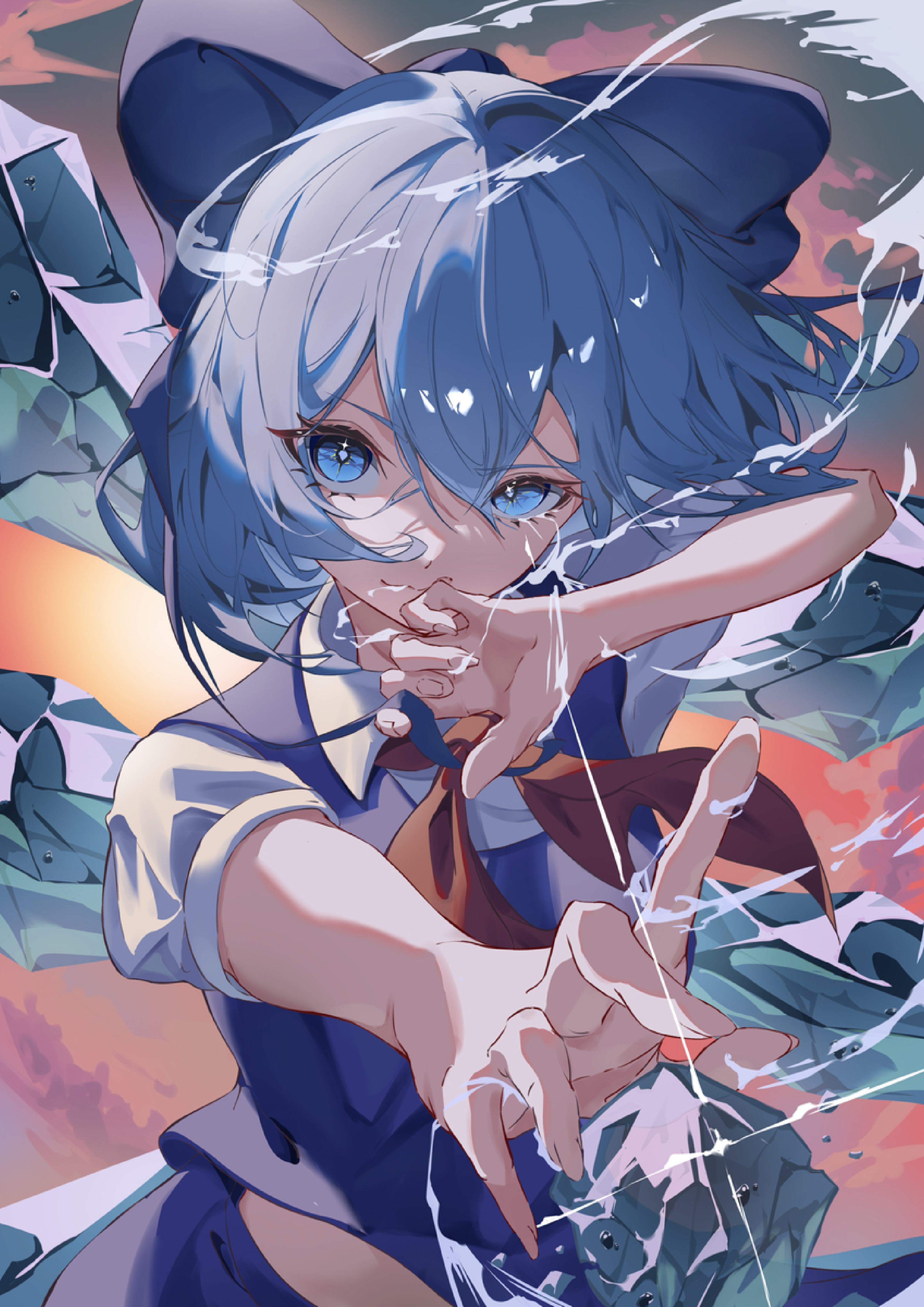


微分流形

xiaou0

2026 年 2 月 9 日

封面 PID:136608814d

特别鸣谢

琪露诺 | 幻想乡大学纯粹与应用数学博士

讨论群

讨论群号 (QQ): 244425765

作者简介

xiaou0 是普通高二学生, 数学爱好者. 总想写点什么于是就有了这本书.
xiaou0 的数学水平还谈不上很强, 所有内容都基于目前为止积累的理解.
xiaou0 希望你能够及时纠正 TA 的错误, 并和 TA 讨论更多更有趣的数学 ww.

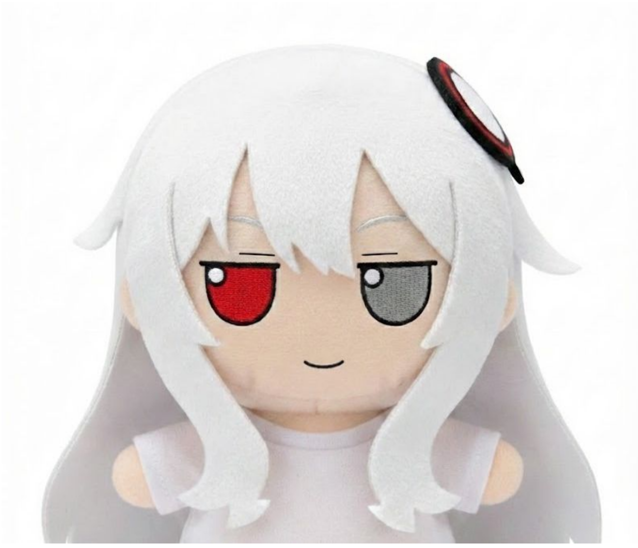


图 1: xiaou0 绝美自拍

第零章　序

第一章　前置与导论

1.1　代数部分

本书将默认读者熟悉基本的线性代数内容, 如线性空间, 线性映射, 矩阵等. 在本书中, 我们绝大多数情况下都针对 $\mathbb{R}^n$ 进行讨论, 但我们也会在一些地方提及更一般的线性空间.

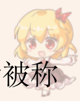
若你对于多重线性代数的内容不太熟悉, 我们也会给出一些简单的介绍.

我出于个人习惯, 喜欢使用很多偏代数的记号, 希望大家能够习惯.

1.1.1　仿射空间

在一切开始之前, 我们将介绍几何中比较重要的几类空间, 仿射空间可以说就是**忘记原点**的线性空间, 也就是说, 仿射空间中的点没有一个特殊的点被称为原点. 仿射空间中的点可以通过向量来描述, 但我们不能直接对点进行加法运算, 只能对向量进行加法运算. 于是我们得建立一种点到点, 点到向量, 向量到点的关系. 因此我们引入了仿射空间的概念.

定义 1.1.1. 仿射空间



设 V 是给定的线性空间, 所谓**仿射空间** (affine space) $\mathbb{A}$ 是一个非空的集合, 其中的元素被称为**点**, 并且存在一个减法映射

$$-: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$$

他将任何一组**有序**点对映射到向量 $p-q \in V$, 满足以下条件:

A1 对任意 $p \in \mathbb{A}$, $p-p=0$.

A2 对任意 $p \in \mathbb{A}, v \in V$, 存在唯一的 $q \in \mathbb{A}$ 使得 $p-q=v$.

A3 对任意 $p,q,r \in \mathbb{A}$, $(p-q)+(q-r)=p-r$.

我们称 V 为其伴随的线性空间, 通常情况下我们会把 $q-p$ 记作 $\vec{pq}$. 若在仿射空间中选定原点 o, 那么他和线性空间中的向量自然地一一对应.

在仿射空间 $\mathbb{A}$ 中, 我们进行了去心的操作, 但这并不代表心不重要, 而是允许我们自由地选取一个点作为原点, 从而使得仿射空间中的点和线性空间中的向量一一对应.

标架的概念就允许我们规范地选取一个点决定的线性结构, 从而使得仿射空间中的点和线性空间中的向量一一对应.

定义 1.1.2. 标架

设 $\mathbb{A}$ 是一个仿射空间, $o \in \mathbb{A}$ 是一个点, $e_1, \ldots, e_n$ 是伴随的有限维线性空间 V 的一组基, 则称 $(o; e_1, \ldots, e_n)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个**标架** (frame).

若该基是 V 的一个组正交基 (要求 V 具有内积结构), 则称该标架为**正交标架** (orthogonal frame).

1.1.2 泛性质

万有性质/泛性质 (universal property) 是代数学中一个核心概念. 直观地理解的话, 万有性质就是通过「一个对象在范畴中的身份」来确定一个对象.

举一个生动的比方, 如何定义「幻想乡最强」这个概念? 我们可以用两种角度去描述.

1. (内部定义) 幻想乡最强就是幻想乡里 HP 和 STR 最高的存在, 那就是我琪露诺哒!
2. (泛性质定义) 幻想乡最强就是那个「任何和她对战的幻想乡住民, 都会输给她」的存在, 那就是我琪露诺哒!

在范畴论中, 我们并不关心对象的「内部结构」, 也就是第一种定义方式. 我们只关心对象在范畴中的「身份」, 也就是第二种定义方式. 因此我们可以用万有性质来定义范畴中的对象. 例如在集合范畴 Set 中, 我们可以用万有性质来定义笛卡尔积:

1. (内部定义) 集合 A 和 B 的笛卡尔积 $A\times B$ 定义为全体有序对 (a,b) 组成的集合, 其中 $a\in A, b\in B$.
2. (泛性质定义) 集合 A 和 B 的笛卡尔积 $A\times B$ 定义为满足如下万有性质的对象: 存在投影映射 $\pi_A : A\times B\to A, \pi_B : A\times B\to B$, 使得对任意集合 X 及映射 $f : X\to A, g : X\to B$, 存在唯一的映射 $h : X\to A\times B$, 使得 $\pi_A h = f, \pi_B h = g$. 如下图所示

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, "f"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
& A\times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

通过上一个例子我们会发现, 由于范畴并不能有效区分集合中的元素, 因此我们通过泛性质构造的对像并不一定是我们通过内部定义的那一个「特定的对象」, 但取而代之, 它们在范畴中是「等价」的, 也就是说它们一定是同构的. 这一点在上例中并不难以验证.

回到第一个例子中, 假如除了琪露诺, 大妖精也是「幻想乡最强」, 那么任何幻想乡~~老妖怪~~美少女和她对战都会输, 那么可以得出琪露诺和大妖精对战必然是双方皆输, 由此类比范畴中的概念就是同构.

一般情况下, 泛性质会描述为「一个对象 U 满足, 对任何同样满足某条件的对象 X, 都**存在唯一的态射** $u : U\to X$ (或 $X\to U$) 使得其相关的图表交换」. 这样的句式将在代数里经常见到.

还是回到第一个例子, 此时琪露诺满足的泛性质就可以描述成: 「琪露诺是幻想乡最强, 因为对任何其他幻想乡中的强者, 琪露诺一定能够打败她」, 如下图所示

$$\begin{tikzcd}
& \text{琪露诺} \arrow[rr, dashed, "\exists!\text{打败}"] \arrow[dl, "\text{打败}"] \arrow[dr, "\text{打败}"] \arrow[drrr, "\text{打败}"] & & \text{博丽灵梦} \arrow[dlll, "\text{打败}"] \arrow[dl, "\text{打败}"] \arrow[dr, "\text{打败}"] & \\
\text{雾雨魔理沙} & & \text{芙兰朵露} & & \text{幽幽子}
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

在微分几何中, 泛性质的概念也非常重要, 张量积就是一个典型的例子, 我们会在后续章节中介绍张量积的定义, 以及它的万有性质.

1.2 分析部分

数学分析的内容在本书中也会被频繁使用, 但我们不会过多地涉及分析的细节, 只会在必要的时候进行简单的介绍. 我们会假设读者熟悉基本的微积分内容, 如极限, 连续, 可微等.

多元微积分的前置是必要的, 因为我们需要在多维空间中进行微分和积分运算, 以及处理多元函数的极限和连续性等问题.

1.2.1 多元函数的微分

这一部分的内容你应该已经相当熟悉, 但我们还是会简单地回顾一下多元函数的微分的定义和性质, 以便后续章节中能够更好地理解相关内容.

定义 1.2.1. Jacobian 矩阵

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是一个多元函数, 则称 f 的 Jacobian **矩阵** (Jacobian matrix) 是一个 $m\times n$ 的矩阵, 记作 $\mathbf{J}_f$, 其第 i 行第 j 列的元素为 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, 其中 f_i 是 f 的第 i 个分量函数, x_j 是输入变量的第 j 个分量. 即

$$\mathbf{J}_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Jacobian 矩阵本质上就是全微分的矩阵表示, 其中全微分是一个线性算子.

多元光滑函数是我们定义微分流形的基础:

定义 1.2.2. 光滑函数

设 $f:X\to Y$, 其中 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $Y\subset\mathbb{R}^m$ 是开集, 如果 f 的所有分量函数 f_i 都是光滑函数, 即在 $\mathbb{R}^n$ 上具有任意阶的连续偏导数, 则称 f 是一个**光滑函数** (smooth function).

1.3 拓扑部分

点集拓扑的基本理念也是定义微分流形的基础, 因此我们也会在本书中频繁使用点集拓扑的内容. 我们不会过多地涉及点集拓扑的细节, 只会在必要的时候进行简单的介绍.

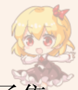
1.3.1 拓扑流形

拓扑流形是所有流形的模板, 他的核心机制是, 赋予每一个点的局部结构与欧几里得空间相同, 从而使得我们能够在流形上进行类似微分运算等操作.

定义 1.3.1. 拓扑流形

设 M 是一个集合, 如果 M 满足以下条件, 则称 M 是一个**拓扑流形** (topological manifold):

1. M 是一个 Hausdorff 空间.



2. M 是一个第二可数空间.
3. 对任意 $p \in M$, 存在一个开邻域 U 和一个同胚 $\phi : U \to V$, 其中 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 则称 (U, ϕ) 是 M 的一个**局部坐标卡** (local chart).

此时称 M 是一个 n-拓扑流形, 其中 n 被称为 M 的**维数** (dimension).

第二章　微分流形

微分流形是微分几何的核心对象, 也是我们在本章中要重点讨论的对象. 我们了解了拓扑流形, 接下来我们要在拓扑流形的基础上, 加入一些微分结构, 从而得到微分流形.

如果你熟悉**层论** (sheaf theory) 的话, 微分流形无非是一种赋环空间 $(M, \mathscr{O}_M)$, 其中 M 是一个拓扑流形, $\mathscr{O}_M$ 则是由 C^∞ 函数构成的层. 我们会在 de Rham 上同调的讨论中回到并更进一步讨论这个定义的优势.

但我们在本章中并不打算使用层论的语言, 因此我们将从一个更为直观的角度来定义微分流形.

2.1　微分流形

2.1.1　尝试定义微分流形

我们现在手上有拓扑流形这个工具, 他满足每个点都存在邻域和 $\mathbb{R}^n$ 同胚, 但这样定义的拓扑流形很可能是粗糙不堪的, 这并不符合我们的美学, 我们的想法是在上面附加一种能够描述光滑结构的东西, 从而得到微分流形.

在欧氏空间中, 我们知道如何定义光滑函数 [定义 1.2.2], 以及光滑函数的微分, 以及微分的链式法则等. 仿照我们定义拓扑流形的哲学, 我们可以在每个点的邻域上定义一个光滑结构, 也就是说, 在每个点的邻域上定义一个同胚到 $\mathbb{R}^n$ 的图册.

我们想更进一步讨论流形的坐标卡, 我们知道坐标卡本质是一个邻域 U 和同胚映射 ϕ 的二元组. 其中

$$\phi : U \to \phi(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

是同胚, 此时对于点 $p \in U$, 我们称

$$\Big(\pi_1(\phi(p)), \ldots, \pi_n(\phi(p))\Big)$$

为点 p 在该坐标卡下的**坐标** (coordinate), 其中 π_i 是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的第 i 个分量的自然投影. 严格来说, 这种坐标依赖于同胚的选取, 因此简写我们可记作

$$(x_\phi^1, \ldots, x_\phi^n)$$

若无歧义, 则可记为

$$(x^1, \ldots, x^n)$$

流形中, 我们用坐标卡彻底覆盖了整个流形, 但是一个显然的问题是, 这些坐标卡是否互相矛盾? 也就是说, 在两个坐标卡的交集上, 这两个坐标卡的坐标变换是否满足光滑性?

不妨设 M 是 n-拓扑流形, (U, ϕ) 和 (V, ψ) 是 M 上的两个坐标卡, 其中 $U \cap V \neq \emptyset$. 那么我们可以定义 $\phi \circ \psi^{-1}$ 和 $\psi \circ \phi^{-1}$ 这两个映射, 他们分别是 $\psi(V)$ 和 $\phi(U)$ 上的映射, 称之为**转移函数** (transition function). 如下图所示, 这两个转移函数的图表表示如下:

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "\psi{,}\cong"] & \psi(V) \arrow[d, shift right, "\phi\circ\psi^{-1}"'] \arrow[dr, hook] & \\
U\cap V \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & \mathbb{R}^n \\
 & U \arrow[r, "\phi{,}\cong"'] & \psi(U) \arrow[u, shift right, "\psi\circ\phi^{-1}"'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

图 2.1: $\phi\circ\psi^{-1}$ 和 $\psi\circ\phi^{-1}$ 的图表表示

此时两个转移函数都是形如 $\mathbb{R}^n\supset X\to Y\subset\mathbb{R}^n$ 的映射, 他们的光滑性就可以通过我们在欧氏空间中定义的光滑函数来定义了. 此时若两个函数都是 $C^\dagger$ 的, 则称这两个坐标卡是$C^\dagger$ **兼容** ($C^\dagger$-compatible) 的. 也就是说, 在两个坐标卡的交集上, 这两个坐标卡的转移函数都是 $C^\dagger$ 的. 其中 $\dagger$ 可以是 0 (连续), 1 (可微), ∞ (光滑), ω (解析) 等等.

特别地我们可以简单地规定, 若坐标卡的交集为空集, 那么他们是任意阶相容的.

我们称流形 M 的一族坐标卡 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ 是一个**图册** (atlas), 当且仅当 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖.

就像我们在拓扑空间中指定开集一样, 我们在流形上指定容许坐标卡也是同样的原理, 现在我们可以给出微分流形的定义了.

定义 2.1.1. 微分流形

设拓扑流形 M 上的图册 $\mathscr{A}$, 若

M1. $\mathscr{A}$ 中的任意两个坐标卡都是 $C^\dagger$ 兼容的;

M2. $\mathscr{A}$ 是 $C^\dagger$ 极大的, 即若 (U,ϕ) 是一个坐标卡, 且与 $\mathscr{A}$ 中的任意一个坐标卡都是 $C^\dagger$ 兼容的, 则 $(U,\phi)\in\mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 是 M 上的一个$C^\dagger$ **微分结构** ($C^\dagger$-differential structure), $(M,\mathscr{A})$ 是一个$C^\dagger$ **微分流形** ($C^\dagger$-differential manifold), 简称$C^\dagger$ **流形**. 称 $\mathscr{A}$ 中的坐标卡为 M 的**容许坐标卡** (allowable charts).

其中, $\dagger$ 可以是 0 (连续), 1 (可微), ∞ (光滑), ω (解析) 等等.

显然, 由于 $\mathscr{A}$ 是极大的, 我们有如下定理

定理 2.1.1.

设 M 是一个拓扑流形, $\mathscr{A}$ 是 M 上的一个 $C^\dagger$-相容的图册, 则存在唯一一个 $C^\dagger$-微分结构 $\mathscr{A}'$ 使得 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'$.

Pf. 我们先证明存在性, 设 $\mathscr{A}$ 是给定的 $C^\dagger$-相容的图册, 则我们可以定义

$$\mathscr{A}'=\{(U,\phi)\mid(U,\phi)\text{ 与 }\mathscr{A}\text{相容}\}$$

此时 $\mathscr{A}'$ 是 $C^\dagger$-相容的, 且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'$. 若 (V,ψ) 与 $\mathscr{A}'$ 相容, 由于 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'$, 则 (V,ψ) 与 $\mathscr{A}$ 中的任意一个坐标卡都相容, 因此 $(V,\psi)\in\mathscr{A}'$. 这说明 $\mathscr{A}'$ 是 $C^\dagger$-极大的.

唯一性的证明也很简单, 设 $\mathscr{A}''$ 是另一个 $C^\dagger$-极大的图册, 且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}''$, 则 $\mathscr{A}''$ 中的任意一个坐标卡 (V,ψ) 都与 $\mathscr{A}$ 中的任意一个坐标卡相容, 因此 $(V,\psi)\in\mathscr{A}'$. 这说明 $\mathscr{A}''\subset\mathscr{A}'$. 同样的, $\mathscr{A}'$ 中的任意一个坐标卡 (U,ϕ) 都与 $\mathscr{A}$ 中的任意一个坐标卡相容, 因此 $(U,\phi)\in\mathscr{A}''$. 这说明 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}''$. 因此 $\mathscr{A}'=\mathscr{A}''$. □

第三章　直和与矩阵