1. 第一次课后作业

单选题

概率分布 $\bar{p}=\{p_1,p_2,\cdots,p_a\}$ 是一个确定性分布为熵 $H(p_1,p_2,\cdots,p_a)=0$ 的 ( ) 条件.
(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 既不充分也不必要.

概率分布 $\bar{p}=\{p_1,p_2,\cdots,p_a\}$ 是一个确定性分布，即所有的概率都为 1 或 0，因此熵 $H(p_1,p_2,\cdots,p_a)=0$.
反之，若 $H(p_1,p_2,\cdots,p_a)=0$, 则由$H(p_1,p_2,\cdots,p_a)$ 的 定义可知, $\forall i, p_i\log_c p_i=0$, 或者 $p_i=0$, 或者 $\log_c p_i=0$, 由于 $\sum_{i=1}^{a} p_i=1, p_i\geq 0$, 存在 i 使得 $p_i=1$, 而其它 $p_j=0$, 因此 $\bar{p}$ 必为确定型分布.
所以，答案是：(C) 充分必要条件

单选题

设 ξ 是一个二元随机变量, 即 $\mathscr{X}=\{0,1\}$, 令 $p(\xi=1)=p, p(\xi=0)=1-p$. 则有二元熵函数 $H(p)=p\log_2\frac{1}{p}+(1-p)\log_2\frac{1}{1-p}$, 则当 $p=$( ) 时, $H(p)$ 达到最大值.
(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$;(D) 1 .

首先，计算 $H(p)$ 的导数：

$$
\begin{aligned}
H(p) &= -p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p) \\
H'(p) &= -\log_2 p-p\cdot\frac{1}{\ln 2\cdot p}+\log_2(1-p)+\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1-p}{\ln 2} \\
&= -\log_2 p-\frac{1}{\ln 2}+\log_2(1-p)+\frac{1}{\ln 2} \\
&= -\log_2 p+\log_2(1-p) \\
&= \log_2\frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

令导数等于零，解方程 $\log_2\frac{1-p}{p}=0$，得到 $p=\frac{1}{2}$.
接下来，我们来验证 $p=\frac{1}{2}$ 是 $H(p)$ 的最大值点还是最小值点. 我们可以通过二阶导数的符号来判断. 计算二阶导数：

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2H(p)}{dp^2} &= \frac{d}{dp}\left[\log_2\frac{1-p}{p}\right] \\
&= \frac{1}{p(p-1)\ln 2}
\end{aligned}
$$

当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{p(p-1)\ln 2}<0$，所以 $p=\frac{1}{2}$ 是 $H(p)$ 的最大值点.
因此，当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$H(p)$ 达到最大值. 选项 (C) $\frac{1}{2}$ 是正确答案.

单选题

若 $H(\xi,\eta)=H(\xi)+H(\eta)$ ，则随机变量 ξ 与 η 的关系 ( ).
A. ξ 由 η 决定;
B. η 由 ξ 决定;
C. ξ 与 η 相互独立.

当两个随机变量 ξ 和 η 相互独立时，它们的联合概率分布可以表示为它们各自的边缘概率分布的乘积，即 $p(\xi,\eta)=p(\xi)\cdot p(\eta)$. 根据熵的定义，随机变量的熵可以表示为 $H(\xi)=-\sum_X p(x)\log p(x)$，其中 x 是随机变量 ξ 的取值. 同样地，$H(\eta)=-\sum_Y p(y)\log p(y)$，其中 y 是随机变量 η 的取值. 当两个随机变量相互独立时，它们的联合熵可以表示为 $H(\xi,\eta)=-\sum_X\sum_Y p(x,y)\log p(x,y)$. 由于它们相互独立，联合概率分布可以拆分为各自的边缘概率分布的乘积，即 $p(x,y)=p(x)\cdot p(y)$. 代入联合熵的定义中，我们有：

$$
\begin{aligned}
H(\xi,\eta) &= -\sum_X\sum_Y p(x,y)\log p(x,y)\\
&= -\sum_X\sum_Y p(x)\cdot p(y)\log(p(x)\cdot p(y))\\
&= -\sum_X\sum_Y p(x)\cdot p(y)(\log p(x)+\log p(y))\\
&= -\sum_X\sum_Y p(x)\cdot p(y)\log p(x)-\sum_X\sum_Y p(x)\cdot p(y)\log p(y)\\
&= -\sum_X p(x)\log p(x)-\sum_Y p(y)\log p(y)\\
&= H(\xi)+H(\eta)
\end{aligned}
$$

因此，当 $H(\xi,\eta)=H(\xi)+H(\eta)$ 时，可以得出 ξ 和 η 是相互独立的.

单选题

$\mathrm{H}(\xi,\eta)=\mathrm{H}(\xi)$ ，则随机变量 ξ 与 η 的关系 ( ).

A. ξ 由 η 决定；

B. ξ 与相互独立；

C. η 由 ξ 决定.

根据题目中的信息 $\mathrm{H}(\xi,\eta)=\mathrm{H}(\xi)$，这意味着给定 ξ 的情况下，η 的条件熵为零，即 $\mathrm{H}(\eta|\xi)=0$. 这表明在已知 ξ 的情况下，η 是确定的，因此可以得出结论：η 由 ξ 决定. 因此，答案是 C. η 由 ξ 决定.

计算题

计算 $H\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a},\cdots,\frac{1}{a},\frac{2}{a},\frac{2}{a}\right)$

由 $\Sigma P_i = 1$ 知, 含 $(a-4)$ 个 $\frac{1}{a}$, 2 个 $\frac{2}{a}$ ，总共 $(a-2)$ 项，于是

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \cdots, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right) &= \sum_{i=1}^{a-2} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i} \\
&= \sum_{i=1}^{a-4} \frac{1}{a} \log a + 2 \cdot \frac{2}{a} \log \frac{a}{2} \\
&= \frac{a-4}{a} \cdot \log a + \frac{4}{a} \log \frac{a}{2} \\
&= \frac{a-4}{a} \cdot \log a + \frac{4}{a} \log a - \frac{4}{a} \log 2 \\
&= \log a - \frac{4}{a} \log 2
\end{aligned}$$

计算题

设两只口袋中各有 20 个球，第一支口袋中有 10 个白球，5 个黑球和 5 个红球; 第二只口袋中有 8 个白球, 8 个黑球和 4 个红球, 从每只口袋中各取一个球, 试判断哪一个结果的不肯定性更大.

当我们要判断哪个结果的不确定性更大时，可以使用熵来衡量. 首先，我们将第一只口袋的球的颜色作为随机变量 ξ_1，它的概率分布为:

$$\xi_1 \sim \begin{pmatrix} \text{白} & \text{黑} & \text{红} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

其中，$\frac{1}{2}$ 表示白球的概率，$\frac{1}{4}$ 表示黑球的概率，$\frac{1}{4}$ 表示红球的概率.
计算第一只口袋的熵 $H(\xi_1)$:

$$H\left(\xi_1\right) = \frac{1}{2} \log 2 + 2 \times \frac{1}{4} \log 4 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5 \text{ bits}$$

接下来，我们将第二只口袋的球的颜色作为随机变量 ξ_2，它的概率分布为:

$$\xi_2 \sim \begin{pmatrix} \text{白} & \text{黑} & \text{红} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

其中，$\frac{2}{5}$ 表示白球的概率，$\frac{2}{5}$ 表示黑球的概率，$\frac{1}{5}$ 表示红球的概率.
计算第二只口袋的熵 $H(\xi_2)$:

$$\begin{aligned}
H\left(\xi_2\right) &= \frac{4}{5} \log \frac{5}{2} + \frac{1}{5} \log 5 \\
&= \frac{4}{5}(\log 5 - \log 2) + \frac{1}{5} \log 5 \\
&= \frac{4}{5} \log 5 + \frac{1}{5} \log 5 - \frac{4}{5} \\
&= \log 5 - \frac{4}{5} \approx 2.32 - 0.8 \\
&= 1.52 \text{ bits}
\end{aligned}$$

比较 $H(\xi_1)$ 和 $H(\xi_2)$ 的值，我们可以得出结论：第二只口袋的结果的不确定性更大，因为它的熵值更大.

2. 第二次课后作业

单选题

互信息 $I(\xi;\eta)=0$ 的充分必要条件是随机变量 ξ 与 η 的关系为 ( ).

A. η 由 ξ 决定

B. 相互独立

C. ξ 由 η 决定

根据互信息与联合熵的关系可知,$I(\xi,\eta)=H(\xi)+H(\eta)-H(\xi,\eta)=0$, 于是我们有 $H(\xi)+H(\eta)=H(\xi,\eta)$. 由前面知 η 与 ξ 相互独立. 因此，互信息为零是 ξ 和 η 相互独立的充分必要条件.

填空题

令 ξ 是一个离散随机变量，它服从的概率分布是 $\overline{p}=(p_1,p_2,\cdots p_a)$, 则 ξ 的熵 $H(\xi)=$ ______ ，它在 ______ 条件下达到最大值，最大值 $=$ ______.

对于离散随机变量 ξ，其熵 $H(\xi)$ 定义为:

$$H(\xi)=-\sum_{i=1}^{a}p_i\log p_i$$

其中，p_i 是 ξ 取第 i 个值的概率，a 是 ξ 可能取的值的个数.

当 ξ 的概率分布是均匀分布时，即所有可能取值的概率相等，即 $p_i=\frac{1}{a}$，此时熵 $H(\xi)$ 达到最大值.

在这种情况下，熵的最大值为:

$$H_{\max}=-\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}=-a\cdot\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}=\log a$$

因此，当 ξ 的概率分布是均匀分布时，熵 $H(\xi)$ 达到最大值，最大值为 $\log a$.

填空题

设 $p(x)$,$q(x)$ 是离散信源 $\mathscr{X}$ 上的两个概率分布，则它们的互熵 $H(p||q)=0$ 的充分必要条件是 ______ .

当 $H(p||q)=0$ 时，根据互熵的定义，我们有:

$$H(p||q)=\sum_{x\in\mathscr{X}}p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}=\sum_{x\in\mathscr{X}}p(x)[\log p(x)-\log q(x)]=0$$

因此, 当且仅当对任意 $q(x)\neq 0$ 的 x, 满足 $p(x)=q(x)$ 时 $H(p||q)=0$.

填空题

互信息 $I(\xi;\eta)$ 与熵 $H(\xi)$,$H(\eta)$ 及联合熵 $H(\xi,\eta)$ 满足关系式 __________ .

$$
\begin{aligned}
I(\xi;\eta) &= \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)q(y)} \\
&= \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)[\log p(x,y)-\log p(x)q(y)] \\
&= \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)[\log p(x,y)-\log p(x)-\log q(y)] \\
&= \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)\log p(x,y) - \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)\log p(x) - \sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)\log q(y) \\
&= -H(\xi,\eta)+H(\xi)+H(\eta) = H(\xi)+H(\eta)-H(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

即 $I(\xi;\eta)=H(\xi)+H(\eta)-H(\xi,\eta)$.

解答题

令 (ξ,η) 具有如下联合分布

$\eta \backslash \xi$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

试求：(1) $H(\xi),H(\eta)$; (2) $H(\xi\mid\eta),H(\eta\mid\xi)$; (3) $H(\xi,\eta)$; (4) $H(\eta)-H(\eta\mid\xi)$; (5) $I(\xi;\eta)$.

$\eta \backslash \xi$	1	2	3	4	$\sum$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\sum$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

对 $\xi: p(x)=\sum\limits_{y\in\mathscr{Y}} p(x,y)$, 则有:

$$
\begin{aligned}
p(1) &= p(1,1)+p(1,2)+p(1,3)+p(1,4) = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8} = \tfrac{3}{8} \\
p(2) &= p(2,1)+p(2,2)+p(2,3)+p(2,4) = \tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8} \\
p(3) &= p(3,1)+p(3,2)+p(3,3)+p(3,4) = \tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{32}+0+\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8} \\
p(4) &= p(4,1)+p(4,2)+p(4,3)+p(4,4) = \tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{32}+0+\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}
$$

因此 ξ 的边缘分布为 $\left(\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$. 同理对 $\eta : p(y) = \sum\limits_{x\in\mathscr{X}} p(x,y)$, 也可求得 η 的边缘分布为

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. 于是

$$\begin{aligned}
H(\xi) &= \sum_{i=1}^{4} p_i \log \frac{1}{p_i} = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \log_2 \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2 8 = 3 - \frac{3}{4} \log_2 3 \\
H(\eta) &= \sum_{i=1}^{4} p_i \log \frac{1}{p_i} = 4 \cdot \frac{1}{4} \log_2 4 = 2 \\
H(\xi, \eta) &= \sum_{x \in \mathscr{X}} \sum_{y \in \mathscr{Y}} p(x, y) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x, y)} = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2 8 + 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \log_2 16 + 4 \cdot \frac{1}{32} \log_2 32 \\
&= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&H(\xi \mid \eta) = H(\xi, \eta) - H(\eta) = \tfrac{29}{8} - 2 = \tfrac{13}{8} \\
&H(\eta \mid \xi) = H(\xi, \eta) - H(\xi) = \tfrac{29}{8} - \left(3 - \tfrac{3}{4} \log_2 3\right) = \tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{4} \log_2 3 \\
&H(\eta) - H(\eta \mid \xi) = 2 - \left(\tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{4} \log_2 3\right) = \tfrac{11}{8} - \tfrac{3}{4} \log_2 3 \\
&I(\xi; \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta) = 3 - \tfrac{3}{4} \log_2 3 + 2 - \tfrac{29}{8} = \tfrac{11}{8} - \tfrac{3}{4} \log_2 3
\end{aligned}$$

解答题

设两只口袋中各有 20 个球，第一支口袋中有 10 个白球，5 个黑球和 5 个红球; 第二只口袋中有 8 个白球，6 个黑球和 6 个红球，从每只口袋中各取一个球，试判断哪一个结果的不肯定性更大 (已知: $\log_2 5 = 2.322, \log_2 3 = 1.585$).

当我们要判断哪个结果的不肯定性更大时，可以使用熵来衡量. 首先，我们将第一只口袋的球的颜色作为随机变量 ξ_1，它的概率分布为:

$$\xi_1 \sim \begin{pmatrix} \text{白} & \text{黑} & \text{红} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

其中，$\frac{1}{2}$ 表示白球的概率，$\frac{1}{4}$ 表示黑球的概率，$\frac{1}{4}$ 表示红球的概率.
计算第一只口袋的熵 $H(\xi_1)$:

$$H\left(\xi_1\right) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 \text{ bits}$$

接下来，我们将第二只口袋的球的颜色作为随机变量 ξ_2，它的概率分布为:

$$\xi_2 \sim \begin{pmatrix} \text{白} & \text{黑} & \text{红} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

其中，$\frac{2}{5}$ 表示白球的概率，$\frac{3}{10}$ 表示黑球的概率，$\frac{3}{10}$ 表示红球的概率.
计算第二只口袋的熵 $H(\xi_2)$:

$$
\begin{aligned}
H\left(\xi_2\right) &= \frac{2}{5}\log_2\frac{5}{2}+\frac{3}{10}\log_2\frac{10}{3}+\frac{3}{10}\log_2\frac{10}{3} \\
&= \frac{2}{5}\left(\log_2 5-1\right)+\frac{3}{5}\left(\log_2 10-\log_2 3\right) \\
&= \frac{2}{5}\left(\log_2 5-1\right)+\frac{3}{5}\left(1+\log_2 5-\log_2 3\right) \\
&= \log_2 5-\frac{3}{5}\log_2 3+\frac{1}{5} \\
&\approx 2.322-0.6\times 1.585+0.2 \\
&= 1.571 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

所以我们得到 $H(\xi_1)=1.5<1.571=H(\xi_2)$，比较 $H(\xi_1)$ 和 $H(\xi_2)$ 的值，我们可以得出结论：第二只口袋的结果的不肯定性更大，因为它的熵值更大.

3. 第三次课后作业

2024-03-11

设 ξ 和 η 联合分布 $p(0,0)=\frac{1}{3}, p(0,1)=\frac{1}{3}, p(1,0)=0,\ p(1,1)=\frac{1}{3}$, 试求:

(1) $H(\xi), H(\eta)$;

(2) $H(\xi\mid\eta), H(\eta\mid\xi)$;

(3) $H(\xi,\eta)$;

(4) $H(\eta)-H(\eta\mid\xi)$;

(5) $I(\xi;\eta)$;

(6) 画出上述各信息之间关系的韦恩图.

η \\ ξ	0	1	$\sum$
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\sum$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$
\Longrightarrow \xi\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \eta\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}
$$

(1)

$$
H(\xi)=\sum_{i=0}^{1}p_i\log_2\frac{1}{p_i}=\frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\log_2 3=\frac{2}{3}\log_3-\frac{2}{3}\log_2+\frac{1}{3}\log_2 3=\log_2 3-\frac{2}{3}
$$

$$
H(\eta)=\sum_{i=0}^{1}p_i\log_2\frac{1}{p_i}=\frac{1}{3}\log_2 3+\frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\log_2 3+\frac{2}{3}\log_2 3-\frac{2}{3}\log_2 2\ =\log_2 3-\frac{2}{3}
$$

(3)

$$
H(\xi,\eta)=\sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{x\in\mathscr{Y}}p(x,y)\log\frac{1}{p(x,y)}=3\cdot\frac{1}{3}\log_2 3=\log_2 3
$$

(2)

$$
H(\eta\mid\xi)=H(\xi,\eta)-H(\xi)=\log_2 3-\left(\log_2 3-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}
$$

$$
H(\xi\mid\eta)=H(\xi,\eta)-H(\eta)=\log_2 3-\left(\log_2 3-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}
$$

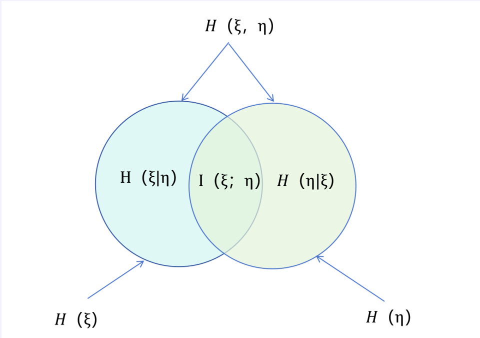
(4)

$$H(\eta)-H(\eta \mid \xi)=\log_2 3-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\log_2 3-\frac{4}{3}$$

(5)

$$I(\xi;\eta)=H(\xi)+H(\eta)-H(\xi,\eta)=(\log_2 3-\frac{2}{3})+(\log_2 3-\frac{2}{3})-\log_2 3=\log_2 3-\frac{4}{3}$$

(6)



2024-03-11

设 ξ 是取 m 个值 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的随机变量, $p(\xi=x_m)=a$. 证明:

$$H(\xi)=a\log\frac{1}{a}+(1-a)\log\frac{1}{1-a}+(1-a)H(\eta),$$

其中 η 是取 $m-1$ 个值 $x_1,,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 的随机变量.

$$p(\eta=x_j)\xlongequal{\text{def}}\frac{p(\xi=x_j)}{(1-a)},1\leqslant j\leqslant m-1.$$

进一步, 证明: $H(\xi)\leqslant a\log\frac{1}{a}+(1-a)\log\frac{1}{a}+(1-a)\log(m-1)$, 并确定其中等号成立的条件.

证明: 由 $p(\eta=x_j)\xlongequal{\text{def}}\dfrac{p(\xi=x_j)}{(1-a)}\Rightarrow p(\xi=x_j)=(1-a)p(\eta=x_j),j=1,\cdots,m-1.$

$$\begin{aligned}
\text{故}H(\xi)&=a\log\frac{1}{a}+\sum_{j=1}^{m-1}p(\xi=x_j)\log\frac{1}{p(\xi=x_j)}\\
&=a\log\frac{1}{a}+\sum_{j=1}^{m-1}(1-a)p(\eta=x_j)\log\frac{1}{(1-a)p(\eta=x_j)}\\
&=a\log\frac{1}{a}+\sum_{j=1}^{m-1}(1-a)p(\eta=x_j)\log\frac{1}{1-a}+\sum_{j=1}^{m-1}(1-a)p(\eta=x_j)\log\frac{1}{p(\eta=x_j)}\\
&=a\log\frac{1}{a}+(1-a)\log\frac{1}{1-a}\sum_{j=1}^{m-1}p(\eta=x_j)+(1-a)\sum_{j=1}^{m-1}p(\eta=x_j)\log\frac{1}{p(\eta=x_j)}\\
&=a\log\frac{1}{a}+(1-a)\log\frac{1}{1-a}+(1-a)H(\eta)
\end{aligned}$$

根据熵的最大值定理有 $H(\eta)\leqslant\log(m-1)$. 因此有

$$H(\xi)\leqslant a\log\frac{1}{a}+(1-a)\log\frac{1}{a}+(1-a)\log(m-1)$$

等号成立的条件是 $p(\eta = x_j)$ 为等概率分布，即有

$$p(\eta = x_j) = \frac{1}{m-1}$$

此时

$$p(\xi = x_j) = \frac{1-a}{m-1}, \quad j = 1, 2, \cdots, m-1.$$

4. 第四次课后作业

单选题

码 C 是前缀码是码 C 是即时码的 ( ).

A. 充分条件

B. 充分必要条件

C. 必要条件

(B)

$\Leftarrow$：假设 C 是一个码元集, 若 C 不是前缀码, 则存在码字 c_i, C_j, 使得 c_i 是 c_j 的前缀, 在一个含有 c_i 的码字串中, 从左到右, 当 c_i 出现时, 只有当 c_i 后面出现部分, 连同 c_i 不是 c_j 时才能把 c_i 还原; 若 c_i 以及连同后面部分是 c_j 时, 不能把 c_i 还原, 应该把 c_j 还原, 因此 C 不是即时码, 矛盾. 故即时码一定为前缀码.

$\Rightarrow$：若 C 不是即时码, 则从左到右, 出现一个码字 c_i, 还原为消息字母时, 依赖于后面的字符串, 即存在另一个码字 c_j, 使得 c_i 是 c_j 的前缀, 从而 C 不是前缀码.

单选题

码字长度为 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_a\}$ 的码为即时码是 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_a\}$ 满足 Kraft 不等式的 ( ).

A. 充分条件

B. 充分必要条件

C. 必要条件

若 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_2$ 满足 Kraft 不等式, 则必存在码字长度为 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_a$ 的即时码. 如果一个码的码字长度满足 Kraft 不等式, 但它不一定是即时码.

如: 考虑二元码 $C = \{0, 11, 100, 110\}$, 码字长度分别为 $1, 2, 3, 3$, 因为 $|\mathscr{U}| = 2$, 我们有

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = 1,$$

所以, 它的码字长度满足 kraft 不等式. 但这个码并不是即时的（不是前缀码）, 因为码字 11 是码字 110 的前缀. 但根据 $1, 2, 3,$ 3 可构造一个即时码, 如 $\{0, 10, 110, 111\}$ 或 $\{1, 01, 001, 000\}$.

因此码字长度为 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_a\}$ 的码为即时码是 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_a\}$ 满足 Kraft 不等式的充分条件.(A)

解答题

下面的码是否是即时码？是否是唯一可译码？

(1) $C = \{0, 10, 1100, 1101, 1110, 1111\}$.

(2) $C=\{0,10,110,1110,1011,1101\}$.

(1) 在这个码集中，没有任何码字是另一个码字的前缀. 因此，每个码字的开始都唯一标识了一个码字，没有歧义，因此是即时码. 由于是即时码，它自然也是唯一可译码. 即时码的属性保证了解码过程中的唯一性. 故 C 是前缀码, 是即时码, 是唯一可译码.
(2) C 不是前缀码, 因为码字 10 是码字 1011 的前缀, 故 C 不是即时码.C 不是唯一可译码. 因为根据如下字符串得知：一个给定的编码序列中可能会解码出两种不同的消息，表明在这个特定的码集不是唯一可译码.

$$\underset{a}{\underline{0}}\ \underset{b}{\underline{10}}\ \underset{c}{\underline{110}}\ \underset{d}{\underline{1110}}\ \underset{e}{\underline{1011}}\ \underset{\text{f}}{\underline{1101}}$$

$$\underset{a}{\underline{0}}\ \underset{e}{\underline{1011}}\ \underset{a}{\underline{0}}\ \underset{d}{\underline{1110}}\ \underset{e}{\underline{1011}}\ \underset{\text{f}}{\underline{1101}}$$

解答题

判断是否存在即时码具有以下的基数和码字长度, 如果有, 试构造出一个这样的码.
(1) $r=2$, 长度: 1,3,3,3,4,4.
(2) $r=3$, 长度: 1,1,2,2,3,3,3.
(3) $r=5$, 长度: $1,1,1,1,1,8,9$.

(1) $r=2$, 长度: $1,3,3,3,4,4$.
首先，我们计算 Kraft 和:

$$\sum_{i=1}^{6}2^{-\ell_i}=2^{-1}+3\times2^{-3}+2\times2^{-4}=1$$

Kraft 和等于 1，满足 Kraft 不等式，因此存在即时码. 下面构造一个即时码:
长度 1 的码字：0
长度 3 的码字: $100,101,110$
长度 4 的码字: 1110,1111

$$\begin{array}{lllll}
u_{1,1}=0 & 0 & & & \\
u_{3,1,1}=1 & u_{3,1,2}=0 & u_{3,1,3}=0 & (1,0,0) & \\
u_{3,2,1}=1 & u_{3,2,2}=0 & u_{3,2,3}=1 & (1,0,1) & \\
u_{3,3,1}=1 & u_{3,3,2}=1 & u_{3,3,3}=0 & (1,1,0) & \\
u_{4,1,1}=1 & u_{4,1,2}=1 & u_{4,1,3}=1 & u_{4,1,4}=0 & (1,1,1,0)\\
u_{4,2,1}=1 & u_{4,2,2}=1 & u_{4,2,3}=1 & u_{4,2,4}=1 & (1,1,1,1)
\end{array}$$

故此即时码为

$$\{0,100,101,110,1110,1111)\}$$

(2) $r=3$, 长度: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 .
接下来，我们计算 Kraft 和:

$$\sum_{i=1}^{7}3^{-\ell_i}=2\times3^{-1}+2\times3^{-2}+3\times3^{-3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1$$

Kraft 和等于 1，满足 Kraft 不等式，因此存在即时码。下面构造一个即时码:

长度 1 的码字：0,1
长度 2 的码字: 20,21
长度 3 的码字: $220, 221, 222$

$$\begin{array}{llll} u_{1,1}=0 & u_{1,2}=1 & & 0,1 \\ u_{2,1,1}=2 & u_{2,1,2}=0 & & (2,0) \\ u_{2,2,1}=2 & u_{2,2,2}=1 & & (2,1) \\ u_{3,1,1}=2 & u_{3,1,2}=2 & u_{3,1,3}=0 & (2,2,0) \\ u_{3,2,1}=2 & u_{3,2,2}=2 & u_{3,2,3}=1 & (2,2,1) \\ u_{3,3,1}=2 & u_{3,3,2}=2 & u_{3,3,3}=2 & (2,2,2) \end{array}$$

故此即时码为

$$\{0,1,20,21,220,221,222\}$$

(3) 我们计算 Kraft 和:

$$\sum_{i=1}^{7} 5^{-\ell_i} = 5\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^9}>1$$

故这样的即时码不存在.

5. 第五次课后作业

解答题

对下面给定的概率分布和基数, 找出一个 Huffman 编码, 并求平均码长.

$$p=\{0.1,0.1,\cdots,0.1\}, r=3.$$

解: 首先确定 k 的值,$a=10, r=3$.

$$k=\mathrm{Int}_{+}\left(\frac{a-1}{r-1}\right)=\mathrm{Int}_{+}\frac{9}{2}=5.$$

再确定第一列最后几个分量相加:$a-(k-1)r+k-1=10-(5-1)\times 3+5-1=2$. 从第三列开始每次将最后 r 个分量相加，并按大小排序放入下一奇数列. 于是我们构造 Huffman 编码为

概率	码	概率	码	概率	码	概率	码	概率	码
0.1	01	$\boxed{0.2}$	00	$\boxed{0.3}$	2	$\boxed{0.3}$	1	$\boxed{0.4}$	0
0.1	02	0.1	01	0.2	00	0.3	2	0.3	1
0.1	10	0.1	02	0.1	01	0.2	00	0.3	2
0.1	11	0.1	10	0.1	02	0.1	01		
0.1	12	0.1	11	0.1	10	0.1	02		
0.1	20	0.1	12	0.1	12				
0.1	21	0.1	20	0.1					
0.1	22	0.1	21						
0.1	000	0.1	22						
0.1	001								

平均码长：

$$L(\mathscr{S},f)=0.8\times 2+0.2\times 3=2.2$$

解答题

对下面给定的概率分布和基数，找出一个 Huffman 编码, 并求平均码长.

$$p=\{0.3,0.1,0.1,0.1,0.1,0.06,0.05,0.05,0.05,0.04,0.03,0.02\},\quad r=4.$$

解: 首先确定 k 的值,$a=12,r=4$.

$$k=\mathrm{Int}_+\left(\frac{a-1}{r-1}\right)=\mathrm{Int}_+\frac{11}{3}=4.$$

再确定第一列最后几个分量相加:$a-(k-1)r+k-1=12-(4-1)\times 4+4-1=3$. 从第三列开始每次将最后 $r=4$ 个分量相加，并按大小排序放入下一奇数列，用方框标出. 于是我们构造 Huffman 编码为

概率	码	概率	码	概率	码	概率	码
0.3	1	0.3	1	0.3	1	$\boxed{0.39}$	0
0.1	3	0.1	3	$\boxed{0.21}$	2	0.3	1
0.1	00	0.1	00	0.1	3	0.21	2
0.1	01	0.1	01	0.1	00	0.1	3
0.1	02	0.1	02	0.1	01		
0.06	20	$\boxed{0.09}$	03	0.1	02		
0.05	21	0.06	20	0.09	03		
0.05	22	0.05	21				
0.05	23	0.05	22				
0.04	030	0.05	23				
0.03	031						
0.02	032						

平均码长：

$$L(\mathscr{S},f)=0.4\times 1+0.51\times 2+0.09\times 3=1.69$$

解答题

判断是否存在即时码具有以下的基数和码字长度，如果有，试构造出一个这样的码. $r=3$, 长度 $1,1,2,4,4,5$.

我们计算 Kraft 和:

$$\sum_{i=1}^{6} 3^{-\ell_i} = 2\times 3^{-1} + 1\times 3^{-2} + 2\times 3^{-4} + 1\times 3^{-5} = \frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243} = \frac{196}{243} < 1$$

满足 Kraft 不等式，因此存在即时码. 下面构造一个即时码:

$$\begin{array}{llllll}
u_{1,1}=0 & u_{1,2}=1 & & & & 0,1 \\
u_{2,1,1}=2 & u_{2,1,2}=0 & & & & (2,0) \\
u_{4,1,1}=2 & u_{4,1,2}=1 & u_{4,1,3}=0 & u_{4,1,4}=0 & & (2,1,0,0) \\
u_{4,2,1}=2 & u_{4,2,2}=1 & u_{4,2,3}=0 & u_{4,2,4}=1 & & (2,1,0,1) \\
u_{5,1,1}=2 & u_{5,1,2}=1 & u_{5,1,3}=1 & u_{5,1,4}=0 & u_{5,1,5}=0 & (2,1,1,0,0)
\end{array}$$

故此即时码为

$$\{0,1,20,21,2100,2101,21100\}$$

解答题

对下面给定的概率分布和基数，找出一个 Huffman 编码, 并求平均码长.

$$p=\{0.3,0.2,0.2,0.1,0.1,0.1\},\quad r=2.$$

解: 首先确定 k 的值,$a=6, r=2$.

$$k=\mathrm{Int}_+\left(\frac{a-1}{r-1}\right)=\mathrm{Int}_+\frac{5}{1}=5.$$

再确定第一列最后几个分量相加:$a-(k-1)r+k-1=6-(5-1)\times 2+5-1=2$. 从第三列开始每次将最后 $r=2$ 个分量相加，并按大小排序放入下一奇数列，用方框标出. 于是我们构造 Huffman 编码为

概率	码	概率	码	概率	码	概率	码	概率	码
0.3	01	0.3	01	$\boxed{0.3}$	00	$\boxed{0.4}$	1	$\boxed{0.6}$	0
0.2	11	$\boxed{0.2}$	10	0.3	01	0.3	00	0.4	1
0.2	000	0.2	11	0.2	10	0.3	01		
0.1	001	0.2	000	0.2	11				
0.1	100	0.1	001						
0.1	101								

平均码长:

$$L(\mathscr{S},f)=0.5\times 2+0.5\times 3=2.5$$

判断题

无噪声信道的容量是 $\log a$, 其中 a 是输入字母表的大小.

对. 无噪声信道等价条件是, 存在一个 $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ 的 $1-1$ 映射 ϕ, 使得 $p(\phi(u) \mid u) = 1$ 对所有 u 成立, 从而 $a = b$. 因此 $C = \log a = \log b$.

判断题

无用信道的容量是 0 .

对. 无用信道意味着输出不依赖于输入，或者说输出对于输入的选择完全没有信息. 在这种情况下，无论输入是什么，输出的分布都保持不变，因此 $H(\eta|\xi) = H(\eta)$. $I(\xi;\eta) = H(\xi) - H(\xi \mid \eta) = H(\xi) - H(\xi) = 0$. (注意 ξ 与 η 是相互独立的.)

判断题

无丢失信道的容量是 $\log a$, 其中 a 是输入字母表的大小.

对. 因 ξ 完全由 η 决定, 即 $H(\xi \mid \eta) = 0$.

$$I(\xi;\eta) = H(\xi) - H(\xi \mid \eta) = H(\xi) - 0 = H(\xi) \le \log a$$

$H(\xi)$ 的最大值 $\log a$.

解答题

写出二元对称信道的信道矩阵, 并利用信道容量的定义求它的信道容量.

记输入输出字母表 $\mathscr{U} = \mathscr{V} = \{0,1\}$. 信道转移概率分布为

$$p(0 \mid 1) = p(1 \mid 0) = p, p(0 \mid 0) = p(1 \mid 1) = 1-p$$

则二元对称信道的信道矩阵如下所示：

$$\begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1 & p & 1-p \end{array}$$

下面利用信道容量的定义求它的信道容量.

$$C = \max\{I(\xi;\eta) \mid \xi \in \mathscr{P}_{\mathscr{U}}\} = \max\{H(\eta) - H(\eta \mid \xi) \mid \xi \in \mathscr{P}_{\mathscr{U}}\}$$

设入口分布为 (p_0, p_1), 对应的出口分布为 (q_0, q_1), 则

$$(q_0, q_1) = (p_0, p_1)\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} = (p_0(1-p) + p_1 p, \quad p_0 p + p_1(1-p))$$

不妨设 $p_0=\theta$, 则 $p_1=1-\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \theta(1-p)+(1-\theta)p=\theta+p-2\theta p \\
q_1 &= \theta p+(1-\theta)(1-p)=1-\theta-p+2\theta p \\
H(\eta) &= -q_0 \log_2 q_0-q_1 \log_2 q_1 \\
&= -q_0 \log_2 q_0-(1-q_0) \log_2 (1-q_0) \\
&= H(q_0)
\end{aligned}
$$

根据熵函数的性质 q_0 取 $\frac{1}{2}$ 时 $H(\eta)$ 最大且取值为 1, 此时 $q_0=\theta+p-2\theta p=\frac{1}{2}$, 化简即得 $\theta=\frac{1}{2}$.
由于

$$
\begin{aligned}
H(\eta \mid \xi=0) &= p(0 \mid 0) \log \frac{1}{p(0 \mid 0)}+p(1 \mid 0) \log \frac{1}{p(1 \mid 0)} \\
&= (1-p) \log \frac{1}{1-p}+p \log \frac{1}{p}=H(p) \\
H(\eta \mid \xi=1) &= p(0 \mid 1) \log \frac{1}{p(0 \mid 1)}+p(1 \mid 1) \log \frac{1}{p(1 \mid 1)} \\
&= p \log \frac{1}{p}+(1-p) \log \frac{1}{1-p}=H(p).
\end{aligned}
$$

所以

$$
H(\eta \mid \xi)=\sum_{u \in \mathscr{U}} p(u) H(\eta \mid \xi=u)=\sum_{u \in \mathscr{U}} p(u) H(p)=\left(\sum_{u \in \mathscr{U}} p(u)\right) H(p)=H(p)
$$

因此二元对称信道的信道容量为

$$
C=\max \{H(\eta)-H(\eta \mid \xi)\}=1-H(p)
$$

解答题

考虑离散无记忆信道 $Y=(X+Z) \bmod 11$, 其中

$$
Z=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

$X \in \{0,1,\cdots,10\}$. 假设 X 和 Z 独立.
(1) 求这个信道的容量.
(2) 找出达到信道容量的入口分布.

---

(1) $Y=(X+Z) \bmod 11$, 输入为 X, 输出为 Y, Z 为噪声信道, 而 $Z=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $X \in \{0,1,\cdots,10\}$. 所以 $Y \in \{0,1,\cdots,10\}$,
因为 Z 可以取三个值 $(1,2,3)$ ，每个都有 $\frac{1}{3}$ 的概率，所以对于每个 X 的值，Y 可以是三个可能的结果之一，这取决于 Z 的值. 信道矩阵 $P(Y \mid X)$ 将具有 11 行 (对应于 X 的可能值) 和 11 列 (对应于 Y 的可能值). 每个元素 P_{ij} 表示给定输入 $X=i$ 时输出 $Y=j$ 的概率.
由于 Z 的作用是加在 X 上然后对 11 取模，每个 X 值将映射到三个不同的 Y 值，每个的概率都是 $\frac{1}{3}$. 例如，如果 $X=0$ ，则 Y 可以是 $1,2$ 或 3 ，每个都有 $\frac{1}{3}$ 的概率，因为 Z 分别加 $1,2$ 或 3 . 因此，信道矩阵的一般形式将是每行有三个 $\frac{1}{3}$ 的条目，分别对应于 X 加上 $1,2,3$ 和模 11 的结果，而其他位置为 0 . 对于 $X=0: Y$ 的可能值是 $1,2,3$ ，每个概率为 $\frac{1}{3}$. 对于 $X=1: Y$ 的可能值是

$2,3,4$ ，每个概率为 $\frac{1}{3}$. 以此类推，直到 $X=10$. 每行的具体值会随着 X 的增加而 “滚动”，并在达到 10 并绕回 0 时循环. 这种模式的重复构成了完整的信道矩阵:

$$
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

得到一个对称信道，在这种情况下，

$$
H(Y\mid X)=H(Z\mid X)=H(Z)=\left(\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{3}\log 3\right)=\log 3,
$$

与 X 的分布无关，因此信道的容量为

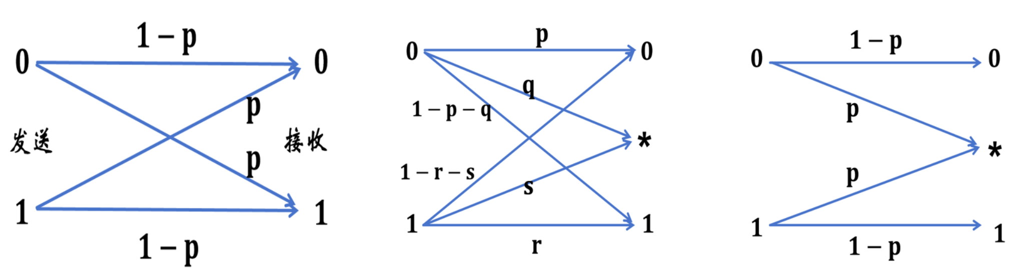
$$
\begin{aligned}
C=\max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{p(x)} H(Y)-H(Y\mid X) \\
&= \max_{p(x)} H(Y)-\log 3 \\
&= \log 11-\log 3=\log\frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

(2) 当 Y 具有均匀分布时达到最大值，根据对称性知道, 这发生在 X 具有均匀分布时, 即

$$
p(X)=\frac{1}{11}, \quad ,X\in\{0,1,\cdots,10\}.
$$

解答题

写出二元对称信道, 二元擦除信道及 M 信道的信道矩阵.



$$
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(a) 二元对称信道

$$
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 0 & * & 1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} p & q & 1-p-q \\ 1-r-s & s & r \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(b) 二元擦除信道

$$
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 0 & * & 1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(c) M 信道

解答题

写出二元对称信道的信道矩阵, 并利用极值法求它的信道容量.

二元对称信道的信道矩阵为 $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. 设入口分布为 (p_0, p_1), 对应的出口分布为 (q_0, q_1) , 则 $(q_0, q_1) = (p_0, p_1)\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} = (p_0(1-p) + p_1 \cdot p, p_0 p + (1-p)p_1)$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{j=1}^{b} p\left(v_j \mid y_i\right) \log \frac{p\left(v_j \mid u_i\right)}{q\left(v_j\right)} \\
&= (1-p) \log \frac{1-p}{q_0} + p \log \frac{p}{q_1} \\
&= p \log \frac{p}{q_0} + (1-p) \log \frac{1-p}{q_1}
\end{aligned}
$$

展开有 $\log \frac{1-p}{q_0} - p \log \frac{1-p}{q_0} + p \log \frac{p}{q_1} = p \log \frac{p}{q_0} + \log \frac{1-p}{q_1} - p \log \frac{1-p}{q_1}$

$$
\begin{aligned}
\log \frac{q_1}{q_0} + p \log \frac{q_0}{q_1} + p \log \frac{q_0}{q_1} &= 0 \\
(2p-1) \log \frac{q_0}{q_1} &= 0
\end{aligned}
$$

则 $p = \frac{1}{2}$ 或 $q_0 = q_1$. 由 $q_0 = q_1$ 知 $p_0(1-p) + p_1 - p = p_0 p + (1-p)p_1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ 或$p_1 = p_0$. 由 $p_0 + p_1 = 1$ 知 $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ 进而 $q_0 = q_1 = \frac{1}{2}$ 于是

$$
\begin{aligned}
C &= p \log \frac{p}{\frac{1}{2}} + (1-p) \log \frac{1-p}{\frac{1}{2}} \\
&= p \log 2p + (1-p) \log 2(1-p) \\
&= p + p \log p + 1 - p + (1-p) \log (1-p) \\
&= 1 + p \log p + (1-p) \log (1-p) \\
&= 1 - H(p)
\end{aligned}
$$

解答题

写出 M 信道的信道矩阵, 并利用极值法求它的信道容量.

M 信道的信道矩阵为 $\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$. 设入口分布为 (p_0, p_1), 对应的出口分布为 (q_0, q_1, q_2), 且 $q(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{a} p(u_i) p(v_j \mid u_i)$ 则有

$$(q_0, q_1, q_2) = (p_0, p_1) \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix} = (p_0(1-p), (p_0+p_1)p, p_1(1-p))$$

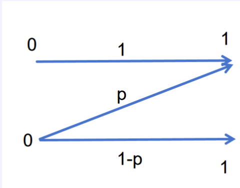
$$\begin{aligned} C &= \sum_{j=1}^{b} p(v_j \mid u_i) \log \frac{p(v_j \mid u_i)}{\sum\limits_{l=1}^{a} p(u_i) p(y_j \mid u_l)} \\ &= \sum_{j=1}^{b} p(v_j \mid u_i) \log \frac{p(v_j \mid u_i)}{q(v_j)} \\ &= (1-p) \cdot \log \frac{1-p}{q_0} + p \log \frac{p}{p_i} \\ &= p \log \frac{p}{q_1} + (1-p) \cdot \log \frac{1-p}{q_2} \end{aligned}$$

根据上面等式，比对后有 $(1-p) \log \frac{1-p}{q_0} = (1-p) \cdot \log \frac{1-p}{q_2}$. 即得 $q_0 = q_2$.
于是 $p_0(1-p) = p_1(1-p) \Rightarrow p_0 = p_1$ 由 $p_0 + p_1 = 1$ 知 $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, 则 $q_0 = p_0(1-p) = \frac{1-p}{2}$. 同理 $q_1 = p, q_2 = \frac{1-p}{2}$, 将 q_0, q_1, q_2 的值代回等式中, 于是

$$\begin{aligned} C &= p \log \frac{p}{q_1} + (1-p) \log \frac{1-p}{q_2} \\ &= p \log \frac{p}{p} + (1-p) \log \frac{1-p}{\frac{1-p}{2}} \\ &= (1-p) \log 2 = 1-p \end{aligned}$$

解答题

Z 信道如下图所示, 写出它的信道矩阵并求其信道容量.



信道矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. 设入口分布为 (p_0, p_1) ，对应的出口分布为 (q_0, q_1), 则

$$(q_0, q_1) = (p_0, p_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix} = (p_0 + p_1 p, p_1(1-p))$$

$$\begin{aligned} c &= \sum_{j=1}^{b} p(v_j \mid v_i) \log \frac{p(v_j \mid u_i)}{q(v_j)} \\ &= 1 \cdot \log \frac{1}{q_0} \\ &= p \cdot \log \frac{p}{q_0} + (1-p) \log \frac{1-p}{q_1} \end{aligned}$$

根据等式有 $-\log q_0 = p \cdot \log \frac{p}{q_0} + (1-p) \cdot \log \frac{1-p}{q_1}$

$$\begin{aligned} -\log q_0 &= p \log p - p \log q_0 + (1-p) \log(1-p) - (1-p) \log q_1 \\ H(p) &= (1-p) \log \frac{q_0}{q_1} \end{aligned}$$

于是 $\frac{q_0}{q_1} = e^{\frac{H(p)}{1-p}}$. 由于 $q_0 + q_1 = 1$, 所以 $\frac{1-q_1}{q_1} = e^{\frac{H(p)}{1-p}}$, 令 $\lambda = \frac{H(p)}{1-p}$ 解得 $q_1 = \frac{1}{1+e^\lambda}$, 则 $q_0 = \frac{e^\lambda}{1+e^\lambda}$

$$\begin{aligned} C = \log \frac{1}{q_0} = \log \frac{1+e^\lambda}{e^\lambda} &= \log \left(1 + \frac{1}{e^\lambda}\right) \\ &= \log \left(1 + e^{-\frac{H(p)}{1-p}}\right) \end{aligned}$$

6. 第八次课后作业

选择题

设 C 是一个 q 元 (n,M,d) 码，则 C 的码率是（ ）

$A.\dfrac{M}{n}$ $B.\dfrac{\log_q M}{n}$

对于一个 q 元 (n,M,d) 码，其中 n 为码字长度，M 为码字个数，d 为最小距离，码率 $R(C)$ 定义为有效信息位与总位数之比，即 $R(C)=\frac{k}{n}$，其中 $k=\log_q M$ 为每个码字中的有效信息位数.
因此，码率 $R(C)$ 可表示为 $R(C)=\frac{\log_q M}{n}$，选项 $B.\frac{\log_q M}{n}$ 是正确的.

选择题

设二元码 $C=\{1100,0101,1010\}$ ，则码 C 的最小距离是（ ）

$A.1$ $B.2$ $C.3$

对于二元码 $C=\{1100,0101,1010\}$,我们需要计算所有可能的码字对之间的 Hamming 距离,并找出最小的距离. 给定码 C, 我们可以计算得到: $d(1100,0101)=2$, $d(1100,1010)=2$, $d(0101,1010)=4$.
因此，码 C 的最小距离为 $d(C)=2$. 所以选项 $B.2$ 是正确的.

选择题

设 C 是一个二元 $(5,4,3)$ 码，则 C 至多可纠正的错误个数（ ）

$A.1$ $B.2$ $C.3$

对于一个二元 (n,M,d) 码，其最大可纠正的错误个数为 $t=\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor$. 在这里，$d=3$，所以最大可纠正的错误个数为 $t=\lfloor\frac{3-1}{2}\rfloor=1$.
因此，C 是一个二元 $(5,4,3)$ 码，至多可纠正的错误个数为 1，选项 $A.1$ 是正确的.
（定理：码 C 至多可纠正 t 个错误的充分必要条件为 $d(C)=2t+1$ 或 $d(C)=2t+2$.）

选择题

设 C 是一个二元 $(7,16,3)$ 码（如三阶二元 Hamming 码），则 C 至多可检查的错误个数是（ ）

$A.1$ $B.2$ $C.3$

根据定理：码 C 至多可检查 t 个错误的充分必要条件为 $d(C)=t+1$.
因此，对于二元 $(7,16,3)$ 码，至多可检查的错误个数为 2，选项 $B.2$ 是正确的.

解答题

设 $C=\{11100,01001,10010,00111\}$ 是一个二元 $(5,4)$ 码
(1) 求码 C 的最小距离.
(2) 根据最小距离译码原则, 对接收到的字 10000,01100 , 00100 分别进行译码.
(3) 计算码 C 的码率.

(1) 要求码 C 的最小距离，我们需要计算所有可能的码字对之间的 Hamming 距离，并找出最小的距离. 给定码 $C=\{11100,01001,10010,00111\}\subset V(5,4)$，令 $x_1=11100, x_2=01001, x_3=10010, x_4=00111$. 我们可以计算得到：

$$d\left(x_1,x_2\right)=3, d\left(x_1,x_3\right)=3, d\left(x_1,x_4\right)=4$$
$$d\left(x_2,x_3\right)=4, d\left(x_2,x_4\right)=3, d\left(x_3,x_4\right)=3$$

因此 $d(c)=\min\left\{d\left(x_i,x_j\right)\mid x_i,x_j\in C, x_i\neq x_j, i,j=1,2,3,4\right\}=3$
(2) 根据最小距离译码原则，我们选择收到的字与码 C 中距离最近的码字进行译码. 对于接收到的字 10000：设 $x=10000$ ，则

$$d\left(x,x_1\right)=2, d\left(x,x_2\right)=3, d\left(x,x_3\right)=1, d\left(x,x_4\right)=4$$

因此将 x 译为 x_3 ，即接收到的字 10000 应当译码为 10010
对于接收到的字 01100：设 $y=01100$ ，则

$$d\left(y,x_1\right)=1, d\left(y,x_2\right)=2, d\left(y,x_3\right)=4, d\left(y,x_4\right)=3$$

因此将 y 译为 x_1. 即 $01100\rightarrow 11100$
对于接收到的字 00100：设 $z=00100$ ，则 $d\left(z,x_1\right)=2, d\left(z,x_2\right)=3, d\left(z,x_3\right)=3, d\left(z,x_4\right)=2$ 因此将 z 译为 x_1 或 x_4 ，即 $00100\rightarrow 11100$ 或 $00100\rightarrow 00111$
(3) 对于二元 $(5,4)$ 码 C，其中 $M=4$（共有 4 个码字），$n=5$（每个码字长度为 5 位）. 根据码率公式 $R(C)=\frac{\log_2 M}{n}$，我们有：

$$R(C)=\frac{\log_2 4}{5}=\frac{2}{5}$$

因此，码 C 的码率为 $\frac{2}{5}$.

解答题

设 $C=\{00000000,00001111,00110011,00111100\}$ 是一个二元 $(8,4)$ 码.
(1) 计算码 C 中不同码字的 Hamming 距离和码 C 的最小距离.
(2) 在一个二元码中, 如果把某一个码字中的 0 和 1 互换, 即将 0 换为 1,1 换为 0 , 则我们将所得的字称为原码字的补. 一个二元码的所有码字的补构成的集合称为原码的补码. 求码 C 的补码, 并求补码中所有不同码字之间的 Hamming 距离和补码的最小距离. 它们与 (1) 中的结果有什么关系?
(3) 将 (2) 中的结果推广到一般的二元码.

(1) 令 $x_1=00000000, x_2=00001111, x_3=00110011, x_4=00111100$

$$d\left(x_1,x_2\right)=4, d\left(x_1,x_3\right)=4, d\left(x_1,x_4\right)=4$$
$$d\left(x_2,x_3\right)=4, d\left(x_2,x_4\right)=4, d\left(x_3,x_4\right)=4$$

因此 $d(c)=4$
(2) 设补码 $\overline{C}=\{11111111$ ， $1110000\ 11001100\ 11000011\}$, $\overline{C}$ 中的码字分别记作 $y_1, y_2\ y_3\ y_4$ ， 则

$$d\left(y_1,y_2\right)=4, d\left(y_1,y_3\right)=4, d\left(y_1,y_4\right)=4$$
$$d\left(y_2,y_3\right)=4, d\left(y_2,y_4\right)=4, d\left(y_3,y_4\right)=4$$

因此 $d\left(\overline{C}\right)=4$, 对比 (1) 可知, C 的补码中码字间的 Hamming 距离与 C 相对应的码字间 Hamming 距离相同且 C 的补码的最小距离与 C 的最小距离相同.
(3) 对于一般的二元码，任取原码中两个不同码字 $x=x_1x_2\ldots x_n$ 和 $y=y_1y_2\ldots y_n$，其补码分别为 $\bar{x}=\bar{x_1}\bar{x_2}\ldots\bar{x_n}$ 和 $\bar{y}=\bar{y_1}\bar{y_2}\ldots\bar{y_n}$. 其中 $x_i,y_i\in\{0,1\}$, $\bar{x_i}=1-x_i$, $\bar{y_i}=1-y_i$. $i=1,2,\cdots,n$. 原码 x 和 y 之间的 Hamming 距离为 $d(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$，补码 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之间的 Hamming 距离为 $d(\bar{x},\bar{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}|\bar{x_i}-\bar{y_i}|=\sum\limits_{i=1}^{n}|(1-x_i)-(1-y_i)|=\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d(x,y)$. 因此，原码 x 和 y 之间的 Hamming 距离与其补码 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之间的 Hamming 距离相等. 根据 x,y 的任意性进而得知而补码的最小距离与原码的最小距离相同.

7. 第八次课后作业

填空题

码 C 至多可纠正 t 个错误的充分必要条件是码 C 的最小距离 $d(C) =$ ____.

定理：码 C 至多可纠正 t 个错误的充分必要条件为 $d(C) = 2t + 1$ 或 $d(C) = 2t + 2$.

填空题

对于任意二元 $(3, M, 2)$ 码, 一定有 $M \leq$ ____.

使用 Singleton 界定理可以帮助我们确定编码理论中线性码的一个上界.Singleton 界定理指出，对于任意的 q-元 (n, M, d) 码，其码长为 n、码字数为 M 以及最小汉明距离为 d，我们有：

$$M \leq q^{n-d+1}$$

对于一个二元 $(3, M, 2)$ 码，其中 $q = 2$（因为是二元码）、$n = 3$（码字长度为 3）和 $d = 2$（最小汉明距离为 2），因此

$$M \leq 2^{3-2+1} = 2^2 = 4$$

填空题

设二元 $[4, 2]$ 线性码 $L = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$, 则 L 的最小距离为 ____.

为了找出给定的二元线性码 $L = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$ 的最小距离，我们需要计算码集中任意两个不同码字之间的汉明距离，然后找出这些距离中的最小值.
汉明距离是指两个码字在相应位上不同的位数. 对于线性码，最小距离也可以通过找出除了零码字以外的码字的最小重量（即非零位的数量）来得到，因为线性码的任意两个码字的差也是该码中的一个码字.
我们用两种方法分别来计算：
1. 码字重量分析：
0000 的重量为 0（无需考虑，因为我们寻找的是非零码字的最小重量）.
1100 的重量为 2.
0011 的重量为 2.
1111 的重量为 4.
2. 码字间的汉明距离：
从 0000 到 1100，距离为 2.
从 0000 到 0011，距离为 2.
从 0000 到 1111，距离为 4.
从 1100 到 0011，距离为 4.
从 1100 到 1111，距离为 2.
从 0011 到 1111，距离为 2.
由上面的计算可见，码字之间的最小汉明距离是 2，这也是该码的最小距离. 因此，给定的二元线性码 L 的最小距离为 2.

填空题

对于任意 $n \geq 1$, $\quad A_q(n,n) =$ ____.

设 C 是一个 q 元 (n,M,n) 码, 则 $\forall x,y \in C, x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n), x_i \neq y_i, i=1,\cdots,n$, 因此, 所有码字在一个固定分量位置上出现的字符一定互不相同, 于是 $M \leq q$. 由此可知 $A_q(n,n) \leq q$, 又码长为 n 的 q 元重复码是一个 q 元 (n,q,n) 码, 故 $A_q(n,n)=q$.

解答题

(1) 证明: 对任意三元 $(3,M,2)$ 码, 一定有 $M \leq 9$.
(2) 证明: 三元 $(3,9,2)$ 码一定存在. 于是, $A_3(3,2)=3^2$.
(3) 证明: $A_q(3,2)=q^2$, 其中 $q \geq 2, q$ 是素数的幂次方.

(1) 对于任意的三元 $(3,M,2)$ 码，根据 Singleton 界，$A_q(n,d) \leq q^{n-d+1}$, 将 $n=3, d=2, q=3$（因为是三元码，所以 $q=3$）代入上述公式：$A_3(3,2) \leq 3^{3-2+1}=3^2=9$. 这表明在保证任意两个码字之间的汉明距离至少为 2 的情况下，码字总数 M 不能超过 9. 因此，任何 $(3,M,2)$ 码的码字数量 M 最大为 9, 这就证明了 $M \leq 9$.
(2) 为了证明，我们需要构造一个具体的 $(3,9,2)$ 码. 考虑以下码集 C:

$$C=\{000,111,222,012,021,120,102,210,201\}$$

这 9 个码字确保了任意两个码字之间的汉明距离至少为 2. 由于我们找到了一个有效的 $(3,9,2)$ 码，因此 $A_3(3,2) \geq 9$. 结合前面的 Singleton 界结果 $A_3(3,2) \leq 9$，可以断定 $A_3(3,2)=9$.
(3) 使用 Singleton 界:

$$A_q(3,2) \leq q^{3-2+1}=q^2$$

我们需要构造一个 q 元 $(3,q^2,2)$ 码来证明存在性. 考虑码集:

$$C=\{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{F}_q\}$$

其中 $\mathbb{F}_q$ 是有 q 个元素的有限域. 这种构造中, 每个码字形式为 $(a,b,a+b)$, 其中每个 a 和 b 可以独立选择，因此共有 q^2 个码字. 即 $|C|=q^2$. 由于对于任何两个不同的码字 $(a,b,a+b)$ 和 $(a',b',a'+b')$，至少在两个坐标上有不同（如果 $a \neq a'$ 那么 $a+b \neq a'+b'$），所以这种码的最小汉明距离 $d(C)=2$. 因此，$A_q(3,2)=q^2$.

解答题

试说明对于二元重复码 $C=\{00\cdots0, 11\cdots1\}$, 它是一个二元 $(n,2,n)$ 码, 当 n 为奇数时, C 是完备码. 另外, 只含一个码字的码以及由 $V(n,q)$ 构成的 q 元 $(n,q^n,1)$ 码都是完备码.

设 C 是一个 q 元 $(n,M,2t+1)$ 码. 如果

$$M\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(q-1)+\binom{n}{2}(q-1)^2+\cdots+\binom{n}{t}(q-1)^t\right\}=q^n,$$

则称 C 为完备码 (perfect code).

(1) 对于码长为 n 的二元重复码

$$C_1=\{\underbrace{00\cdots 0}_{n},\underbrace{11\cdots 1}_{n}\}.$$

$$\begin{aligned}
&2\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{t}\right\}\\
=&\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{l}+\binom{n}{t+1}+\cdots\\
&+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\\
&=(1+1)^n\\
&=2^n.
\end{aligned}$$

因此, 当码长 n 为奇数时, 二元重复码 C_1 是一个完备的 $(n,2,n)$ 码.

(2) 对于只含有一个码字的码 $C_2=\{x\}\subset V(n,q)$, 当在信道发送端发送码字 x 后, 在信道接收端不管接收到什么向量都将译为码字 x. 这就是说, 码 C_2 可以检查和纠正码字在信道传输过程中发生的任何数目的错误. 因此, 码 C_2 可纠正的错误数目为 $t=n$. 显然,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(q-1)+\binom{n}{2}(q-1)^2+\cdots+\binom{n}{n}(q-1)^n\\
=(1+(q-1))^n\\
=q^n.
\end{aligned}$$

因此, 只含有一个码字的码 C_2 是完备码.

(3) 对于码 $C_3=V(n,q)$, 其码字个数为 q^n. 最小距离为 1 , 可纠正的错误数目为 $t=0$. 显然, 对于 q 元 $(n,q^n,1)$ 码 C_3. 满足定义. 因此, $C_3=V(n,q)$ 是完备码.

解答题

对于任意 $n\geq 1$, 试确定 $A_q(n,n)$.

设 C 是一个 q 元 (n,M,n) 码, 则 C 中任意两个不同的码字 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的 Hamming 距离都是 n, 也就是说, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的 n 个分量一定互不相同. 于是, 对于任意一个分量位置 i, C 中 M 个码字的第 i 个分量一定互不相同. 因此, $M\leq q$. 另一方面, 我们已经知道码长为 n 的 q 元重复码是一个 (n,q,n) 码. 因此, $A_q(n,n)=q$.

解答题

试说明对于二元重复码 $C = \{00\cdots0, 11\cdots1\}$, 它是一个二元 $(n,2,n)$ 码, 当 n 为奇数时, C 是完备码. 另外, 只含一个码字的码以及由 $V(n,q)$ 构成的 q 元 $(n,q^n,1)$ 码都是完备码.

---

(1) 二元重复码 $C = \{00\cdots0, 11\cdots1\}$ 是一个二元 $(n,2,n)$ 码，当 n 为奇数时, C 是完备码.
二元重复码 C 包含两个码字：全 0 和全 1，每个码字长度为 n. 最小汉明距离 $d = n$ 是因为两个码字在每个位上都不同.
验证完备码条件：完备码的定义要求：

$$M\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}\right) = 2^n,$$

其中 $M = 2$ 是码字数量，$t = \frac{n-1}{2}$.
由于二项式定理给出：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n,$$

利用对称性，当 n 为奇数时：

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{i} = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{i},$$

因此，

$$2\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{i}\right) = 2^n,$$

满足完备码的条件. 因此，当 n 为奇数时，二元重复码 C 是完备码.
(2) 只含一个码字的码 $C_2 = \{x\}$ 以及由 $V(n,q)$ 构成的 q 元 $(n,q^n,1)$ 码都是完备码.
只含一个码字的码 C_2：任何接收的向量都被解释为唯一的码字 x. 纠正的错误数目 $t = n$（最大可能的错误数目）.
完备码条件为：

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q-1)^i\right) = q^n.$$

由于二项式定理，上式变为 $(1+(q-1))^n = q^n$，显然满足. 因此 C_2 是完备码.
(3) 由 $V(n,q)$ 构成的 q 元 $(n,q^n,1)$ 码 C_3：包括所有 n-维向量，错误纠正个数 $t = 0$. 由于覆盖了整个 n-维空间，满足完备码条件，即有 $q^n = q^n$，所以 C_3 也是完备码.

填空题

设二元 $[4,2]$ 线性码 $L=\{0000,1100,0011,1111\}$, 则 L 的对偶码为 ____.

一个线性码 L 的对偶码 $L^{\perp}$ 定义为所有与 L 中所有码字正交的码字的集合. 对于一个二元码，如果两个码字 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 的点积 $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0$ (模 2 计算)，则这两个码字正交.
对于给定的线性码 $L=\{0000,1100,0011,1111\}$ ，我们需要找到所有与 L 中每个码字都正交的码字构成的集合 $L^{\perp}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L 的生成矩阵为 $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$L^{\perp}=\left\{xG^T=0 \mid x\in V(n,q)\right\}$. 即 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3+x_4=0 \end{cases}$ 解得 $\xi_1=(1,1,0,0),\xi_2=(0,0,1,1).\xi_3=(1,1,1,1)$ $\xi_4=(0,0,0,0)$. $L^{\perp}=L, L^{\perp}$ 也是 $[4,2]$ 线性码.$L^{\perp}=\{0000,1100,0011,1111\}$

解答题

设 E_n 是 $V(n,2)$ 中所有具有偶数重量的向量的集合. 证明: E_n 是线性码, 确定 E_n 的参数 $[n,k,d]$ 以及其标准型的生成矩阵.

证明: $\forall x,y\in E_n, d(x,y)=\omega(x-y),\omega(x-y)=\omega(x)+\omega(y)-2\omega(x\cap y)$. 故 $\omega(x+y)$ 为偶数, $x+y=x-y, x+y\in E_n, E_n$ 是线性码. 由上一章课后题知 E_n 是一个 $[n,n-1,2]$ 线性码, 标准生成阵为

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $L=\{xG \mid \forall x\in V(n-1,q)\}$, 对 n 用归纳法证明, 则 L 中的元均具有偶重量, 从而 $L\subseteq E_n$. 又 $\dim L=\dim E_n=n-1$, 故 $L=E_n$. ($\forall x\in L, x=v_{j1}+v_{j2}+\cdots+v_{jk}$，系数取在 F_2 中 $\{0,1\}, k=2$ 时, $x=v_{j1}+v_{j2},\omega(x)=\omega\left(v_{j1}\right)+\omega\left(v_{j2}\right)-2\omega\left(v_{j1}\cap v_{j2}\right)$ 为偶数容易用归纳法证得)

解答题

设 E_n 是 $V(n,2)$ 中所有具有偶数重量的向量的集合. 证明: E_n 是线性码, 确定 E_n 的参数 $[n,k,d]$ 以及其标准型的生成矩阵.

(1) 要证明 E_n 是线性码, 我们需要证明对于任意两个向量 $x,y \in E_n$, 它们的加法 $x+y$ (在 $\mathbb{F}_2$ 上是按位异或) 仍然在 E_n 中. 对于任何二元向量, 其重量的公式 $\omega(x+y)$ 可以通过 $\omega(x)+\omega(y)-2\omega(x\cap y)$ 来计算，其中 $\omega(x\cap y)$ 是 x 和 y 同时为 1 的位置数. 因 x,y 的重量都是偶数，$\omega(x)+\omega(y)$ 也是偶数. 由于 $\omega(x\cap y)$ 是整数，$2\omega(x\cap y)$ 一定是偶数，从而 $\omega(x+y)$ 是偶数，证明 $x+y$ 也在 E_n 中. 得证.

(2) 码的长度 n: 码的长度 n 指的是每个码字的位数, 由于 E_n 包括 $V(n,2)$ 中所有具有偶数重量的向量，每个向量自然是长度为 n 的向量.

维数 k 表示线性码的生成矩阵的行数，也即是该码作为向量空间的基的向量数目. 在 E_n 的情况中，生成矩阵 G 可以构造为长度为 n 且每行保证向量总重量为偶数的矩阵，具体形式如下

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的每一行代表一个基向量，其中最后一个元素是其它所有元素的和（确保总重量为偶数).

考虑到 E_n 是所有偶数重量向量的集合，若 n 是奇数，则所有 n 位向量中重量为奇数的向量不能直接包含在 E_n 中，但可以通过其它向量的线性组合得到（例如全 “1 ” 向量可以通过其它所有位为 1 且总数为奇数的向量异或得到).

因此，E_n 实际能够生成的独立向量数为 $n-1$ ，即除去一个线性相关的向量（例如，全 “1” 向量)，余下的向量能够生成所有偶数重量的向量. 这意味着 E_n 作为子空间的维数是 $n-1$.

最小汉明距离 d 是指码中任意两个不同码字间至少有 d 个位是不同的. 对于 E_n ，因为所有码字的重量都是偶数，所以任何两个不同的码字至少要在两个位置上有差异，以确保它们的总重量变化保持为偶数 (如果仅一个位不同，一个码字的重量将由偶数变为奇数或反之，不满足偶数重量的要求) . 因此，E_n 的最小汉明距离至少是 2 .

综上所述，E_n 是一个 $[n,n-1,2]$ 线性码.

(3) 标准型的生成矩阵 G 的具体形式是: $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

这里，G 是一个 $(n-1)\times n$ 矩阵，其中前 $n-1$ 列是 $I_{n-1}(n-1$ 阶单位矩阵)，最后一列是全例 (如果 n 是奇数) 或全 0 列 (如果 n 是偶数)，以保持每行的重量为偶数.

解答题

证明: 对于任意一个二元线性码 L, 一定满足下列条件之一.

(1) L 中所有码字都具有偶数重量;

(2) L 中一半码字具有偶数重量, 另一半码字具有奇数重量.

证明: 设 L 是一个二元 $[n,k]$ 线性码, 且 L 中存在码字 x_0, 使得 $\omega(x_0)$ 为奇数. 令 $L_1=\{x\in L\mid \omega(x)$ 是偶数 $\}, L_2=\{x\in L\mid\omega(x)$ 是奇数 $\}, x_0+L_1=\{x_0+x\mid\forall x\in L_1\}, x_0+L_1$ 中元素重量为奇数, $x_0+L_1\subseteq L_2$ 同理 $x_0+L_2\subseteq L_1$. $|L_2|\geq|x_0+L_1|=|L_1|\geq|x_0+L_2|=|L_2|\Rightarrow|L_1|=|L_2|$. (否定一个证另一个)

解答题

证明: 对于任意一个二元线性码 L, 一定满足下列条件之一.

(1) L 中所有码字都具有偶数重量;

(2) L 中一半码字具有偶数重量, 另一半码字具有奇数重量.

给定条件是 L 是一个二元 $[n,k]$ 线性码. 这意味着 L 包含 2^k 个码字，每个码字长度为 n .

定义两个集合: $L_1=\{x\in L\mid\omega(x)$ 是偶数 $\}$, $L_2=\{x\in L\mid\omega(x)$ 是奇数 $\}$.

假设在 L 中存在至少一个码字 x_0 使得 $\omega(x_0)$ 是奇数. 我们将使用这个码字来构建集合映射.

对于 L_1 中的任意码字 x ，由于 x_0 是奇数重量，x 是偶数重量，那么 x_0+x 将是奇数重量（偶数与奇数相加结果为奇数）. 因此，$x_0+L_1=\{x_0+x\mid x\in L_1\}\subseteq L_2$.

同样, 对于 L_2 中的任意码字 y, x_0+y 将是偶数重量 (奇数与奇数相加结果为偶数) . 因此, $x_0+L_2=\{x_0+y\mid y\in L_2\}\subseteq L_1$.

由于 $x_0+L_1\subseteq L_2$ 且 $x_0+L_2\subseteq L_1$ ，我们知道 x_0+L_1 和 x_0+L_2 分别是 L_2 和 L_1 的一部分，且由于码的线性属性，加法 x_0+x (其中 x 是 L 的任意成员) 是双射的（即一一对应且可逆). 因此, $|x_0+L_1|=|L_1|$ 和 $|x_0+L_2|=|L_2|$.

由 $|L_2|\geq|x_0+L_1|=|L_1|$ 和 $|L_1|\geq|x_0+L_2|=|L_2|$ ，我们得出 $|L_1|=|L_2|$.

这表明如果 L 中存在至少一个奇数重量的码字，那么偶数重量的码字和奇数重量的码字数量必然相等，即 $|L_1|=|L_2|$. 如果 L 中所有码字都具有偶数重量，那么 L_2 为空集，从而也满足题目中的条件之一.

综上所述，对于任意一个二元线性码 L ，要么所有码字都具有偶数重量，要么一半码字具有偶数重量，另一半码字具有奇数重量.

解答题

设三元线性码 L 的生成矩阵为 $G=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\end{pmatrix}$. 试求 L 的最小距离, 并证明 L 是完备码.

$G=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right)=(I_2\mid A)$, 故 L 的校验阵 $H=\left(-A^T\mid I_2\right)=\begin{pmatrix}2&2&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}$.
H 中任意两列线性无关, 存在第 1,2 ,4 列线性相关, 根据定理知，$d(L)=3$.
L 为一个三元 $(4,4,3)$ 码，由于

$$3^2\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{1}(3-1)\right)=3^4$$

因此, L 是完备码.

解答题

设二元线性码 L 的生成矩阵为 $G=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$. 试求 L 的标准阵, 并对信道接收端接收到的字 11111 和 10000 分别进行译码.

易知 L 为一个 2 元 $[5,2]$ 线性码，$|L|=q^k=2^2=4$. $L=xG=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$, (x_1,x_2) 分别取 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. 计算可得 $L=\{00000,01010,11010,10000\}$ ，于是标准阵:

00000	01010	11010	<u>10000</u>	
01000	00010	10010	11000	a_1+L
00100	01110	11110	10100	a_2+L
00001	01011	11011	10001	a_3+L
01100	00110	10110	11100	a_4+L
01001	00011	10011	11001	a_5+L
00101	01111	<u>11111</u>	10101	a_6+L
01101	00111	10111	11101	a_7+L

11111 在第 7 行第 3 列，将 11111 译为第 3 列中最顶端的码字 11010 ，同理将 10000 译为 10000.

解答题

设三元线性码 L 的生成矩阵为 $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 试求 L 的标准型的生成矩阵.

(2) 试求 L 的标准型的校验矩阵.

(3) 试利用伴随式译码方法对信道接收端接收到的字 2121、1201、2222 分别进行译码.

---

(1) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = G'$

G' 为 L 的标准型的生成矩阵.

(2) $G' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = (I_2 \mid A)$, 故 L 的标准型的校验矩阵为 $H = \left(-A^T \mid I_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) 码 L 的伴随式列表为

陪集头	伴随式 xH^T
0000	00
1000	11
0100	12
0010	10
0001	01
2000	22
0200	21
0020	20
0002	02

设信道接收端接收到的字 2121、1201、2222 分别为 x_1, x_2, x_3,

$$\begin{aligned} x_1H^T &= 22, \quad a_1 = 2000, a_1H^T = 22, x_1 - a_1 = 0121 \\ x_2H^T &= 00, \quad a_2 = 0000, a_2H^T = 00, x_2 - a_2 = 1201. \\ x_3H^T &= 02, \quad a_3 = 0002, a_3H^T = 02, x_3 - a_3 = 2220. \end{aligned}$$

因此, 2121 译码为 $2121 - 2000 = 0121$. 1201 译码为 $1201 - 0000 = 1201$,2222 泽码为 $2222 - 0002 = 2220$.

解答题

设二元线性码 L 的生成矩阵为 $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 试求 L 的重量分布.

$G = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid A)$, 故 L 的校验阵 $H = \left(-A^T \mid I_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 根据定义知，$H$ 为线性码 L 的对偶码 $L^\perp$ 的生成矩阵, 于是 $L^\perp = \{00000, 10010, 11101, 01111\}$. 由于 $L^\perp$ 是一个二元 $[5, 2]$ 线性码，则有

$$W_{L^\perp}(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^4$$

L 是一个二元 $[5, 3]$ 线性码, 则由二元线性码的 Mac Williams 恒等式知

$$\begin{aligned} W_L(z) &= \frac{1}{2^2}(1+z)^5 W_{L^\perp}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \\ &= \frac{1}{4}(1+z)^5\left[1 + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 + 2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^4\right] \\ &= 1 + 3z^2 + 3z^3 + z^5. \end{aligned}$$

因此线性码 L 的重量分布为

$$A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 3, A_3 = 3, A_4 = 0, A_5 = 1.$$

解答题

试求二元 Hamming 码 Ham $(3,2)$ 的包含培集头和对应伴随式列表, 并对在信道接收端接收到的字 0000011, 1111111, 1100110, 1010101 分别进行译码.

二元 Hamming 码 Ham$(3,2)$ 的校验矩阵为 $H=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$

伴随式列表:

陪集头 x_i	伴随式 x_iH^T
1000000	001
0100000	010
0010000	011
0001000	100
0000100	101
0000010	110
0000001	111

$$(0000011)H^T=001\Rightarrow 000011\text{译为}1000011.$$
$$(1111111)H^T=000\Rightarrow 1111111\text{译为}1111111.$$
$$(1100110)H^T=011\Rightarrow 1100110\text{译为}1110110.$$
$$(1010101)H^T=000\Rightarrow 1010101\text{译为}1010101.$$

解答题

写出七元 Hamming 码 Ham$(2,7)$ 的校验矩阵 H, 并对在信道接收端接收到的字 35234106 和 10521360 分别进行译码.

七元 Hamming 码 Ham$(2,7)$ 的校验矩阵为 $H=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

$$x_1H^T=(35234106)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\\1&6\end{pmatrix}=(0\quad 0),\quad x_2H^T=(10521360)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\\1&6\end{pmatrix}=(3\quad 6)=3(1\quad 2)$$

因此，x_1 没有发生错误，即 35234106 译为 35234106 . x_2 在第 4 个位置发生错误，10521360 译为 $10521360-00030000=10561360$.

解答题

设二元 Hamming 码 Ham$(4,2)$ 的校验矩阵为

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

试对在信道接收端接收到的字 011011001111000 和 001100110011000 分别进行译码.

$$(011011001111000)\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}=(0110),(001100110011000)\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}=(1111)$$

第 6 个位置发生错误，于是 011011001111000 译为 011010001111000 .
第 15 个位置发生错误，于是 001100110011000 译为 001100110011001 .

解答题

写出三元 Hamming 码 Ham$(3,3)$ 的校验矩阵 H, 并对在信道接收端接收到的字 0122100110022 和 2211001012020 分别进行译码.

$n=\frac{3^3-1}{3-1}=\frac{26}{2}=13$

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&2&2&2\\1&0&1&2&0&1&2&0&1&2&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$x_1=0122100110022\quad x_1H^\top=(111)$$
$$x_2=2211001012020\quad x_2H^\top=(010)$$

x_1 在第 9 个位置发生错误，于是译为 $x_1-0000000010000=0122100100022$
x_2 在第 2 个位置发生错误，于是译为 $x_2-0100000000000=2111001012020$

解答题

试求二元 Hamming 码 Ham(4,2) 中重量分别为 $1,2,3,4$ 的码字的个数.

$r=4$, 于是 $n=2^r-1=15$, 代入重量分布多项式中得:

$$W_{\text{Ham }(4,2)}(z)=\frac{1}{2^4}\left[(1+z)^{15}+15\left(1-z^2\right)^7(1-z)\right]$$

由二项式展开定理, 计算整理得:

$$W_{\text{Ham}(4,2)}(z)=1+35z^3+105z^4$$

于是, 二元 Hamming 码 Ham$(4,2)$ 中重量为 $1,2,3,4$ 的码字的个数分别为 $0,0,35,105$.

解答题

确定二元 Hamming 码 Ham$(r,2)$ 中重量为 3 的码字的个数 A_3.

二元 Hamming 码 Ham$(r,2)$ 的重量分布多项式为 $W_L(z)=\frac{1}{2^r}\left[(1+z)^n+n\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}(1-z)\right]$, 其中, $n=2^r-1$, 由二项式展开定理, 计算整理得:

$$W_L(z)=\frac{1}{2^r}\left[\left(\cdots+C_n^3z^3+\cdots\right)+\left(\cdots+nC_{\frac{n-1}{2}}^1z^3+\cdots\right)\right]$$

z^3 的系数为 $\frac{1}{2^r}\left(C_n^3+nC_{\frac{n-1}{2}}^1\right)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=\frac{n(n-1)}{6}$. 故重量为 3 的码字的个数 $A_3=\frac{n(n-1)}{6}$.

解答题

设 p 是一个素数.
(1) 在 F_p 上将 x^p-1 分解成不可约多项式的乘积.
(2) 在 F_p 上将 $x^{p-1}-1$ 分解成不可约多项式的乘积.

当 p 是素数时，我们可以利用特征为 p 的有限域 F_p 上的性质来分解多项式 x^p-1 和 $x^{p-1}-1$.
(1) 对于 x^p-1，我们可以利用二项式定理展开 $(x-1)^p$. 在有限域 F_p 中，二项式系数 $\binom{p}{k}$ 对 p 取模后都为 0（当 $1<k<p$）. 因此，展开后除了首尾两项，其他所有的项都被 p 整除，而首尾两项就是 x^p 和 -1，因此我们可以得到:

$$x^p-1=(x-1)^p$$

(2) 对于 $x^{p-1}-1$，我们可以利用费马小定理. 根据费马小定理，对于任意 $a\in F_p$ 且 $a\neq 0$，都有 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. 因此，$x^{p-1}-1$ 在 F_p 上有 $p-1$ 个根，分别是 $1,2,\ldots,p-1$. 因此，我们可以将其分解为一次多项式的乘积:

$$x^{p-1}-1=(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))$$

这样，我们就完成了 x^p-1 和 $x^{p-1}-1$ 在有限域 F_p 上的分解.

解答题

在 F_3 上将 x^4-1 分解成不可约多项式的乘积, 确定所有码长为 4 的三元循环码, 并写出每一个码的生成矩阵和校验矩阵.

在三元域 $\mathbb{F}_3$ 上

$$x^4-1=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=(x+2)(x+1)\left(x^2+1\right)$$

$x+2$ 是一个一次多项式. 在任何域上，一次多项式都是不可约的，因为它们没有非平凡的因子. 所以在 $\mathbb{F}_3$ 上，$x+2$ 是不可约的. 同理，$x+1$ 也在 $\mathbb{F}_3$ 上不可约. 对于 x^2+1 ，我们需要检查它是否有在 $\mathbb{F}_3$ 上的根. 如果它没有根，那么它就是不可约的. 我们检查 $\mathbb{F}_3$ 中的所有元素:

1. $x=0$:$0^2+1=1\neq 0$
2. $x=1$:$1^2+1=1+1=2\neq 0$
3. $x=2$:$2^2+1=4+1=5\equiv 2 \pmod 3 \neq 0$

由于 x^2+1 在 $\mathbb{F}_3$ 上没有根，所以它在 $\mathbb{F}_3$ 上是不可约的.

长为 4 的三元循环码的生成多项式、生成矩阵、校验矩阵和对应的码如下:

生成多项式	生成矩阵	校验多项式	校验矩阵	$V(4,3)$中的码
1	I_4	$x^4-1=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$	$V(4,3)$
$x-1$	$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$	x^3+x^2+x+1	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$	$\{0000,2100,0210,0021,1002,1200,0120,0012,2001,1020,0102,2010,0201,1110,0111,1011,1101,2220,0222,2022,2202,2211,1221,1122,2112,2121,1212\}$
$x+1$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$	x^3-x^2+x-1	$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}$	$\{0000,1100,0110,0011,1001,2200,0220,0022,2002,1020,0102,2010,0201,1210,0121,1012,2101,2120,0212,2021,1202,2112,2211,1221,1122,1111,2222\}$
x^2+1	$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$	x^2-1	$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$	$\{0000,1010,0101,2020,0202,1212,2121,1111,2222\}$
x^2-1	$\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$	x^2+1	$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$	$\{0000,2010,0201,1020,0102,1122,2112,2211,1221\}$
x^3-x^2+x-1	$\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\end{pmatrix}$	$x+1$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$	$\{0000,2121,1212\}$
x^3+x^2+x+1	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$	$x-1$	$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$	$\{0000,1111,2222\}$
$x^4-1=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$	1	I_4	$\{0000\}$

解答题

在 F_2 上将 x^5-1 分解成不可约多项式的乘积, 确定所有码长为 5 的二元循环码, 并写出每个码的生成矩阵和校验矩阵.

在 F_2 上, $x^5-1=(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ 所有码长为 5 的二元循环码的生成多项式, 生成矩阵和校验矩阵如下:

生成多项式	生成矩阵	校验矩阵	$V(5,2)$中的码
1	I_5	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\end{pmatrix}$	$V(5,2)$
$x+1$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}00000,11000\\01100,00110\\00011,10001\\10010,01001\\10100,01010\\00101,11110\\01111,10111\\11011,11101\end{matrix}\right\}$
$x^4+x^3+x^2+x+1$	$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$	$\{00000,11111\}$
x^5-1	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\end{pmatrix}$	I_5	$\{00000\}$

解答题

在 $\mathbb{F}_2$ 上把 x^3-1 分解成不可约多项式的乘积, 确定所有码长是 3 的二元循环码, 并写出每个码的生成矩阵和校验矩阵.

先将 x^3-1 在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上分解为不可约多项式的乘积,

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)=(x+1)\left(x^2+x+1\right).$$

因为 0 和 1 都不是多项式 x^2+x+1 的根, 所以 x^2+x+1 在 $\mathbb{F}_2$ 上是不可约的. 因此 $x+1$ 和 x^2+x+1 都是 $\mathbb{F}_2$ 上的不可约多项式.

生成多项式	R_3 中的码	$V(3,2)$ 中的码	生成矩阵	校验矩阵
1	R_3	$V(3,2)$	I_3	$\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$
$1+x$	$\{0,1+x,x+x^2,1+x^2\}$	$\{000,110,011,101\}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$
$1+x+x^2$	$\{0,1+x+x^2\}$	$\{000,111\}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$
x^3-1	$\{0\}$	$\{000\}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$	I_3

写出 R_4 中的码长为 4 的所有三元循环码.
列表:

生成多项式	R_4 中的码	$V(4,3)$ 中的码
1	R_4	$V(4,3)$
$2+x$	$3^3=27$ 个元	$\{0000, 2100, 0210, 0021, 1002, 1200, 0120, 0012, 2001, 1020, 0102, 2010, 0201, 1110, 0111, 1011, 1101, 2220, 0222, 2022, 2202, 2211, 1221, 1122, 2112, 2121, 1212\}$
$1+x$	$3^3=27$ 个元	$\{0000, 1100, 0110, 0011, 1001, 2200, 0220, 0022, 2002, 1020, 0102, 2010, 0201, 1210, 0121, 1012, 2101, 2120, 0212, 2021, 1202, 2112, 2211, 1221, 1122, 1111, 2222\}$
$1+x^2$	$3^2=9$ 个元	$\{0000, 1010, 0101, 2020, 0202, 1212, 2121, 1111, 2222\}$
$2+x^2$	$3^2=9$ 个元	$\{0000, 2010, 0201, 1020, 0102, 1122, 2112, 2211, 1221\}$
$2+x+2x^2+x^3$	$3^1=3$ 个元	$\{0000, 2121, 1212\}$
$1+x+x^2+x^3$	$3^1=3$ 个元	$\{0000, 1111, 2222\}$
x^4-1	$\{0\}$	$\{0000\}$

$$(a+bx+cx^2)(2+x), a, b, c \in F_3, 3^3=27 \text{ 个元};$$
$$(a+bx)(1+x^2), a, b \in F_3, 3^2=9 \text{ 个元};$$
$$a(2+x+2x^2+x^3), a \in F_3, 3^1=3 \text{ 个元}.$$

在 F_3 上将 x^4-1 分解成不可约多项式的乘积, 确定所有码长为 4 的三元循环码, 并写出每一个码的生成矩阵和校验矩阵.

生成多项式	R_4中的码	$V(4,3)$中的码
1	R_4	$V(4,3)$
$x+1$	27 个元	$\{0000, 1100, 0110, 0011, 1001, 2200, 0220, 0022, 2002, 1020, 0102, 2010, 0201, 1210, 0121, 1012, 2101, 2120, 0212, 2021, 1202, 2112, 2211, 1221, 1122, 1111, 2222\}$
$x-1$	27 个元	$\{0000, 2100, 0210, 0021, 1002, 1200, 0120, 0012, 2001, 1020, 0102, 2010, 0201, 1110, 0111, 1011, 1101, 2220, 0222, 2022, 2202, 2211, 1221, 1122, 2112, 2121, 1212\}$
x^2+1	9 个元	$\{0000, 1010, 0101, 2020, 0202, 1212, 2121, 1111, 2222\}$
x^2-1	9 个元	$\{0000, 2010, 0201, 1020, 0102, 1122, 2112, 2211, 1221\}$
x^3+x^2+x+1	3 个元	$\{0000, 1111, 2222\}$
x^3-x^2+x-1	3 个元	$\{0000, 2121, 1212\}$
x^4-1	$\{0\}$	$\{0000\}$

长为 4 的三元循环码的生成多项式, 生成矩阵和校验矩阵如下:

特征多项式	生成矩阵	校验多项式	校验矩阵
1	I_4	$x^4-1=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$x-1$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	x^3+x^2+x+1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$x+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	x^3-x^2+x-1	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
x^2+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
x^2-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	x^2+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
x^3-x^2+x-1	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$x+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
x^3+x^2+x+1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$x-1$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$x^4-1=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	I_4