線形ファクターモデル

CAPM ではすべての投資家は世の中のすべての資産を所有することを仮定する。ただし、取引コストや資本政策 (外貨制限など?) と税などの取引の摩擦では、投資家は世界中のすべての資産を所有することに制限を掛ける。そして、価格つけなくて、取引もできない資産もある。例えば、人の労働収入。投資家はこのような分散できないリスクを直面する。均衡状態 CAPM が主張する市場ポートフォリオリスクはリスク資産の only のリスクの実証分析研究に表明されていなかった。

それに対して、APT モデルでは個別リスク資産の収益率は複数の外部ファクターと内部ファクターに影響されると主張する。このモデルは

k 個のリスクファクターと n 個の資産を存在し、$n > k$ である。b_{iz} は i 番目資産が z 番目リスクファクターの感応度である。$\tilde{f}_z$ は

$\tilde{\epsilon}$

1 記号と公式の準備

本稿では、確率変数を $\tilde{X}$ と表記する。

確率変数の積の期待値は 期待値の積と共分散の和である。$E[\widetilde{m_1}\widetilde{R_1}] = Cov(\widetilde{m_1}, \widetilde{R_1}) + E[\widetilde{m_1}]E[\widetilde{R_1}]$

共分散に関する公式。

$$
\begin{aligned}
Cov(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= E[(\widetilde{x} - \mu_x)(\widetilde{y} - \mu_y)] \\
&= E[\tilde{x}\tilde{y}] - \mu_x \mu_y \\
&= E[\tilde{x}(\tilde{y} - \mu_y)] \\
&= E[(\tilde{x} - \mu_x)\tilde{y}]
\end{aligned}
$$

2 CAPM の導出

資産の現在の市場価格 V_0 は 1 年後の CashFlow$\widetilde{X_1}$ の期待値となる。$\widetilde{m_1}$ で資産のプライシング・カーネル pricing kernel(stochastic discount factor、確率的割引ファクター) とすれば、下記の式になる。

$$V_0 = E[\widetilde{m_1}\widetilde{X_1}]$$

注意: 確率変数 m_1 は全ての金融資産において共通である。

無リスク資産を 1 単位を投資する場合に $V_0=1$、$X_1=R_f$ となる (R_f は Gross Return)。上式に代入する。

$$1=E[\widetilde{m_1}R_f]=R_fE[\widetilde{m_1}]$$

すると、$E[\widetilde{m_1}]=\dfrac{1}{R_f}$ だと分かる。

今度はリスク資産の投資を想定する。1 単位のリスク資産の投資による収入を $\widetilde{R_1}=\dfrac{\widetilde{X_1}}{V_0}$ と表現すれば、

$$1=E[\widetilde{m_1}\widetilde{R_1}]=Cov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_1})+E[\widetilde{m_1}]E[\widetilde{R_1}]$$

となる。$E[\widetilde{m_1}]=\frac{1}{R_f}$ を代入する。

$$E[\widetilde{R_1}]=R_f\left(1-Cov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_1})\right)=R_f-R_fCov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_1})$$

注意: $-R_fCov(\widetilde{m_1}\widetilde{R_1})$ の部分は即ちリスクプレミアムである。

ここでは $\widetilde{m}_1$ 個別資産とマーケットリターンの関係を 1 次関数と仮定する。

$$\widetilde{m}_1=a-b\widetilde{R}_m \quad (b>0)$$

以下では､個別資産を j で表現する。$\widetilde{m}_1$ と個別資産の共分散は下式である。

$$\begin{aligned}Cov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_j})&=Cov(a-b\widetilde{R_m},\widetilde{R_j})\\&=-bCov(\widetilde{R_m},\widetilde{R_j})\end{aligned}$$

個別資産リターンとマーケットリターンの期待値は、

$$\begin{aligned}E[\widetilde{R_j}]&=R_f-R_fCov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_j})\\E[\widetilde{R_m}]&=R_f-R_fCov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_m})\end{aligned}$$

である。超過リターンの比率は

$$\frac{E[\widetilde{R_j}]-R_f}{E[\widetilde{R_m}]-R_f}=\frac{Cov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_j})}{Cov(\widetilde{m_1},\widetilde{R_m})}=\frac{-bCov(\widetilde{R_m},\widetilde{R_j})}{-bCov(\widetilde{R_m},\widetilde{R_m})}=\frac{Cov(\widetilde{R_m},\widetilde{R_j})}{Var[\widetilde{R_m}]}=\beta_j$$

書き換えると､下式となる。

$$E[\widetilde{R_j}]-R_f=\beta_j(E[\widetilde{R_m}]-R_f)$$

3　2 期間の効用

W_0 の富を持つ投資家は今期 C_0 を消費して､残りの W_0-C_0 をポートフォリオで運用して、$(W_0-C_0)\widetilde{R}_p=\widetilde{C}_1$ 分を来期に消費する。ここでは､今期の効用と来期の効用は無関係と仮定する。(注意:これはかなり強い仮定である。) つまり､$U(C_0,\widetilde{C}_1)=U(C_0)+E[U(\widetilde{C}_1)]$ と仮定する。投資家にとっては､2 期間での効用最大化を課題と定義。つまり､$maxU(C_0)+E[U(\widetilde{C}_1)]$ となる。

ただし、$E[U(\widetilde{C}_1)] = E[U(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)]$ subject to $\sum_{j=0}^{J} w_j = 1$ となる。J 種類のリスク資産 (j=1,2,3, ... J) と 0 番の安全資産でポートフォリオを構築される。

ラグランジュ (Lagrange) の未定乗数法を使って、目標関数を以下のように書ける。

$\mathscr{L} \equiv u(C_0) + E[u(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] + \lambda(1 - \sum_{j=0}^{J} w_j)$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_0} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j} = 0$$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_0} = u'(C_0) + E[u'(\widetilde{C}_1)(-\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] = 0$

$u'(C_0) = E[u'(\widetilde{C}_1)(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)]$

Above is eq1

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_j} = 0 + E[u'(\widetilde{C}_1)(w_0 - C_0)\widetilde{R}_j] - \lambda = 0$

$E[u'(\widetilde{C}_1)\widetilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$

Above is eq2

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{j=0}^{J} w_j$

Let eq2 times wj, we have $E[u'(\widetilde{C}_1)\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j] = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}\sum_{j=0}^{J} w_j = \frac{\lambda}{w_0 - C_0}$

Above is eq4

Rewrite eq1, we have

$$\begin{aligned} u'(C_0) &= E[u'(\widetilde{C}_1)(\sum_{j=0}^{J} w_j \widetilde{R}_j)] \\ &= \frac{\lambda}{w_0 - C_0} \\ &= E[u'(\widetilde{C}_1)\widetilde{R}_j] \end{aligned}$$

Then, we have

$$1 = E[\frac{u'(\widetilde{C}_1)}{u'(\widetilde{C}_0)}\widetilde{R}_j]$$
$$E[\widetilde{m}_1 \widetilde{R}_j] = 1$$