Ch1 稳定匹配

1. 稳定匹配问题

1.1 问题描述

给定一组在雇主和申请人之间的优先权，我们能否把申请人分配给雇主，使得对每个雇主 E，以及没有分配为 E 工作的每个申请人 A，至少下面两种情况之一成立

1. E 对他接受的每个申请人比 A 更满意，或
2. A 对他目前的情况比其为雇主 E 工作更满意

进一步形式化问题，假设每个公司只像接受单一的申请人，那么问题可以改成

给定 n 个男人的集合 $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$，和 n 个女人的集合 $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

- 每一个男人列出了他对于女性的偏好表，从高到低
- 每一个女人列出了她对于男性的偏好表，从高到低

令 $M \times W$ 表示所有可能的形如 (m, w) 的有序对集合，其中 $m \in M, w \in W$

我们需要寻找是否存在**稳定匹配**，并且给出这个稳定匹配

	1st (favorite)	2nd	3rd (least favorite)
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

	1st (favorite)	2nd	3rd (least favorite)
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

1.2 概念定义

匹配

匹配 S，它是来自 $M \times W$ 的有序对的集合，并且具有如下性质

- 每个 M 的成员和每个 W 的成员至多出现在 S 的一个有序对中

完美匹配 Perfect Matching

S 中的一个**完美匹配** S'，并且具有如下性质

- M 的每个成员和 W 的每个成员恰好出现在 S' 的一个对里
- 即，既没有单身的，也没有一夫多妻 / 一妻多夫的情况

优先 Preference

每个男人 $m \in M$ 对所有女人的偏好程度进行排名，如果 m 给 w_1 的排名高于 w_2，我们说 m 比起 w_2 偏爱 w_1

我们把 m 的按顺序的排名作为他的**优先表**，但是我们不允许排名中出现并列

同理，每个女人也有对所有男人的排名

	1st（最喜欢）	2nd	3rd（最不喜欢）
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

男人的偏好表

	1st（最喜欢）	2nd	3rd（最不喜欢）
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

女人的偏好表

最佳有效伴侣

如果 w 是 m 的有效伴侣，且没有别的在 m 的排名中比 w 更高的女人，那么 w 就是 m 的最佳有效伴侣

不稳定匹配对 Unstable Pair

如果匹配 S 中存在两个对 (m_1, w_1)和 (m_2, w_2)，如果 m_1 更偏爱 w_2，且 w_2 更偏爱 m_1，那么 (m_1, w_2) 理应组成一个更好的匹配，他们会放弃当前的伴侣并且走到一起

我们说，对于集合 S，(m_1, w_2) 是不稳定匹配，即 (m_1, w_2) 不属于 S，但是 m_1 和 w_2 双方都更偏爱另一方而不爱他们在 S 中的伴侣

稳定匹配 Stable Matching

我们说一个匹配 S 是稳定的，它满足下面的条件

1. 它是完美匹配
2. 不存在相对于 S 的不稳定因素

1.3 示例

示例 1

给定下面的匹配，它是稳定匹配吗？

- X-C、Y-B、Z-A

favorite ↓ least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

favorite ↓ least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

并不是

favorite ↓ least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

favorite ↓ least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

示例 2

给定下面的匹配，它是稳定匹配吗？

- X-A、Y-B、Z-C

favorite ↓ … least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

favorite ↓ … least favorite ↓

	1st	2nd	3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

是的

1.4 算法

下面我们来描述 Gale-Shapley 算法

```
Stable-Matching(){
    初始化 S 为空的匹配;
    初始所有的 m∈M 和 w∈W 都是自由的;
    while(存在男人 m1 是自由的且还没有对任何女人都求过婚){
        选择这个男人 m1;
        令 w 是 m1 的优先表中 m1 还没求过婚的最高排名的女人
        if(w 是自由的){
            (m1,w) 变成约会状态，加入 S;
        }else if(w 更加偏爱 m2 而不是 m1){
            w 拒绝，m1 保持自由;
        }else(w 更偏爱 m1 而不是 m2){
            (m1,w) 变成约会状态，加入 S;
            移除 S 中的 (m2,w)
            m2 变成自由;
        }
    }
    输出所有约会对的集合 S;
}
```

1.5 证明

发现 1

男人总时按照他的偏好表的顺序追求女人

发现 2

一旦某个女人有了匹配，她就不再会回到单身状态

算法会在至多 n^2 次迭代后终止

- 每次迭代中，每个男人追求的女人都不一样
- 这样的追求过程至多有 n^2 种

算法得到的匹配是完美匹配

- 算法结束时，所有的男人都找到了配偶
- 假设有一个男人 Z，他在算法终止时仍然没有匹配
- 因为男女数目一样，必然存在一个女人 A，在算法终止时也没有找到配偶
- 由发现 2，可知，这个女人从未被追求过
- 但由算法可知，Z 已经追求过每个女人（矛盾）
- 故得证

算法得到的匹配是稳定匹配

证明，算法返回的匹配中不存在不稳定对

S*
Amy-Yancey
Bertha-Zeus
...

- 假设 $A - Z$ 是一个不稳定对，他们没有出现在 G-S 算法中给出的匹配 $S*$ 中，且更喜欢对方
    - 若 Z 从未追求过 A
        - Z 更喜欢他在 $S*$ 中匹配的配偶 B

    - $A-Z$ 是稳定的（矛盾）
  - 若 Z 追求过 A
    - A 必然立刻 / 之后拒绝了 Z
      拒绝 Z 时候，A 一定遇到了她更喜欢的男人，她只会接受她更喜欢的男人
    - $A-Z$ 是稳定的（矛盾）
- 由于两种情况都导出了矛盾
- 故得证

有效配偶

若存在稳定匹配，使得女人 w 是男人 m 的匹配，则成女人 w 是男人 m 的有效配偶

G-S 算法运行的结果总是男性最优分配

G-S 匹配 $S*$ 是男性最优的，即每一个男人都找到自己最优的有效伴侣

因为男性最优分配是唯一的，所以 G-S 算法的运行结果是唯一的，且是一个稳定匹配

- 假设 $C-Y$ 为 $S*$ 中的匹配，但 C 不是 Y 的最好有效伴侣
- 则 Y 没有能够与最喜欢的有效伴侣在一起，则由男人的从高到低追求可得，有 Y 被有效伴侣拒绝
- 假设 Y 是第一位被有效伴侣拒绝的男人，并令拒绝他的女人为 A
- 如果 G-S 算法可以导出某种稳定匹配 S，使得 Y 匹配到了好的有效伴侣 A
- 在 $S*$ 中当 Y 被拒绝的时，A 一定与一位她更喜欢的男人配对，记为 Z
- 记录在 S 中，Z 的配偶为 B
- 因为 Y 是第一个被有效伴侣拒绝的男人，故此时 Z 必定没有被有效伴侣拒绝过，因此 Z 相比与 B 一定更喜欢 A
- 但 A 相比于 Y 更喜欢 Z
- 故 $A-Z$ 为 S 中的不稳定对（矛盾）
- 即不存在上述 S，故得证

G-S 算法运行的结果总是女性最差分配

G-S 算法找到最差的女性匹配 $S*$

- 假设 $A-Z$ 为 $S*$ 中的匹配，但 Z 不是 A 最差的有效伴侣
- 如果 G-S 算法可以导出某种稳定匹配 S，使得 A 匹配到了更差的有效伴侣 Y
- 记录 S 中 Z 的伴侣为 B

- 由于 $S*$ 为男性最优分配可知，Z 比起 B 来说更喜欢 A
- A 比起 Y 来说更喜欢 Z，故 $A-Z$ 是 S 中的不稳定对（矛盾）
- 即不存在上述 S，故得证

1.6 时间复杂度分析

Gale-Shapley 算法的时间复杂度为 $O(n^2)$

总计存在 n^2 个可能的男人和女人的对，因此整个算法进程中求婚的次数最多为 n^2 次，从而得到时间复杂度为 $O(n^2)$