CAPM と平均分散モデル
池田ゼミ講義ノート

羅洪帥 (57165029)

---

1 記号と公式の準備

本稿では、確率変数を $\tilde{X}$ と表記する。
確率変数の積の期待値は 期待値の積と共分散の和である。$E[\widetilde{m_1}\widetilde{R_1}] = Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1}) + E[\widetilde{m_1}]E[\widetilde{R_1}]$
共分散に関する公式。

$$\begin{aligned} Cov(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= E[(\widetilde{x} - \mu_x)(\widetilde{y} - \mu_y)] \\ &= E[\tilde{x}\tilde{y}] - \mu_x\mu_y \\ &= E[\tilde{x}(\tilde{y} - \mu_y)] \\ &= E[(\tilde{x} - \mu_x)\tilde{y}] \end{aligned}$$

2 CAPM の導出

資産の現在の市場価格 V_0 は 1 年後の CashFlow$\widetilde{X_1}$ の期待値となる。$\widetilde{m_1}$ で資産のプライシング・カーネル pricing kernel(stochastic discount factor、確率的割引ファクター) とすれば、下記の式になる。

$$V_0 = E[\widetilde{m_1}\widetilde{X_1}]$$

注意: 確率変数 m_1 は全ての金融資産において共通である。
無リスク資産を 1 単位を投資する場合に $V_0 = 1$、$X_1 = R_f$ となる (R_f は Gross Return)。上式に代入する。

$$1 = E[\widetilde{m_1}R_f] = R_f E[\widetilde{m_1}]$$

すると、$E[\widetilde{m_1}] = \dfrac{1}{R_f}$ だと分かる。

今度はリスク資産の投資を想定する。1 単位のリスク資産の投資による収入を $\widetilde{R_1} = \dfrac{\widetilde{X_1}}{V_0}$ と表現すれば、

$$1 = E[\widetilde{m_1}\widetilde{R_1}] = Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1}) + E[\widetilde{m_1}]E[\widetilde{R_1}]$$

となる。$E[\widetilde{m_1}] = \frac{1}{R_f}$ を代入する。

$$E[\widetilde{R_1}] = R_f\left(1 - Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1})\right) = R_f - R_f Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1})$$

注意: $-R_f Cov(\widetilde{m_1}\widetilde{R_1})$ の部分は即ちリスクプレミアムである。

ここでは $\widetilde{m}_1$ 個別資産とマーケットリターンの関係を 1 次関数と仮定する。

$$\widetilde{m}_1 = a - b\widetilde{R}_m \quad (b > 0)$$

以下では、個別資産を j で表現する。$\widetilde{m}_1$ と個別資産の共分散は下式である。

$$\begin{aligned} Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_j}) &= Cov(a - b\widetilde{R_m}, \widetilde{R_j}) \\ &= -bCov(\widetilde{R_m}, \widetilde{R_j}) \end{aligned}$$

個別資産リターンとマーケットリターンの期待値は、

$$\begin{aligned} E[\widetilde{R_j}] &= R_f - R_f Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_j}) \\ E[\widetilde{R_m}] &= R_f - R_f Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_m}) \end{aligned}$$

である。超過リターンの比率は

$$\frac{E[\widetilde{R_j}] - R_f}{E[\widetilde{R_m}] - R_f} = \frac{Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_j})}{Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_m})} = \frac{-bCov(\widetilde{R_m}, \widetilde{R_j})}{-bCov(\widetilde{R_m}, \widetilde{R_m})} = \frac{Cov(\widetilde{R_m}, \widetilde{R_j})}{Var[\widetilde{R_m}]} = \beta_j$$

書き換えると、下式となる。

$$E[\widetilde{R_j}] - R_f = \beta_j(E[\widetilde{R_m}] - R_f)$$

3　2 期間の効用

W_0 の富を持つ投資家は今期 C_0 を消費して、残りの $W_0 - C_0$ をポートフォリオで運用して、$(W_0 - C_0)\widetilde{R}_p = \widetilde{C}_1$ 分を来期に消費する。ここでは、今期の効用と来期の効用は無関係と仮定する。(注意:これはかなり強い仮定である。) つまり、$U(C_0, \widetilde{C}_1) = U(C_0) + E[U(\widetilde{C}_1)]$ と仮定する。投資家にとっては、2 期間での効用最大化を課題と定義。つまり、$maxU(C_0) + E[U(\widetilde{C}_1)]$ となる。

ただし、$E[U(\widetilde{C}_1)] = E[U(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)]$　subject to $\sum_{j=0}^{J} w_j = 1$ となる。J 種類のリスク資産 (j=1,2,3, ... J) と 0 番の安全資産でポートフォリオを構築される。

ラグランジュ (Lagrange) の未定乗数法を使って、目標関数を以下のように書ける。

$$\mathscr{L} \equiv u(C_0) + E[u(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] + \lambda(1 - \sum_{j=0}^{J} w_j)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_0} &= 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_0} = u'(C_0) + E[u'(\widetilde{C}_1)(-\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] = 0$$

$$u'(C_0) = E[u'(\widetilde{C}_1)(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)]$$

Above is eq1

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j} = 0 + E[u'(\widetilde{C}_1)(w_0 - C_0)\widetilde{R}_j] - \lambda = 0$$

$$E[u'(\widetilde{C}_1)\widetilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$$

Above is eq2

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{j=0}^{J} w_j$$

Let eq2 times wj, we have $E[u'(\widetilde{C}_1)\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}\sum_{j=0}^{J} w_j = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$

Above is eq4

Rewrite eq1, we have

$$\begin{aligned} u'(C_0) &= E[u'(\widetilde{C}_1)(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] \\ &= \frac{\lambda}{w_0 - C_0} \\ &= E[u'(\widetilde{C}_1)\widetilde{R}_j] \end{aligned}$$

Then, we have

$$1 = E[\frac{u'(\widetilde{C}_1)}{u'(\widetilde{C}_0)}\widetilde{R}_j]$$

$$E[\widetilde{m}_1 \widetilde{R}_j] = 1$$