



# 微分流形

xiaou0

2026 年 2 月 11 日

封面 PID:136608814d

## 特别鸣谢

琪露诺 | 幻想乡大学纯粹与应用数学博士

## 讨论群

讨论群号 (QQ): 244425765

## 作者简介

xiaou0 是普通高二学生, 数学爱好者. 总想写点什么于是就有了这本书.

xiaou0 的数学水平还谈不上很强, 所有内容都基于目前为止积累的理解.

xiaou0 希望你能够及时纠正 TA 的错误, 并和 TA 讨论更多更有趣的数学 ww.



图 1: xiaou0 绝美自拍

<b>第零章 序</b>	4
<b>第一章 前置与导论</b>	5
1.1 代数部分 . . . . .	5
1.1.1 仿射空间 . . . . .	5
1.1.2 泛性质 . . . . .	6
1.2 分析部分 . . . . .	7
1.2.1 多元函数的微分 . . . . .	7
1.2.2 Taylor 定理 . . . . .	7
1.3 拓扑部分 . . . . .	8
1.3.1 拓扑流形 . . . . .	8
<b>第二章 微分流形</b>	9
2.1 微分流形 . . . . .	9
2.1.1 定义微分流形 . . . . .	9
2.1.2 光滑映射 . . . . .	11
2.1.3 切向量与切空间 I . . . . .	13
2.1.4 切向量与切空间 II . . . . .	17
2.1.5 余切向量与余切空间 . . . . .	21
2.1.6 切映射与余切映射 . . . . .	22
<b>第三章 切丛</b>	25

# 第零章 序

# 第一章 前置与导论

## 1.1 代数部分

本书将默认读者熟悉基本的线性代数内容, 如线性空间, 线性映射, 矩阵等. 在本书中, 我们绝大多数情况下都针对  $\mathbb{R}^n$  进行讨论, 但我们也会在一些地方提及更一般的线性空间.

若你对于多重线性代数的内容不太熟悉, 我们也会给出一些简单的介绍.

我出于个人习惯, 喜欢使用很多偏代数的记号, 希望大家能够习惯.

### 1.1.1 仿射空间

在一切开始之前, 我们将介绍几何中比较重要的几类空间, 仿射空间可以说就是忘记原点的线性空间, 也就是说, 仿射空间中的点没有一个特殊的点被称为原点. 仿射空间中的点可以通过向量来描述, 但我们不能直接对点进行加法运算, 只能对向量进行加法运算. 于是我们得建立一种点到点, 点到向量, 向量到点的关系. 因此我们引入了仿射空间的概念.

#### 定义 1.1.1. 仿射空间

设  $V$  是给定的线性空间, 所谓仿射空间 (affine space)  $\mathbb{A}$  是一个非空的集合, 其中的元素被称为点, 并且存在一个减法映射

$$- : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$$

他将任何一组有序点对映射到向量  $p - q \in V$ , 满足以下条件:

A1 对任意  $p \in \mathbb{A}$ ,  $p - p = 0$ .

A2 对任意  $p \in \mathbb{A}, v \in V$ , 存在唯一的  $q \in \mathbb{A}$  使得  $p - q = v$ .

A3 对任意  $p, q, r \in \mathbb{A}$ ,  $(p - q) + (q - r) = p - r$ .

我们称  $V$  为其伴随的线性空间, 通常情况下我们会把  $q - p$  记作  $\vec{pq}$ . 若在仿射空间中选定原点  $o$ , 那么他和线性空间中的向量自然地一一对应.

在仿射空间  $\mathbb{A}$  中, 我们进行了去心的操作, 但这并不代表心不重要, 而是允许我们自由地选取一个点作为原点, 从而使得仿射空间中的点和线性空间中的向量一一对应.

标架的概念就允许我们规范地选取一个点决定的线性结构, 从而使得仿射空间中的点和线性空间中的向量一一对应.

#### 定义 1.1.2. 标架

设  $\mathbb{A}$  是一个仿射空间,  $o \in \mathbb{A}$  是一个点,  $e_1, \dots, e_n$  是伴随的有限维线性空间  $V$  的一组基, 则称  $(o; e_1, \dots, e_n)$  是  $\mathbb{A}$  的一个标架 (frame).

若该基是  $V$  的一个组正交基 (要求  $V$  具有内积结构), 则称该标架为正交标架 (orthogonal frame).



### 1.1.2 泛性质

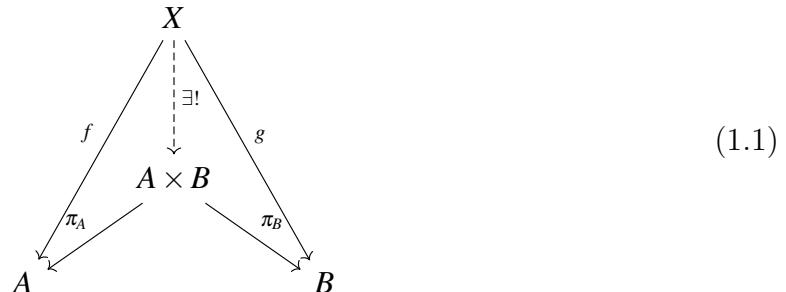
万有性质/泛性质 (universal property) 是代数学中一个核心概念. 直观地理解的话, 万有性质就是通过「一个对象在范畴中的身份」来确定一个对象.

举一个生动的比方, 如何定义「幻想乡最强」这个概念? 我们可以用两种角度去描述.

1. (内部定义) 幻想乡最强就是幻想乡里 HP 和 STR 最高的存在, 那就是我琪露诺哒!
2. (泛性质定义) 幻想乡最强就是那个「任何和她对战的幻想乡住民, 都会输给她」的存在, 那就是我琪露诺哒!

在范畴论中, 我们并不关心对象的「内部结构」, 也就是第一种定义方式. 我们只关心对象在范畴中的「身份」, 也就是第二种定义方式. 因此我们可以用万有性质来定义范畴中的对象. 例如在集合范畴 Set 中, 我们可以用万有性质来定义笛卡尔积:

1. (内部定义) 集合  $A$  和  $B$  的笛卡尔积  $A \times B$  定义为全体有序对  $(a, b)$  组成的集合, 其中  $a \in A, b \in B$ .
2. (泛性质定义) 集合  $A$  和  $B$  的笛卡尔积  $A \times B$  定义为满足如下万有性质的对象: 存在投影映射  $\pi_A : A \times B \rightarrow A, \pi_B : A \times B \rightarrow B$ , 使得对任意集合  $X$  及映射  $f : X \rightarrow A, g : X \rightarrow B$ , 存在唯一的映射  $h : X \rightarrow A \times B$ , 使得  $\pi_A h = f, \pi_B h = g$ . 如下图所示

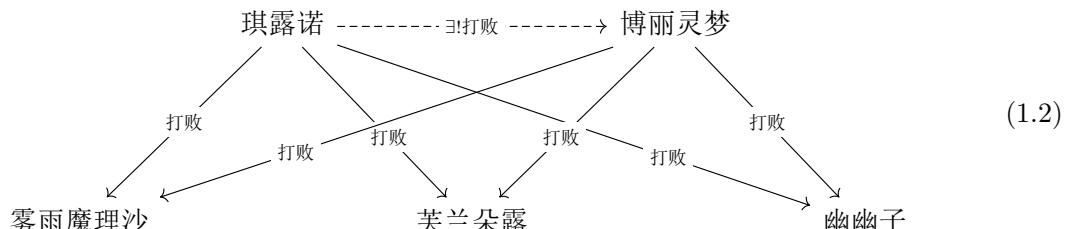


通过上一个例子我们会发现, 由于范畴并不能有效区分集合中的元素, 因此我们通过泛性质构造的对象并不一定是我们通过内部定义的那个「特定的对象」, 但取而代之, 它们在范畴中是「等价」的, 也就是说它们一定是同构的. 这一点在上例中并不难以验证.

回到第一个例子中, 假如除了琪露诺, 大妖精也是「幻想乡最强」, 那么任何幻想乡老妖怪美少女和她对战都会输, 那么可以得出琪露诺和大妖精对战必然是双方皆输, 由此类比范畴中的概念就是同构.

一般情况下, 泛性质会描述为「一个对象  $U$  满足, 对任何同样满足某条件的对象  $X$ , 都存在唯一的态射  $u : U \rightarrow X$  (或  $X \rightarrow U$ ) 使得其相关的图表交换」. 这样的句式将在代数里经常见到.

还是回到第一个例子, 此时琪露诺满足的泛性质就可以描述成: 「琪露诺是幻想乡最强, 因为对任何其他幻想乡中的强者, 琪露诺一定能够打败她」, 如下图所示



在微分几何中, 泛性质的概念也非常 important, 张量积就是一个典型的例子, 我们会在后续章节中介绍张量积的定义, 以及它的万有性质.

## 1.2 分析部分

数学分析的内容在本书中也会被频繁使用, 但我们不会过多地涉及分析的细节, 只会在必要的时候进行简单的介绍. 我们会假设读者熟悉基本的微积分内容, 如极限, 连续, 可微等.

多元微积分的前置是必要的, 因为我们需要在多维空间中进行微分和积分运算, 以及处理多元函数的极限和连续性等问题.

### 1.2.1 多元函数的微分

这一部分的内容你应该已经相当熟悉, 但我们还是会简单地回顾一下多元函数的微分的定义和性质, 以便后续章节中能够更好地理解相关内容.

#### 定义 1.2.1. Jacobian 矩阵

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是一个多元函数, 则称  $f$  的 Jacobian 矩阵 (Jacobian matrix) 是一个  $m \times n$  的矩阵, 记作  $\mathbf{J}_f$ , 其第  $i$  行第  $j$  列的元素为  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , 其中  $f_i$  是  $f$  的第  $i$  个分量函数,  $x_j$  是输入变量的第  $j$  个分量. 即

$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$



Jacobian 矩阵本质上就是全微分的矩阵表示, 其中全微分是一个线性算子.

多元光滑函数是我们定义微分流形的基础:

#### 定义 1.2.2. 光滑函数

设  $f: X \rightarrow Y$ , 其中  $X \subset \mathbb{R}^n$  是开集,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  是开集, 如果  $f$  的所有分量函数  $f_i$  都是光滑函数, 即在  $\mathbb{R}^n$  上具有任意阶的连续偏导数, 则称  $f$  是一个光滑函数 (smooth function).



### 1.2.2 Taylor 定理

Taylor 定理是多元微积分中的一个重要定理, 它描述了一个函数在某点附近的局部行为, 以及如何用多项式来近似函数.

#### 引理 1.2.1. Hadamard 引理

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是一个光滑函数, 且  $f(0) = 0$ , 则存在  $n$  个光滑函数  $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)x_i$$



满足  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ .

## 1.3 拓扑部分

点集拓扑的基本理念也是定义微分流形的基础, 因此我们也会在本书中频繁使用点集拓扑的内容. 我们不会过多地涉及点集拓扑的细节, 只会在必要的时候进行简单的介绍.

### 1.3.1 拓扑流形

拓扑流形是所有流形的模板, 他的核心机制是, 赋予每一个点的局部结构与欧几里得空间相同, 从而使得我们能够在流形上进行类似微分运算等操作.

#### 定义 1.3.1. 拓扑流形

设  $M$  是一个集合, 如果  $M$  满足以下条件, 则称  $M$  是一个拓扑流形 (topological manifold):



1.  $M$  是一个 Hausdorff 空间.
2.  $M$  是一个第二可数空间.
3. 对任意  $p \in M$ , 存在一个开邻域  $U$  和一个同胚  $\phi : U \rightarrow V$ , 其中  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个开子集, 则称  $(U, \phi)$  是  $M$  的一个局部坐标卡 (local chart).

此时称  $M$  是一个  $n$ -拓扑流形, 其中  $n$  被称为  $M$  的维数 (dimension).

#### 推论 1.3.1.

切空间  $T_p M$  的维数等于流形  $M$  的维数.



# 第二章 微分流形

微分流形是微分几何的核心对象，也是我们在本章中要重点讨论的对象。我们了解了拓扑流形，接下来我们要在拓扑流形的基础上，加入一些微分结构，从而得到微分流形。

如果你熟悉层论 (sheaf theory) 的话，微分流形无非是一种赋环空间  $(M, \mathcal{O}_M)$ ，其中  $M$  是一个拓扑流形， $\mathcal{O}_M$  则是由  $C^\infty$  函数构成的层。我们会在 de Rham 上同调的讨论中回到并更进一步讨论这个定义的优势。

但我们在本章中并不打算使用层论的语言，因此我们将从一个更为直观的角度来定义微分流形。

## 2.1 微分流形

### 2.1.1 定义微分流形

我们现在手上有拓扑流形这个工具，他满足每个点都存在邻域和  $\mathbb{R}^n$  同胚，但这样定义的拓扑流形很可能是粗糙不堪的，这并不符合我们的美学，我们的想法是在上面附加一种能够描述光滑结构的东西，从而得到微分流形。

在欧氏空间中，我们知道如何定义光滑函数 [定义 1.2.2]，以及光滑函数的微分，以及微分的链式法则等。仿照我们定义拓扑流形的哲学，我们可以在每个点的邻域上定义一个光滑结构，也就是说，在每个点的邻域上定义一个同胚到  $\mathbb{R}^n$  的图册。

我们想更进一步讨论流形的坐标卡，我们知道坐标卡本质是一个邻域  $U$  和同胚映射  $\phi$  的二元组。其中

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

是同胚，此时对于点  $p \in U$ ，我们称

$$(\pi_1(\phi(p)), \dots, \pi_n(\phi(p)))$$

为点  $p$  在该坐标卡下的坐标 (coordinate)，其中  $\pi_i$  是  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的第  $i$  个分量的自然投影。严格来说，这种坐标依赖于同胚的选取，因此简写我们可记作

$$(x_\phi^1, \dots, x_\phi^n)$$

若无歧义，则可记为

$$(x^1, \dots, x^n)$$

流形中，我们用坐标卡彻底覆盖了整个流形，但是一个显然的问题是，这些坐标卡是否互相矛盾？也就是说，在两个坐标卡的交集上，这两个坐标卡的坐标变换是否满足光滑性？

不妨设  $M$  是  $n$ -拓扑流形， $(U, \phi)$  和  $(V, \psi)$  是  $M$  上的两个坐标卡，其中  $U \cap V \neq \emptyset$ 。那么我们可以定义  $\phi \circ \psi^{-1}$  和  $\psi \circ \phi^{-1}$  这两个映射，他们分别是  $\psi(V)$  和  $\phi(U)$  上的映射，称之为转移函数 (transition function)。如下图所示，这两个转移函数的图表表示如下：

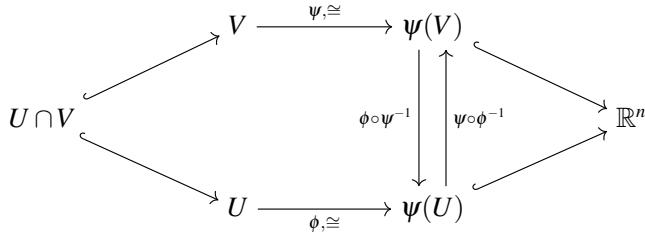


图 2.1:  $\phi \circ \psi^{-1}$  和  $\psi \circ \phi^{-1}$  的图表表示

此时两个转移函数都是形如  $\mathbb{R}^n \supset X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$  的映射, 他们的光滑性就可以通过我们在欧氏空间中定义的光滑函数来定义了. 此时若两个函数都是  $C^\dagger$  的, 则称这两个坐标卡是  $C^\dagger$  兼容 ( $C^\dagger$ -compatible) 的, 也就是说, 在两个坐标卡的交集上, 这两个坐标卡的转移函数都是  $C^\dagger$  的. 其中  $\dagger$  可以是 0 (连续), 1 (可微),  $\infty$  (光滑),  $\omega$  (解析) 等等.

特别地我们可以简单地规定, 若坐标卡的交集为空集, 那么他们是任意阶相容的.

我们称流形  $M$  的一族坐标卡  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  是一个图册 (atlas), 当且仅当  $\{U_\alpha\}$  是  $M$  的一个开覆盖.

就像我们在拓扑空间中指定开集一样, 我们在流形上指定容许坐标卡也是同样的原理, 现在我们可以给出微分流形的定义了.

### 定义 2.1.1. 微分流形

设拓扑流形  $M$  上的图册  $\mathcal{A}$ , 若



M1.  $\mathcal{A}$  中的任意两个坐标卡都是  $C^\dagger$  兼容的;

M2.  $\mathcal{A}$  是  $C^\dagger$  极大的, 即若  $(U, \phi)$  是一个坐标卡, 且与  $\mathcal{A}$  中的任意一个坐标卡都是  $C^\dagger$  兼容的, 则  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ .

则称  $\mathcal{A}$  是  $M$  上的一个  $C^\dagger$  微分结构 ( $C^\dagger$ -differential structure),  $(M, \mathcal{A})$  是一个  $C^\dagger$  微分流形 ( $C^\dagger$ -differential manifold), 简称  $C^\dagger$  流形. 称  $\mathcal{A}$  中的坐标卡为  $M$  的容许坐标卡 (allowable charts).

其中,  $\dagger$  可以是 0 (连续), 1 (可微),  $\infty$  (光滑),  $\omega$  (解析) 等等.

显然, 由于  $\mathcal{A}$  是极大的, 我们有如下定理

### 定理 2.1.1.



设  $M$  是一个拓扑流形,  $\mathcal{A}$  是  $M$  上的一个  $C^\dagger$ -相容的图册, 则存在唯一一个  $C^\dagger$ -微分结构  $\mathcal{A}'$  使得  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ .

Pf. 我们先证明存在性, 设  $\mathcal{A}$  是给定的  $C^\dagger$ -相容的图册, 则我们可以定义

$$\mathcal{A}' = \{(U, \phi) \mid (U, \phi) \text{ 与 } \mathcal{A} \text{ 相容}\}$$

此时  $\mathcal{A}'$  是  $C^\dagger$ -相容的, 且  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ . 若  $(V, \psi)$  与  $\mathcal{A}'$  相容, 由于  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ , 则  $(V, \psi)$  与  $\mathcal{A}$  中的任何一个坐标卡都相容, 因此  $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ . 这说明  $\mathcal{A}'$  是  $C^\dagger$ -极大的.

唯一性的证明也很简单, 设  $\mathcal{A}''$  是另一个  $C^\dagger$ -极大的图册, 且  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ , 则  $\mathcal{A}''$  中的任意一个坐标卡  $(V, \psi)$  都与  $\mathcal{A}$  中的任何一个坐标卡相容, 因此  $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ . 这说明  $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$ . 同样的,  $\mathcal{A}'$  中的任意一个坐标卡  $(U, \phi)$  都与  $\mathcal{A}$  中的任何一个坐标卡相容, 因此  $(U, \phi) \in \mathcal{A}''$ . 这说明  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ . 因此  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$ .  $\square$

一个典型的例子就是  $\mathbb{R}^n$  自身, 这类流形的微分结构就是  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{1})$  单个坐标卡作为图册生成的, 其中  $\mathbb{1}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的恒等映射.

一个耐人寻味的问题是,  $\mathbb{R}^n$  上的微分结构是否是唯一的? 答案超乎你的想象, 对于  $\mathbb{R}^n (n \neq 4)$  的情况, 答案是肯定的. 然而  $\mathbb{R}^4$  却有不可数无穷多种微分结构, 这被称为**异构  $\mathbb{R}^4$  现象** (exotic  $\mathbb{R}^4$ ).

下面的例子是贯彻拓扑学和几何学的重要例子, 也是我们在后续章节中会经常提到的例子.

### 例 2.1.1. 球面 $S^n$ 与圆盘 $D^n$

圆盘 (disk)  $D^n$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个实心闭单位球, 拓扑为  $\mathbb{R}^n$  的子空间拓扑, 即



$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

球面 (sphere)  $S^n$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的一个空心单位球面, 拓扑为  $\mathbb{R}^{n+1}$  的子空间拓扑, 即

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

显然有  $\partial D^n = S^{n-1}$ .  $\partial$  在拓扑语境下一般表示的是边界算符, 我们将来也会经常遇到.

我们想为  $S^n$  和  $D^n$  构造一个典范的微分结构.  $S^n$  的微分结构可以通过所谓**球极平面投影** (stereographic projection) 来构造, 设  $n, s$  分别是北极和南极, 则我们可以定义如下的两个坐标卡

$$(S^n \setminus \{n\}, p_n), \quad (S^n \setminus \{s\}, p_s)$$

其中  $p_n$  和  $p_s$  分别是从北极和南极出发的球极平面投影, 他们的定义如下:

$$\begin{aligned} p_n : S^n \setminus \{n\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} p_s : S^n \setminus \{s\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

可以验证, 这两个坐标卡是  $S^n$  上的坐标卡, 他们的转移函数是  $C^\infty$  的, 因此这两个坐标卡生成的图册是  $S^n$  上的一个光滑结构. 我们提到  $S^n$  时, 默认其为光滑流形, 且其光滑结构由上述两个坐标卡生成.

至于  $D^n$ , 由于  $D^n$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间, 因此  $D^n$  上的微分结构可以直接由  $\mathbb{R}^n$  上的微分结构诱导得到, 这也是  $D^n$  上的一个典范微分结构. 我们提到  $D^n$  时, 默认其为光滑流形, 且其光滑结构由  $\mathbb{R}^n$  上的微分结构诱导得到. 并且可以证明  $S^{n-1}$  作为  $D^n$  的边界所诱导的微分结构也是  $S^{n-1}$  上的典范微分结构.

### 2.1.2 光滑映射

我们已经定义了微分流形, 就像 Banach 空间, Hilbert 空间一样, 微分流形也是欧氏空间的推广. 与 Banach 空间和 Hilbert 空间不同的是, 微分流形并不具有线性结构, 因此我们无法定义微分流形上的线性映射, 但是我们可以定义微分流形之间的光滑映射.

我们可以先定义一个流形到实数的光滑函数.

### 定义 2.1.2. 光滑函数



设  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是定义在微分流形  $M$  上的一个连续函数, 若对于  $x \in M$ , 存在  $M$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$  使得

$$f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

是在  $\phi(x)$  处  $C^\infty$  的函数, 则称函数  $f$  在  $x$  处光滑. 若  $f$  在  $M$  上的每个点处都光滑, 则称  $f$  是  $M$  上的一个光滑函数 (smooth function).

对于  $M$  上的一个开集  $U$ , 我们可以定义  $U$  上的光滑函数为在  $U$  的每个点光滑的函数. 设  $C^\infty(U)$  是  $U$  上的所有光滑函数构成的集合, 则  $C^\infty(U)$  是一个实代数, 其加法和乘法分别由函数的加法和乘法定义.

并且, 若  $U \hookrightarrow V$  是包含关系, 则可以定义限制同态

$$\rho_{V,U}: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U)$$

由函数的限制定义. 这样,  $C^\infty$  就是一个定义在  $M$  的开集上的预层. 并且不难发现, 若给定  $U$  的开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , 则  $C^\infty(U)$  中的函数  $f_1, f_2$  若满足对任意  $\alpha$ ,

$$\rho_{U,U_\alpha}(f_1) = \rho_{U,U_\alpha}(f_2)$$

则  $f_1 = f_2$ . 若对于每个  $\alpha \in J$  给定了  $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ , 且对于任意  $\alpha, \beta \in J$  满足

$$\rho_{U_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = \rho_{U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta)$$

则存在  $f \in C^\infty(U)$  使得  $\rho_{U,U_\alpha}(f) = f_\alpha$  对任意  $\alpha \in J$  成立. 这说明  $C^\infty$  是  $M$  上的一个层.

抛开层论的语言, 我们继续可以定义微分流形之间的光滑映射.

### 定义 2.1.3. 光滑映射



设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $N$  是  $n$ -微分流形,  $f: M \rightarrow N$  是一个连续映射, 若对于  $x \in M$ , 存在  $M$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$  和  $N$  的容许坐标卡  $(V, \psi)$ , 使得

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

在  $\phi(x)$  处是  $C^\infty$  的函数, 则称  $f$  在  $x$  处光滑. 若  $f$  在  $M$  上的每个点处都光滑, 则称  $f$  是一个光滑映射 (smooth map).

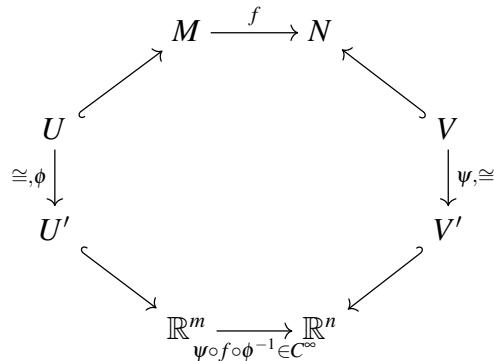


图 2.2: 光滑映射的图表表示

上面的图表表示了光滑映射的定义, 其中  $U$  和  $V$  是  $M$  和  $N$  上的容许坐标卡,  $U'$  和  $V'$  是  $\mathbb{R}^m$  和  $\mathbb{R}^n$  上的开集,  $\varphi$  和  $\psi$  分别是  $U$  和  $V$  的同胚映射,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  是一个定义在  $\mathbb{R}^m$  上的函数, 其在  $\varphi(x)$  处是  $C^\infty$  的.

光滑映射地位在微分流形的理论中至关重要, 这不止是因为它是光滑的, 我们可以定义微分流形这个范畴  $\text{Diff}$ , 其对象是  $C^\infty$  流形, 其态射就是光滑映射. 而  $C^\infty$  流形是本书的主角.

既然有同态, 同构也得安排上. 其定义已经呼之欲出了.

#### 定义 2.1.4. 微分同胚

设  $M$  和  $N$  是两个微分流形, 若存在  $M$  到  $N$  的一个双射  $f$ , 且  $f$  和  $f^{-1}$  都是光滑映射, 则称  $f$  是  $M$  和  $N$  之间的一个微分同胚 (diffeomorphism), 此时称  $M$  和  $N$  是微分同胚 (diffeomorphic) 的.



微分同胚意味着流形具有相同拓扑结构的同时, 还具有相同的微分结构. 这说明微分同胚是一个比拓扑同胚更强的概念, 因此微分同胚也比拓扑同胚更难以满足. 显然  $\text{Diff}$  是  $\text{Top}$  的一个子范畴. 然而他却不是全子范畴, 显然可以存在两个微分流形  $M$  和  $N$ , 使得  $M$  和  $N$  是拓扑同胚的, 但  $M$  和  $N$  却不是微分同胚的.

### 2.1.3 切向量与切空间 I

虽然说, 微分流形没有线性结构, 但是我们可以在微分流形上定义一个局部的线性结构, 这就是切空间 (tangent space). 切空间的定义有很多种, 其中最为常见的一种定义是通过切向量 (tangent vector) 来定义的. 切向量的定义也有很多种, 我们将介绍几种常见的定义, 从直观到抽象, 并且证明他们的等价性.

#### 定义 2.1.5. 光滑曲线

设  $M$  是一个微分流形, 一个光滑曲线 (smooth curve) 是指一个光滑映射



$$\gamma: (a, b) \rightarrow M$$

其中  $(a, b)$  是  $\mathbb{R}$  上的一个开区间. 由包含映射赋予自然的微分结构.

接下来, 想象你在一个弯曲的纸面上爬行, 类比求导, 你在某个时刻的瞬时速度就是一个切向量, 因为你被限制在了流形上, 你的路径就是一条曲线. 但他却不完全依赖于你爬行的路径, 只要你在那个时刻的瞬时速度相同, 那么你就得到了同一个切向量. 这就是我们定义切向量的第一个想法. 顺从这个直觉, 我们可以给出第一个版本的定义:

#### 定义 2.1.6. 切向量 (I)

设  $M$  是光滑流形, 考虑全体经过点  $p \in M$  的光滑曲线

$$\{\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \mid \gamma(0) = p\}$$

我们考虑  $(U, \phi)$  是包含  $p$  的一个容许坐标卡. 其中  $\phi: U \xrightarrow{\sim} \phi(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ . 我们可以将曲线  $\gamma(t)$  映射到  $\mathbb{R}^n$  上的曲线  $\phi \circ \gamma(t)$ . 我们可以定义

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \right|_{t=0}$$

的结果是一个  $\mathbb{R}^n$  中的向量. 这时我们可以定义一个等价关系  $\sim$  如下:



$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0}$$

则称  $\gamma$  的等价类  $[\gamma]$  是点  $p$  处的一个切向量 (tangent vector).

我们已经计算出

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$$

是  $\mathbb{R}^n$  中的一个向量, 为什么不直接将其作为切向量? 这是因为  $\phi$  的选取是任意的, 这么定义的切向量依赖于容许坐标卡的选取, 而通过等价关系拉回到流形上便不依赖选取. 我们可以对于这点给出具体论证:

### 定理 2.1.2.



切向量不依赖坐标卡的选取. 即, 设两条光滑曲线  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 满足  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ , 若在某个容许坐标卡  $(U, \phi)$  中

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0}$$

则在任意一个容许坐标卡  $(V, \psi)$  中, 都有

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0}$$

Pf. 设  $(V, \psi)$  是另一个包含  $p$  的容许坐标卡, 则  $V \cap U \neq \emptyset$ , 他们之间存在转移函数

$$\tau = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

并且  $\tau$  是  $C^\infty$  的. 则对于任意光滑曲线  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $(\gamma(0) = p)$ , 显然有

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\tau \circ \phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$$

由链式法则, 上式等于

$$\mathbf{J}_\tau(\phi(p)) \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$$

其中 Jacobian 取在  $\phi(p)$  是因为  $\phi(p) = \phi(\gamma(0))$ . (具体参考链式法则的一般陈述). 分别代入  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} &= \mathbf{J}_\tau(\phi(p)) \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{J}_\tau(\phi(p)) \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

这就证明了定理. □

因此, 切向量的定义是合理的, 不依赖于坐标卡的选取. 这说明切向量是一个内在的概念, 是流形本身固有的属性. 接下来我们为切空间的定义做准备, 在此之前我们要处理两个存在性的问题. 为了简化表述, 设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 定义

$$\mathcal{S}_p = \{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \mid \gamma(0) = p\}$$

下面的两个引理确保切空间中加法运算和乘法运算的良定义性.

### 引理 2.1.3.

设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ ,  $[\gamma_1], [\gamma_2]$  是  $M$  在点  $p$  处的两个切向量, 则存在  $M$  上的一条光滑曲线  $\gamma_3 \in \mathcal{S}_p$ , 使得

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_3) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0}$$

其中  $(U, \phi)$  是包含  $p$  的任一容许坐标卡. 记作  $[\gamma_3] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$ .



Pf. 选定一个包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 则

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \Big|_{t=0}\end{aligned}$$

是在  $\mathbb{R}^m$  中的两个向量, 我们的目的是构造一个光滑曲线  $\gamma_3 \in \mathcal{S}_p$ , 使得

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_3) \Big|_{t=0} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

不妨设

$$\sigma(t) = \phi(p) + t(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

显然  $\phi(U)$  是  $\mathbb{R}^m$  中的开集且  $\sigma(0) = \phi(p)$ . 对于充分小的  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  时必然有  $\sigma(t) \in \phi(U)$ . 因此我们可以定义

$$\gamma_3(t) = \phi^{-1}(\sigma(t))$$

使得  $\gamma_3(0) = p$ , 从而  $\gamma_3 \in \mathcal{S}_p$ . 并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_3) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\sigma(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}[\phi(p) + t(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)] \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

这就证明了引理. 容易证明其不依赖坐标卡的选取. □

第二个引理完全就是上一个的翻版:

### 引理 2.1.4.

设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ ,  $[\gamma]$  是  $M$  在点  $p$  处的一个切向量,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则存在  $M$  上的一条光滑曲线  $\gamma_\lambda \in \mathcal{S}_p$ , 使得

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_\lambda) \Big|_{t=0} = \lambda \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$$

其中  $(U, \phi)$  是包含  $p$  的任一容许坐标卡. 记作  $[\gamma_\lambda] = \lambda[\gamma]$ .



Pf. 选定一个包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 则

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$$

是在  $\mathbb{R}^m$  中的一个向量, 我们的目的是构造一个光滑曲线  $\gamma_\lambda \in \mathcal{S}_p$ , 使得

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_\lambda) \Big|_{t=0} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

不妨设

$$\sigma(t) = \phi(p) + t(\lambda \cdot \mathbf{v})$$

显然  $\phi(U)$  是  $\mathbb{R}^m$  中的开集且  $\sigma(0) = \phi(p)$ . 对于充分小的  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  时必然有  $\sigma(t) \in \phi(U)$ . 因此我们可以定义

$$\gamma_\lambda(t) = \phi^{-1}(\sigma(t))$$

使得  $\gamma_\lambda(0) = p$ , 从而  $\gamma_\lambda \in \mathcal{S}_p$ . 并且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_\lambda)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\sigma(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}[\phi(p) + t(\lambda \cdot \mathbf{v})]|_{t=0} \\ &= \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

这就证明了引理. 容易证明其不依赖坐标卡的选取.  $\square$

### 定义 2.1.7. 切空间 (I)



设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 则称点  $p$  处的所有切向量构成的集合

$$T_p M = \{ [\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{S}_p \}$$

是点  $p$  处的切空间 (tangent space). 切空间  $T_p M$  上的加法和数乘分别由 [定理 2.1.3] 和 [定理 2.1.4] 给出.

下面我们证明一个重要的定理

### 定理 2.1.5.



设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 则点  $p$  处的切空间  $T_p M$  是一个  $m$ -维实向量空间.

Pf. 不妨先选取  $p$  附近的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 由定义, 我们可以定义一个自然的映射

$$\theta_\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$[\gamma] \mapsto \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0}$$

我们来证明  $\theta_\phi$  是双射, 由切向量的定义, 若两个等价类  $[\gamma_1]$  和  $[\gamma_2]$  满足  $\theta_\phi([\gamma_1]) = \theta_\phi([\gamma_2])$ , 则由定义,  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ . 这说明  $\theta_\phi$  是单射. 另一方面, 对于任意  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ , 我们仍然可以构造

$$\sigma(t) = \phi(p) + t\mathbf{v}$$

并且由于  $\phi(U)$  是  $\mathbb{R}^m$  中的一个开集, 因此对于充分小的  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  时必然有  $\sigma(t) \in \phi(U)$ . 因此我们可以定义

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\sigma(t))$$

使得  $\gamma(0) = p$ , 从而  $\gamma \in \mathcal{S}_p$ . 并且

$$\theta_\phi([\gamma]) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sigma(t)|_{t=0} = \mathbf{v}$$

这说明  $\theta_\phi$  是满射. 因此  $\theta_\phi$  是双射. 由运算的定义,  $\theta_\phi$  还是一个线性映射. 因此  $T_p M$  与  $\mathbb{R}^m$  同构, 从而  $T_p M$  是一个  $m$ -维实向量空间.  $\square$

至此, 我们通过曲线的方式定义了切向量, 非常直观, 但是并没有揭示切向量的本质. 下面我们将介绍另外两种定义切向量的方式, 他们虽然看起来很抽象, 但是却揭示了切向量的本质, 并且与我们通过曲线定义的切向量等价.

### 2.1.4 切向量与切空间 II

为了简化表述, 设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 令  $C_p^\infty$  表示所有在  $p$  的邻域上有定义且在  $p$  处光滑的函数构成的集合. 显然  $C_p^\infty$  是一个实代数, 其加法和乘法分别由函数的加法和乘法定义.

#### 定义 2.1.8. 切向量 (II)

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 若线性映射  $v: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  满足



T1.  $v$  是线性的, 即对于任意  $f, g \in C_p^\infty$  和  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 都有

$$v(\lambda f + g) = \lambda v(f) + v(g)$$

T2. (Leibniz 律) 对于任意  $f, g \in C_p^\infty$ , 都有

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

则称  $v$  是点  $p$  处的一个切向量 (tangent vector).

这是切向量的一个较为现代的定义, 也是我们在后续章节中会经常使用的定义. Leibniz 律的物理意义是, 切向量  $v$  作用在函数  $f$  上的结果  $v(f)$  可以看作是函数  $f$  在点  $p$  处沿着切向量  $v$  的方向的导数, 因此对于函数的乘积  $fg$ , 切向量  $v$  作用在  $fg$  上的结果  $v(fg)$  就应该满足乘积法则.

或者, 我们可以说, 切向量  $v$  的本质就是求导的映射, 将函数打到其在点  $p$  处的导数上

#### 例 2.1.2.

设  $M$  是一个  $m$ -微分流形,  $p \in M$ ,  $v$  是  $p$  处的一个切向量. 试着证明若  $f \in C_p^\infty$  是常数函数, 则  $v(f) = 0$ .



Pf. 设  $f \in C_p^\infty$  是常数函数, 则对于任意  $g \in C_p^\infty$ , 都有

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

由于  $f$  是常数函数, 因此  $f(p)$  是一个常数, 记作  $c$ , 则上式等价于

$$v(cg) = cv(g) + g(p)v(f)$$

又由于  $v$  是线性的, 上式等价于

$$cv(g) = cv(g) + g(p)v(f)$$

从而对于任意  $g \in C_p^\infty$ , 都有  $g(p)v(f) = 0$ . 这说明  $v(f) = 0$ .  $\square$

#### 定义 2.1.9. 切空间 (II)

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 则称点  $p$  处的所有切向量构成的集合



$$T_p M = \{ v: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ 满足 T1 和 T2} \}$$

是点  $p$  处的切空间 (tangent space). 切空间  $T_p M$  上的加法和数乘分别由函数值的加法和数乘定义.

下面是关于切向量理论的一个核心定理, 证明了我们通过曲线定义的切向量和通过导数定义的切向量在某些意义上是等价的.



### 定理 2.1.6.

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 记  $\mathcal{S}_p/\sim$  为我们通过曲线定义的切空间,  $T_p M$  为我们通过导数定义的切空间, 则存在一个自然的线性同构

$$\begin{aligned}\theta : \mathcal{S}_p/\sim &\longrightarrow T_p M \\ [\gamma] &\longmapsto \left( v : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} \right)\end{aligned}$$

Pf. 首先验证良定义性, 设  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ , 则对于任意  $f \in C_p^\infty$ , 都有

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2(t)) \Big|_{t=0}$$

因此  $\theta$  是良定义的. 其次验证  $\theta$  是线性的. 设  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathcal{S}_p/\sim$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则对于任意  $f \in C_p^\infty$ , 都有

$$\begin{aligned}\theta([\gamma_1] + [\gamma_2])(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_3(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \theta([\gamma_1])(f) + \theta([\gamma_2])(f)\end{aligned}$$

其中  $\gamma_3$  是满足  $[\gamma_3] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$  的曲线, 其存在性由 [定理 2.1.3] 保证. 同样的, 设  $\gamma_\lambda$  是满足  $[\gamma_\lambda] = \lambda[\gamma_1]$  的曲线, 其存在性由 [定理 2.1.4] 保证, 则

$$\begin{aligned}\theta(\lambda[\gamma_1])(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_\lambda(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \lambda \cdot \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \lambda \cdot \theta([\gamma_1])(f)\end{aligned}$$

这说明  $\theta$  是线性的. 最后验证  $\theta$  是双射. 如果  $\theta([\gamma_1]) = \theta([\gamma_2])$ , 则对于任意  $f \in C_p^\infty$ , 都有  $v_1(f) = v_2(f)$ . 我们不妨选取分量函数  $\phi^i$ , 其中  $(U, \phi)$  是包含  $p$  的一个容许坐标卡,  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ . 则

$$\frac{d}{dt}(\phi^i \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi^i \circ \gamma_2(t)) \Big|_{t=0}$$

对所有分量成立, 从而对导数向量  $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \Big|_{t=0}$  成立. 因此由定义  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ . 这说明  $\theta$  是单射.

另一方面, 对于任意  $v \in T_p M$ , 我们仍然可以选取一个包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 其中  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ , 则对于任意  $i = 1, \dots, m$ , 都有  $v(\phi^i) \in \mathbb{R}$ . 因此我们可以定义

$$\sigma(t) = (\phi^1(p) + t \cdot v(\phi^1), \dots, \phi^m(p) + t \cdot v(\phi^m))$$

显然  $\phi(U)$  是  $\mathbb{R}^m$  中的一个开集且  $\sigma(0) = \phi(p)$ . 因此对于充分小的  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  时必然有  $\sigma(t) \in \phi(U)$ . 因此我们可以定义

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\sigma(t))$$

使得  $\gamma(0) = p$ , 从而  $\gamma \in \mathcal{S}_p$ . 并且对于任意  $f \in C_p^\infty$ , 都有

$$\begin{aligned}\theta([\gamma])(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} && \text{定义} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1} \circ \sigma(t)) \Big|_{t=0} && \sigma \text{ 的定义} \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{d}{dt}(\sigma^i(t)) \Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) \right) && \text{链式法则}, \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( v(\phi^i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) \right) && \sigma \text{ 的定义}\end{aligned}$$

证明的关键在于证明

$$\sum_{i=1}^m \left( v(\phi^i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) \right) = v(f)$$

不妨设  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  的函数  $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$ , 则由 Hadamard 引理 [定理 1.2.1], 有

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(\phi(p)) + \sum_{i=1}^m (x^i - \phi^i(p)) \cdot g_i(x) \quad (\text{I})$$

其中  $g_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  是  $C^\infty$  函数, 并且

$$g_i(\phi(p)) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\phi(p)) = \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p)$$

将 (I) 拉回到  $U$ , 令  $x = \phi(q)$ , 则对于任意  $q \in U$ , 有

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m (\phi^i(q) - \phi^i(p)) \cdot (g_i \circ \phi)(q) \quad (\text{II})$$

将  $v$  作用在 (II) 上, 则由线性性,

$$v(f) = v(f(p)) + \sum_{i=1}^m v((\phi^i(q) - \phi^i(p)) \cdot (g_i \circ \phi)) \quad (\text{III})$$

由于  $f(p)$  是常数, 显然  $v(f(p)) = 0$ . 由 Leibniz 律,

$$v((\phi^i(q) - \phi^i(p)) \cdot (g_i \circ \phi)) = \underbrace{(\phi^i(p) - \phi^i(p)) \cdot v(g_i \circ \phi)}_0 + (g_i \circ \phi)(p) \cdot v(\phi^i - \phi^i(p))$$

由于  $v(\phi^i - \phi^i(p)) = v(\phi^i)$ , 上式等于

$$v(f) = \sum_{i=1}^m v(\phi^i) \cdot (g_i \circ \phi)(p)$$

代入  $g_i$  定义, 则

$$v(f) = \sum_{i=1}^m \left( v(\phi^i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) \right)$$

至此,  $\theta$  是满射. 因此  $\theta$  是双射. 这就证明了定理.  $\square$



### 定理 2.1.7. 切空间的基

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ ,  $\dim T_p M = m$  且

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^m} \Big|_p \right\}$$

是  $T_p M$  的一组基, 其中  $(U, \phi)$  是包含  $p$  的一个容许坐标卡,  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ . 且定义

$$\frac{\partial f}{\partial \phi^i} \Big|_p := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)}$$

Pf. 选定一个包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 我们再考虑  $\mathcal{S}/\sim$  中的一组基. 这个讨论是相对容易的, 我们只需选取  $\mathbb{R}^m$  的一组基

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

其中  $e_i$  是  $\mathbb{R}^m$  中的第  $i$  个标准基向量, 则对于每个  $e_i$ , 我们用构造  $\sigma(t) = (\phi^1(p) + t e_i^1, \dots, \phi^m(p) + t e_i^m)$  的方法可以构造一个光滑曲线  $\gamma_i \in \mathcal{S}_p$ , 使得

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_i) \Big|_{t=0} = e_i$$

这样就构造了  $\mathcal{S}/\sim$  中的一组基

$$\{[\gamma_1], \dots, [\gamma_m]\}$$

由 [定理 2.1.6], 我们可以将这组基打到  $T_p M$  上, 其中  $[\gamma]$  的像为

$$\begin{aligned} v_i(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt}(\sigma^j(t))|_{t=0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^j}(p) \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left( e_i^j \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi^j}(p) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \phi^i}(p) \end{aligned}$$

这就证明了

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^m}|_p \right\}$$

是  $T_p M$  的一组基.  $\square$

上面的定理就很明确地说明了切向量作为求导映射的本质. 接下来我们来讨论不同坐标卡之间的切空间基的关系. 设  $(U, \phi)$  和  $(V, \psi)$  是包含  $p$  的两个容许坐标卡, 其中  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ ,  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ , 并且两组坐标卡指定的切空间基分别为

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^m}|_p \right\}$$

和

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \psi^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \psi^m}|_p \right\}$$

则对于任意  $i = 1, \dots, m$ , 都有

$$\frac{\partial}{\partial \psi^i}|_p = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \phi^j}{\partial \psi^i}|_p \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^j}|_p \right)$$

其中

$$\frac{\partial \phi^j}{\partial \psi^i}|_p = \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^j}{\partial x^i}|_{\psi(p)}$$

这说明我们从一个坐标卡切换到另一个坐标卡时, 切空间基的变换的矩阵恰好就是转移函数  $\phi \circ \psi^{-1}$  的 Jacobian 矩阵.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

设  $v \in T_p M$ , 则他们在基底下有表达式

$$v = \sum_{i=1}^m v_\phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} = \sum_{i=1}^m v_\psi^i \frac{\partial}{\partial \psi^i}$$

则

$$\sum_{i=1}^m v_\phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} = \sum_{i,j=1}^m v_\psi^j \frac{\partial \phi^i}{\partial \psi^j} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

从而

$$\begin{pmatrix} v_\phi^1 \\ \vdots \\ v_\phi^m \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} v_\psi^1 \\ \vdots \\ v_\psi^m \end{pmatrix}$$

这表明切向量的分量在基底变换时遵循反变规律.

## 2.1.5 余切向量与余切空间

余切向量和余切空间是切向量和切空间的对偶概念，他们在微分几何中同样重要。

### 定义 2.1.10. 余切空间和余切向量

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 则切空间  $T_p M$  的对偶空间  $T_p^* M = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$  称为点  $p$  处的余切空间 (cotangent space), 其元素称为余切向量 (cotangent vector).

对于  $\alpha \in T_p^* M$  和  $v \in T_p M$ ,  $\alpha(v)$  是  $\alpha$  作用在  $v$  上的结果, 是一个实数. 习惯上记作  $\langle \alpha, v \rangle$ . 其可以看作定义在  $T_p^* M \times T_p M$  上的一个双线性函数.



我们该如何直观地理解余切向量呢? 事实上, 他可以视作是微分概念的推广.

### 定义 2.1.11. 光滑函数的微分

对于  $f \in C_p^\infty$ , 其在点  $p$  处的微分 (differential)  $df \in T_p^* M$  是满足



$$df(v) = \langle df, v \rangle = v(f)$$

的切向量.

由于  $T_p^* M$  是  $T_p M$  的对偶空间, 因此可以定义其上的一组对偶基. 回顾对偶基的定义, 选定一个包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 其中  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ , 则切空间  $T_p M$  上的一组基为

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^m} \Big|_p \right\}$$

因此, 余切空间  $T_p^* M$  上的一组对偶基  $\{e^1, \dots, e^m\}$  满足

$$\left\langle e^i, \frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right\rangle = \delta_j^i$$

其中  $\delta_j^i$  是 Kronecker delta, 当  $i = j$  时  $\delta_j^i = 1$ , 否则  $\delta_j^i = 0$ . 由微分的定义, 上式等价于

$$e^i \left( \frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$$

显然

$$\left\langle d\phi^i, \frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right\rangle = d\phi^i \left( \frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial \phi^i}{\partial \phi^j} \Big|_p = \delta_j^i$$

由对偶基的定义,  $\{d\phi^1, \dots, d\phi^m\}$  就是  $T_p^* M$  上的一组对偶基. 这说明余切空间  $T_p^* M$  上的一组对偶基可以由坐标函数的微分构成. 这也就自然地说明了下面的定理

### 定理 2.1.8.



设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 则点  $p$  处的余切空间  $T_p^* M$  上的一组基可以由包含  $p$  的一个容许坐标卡  $(U, \phi)$  的坐标函数的微分构成, 即

$$\{d\phi^1, \dots, d\phi^m\}$$

下面的定理揭示了余切向量的线性表示性质

### 定理 2.1.9.

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 选取  $p$  附近的容许坐标卡  $(U, \phi)$ ,  $\alpha \in T_p^*M$ , 则  $\alpha$  可以唯一表示为

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right) \cdot d\phi^i$$

Pf. 由于对任意的  $v \in T_p M$ , 都有

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

有

$$\alpha(v) = \alpha \left( \sum_{i=1}^m v^i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right) = \sum_{i=1}^m v^i \cdot \alpha \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right)$$

由于

$$v^i = v(\phi^i) = d\phi^i(v)$$

上式等价于

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right) \cdot d\phi^i(v)$$

从而

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right) \cdot d\phi^i$$

□

### 推论 2.1.10.

设  $M$  是  $m$ -微分流形,  $p \in M$ , 选取包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 则点  $p$  处的余切向量  $df$  满足

$$df|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \phi^i} \Big|_p \cdot d\phi^i$$

这个定理表明, 我们可以完全以全微分的视角来理解余切向量, 余切向量  $df$  的分量  $df \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right)$  就是函数  $f$  在点  $p$  处沿着坐标函数  $\phi^i$  的方向的偏导数  $\frac{\partial f}{\partial \phi^i} \Big|_p$ .

## 2.1.6 切映射与余切映射

(余) 切映射是微分几何中非常重要的概念, 他们描述了微分流形之间的映射在切空间和余切空间上的诱导映射. 说白了就是对流形之间的映射进行微分.

### 定义 2.1.12. 切映射

设  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射. 首先有一个自然的映射

$$\begin{aligned} f^*: C_{f(p)}^\infty &\rightarrow C_p^\infty \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

这样对任何切向量  $v \in T_p M$ , 都可以定义映射

$$\begin{aligned} T_p f: T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ v &\mapsto v \circ f^* \end{aligned}$$

就称之为点  $p$  处的切映射 (tangent map). 其本质上是将切向量  $v$  作用在函数  $g \in C_{f(p)}^\infty$  上的结果  $v(g \circ f)$  看作是切向量  $T_p f(v)$  作用在函数  $g$  上的结果.



用一句话概括, 就是  $T_p f(v)(g) = v(g \circ f)$ .

### 定理 2.1.11.



切映射是线性的, 即对于任意  $v, w \in T_p M$  和  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 都有

$$T_p f(v+w) = T_p f(v) + T_p f(w)$$

Pf. 设  $g \in C_{f(p)}^\infty$ , 则

$$\begin{aligned} T_p f(v+w)(g) &= (v+w)(g \circ f) && \text{定义} \\ &= v(g \circ f) + w(g \circ f) && \text{线性性} \\ &= T_p f(v)(g) + T_p f(w)(g) && \text{定义} \end{aligned}$$

这就证明了切映射的可加性. 对于其次性, 则

$$\begin{aligned} T_p f(\lambda v)(g) &= (\lambda v)(g \circ f) && \text{定义} \\ &= \lambda v(g \circ f) && \text{线性性} \\ &= \lambda T_p f(v)(g) && \text{定义} \end{aligned}$$

这就证明了切映射的其次性. 因此切映射是线性的.  $\square$

既然切映射是从  $T_p M$  到  $T_{f(p)} N$  的线性映射, 两个空间都是有限维的, 我们自然会想用矩阵分解该切映射来窥探其本质. 选取包含  $p$  的一个容许坐标卡  $(U, \phi)$ , 其中  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ , 以及包含  $f(p)$  的一个容许坐标卡  $(V, \psi)$ , 其中  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ , 则切空间  $T_p M$  和  $T_{f(p)} N$  上的基分别为

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^m} \Big|_p \right\}$$

和

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \psi^1} \Big|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial \psi^n} \Big|_{f(p)} \right\}$$

线性映射完全由其在基底上的表达式决定, 因此我们来计算  $T_p f$  在基底上的表达式. 对于任意  $i = 1, \dots, m$ , 设

$$T_p f \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n A_i^j \frac{\partial}{\partial \psi^j} \Big|_{f(p)} \quad (\text{I})$$

写成矩阵乘法的形式, 则

$$\begin{pmatrix} T_p f \left( \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p \right) \\ \vdots \\ T_p f \left( \frac{\partial}{\partial \phi^m} \Big|_p \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & \cdots & A_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \psi^1} \Big|_{f(p)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \psi^n} \Big|_{f(p)} \end{pmatrix}$$

回到 (I), 则对于任意  $g \in C_{f(p)}^\infty$ , 都有

$$\begin{aligned} T_p f \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p \right) (g) &= \left( \sum_{j=1}^n A_i^j \frac{\partial}{\partial \psi^j} \Big|_{f(p)} \right) (g) && \text{定义} \\ &= \sum_{j=1}^n A_i^j \cdot \frac{\partial g}{\partial \psi^j} \Big|_{f(p)} && \text{定义} \end{aligned}$$

另一方面,由切映射的定义,有

$$T_p f \left( \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p \right) (g) = \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p (g \circ f)$$

展开定义得

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p (g \circ f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (g \circ f \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)}$$

## 第三章 切丛