Ch1 稳定匹配

1. 稳定匹配问题

1.1 问题描述

给定一组在雇主和申请人之间的优先权,我们能否把申请人分配给雇主,使得对每个雇主 E,以及没有分配为 E 工作的每个申请人 A,至少下面两种情况之一成立

- 1. E 对他接受的每个申请人比 A 更满意,或
- 2. A 对他目前的情况比其为雇主 E 工作更满意

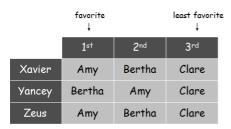
进一步形式化问题,假设每个公司只像接受单一的申请人,那么问题可以改成

给定 n 个男人的集合 $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$,和 n 个女人的集合 $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

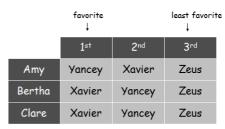
- 每一个男人列出了他对于女性的偏好表, 从高到低
- 每一个女人列出了她对于男性的偏好表, 从高到低

令 $M \times W$ 表示所有可能的形如 (m, w) 的有序对集合, 其中 $m \in M, w \in W$

我们需要寻找是否存在稳定匹配,并且给出这个稳定匹配



Men's Preference Profile



Women's Preference Profile

1.2 概念定义

匹配

匹配 S, 它是来自 $M \times W$ 的有序对的集合,并且具有如下性质

• 每个 M 的成员和每个 W 的成员至多出现在 S 的一个有序对中

完美匹配 Perfect Matching

S 中的一个完美匹配 S', 并且具有如下性质

- M 的每个成员和 W 的每个成员恰好出现在 S' 的一个对里
- 即,既没有单身的,也没有一夫多妻/一妻多夫的情况

优先 Preference

每个男人 $m \in M$ 对所有女人的偏好程度进行排名,如果 m 给 w_1 的排名高于 w_2 ,我们说 m 比起 w_2 偏爱 w_1

我们把m的按顺序的排名作为他的优先表,但是我们不允许排名中出现并列

同理,每个女人也有对所有男人的排名



男人的偏好表



女人的偏好表

最佳有效伴侣

如果w是m的有效伴侣,且没有别的在m的排名中比w更高的女人,那么w就是m的最佳有效伴侣

不稳定匹配对 Unstable Pair

如果匹配 S 中存在两个对 (m_1, w_1) 和 (m_2, w_2) ,如果 m_1 更偏爱 w_2 ,且 w_2 更偏爱 m_1 ,那么 (m_1, w_2) 理应组成一个更好的匹配,他们会放弃当前的伴侣并且走到一起

我们说,对于集合 S, (m_1, w_2) 是不稳定匹配,即 (m_1, w_2) 不属于 S,但是 m_1 和 w_2 双方都更偏爱另一方而不爱他们在 S 中的伴侣

稳定匹配 Stable Matching

我们说一个匹配 S 是稳定的,它满足下面的条件

- 1. 它是完美匹配
- 2. 不存在相对于 S 的不稳定因素

1.3 示例

示例1

给定下面的匹配,它是稳定匹配吗?

• X-C, Y-B, Z-A

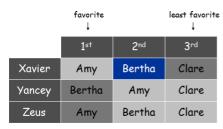
	favorite ↓		least favorite
	1 ^{s†}	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

	favorite ↓		least favorite
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

并不是



Men's Preference Profile

	favorite ↓		least favorite
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

示例 2

给定下面的匹配,它是稳定匹配吗?

• X-A, Y-B, Z-C

	favorite ↓		least favorite
	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare
Men's Preference Profile			

	favorite ↓		least favorite
	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

是的

1.4 算法

下面我们来描述 Gale-Shapley 算法

```
Stable-Matching() {
      初始化 S 为空的匹配;
      初始所有的 m \in M 和 w \in W 都是自由的;
      while(存在男人 m1 是自由的且还没有对任何女人都求过婚){
          选择这个男人 m1;
6
          令 w 是 m1 的优先表中 m1 还没求过婚的最高排名的女人
          if(w 是自由的){
7
             (m1,w) 变成约会状态,加入 S;
          }else if(w 更加偏爱 m2 而不是 m1){
9
             w 拒绝, m1 保持自由;
10
11
          }else(w 更偏爱 m1 而不是 m2){
12
             (m1,w) 变成约会状态,加入 S;
13
             移除 S 中的 (m2,w)
14
             m2 变成自由;
          }
15
16
      }
      输出所有约会对的集合 S;
17
18 }
```

1.5 证明

发现1

男人总时按照他的偏好表的顺序追求女人

发现 2

一旦某个女人有了匹配,她就不再会回到单身状态

算法会在至多 n^2 次迭代后终止

- 每次迭代中,每个男人追求的女人都不一样
- 这样的追求过程至多有 n^2 种

算法得到的匹配是完美匹配

- 算法结束时,所有的男人都找到了配偶
- 假设有一个男人 Z, 他在算法终止时仍然没有匹配
- 因为男女数目一样,必然存在一个女人 A,在算法终止时也没有找到配偶
- 由发现 2, 可知, 这个女人从未被追求过
- 但由算法可知, Z已经追求过每个女人(矛盾)
- 故得证

算法得到的匹配是稳定匹配

证明,算法返回的匹配中不存在不稳定对



- 假设 A-Z 是一个不稳定对,他们没有出现在 G-S 算法中给出的匹配 S* 中,且 更喜欢对方
 - 若 Z 从未追求过 A
 - Z 更喜欢他在 S* 中匹配的配偶 B

- A − Z 是稳定的(矛盾)
- 若 Z 追求过 A
 - A必然立刻/之后拒绝了Z
 拒绝Z时候,A一定遇到了她更喜欢的男人,她只会接受她更喜欢的男人
 - A − Z 是稳定的(矛盾)
- 由于两种情况都导出了矛盾
- 故得证

有效配偶

若存在稳定匹配,使得女人w是男人m的匹配,则成女人w是男人m的有效配偶

G-S 算法运行的结果总是男性最优分配

G-S 匹配 S* 是男性最优的,即每一个男人都找到自己最优的有效伴侣

因为男性最优分配是唯一的, 所以 G-S 算法的运行结果是唯一的, 且是一个稳定匹配

- 假设 C Y 为 S* 中的匹配,但 C 不是 Y 的最好有效伴侣
- 则 Y 没有能够与最喜欢的有效伴侣在一起,则由男人的从高到低追求可得,有 Y 被有效伴侣拒绝
- 假设Y是第一位被有效伴侣拒绝的男人,并令拒绝他的女人为A
- 如果 G-S 算法可以导出某种稳定匹配 S,使得 Y 匹配到了好的有效伴侣 A
- 在 S* 中当 Y 被拒绝的时,A 一定与一位她更喜欢的男人配对,记为 Z
- 记录在S中,Z的配偶为B
- 因为Y是第一个被有效伴侣拒绝的男人,故此时Z必定没有被有效伴侣拒绝过,因此Z相比与B一定更喜欢A
- 但A相比于Y更喜欢Z
- 故 *A* − *Z* 为 *S* 中的不稳定对(矛盾)
- 即不存在上述S,故得证

G-S 算法运行的结果总是女性最差分配

G-S 算法找到最差的女性匹配 S*

- 假设 A Z 为 S* 中的匹配,但 Z 不是 A 最差的有效伴侣
- 如果 G-S 算法可以导出某种稳定匹配 S,使得 A 匹配到了更差的有效伴侣 Y
- 记录 S 中 Z 的伴侣为 B

- 由于 S* 为男性最优分配可知,Z 比起 B 来说更喜欢 A
- A 比起 Y 来说更喜欢 Z, 故 A Z 是 S 中的不稳定对(矛盾)
- 即不存在上述 S,故得证

1.6 时间复杂度分析

Gale-Shapley 算法的时间复杂度为 $O(n^2)$

总计存在 n^2 个可能的男人和女人的对,因此整个算法进程中求婚的次数最多为 n^2 次,从而得到时间复杂度为 $O(n^2)$