

CAPM と平均分散モデル

池田ゼミ講義ノート

羅洪帥 (57165029)

本稿ではプライシングカーネルのフォームについて検討する。

1 記号と公式の準備

本稿では、確率変数を \tilde{X} と表記する。

確率変数の積の期待値は 期待値の積と共分散の和である。 $E[\widetilde{m_1}\widetilde{R_1}] = Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1}) + E[\widetilde{m_1}]E[\widetilde{R_1}]$
共分散に関する公式。

$$\begin{aligned}Cov(\tilde{x}, \tilde{y}) &= E[(\tilde{x} - \mu_x)(\tilde{y} - \mu_y)] \\&= E[\tilde{x}\tilde{y}] - \mu_x\mu_y \\&= E[\tilde{x}(\tilde{y} - \mu_y)] \\&= E[(\tilde{x} - \mu_x)\tilde{y}]\end{aligned}$$

各种定价模型，基本都是怎么用一种多因子式来逼近

2 CAPM の導出

資産の現在の市場価格 V_0 は 1 年後の CashFlow $\widetilde{X_1}$ の期待値となる。 $\widetilde{m_1}$ で資産のプライシング・カーネル pricing kernel(stochastic discount factor、確率的割引ファクター) とすれば、下記の式になる。

$$V_0 = E[\widetilde{m_1}\widetilde{X_1}]$$

注意: 確率変数 m_1 は全ての金融資産において共通である。

無リスク資産を 1 単位を投資する場合に $V_0 = 1$ 、 $X_1 = R_f$ となる (R_f は Gross Return)。上式に代入する。

$$1 = E[\widetilde{m_1}R_f] = R_f E[\widetilde{m_1}]$$

すると、 $E[\widetilde{m_1}] = \frac{1}{R_f}$ だと分かる。

今度はリスク資産の投資を想定する。1 単位のリスク資産の投資による収入を $\widetilde{R}_1 = \frac{\widetilde{X}_1}{V_0}$ と表現すれば、

$$1 = E[\widetilde{m}_1 \widetilde{R}_1] = Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_1) + E[\widetilde{m}_1]E[\widetilde{R}_1]$$

となる。 $E[\widetilde{m}_1] = \frac{1}{R_f}$ を代入する。

$$E[\widetilde{R}_1] = R_f \left(1 - Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_1) \right) = R_f - R_f Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_1)$$

注意: $-R_f Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_1)$ の部分は即ちリスクプレミアムである。

ここでは \widetilde{m}_1 個別資産とマーケットリターンの関係を 1 次関数と仮定する。

$$\widetilde{m}_1 = a - b\widetilde{R}_m \quad (b > 0)$$

以下では、個別資産を j で表現する。 \widetilde{m}_1 と個別資産の共分散は下式である。

$$\begin{aligned} Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_j) &= Cov(a - b\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_j) \\ &= -bCov(\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_j) \end{aligned}$$

個別資産リターンとマーケットリターンの期待値は、

$$\begin{aligned} E[\widetilde{R}_j] &= R_f - R_f Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_j) \\ E[\widetilde{R}_m] &= R_f - R_f Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_m) \end{aligned}$$

である。超過リターンの比率は

$$\frac{E[\widetilde{R}_j] - R_f}{E[\widetilde{R}_m] - R_f} = \frac{Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_j)}{Cov(\widetilde{m}_1, \widetilde{R}_m)} = \frac{-bCov(\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_j)}{-bCov(\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_m)} = \frac{Cov(\widetilde{R}_m, \widetilde{R}_j)}{Var[\widetilde{R}_m]} = \beta_j$$

書き換えると、下式となる。

$$E[\widetilde{R}_j] - R_f = \beta_j (E[\widetilde{R}_m] - R_f)$$

3 2 期間の効用

W_0 の富を持つ投資家は今期 C_0 を消費して、残りの $W_0 - C_0$ をポートフォリオで運用して、 $(W_0 - C_0)\widetilde{R}_p = \widetilde{C}_1$ 分を来期に消費する。ここでは、今期の効用と来期の効用は無関係と仮定する。(注意:これはかなり強い仮定である。) つまり、 $U(C_0, \widetilde{C}_1) = U(C_0) + E[U(\widetilde{C}_1)]$ と仮定する。投資家にとっては、2 期間での効用最大化を課題と定義。つまり、 $\max U(C_0) + E[U(\widetilde{C}_1)]$ となる。

ただし、 $E[U(\widetilde{C}_1)] = E[U(\sum_{j=0}^J w_j \widetilde{R}_j)]$ subject to $\sum_{j=0}^J w_j = 1$ となる。J 種類のリスク資産 ($j=1,2,3, \dots, J$) と 0 番の安全資産でポートフォリオを構築される。

ラグランジュ (Lagrange) の未定乗数法を使って、目標関数を以下のように書ける。

$$\mathcal{L} \equiv u(C_0) + E[u(\sum_{j=0}^J w_j \widetilde{R}_j)] + \lambda(1 - \sum_{j=0}^J w_j)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j} &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0} = u'(C_0) + E[u'(\tilde{C}_1)(-\sum_{j=0}^J w_j \tilde{R}_j)] = 0$$

$$u'(C_0) = E[u'(\tilde{C}_1)(\sum_{j=0}^J w_j \tilde{R}_j)]$$

Above is eq1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j} = 0 + E[u'(\tilde{C}_1)(w_0 - C_0)\tilde{R}_j] - \lambda = 0$$

$$E[u'(\tilde{C}_1)\tilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$$

Above is eq2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{j=0}^J w_j$$

$$\text{Let eq2 times } w_j, \text{ we have } E[u'(\tilde{C}_1) \sum_{j=0}^J w_j \tilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0} \sum_{j=0}^J w_j = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$$

Above is eq4

Rewrite eq1, we have

$$\begin{aligned}u'(C_0) &= E[u'(\tilde{C}_1)(\sum_{j=0}^J w_j \tilde{R}_j)] \\ &= \frac{\lambda}{w_0 - C_0} \\ &= E[u'(\tilde{C}_1)\tilde{R}_j]\end{aligned}$$

Then, we have

$$\begin{aligned}1 &= E[\frac{u'(\tilde{C}_1)}{u'(\tilde{C}_0)}\tilde{R}_j] \\ E[\tilde{m}_1 \tilde{R}_j] &= 1\end{aligned}$$