA^{-1}\|=\|I\|$

$\|x\|=\|Ix\|\le\|I\|\|x\|\Rightarrow\|I\|\ge 1$

对于导出性范数 $\|I\|=1$

$\therefore\ \mathrm{cond}(A)\ge 1$

条件数反映了误差放大的程度，条件数越大，矩阵越病态。

对于方程 Ax=b，考虑两种情况：

（1）b 存在误差Δb，求出的 x 存在误差Δx：

$$\Delta x=A^{-1}\Delta b$$

$$\|\Delta x\|\le\|A^{-1}\|\|\Delta b\|$$

考察相对误差，求$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$：

$$\|b\|\le\|A\|\|x\|\to\|x\|\ge\frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\therefore\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le\|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\Big/\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\le\|A\|\|A^{-1}\|=\mathrm{cond}(A)$$

（2）A 存在误差ΔA，求出的 x 存在误差Δx：

$$Ax=b$$

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$$

$$\to A\Delta x=-\Delta Ax-\Delta A\Delta x$$

忽略高阶小量得：

$$\|\Delta x\|\le\|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\Big/\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\le\|A^{-1}\|\|A\|=\mathrm{cond}(A)$$

常用的条件数用$\|A\|_2$来考虑：

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)}$$

$$\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(A^HA)}$$

$$\mathrm{cond}(A)=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^HA)}{\lambda_{\min}(A^HA)}}$$