目录

1 数值分析第一次作业

2024-03-05

1. 当 N 充分大时, 如何计算

$$I=\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

通过计算我们可知 $I=\displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_N^{N+1}=\arctan(N+1)-\arctan N$.
而当 N 充分大的时候，上式右边两个数的值非常接近，在计算过程中两个近似数相减会使得有效数字的位数严重损失，为了避免此类情况，我们需要改变计算公式，于是我们改写成如下形式进行计算：

$$I=\arctan(N+1)-\arctan N=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}$$

2024-03-05

2. 当 $x\gg 1$ 时, 如何计算 $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

同上，易知计算式改写成如下形式：

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)x}$$

2024-03-05

3. 数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式

$$x_n=10\cdot x_{n-1}-1,\quad (n=1,2,\cdots)$$

这个算法稳定吗?

一个数值方法如果输入数据有扰动 (即误差), 而在计算过程中由于舍入误差的传播, 造成计算结果与真值相差甚远, 则称这个数值方法是不稳定的或是病态的. 反之, 在计算过程中舍入误差能够得到控制, 不增长, 则称该数值方法是稳定的或良态的.
不妨我们设 $x_0=\sqrt{3}$ 为一个无限不循环小数, 由于计算机只能截取其前有限位数, 这样得到 x_0 经机器舍入的近似值 x_0^*, 于是初始值存在误差 $e_0=x_0-x_0^*$. 记 x_n 为利用初值 x_0^* 按所给公式计算的值, 并记 $e_n=x_n-x_n^*$, 则递推可知:

$$\begin{aligned}
x_n&=10^n x_0-10^{n-1}-10^{n-2}-\cdots-1,\\
x_n^*&=10^n x_0^*-10^{n-1}-10^{n-2}-\cdots-1,\\
e_n&=x_n-x_n^*=10^n\left(x_0-x_0^*\right)=10^n e_0.
\end{aligned}$$

因此, 当初始值存在误差 e_0 时, 经 n 次递推计算后, 误差将扩大为 10^n 倍, 这说明计算是不稳定的.

2024-03-05

4. 为了使 $\sqrt{11}$ 的近似值的相对误差不超过 0.1%, 至少应取几位有效数字

设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times \left(a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}\right),$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 0 到 9 中的一个数字, $a_1 \neq 0, m$ 为整数. 若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差限

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

设取 n 位有效数字, 由上可知 $\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$. 由于 $\sqrt{11} = 3.3\cdots$, 知 $a_1 = 3$,

$$\varepsilon_r(x^*) \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{6} \times 10^{(1-n)}$$

根据题意我们有 $\frac{1}{6} \times 10^{1-n} \leqslant 0.1\%$, 解得 $n \geqslant 3.22$, 故取 $n = 4$, 即只要对 $\sqrt{11}$ 的近似值取 4 位有效数字, 其相对误差限就小于 0.1%.

2024-03-05

5. 利用计算机求 $\sum\limits_{n=1}^{100} \frac{1}{n^{100}}$ 的值, 应按照 n 从小到大的顺序进行求和. 该说法是 ______ 的. (正确或者错误)

错误的. 在计算机中进行浮点数运算时, 由于浮点数的精度限制, 当累加的数值差异较大时, 可能会导致精度损失或者结果不准确. 显然, n 从 1 取到 100 的过程 $\frac{1}{n^{100}}$ 单调递减且它的值会变得非常接近于零, 而且两两取值之间小数部分的差异非常大, 100 次的计算会使得其中的误差累积, 导致在求和过程中丢失精度. 因此, 在计算 $\sum\limits_{n=1}^{100} \frac{1}{n^{100}}$ 这样的累加运算时, 应该按照 n 从大到小的顺序进行求和, 以避免大数吃掉小数导致精度损失.
在连加运算中, 数据的排列顺序应由绝对值小的到绝对值大的, 即绝对值小的放在前面, 绝对值大的放在后面. 如果连加的数据很多, 那么两种次序计算的结果就有可能相差很大.

2024-03-05

6. Write a paper with respect to mathematics , you can talk about your experience to study mathematics and your consideration about the application of the mathematics , and also you can write something about the mathematical application in the major you study. (with English at least 200 words)

As a fundamental discipline, mathematics plays a crucial role in cultivating logical thinking, analyzing and solving problems. Mathematics has been a subject that has accompanied me since childhood, serving as a loyal companion. In primary school, I developed a strong interest in mathematics. By learning basic arithmetic, geometry, and algebra, I gradually nurtured my logical thinking and spatial imagination. As I progressed to middle and high school, the mathematics curriculum delved deeper and became more challenging. Through diligent study of mathematical concepts, I laid a solid foundation for my university studies.

During my university years, I chose to major in Information and Computer Science, where I further studied courses such as mathematical analysis, advanced algebra, abstract algebra, probability theory, and mathematical statistics. Studying these courses reignited my curiosity for the mysteries of mathematics. As an abstract discipline, mathematics explores the laws of nature and human thought, revealing the secrets of the universe. Mathematics is not just a tool but also a way of thinking and a method for problem-solving.

In university mathematics, I encountered many special concepts and theorems, such as continuity, limits, vector spaces, group theory, and measurability. These concepts and theorems not only hold aesthetic value but also play crucial roles in fields such as science, engineering, and economics. I personally applied these theories in practice during various mathematical modeling competitions, using mathematical principles to solve real-world problems. Everyday examples like QR codes involve a wealth of mathematical methods, where specific encoding techniques are used to store information such as numbers, letters, or binary data. This process involves converting raw data into a format suitable for QR codes, typically including data compression and the addition of error-detecting and error-correcting codes. Linear algebra: In error correction codes for QR codes, such as Reed-Solomon codes, polynomial operations and matrix operations from linear algebra are utilized. These operations are used to add redundant information during the encoding process and to recover potentially damaged data during the decoding process. Information theory: Concepts from information theory, such as entropy, information content, and channel capacity, play a significant role in the design and analysis of QR codes. These concepts help determine the storage efficiency and error correction capabilities of QR codes. Digital logic: The generation and decoding processes of QR codes involve digital logic operations, such as Boolean operations and bitwise operations, used for handling binary data. Probability theory and statistics: In the error correction process of QR codes, probability theory and statistical methods are used to assess the probability of errors occurring and to determine how to allocate redundant information during the encoding process to maximize error correction capabilities.

In conclusion, mathematics is not only a tool for scientific research but also a key to human understanding of the world, solving practical problems, creating new technologies, and driving social progress. With technological advancements and societal progress, the importance of mathematics is increasingly prominent.

2 插值与拟合习题

2024-03-10

1. 已知等距插值节点,

$$x_0<x_1<x_2<x_3,\quad x_{i+1}-x_i=h\quad(i=0,1,2)$$

且 $f(x)$ 在 $[x_0,x_3]$ 上有四阶连续导数, 证明 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式余项的误差界为
(1) 二次插值的误差界

$$R_2=\max_{x_0\leq x\leq x_2}|f(x)-L_2(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\max_{x_0\leq x\leq x_2}|f'''(x)|$$

(2) 三次插值的误差界

$$R_3=\max_{x_0\leq x\leq x_3}|f(x)-L_3(x)|\leq\frac{1}{24}h^4\max_{x_0\leq x\leq x_3}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

---

(1) 二次插值的误差界:
首先，我们知道二次 Lagrange 插值多项式为

$$L_2(x)=f\left(x_0\right)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f\left(x_1\right)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f\left(x_2\right)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

定义余项为 $R_2(x)=f(x)-L_2(x)$，则存在 $\xi\in(x_0,x_2)$，使得

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

令 $x=x_0+th$ ，因此，我们有

$$\begin{aligned}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|R_2(x)|&=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}\left|\frac{f'''(x)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|\\&\leqslant\frac{1}{6}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|\cdot\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}\left|(x-x_0)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\right|\\&=\frac{1}{6}h^3\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t(t-1)(t-2)|\cdot\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|\end{aligned}$$

令 $g(t)=t(t-1)(t-2)=t^3-3t^2+2t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2$. 令 $g'(t)=0$, 即 $3t^2-6t+2=0$, 解得

$$t_1=1-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad t_2=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

由 $g(0)=0,g\left(t_1\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9},g\left(t_2\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9},g(2)=0$ 知 $\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|g(t)|=\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 于是

$$R_2=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|R_2(x)|=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f(x)-L_2(x)|\leqslant\frac{1}{6}h^3\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|=\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|$$

(2) 三次插值的误差界:
三次 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x)=f\left(x_0\right)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\cdots$$

定义余项为 $R_3(x)=f(x)-L_3(x)$，同理可以得到

$$R_3=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}|R_3(x)|=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}|f(x)-L_3(x)|=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|\frac{f^{(4)}(x)}{4!}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\right|$$

令 $x=x_0+th$ ，则

$$\begin{aligned}R_3&=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|\frac{f^{(4)}(x)}{4!}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\right|\\&\leqslant\frac{1}{24}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\right|\\&=\frac{h^4}{24}\max_{0\leqslant t\leqslant 3}|t(t-1)(t-2)(t-3)|\cdot\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|f^{(4)}(x)\right|\end{aligned}$$

令 $h(t)=t(t-1)(t-2)(t-3),t\in[0,3]$. 为求解 $|h(t)|$ 的最大值，不妨设 $m=(t-1)(t-2),n=t(t-3)$，则易知 $m=n+2$. 由于 $n=(t-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\in[-\frac{9}{4},0]$，且 $|h(t)|=|mn|=|n(n+2)|=|(n+1)^2-1|$，所以当 $n=-1$ 时 $|h(t)|$ 取最大值 1. 即 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 3}|t(t-1)(t-2)(t-3)|=1$. 因此我们得到

$$R_3=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}|f(x)-L_3(x)|\leqslant\frac{1}{24}h^4\cdot\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

2024-03-10

2. 若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$. 证明:

$$\sum_{j=1}^n\frac{x_j^k}{f'\left(x_j\right)}=\begin{cases}0 & 0\leq k\leq n-2\\ a_n^{-1} & k=n-1\end{cases}$$

由已知条件知 $f(x)=a_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right)$. 记 $g(x)=x^k,\omega_n(x)=\prod\limits_{j=1}^n\left(x-x_j\right)$, 则

$$f(x)=a_n\prod_{j=1}^n\left(x-x_j\right)=a_n\omega_n(x),\quad f'\left(x_j\right)=a_n\omega_n'\left(x_j\right),$$

$$\begin{aligned}\text{其中}\omega_n'(x)&=\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_n\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_n\right)\\&+\cdots+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\\&=\left(x_j-x_1\right)\left(x_j-x_2\right)\cdots\left(x_j-x_{j-1}\right)\left(x_j-x_{j+1}\right)\cdots\left(x_j-x_n\right)\end{aligned}$$

由差商的性质可得

$$g\left[x_1,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=1}^n\frac{g(x_j)}{\left(x_j-x_1\right)\left(x_j-x_2\right)\cdots\left(x_j-x_{j-1}\right)\left(x_j-x_{j+1}\right)\cdots\left(x_j-x_k\right)}=\sum_{j=1}^k\frac{g\left(x_j\right)}{\omega_n'\left(x_j\right)}$$

再根据差商与导数之间的关系有 $g\left[x_1, \cdots, x_n\right]=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$，其中 ξ 介于 $x_1, \cdots, x_n$ 之间，因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f^{\prime}\left(x_j\right)} & =\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{a_n \omega_n^{\prime}\left(x_j\right)}=\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{\omega_n^{\prime}\left(x_j\right)} \\
& =\frac{1}{a_n} g\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right] \\
& =\frac{1}{a_n} \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!},
\end{aligned}
$$

其中 ξ 介于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间. 当 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 时, $g^{(n-1)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d} x^{n-1}} x^k=0$, 故 $g^{(n-1)}(\xi)=0$; 当 $k=n-1$ 时, $g^{(n-1)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d} x^{n-1}} x^{n-1}=(n-1)!$, 故 $g^{(n-1)}(\xi)=(n-1)!$, 故有

$$
\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f^{\prime}\left(x_j\right)}=\frac{1}{a_n} \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\left\{\begin{array}{ll}
0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2; \\
a_n^{-1}, & k=n-1.
\end{array}\right.
$$

2024-03-10

3. 设 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 为 $n+1$ 个互异插值节点, $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数, 试证明:

(1) $\sum\limits_{j=0}^n l_j(x)=1$;

(2) $\sum\limits_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k, k=1,2, \cdots, n$;

(3) $\sum\limits_{j=0}^n\left(x_j-x\right)^k l_j(x)=0, k=1,2, \cdots, n$;

(4) $\sum\limits_{j=0}^n l_j(0) x_j^k=\left\{\begin{array}{ll}1 & k=0 \\ 0 & k=1,2, \cdots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & k=n+1\end{array}\right.$;

(1) 令 $f(x) \equiv 1$, 则 $y_j=f\left(x_j\right)=1, j=0,1, \cdots, n$; 且函数 $f(x)$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式为

$$
L_n(x)=\sum_{j=0}^n l_j(x)
$$

插值余项为

$$
R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)
$$

因为 $f(x) \equiv 1$, 故 $f^{(n+1)}(\xi)=0$, 于是 $R_n(x)=0$. 即 $f(x)-L_n(x)=0$. 亦即

$$
\sum_{j=0}^n l_j(x)=1
$$

(2) 令 $f(x)=x^k, k=0,1, \cdots, n$. 则函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$
L_n(x)=\sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x)
$$

插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

因为 $k \leqslant n$, 则 $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}x^k=0$, 故 $f^{(n+1)}(\xi)=0$, 于是 $R_n(x)=0$. 即 $f(x)-L_n(x)=0$. 亦即

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)=x^k, \quad k=0,1,\cdots,n$$

(3) 对 $k=1,2,\cdots,n$, 由二项式定理得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\left(x_j-x\right)^k l_j(x) &= \sum_{j=0}^{n}\left[l_j(x)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}l_j(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}l_j(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-x)^{k-i}\sum_{j=0}^{n}x_j^i l_j(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-x)^{k-i}x^i \\
&= (x-x)^k=0
\end{aligned}$$

(4) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 则有

$$f(x)-L_n(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n}l_j(x)f\left(x_j\right)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

其中 $\omega(x)=\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_n\right), \xi\in(a,b)$
当 $f(x)=1$ 时, 则 $1-\sum\limits_{j=0}^{n}l_j(x)f\left(x_j\right)=0$. 进而有

$$\sum_{j=0}^{n}l_j(0)=1$$

当 $f(x)=x^k(k=1,2,\cdots,n)$ 时, 有 $x^k=\sum\limits_{j=0}^{n}l_j(x)x_j^k$. 将 $x=0$ 代入得

$$\sum_{j=0}^{n}l_i(0)x_j^k=0$$

当 $f(x)=x^{n+1}$ 时, 有

$$x^{n+1}=\sum_{j=0}^{n}l_j(x)x_j^{n+1}+\omega_{n+1}(x)$$

将 $x=0$ 代入得

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(0) x_j^{n+1} = -\omega_{n+1}(0) = (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n$$

综上，

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(0) x_j^{k} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1,2,\cdots,n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & k=n+1 \end{cases}$$

补充一个推论（可直接用于上面的证明中）

若 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 则它的 n 次 Lagrange 插值多项式就是它本身.

证明: 设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i)\,(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式. 因为 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 所以 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$. 则 $p_n(x)$ 关于 $f(x)$ 的余项为

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \equiv 0,$$

于是 $p_n(x) \equiv f(x)$. 证毕.

2024-03-10

4. 设 $p_n(x)$ 是 e^x 在区间 $[0,1]$ 上的 Lagrange 型插值多项式，插值节点 $x_k = \frac{k}{n}, k=0,1,\cdots,n$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} |p_n(x) - e^x| = 0.$$

【证明】设 $f(x) = e^x, x\in[0,1]$, 于是插值余项 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 即

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \xi \in (\min\{x,0\}, \max\{x,1\})$$

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \cdots, f^{(n+1)}(x) = e^x$$

当 $x\in[0,1]$ 时, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant e$, 且 $|x - x_i| \leqslant 1, i=0,1,2,\cdots,n$. 于是当 $x\in[0,1]$ 时, 有

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |p_n(x) - e^x| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |p_n(x) - e^x| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0.$$

2024-03-10

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导数连续, 且 $f(a)=0, f(b)=0$, 证明:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

方法一: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导数连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 根据最值定理知 f 在 $[a,b]$ 取得最大值和最小值. 于是存在点 $x_0\in[a,b]$, 使得

$$|f(x_0)|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

若 $x_0=a$ 或 b, 则结论显然成立.
若 $a<x_0<b$, 分析如下: 当 $f(x_0)>0$ 时, 根据 $f(x)\le|f(x)|\le f(x_0)$ 可知 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值; 当 $f(x_0)<0$ 时, 根据 $-f(x)\le|f(x)|\le-f(x_0)$ 可知 $f(x)\ge f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值. 总而言之, $f(x_0)$ 必定为 $f(x)$ 的最值, 再结合 $x_0\in(a,b)$, 就有 $f'(x_0)=0$.
利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式将 $f(x)$ 在点 x_0 展开:

$$\begin{aligned}0=f(a)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(a-x_0\right)+\tfrac{1}{2}f''(\xi)\left(a-x_0\right)^2,\xi\in\left(a,x_0\right),\\0=f(b)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(b-x_0\right)+\tfrac{1}{2}f''(\eta)\left(b-x_0\right)^2,\eta\in\left(x_0,b\right),\end{aligned}$$

将 $f'\left(x_0\right)=0$ 代入上面两式, 并进行如下讨论
若 $a<x_0\le\frac{a+b}{2}$, 可知

$$|f(x_0)|=\left|-\frac{f''(\xi)}{2}(a-x_0)^2\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

若 $\frac{a+b}{2}\le x_0<b$, 可知

$$|f(x_0)|=\left|-\frac{f''(\eta)}{2}(b-x_0)^2\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

综上可知

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(x_0)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

方法二: 以 $x=a$ 和 $x=b$ 为插值节点, 作函数 $f(x)$ 的一次插值多项式:

$$L_1(x)=f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-b}{b-a},$$

因为 $f(a)=f(b)=0$, 则有 $L_1(x)=0$, 且插值多项式 $L_1(x)$ 的余项

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),$$

其中 $\xi\in(\min\{x,a\},\max\{x,b\})$. 因而,

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),x\in[a,b],\xi\in(a,b),$$

当 $x\in[a,b]$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{2}(x-a)(x-b)\right| \\ &\le \frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\cdot\max_{x\in[a,b]}|(x-a)(x-b)| \\ &= \frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\end{aligned}$$

于是，有:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

2024-03-10

6. 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上满足第一类条件的三次样条，并且

$$S(x)=\begin{cases}2x^3-3x+4, & 0\le x<1,\\ (x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+3, & 1\le x\le 2,\end{cases}$$

求 $S'(0)$ 和 $S'(2)$ 的值.

取 $x_0=0,x_1=1,x_2=2$，根据三次样条函数的定义，有 $S(x)\in C^2[0,2]$，由 $S(x)$ 及其导数的连续性，即有:

$$S\left(x_1-0\right)=S\left(x_1+0\right),S'\left(x_1-0\right)=S'\left(x_1+0\right),S''\left(x_1-0\right)=S''\left(x_1+0\right)$$

或者写成如下形式:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}S(x)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)\\ \lim\limits_{x\to1^+}S'(x)=\lim\limits_{x\to1^-}S'(x)\\ \lim\limits_{x\to1^+}S''(x)=\lim\limits_{x\to1^-}S''(x)\end{cases}$$

而 $S'(x)=\begin{cases}6x^2-3, & 0\leqslant x<1\\ 3(x-1)^2+2b(x-1)+c, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ $\quad S''(x)=\begin{cases}12x & 0\leqslant x<1\\ 6(x-1)+2b & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

由此可得

$$\begin{cases}3=3\\ 3=c\\ 12=2b\end{cases}$$

解得 $b=6,c=3$ 于是有 $S'(0)=-3$ 和 $S'(2)=18$.

2024-03-10

7. 已知函数表如下:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	1	0

用二次曲线拟合表中数据.

方法一: 对于给定的一组数据 $(x_i,y_i),i=0,1,\cdots,m$，求作 n 次多项式

$$y=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

使残差平方和为最小, 于是有法（正则）方程组

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

其中 $\sum$ 是 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 的简写. 求出 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 就得到了拟合多项式的系数.
设二次拟合函数 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. 于是根据上面我们有

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

计算得 $a_0 = 1.6571 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -0.4286$. 因此拟合多项式为

$$y = 1.6571 - 0.4286x^2$$

方法二: 设二次拟合函数 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. 正则方程组 $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{Y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

化简为

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

计算得 $a_0 = 1.6571 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -0.4286$. 因此拟合多项式为

$$y = 1.6571 - 0.4286x^2$$

方法三: 等价于求解超定方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

的最小二乘解, 即正则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$ 的解. 计算得

$$\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解得 $\alpha = \begin{pmatrix} 1.6571 & 0 & -0.4286 \end{pmatrix}^{\top}$, 拟合多项式

$$y = 1.6571 - 0.4286x^2$$

均方误差

$$\delta = \sum_{i=1}^{5} \left[y\left(x_i\right) - y_i\right]^2 = 0.13912813$$

2024-03-10

8. 求一个次数不超过 4 次的插值多项式 $p(x)$, 使它满足:

$$\begin{aligned} &p(0) = f(0) = 0, p(1) = f(1) = 1, p'(0) = f'(0) = 0, \\ &p'(1) = f'(1) = 1, p''(1) = f''(1) = 0 \end{aligned}$$

并求其余项表达式（设 $f(x)$ 存在 5 阶导数）.

为了找到一个次数不超过 4 次的插值多项式 $p(x)$，我们可以利用这些插值条件来构建插值多项式. 设 $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$，我们需要找到参数 a, b, c, d, e 来满足给定的插值条件. 根据插值条件，我们有:

$$\begin{cases} p(0) = e = 0 \\ p(1) = a + b + c + d + e = 1 \\ p'(0) = d = 0 \\ p'(1) = 4a + 3b + 2c + d = 1 \\ p''(1) = 12a + 6b + 2c = 0 \end{cases}$$

解这个方程组, 可以得到 $a = 1, b = -3, c = 3, d = 0, e = 0$. 因此, 插值多项式为 $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$. 由于 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 存在 5 阶导数，且注意到 $x = 0$ 为二重节点，$x = 1$ 为三重节点. 故插值余项为

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^2 (x-1)^3, \xi \in [0, 1]$$

方法二

根据插值条件，我们设插值多项式为 $p(x)=x^2(ax^2+bx+c)$. 解得 $a=1, b=-3, c=3$.
设 $x_0=0, x_1=1$, 为求出余项 $R(x)=f(x)-p(x)$, 根据 $R(x_i)=0$, $R'(x_i)=0(i=0,1)$ 和 $R''(x_1)=0$, 设

$$R(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^3$$

为确定 $K(x)$, 构造

$$\varphi(t)=f(t)-p(t)-K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^3$$

显然 $\varphi(x)=0, \varphi(x_i)=0, i=0,1$, 且 $\varphi'(x_1)=0, \varphi''(x_1)=0$,
反复应用罗尔定理得 $\varphi^{(5)}(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少有一个零点 ξ, 故有

$$\varphi^{(5)}(\xi)=f^{(5)}(\xi)-5!K(x)=0$$

于是

$$K(x)=\frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)$$

故余项表达式

$$R(x)=\frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)(x-x_0)^2(x-x_1)^3=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^3$$

定理

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, 节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b, L_n(x)$ 是满足条件 $L_n(x_j)=y_j, \quad j=0,1,\cdots,n$ 的插值多项式, 则对任何 $x\in[a,b]$, 插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

这里 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x, $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

证明: 由给定条件知 $R_n(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上为零, 即 $R_n(x_k)=0(k=0,1,\cdots,n)$, 于是

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x),$$

其中 $K(x)$ 是与 x 有关的待定函数. 现把 x 看成 $[a,b]$ 上的一个固定点, 作函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n),$$

根据 f 的假设可知 $\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内存在. 根据插值条件及余项定义, 可知 $\varphi(t)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 及 x 处均为零, 故 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个零点, 根据罗尔 (Rolle) 定理, $\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的两个零点间至少有一个零点, 故 $\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 $n+1$ 个零点. 对 $\varphi'(t)$ 再应用罗尔定理, 可知 $\varphi''(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 n 个零点. 依此类推, $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点, 记为 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0,$$

于是

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a,b), \text{ 且依赖于} x.$$

将它代入式 $R_n(x)$, 就得到余项表达式. 证毕.

3 解线性方程组的直接法

2024-04-02

Prove that if $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ where $\boldsymbol{L}$ is a real lower triangular nonsingular $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ matrix, then $\boldsymbol{A}$ is symetric and positive definite.
证明: 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是一个非奇异的实下三角 $n\times n$ 矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是对称的且正定的.

要证明给定条件下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ 是对称的且正定的, 我们可以分两步来证明:
(1) 根据对称矩阵的定义, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的, 则必须满足 $\boldsymbol{A}=A^T$.
由于 $A=LL^T$, 我们计算 A^T 得到:

$$A^T=\left(LL^T\right)^T=\left(L^T\right)^T L^T=LL^T$$

这里我们使用了矩阵转置的性质, 即 $(AB)^T=B^TA^T$ 以及 $\left(A^T\right)^T=A$. 因此, A 是对称的.
(2) 接下来证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定的. 根据正定矩阵的定义, 对于所有非零向量 $\boldsymbol{x}$, 必须满足 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 给定 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, 我们有: $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TLL^Tx$
令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$, 因为 $\boldsymbol{L}$ 是非奇异的, 所以 $\boldsymbol{y}$ 是一个非零向量, 这意味着 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ 有满秩. 因此:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

由于 $\boldsymbol{y}$ 是非零向量, 上式表明 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是向量 $\boldsymbol{y}$ 各分量平方和, 显然大于 0. 因此, $\boldsymbol{A}$ 是正定的.
综上所述, 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是一个非奇异的实下三角矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 必然是对称的且正定的.

2024-04-02

证明: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称阵, 且 $a_{11}\neq 0$, 经过 Gauss 消去法一步后, A 约化为 $\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha=(a_{12},\cdots,a_{1n}), A_2$ 是 n − 1 阶方阵, 证明 A_2 是对称阵
证明: 因为 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $n-1$ 阶方阵, 即 $\boldsymbol{A}_2=\left(a_{ij}^{(2)}\right)\in\mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性及消元公式得

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)}, i,j=2,\cdots,n$$

故 $\boldsymbol{A}_2$ 也对称.

对于实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 我们有 $a_{ij}=a_{ji}$ 对所有 i,j 成立. 在通过 Gauss 消去法进行第一步操作时, 目的是利用 a_{11} (假设非零) 来消去第一列下面的所有元素, 从而 A 变形为:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

其中, $\alpha=(a_{12},\cdots,a_{1n})$ 是第一行除了 a_{11} 之外的部分, A_2 是一个 $n-1$ 阶方阵.
对于 A 的第 i 行 $(i>1)$, Gauss 消去法第一步的操作可以表示为从第 i 行减去第一行乘以一个适当

的系数 $\lambda_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. 这样，第 i 行的第 j 个元素 a'_{ij} 更新为:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \lambda_i a_{1j} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$$

对于 A_2 中的任意两个对应元素 a'_{ij} 和 $a'_{ji}(i,j>1)$ ，我们需要证明它们相等以证明 A_2 的对称性:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \quad a'_{ji} = a_{ji} - \frac{a_{j1}a_{1i}}{a_{11}}$$

由于 A 是对称的，我们有 $a_{ij} = a_{ji}$ 和 $a_{i1} = a_{1i}$ ，因此:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} = a_{ji} - \frac{a_{j1}a_{1i}}{a_{11}} = a'_{ji}$$

这证明了在进行 Gauss 消去法第一步操作后，所得到的 A_2 确实保持了对称性. 因此，A_2 是对称阵.

定理

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 唯一存在矩阵 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 的充要条件是

$$\det(\boldsymbol{A}_i) \neq 0, \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$

其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{(n)}.$$

2024-04-02

下述矩阵能否进行直接 LR 分解 (其中 L 为单位下三角阵, R 为上三角阵) ? 若能分解，那么分解是否唯一

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, 因为 $\det(\boldsymbol{A}_1) \neq 0, \det(\boldsymbol{A}_2) = 0$, 所以, 不满足定理的条件, 即不存在 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}$ 矩阵使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LR}$.

$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}$, 因为 $\det(\boldsymbol{B}_1)\neq 0,\quad \det(\boldsymbol{B}_2)=0$, 所以, 不满足定理的条件, 但 $\boldsymbol{B}$ 仍可分解, 只是分解不是唯一的. 例如存在 (其中我们发现 $\boldsymbol{R}$ 是奇异的.)

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{bmatrix}$, 因为 $\det(\boldsymbol{C}_1)=1,\quad \det(\boldsymbol{C}_2)=1,\quad \det(\boldsymbol{C}_3)=1$,

根据定理, 存在唯一的 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{R}$ 阵, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\6&3&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$.

补充说明

(1) 若 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 中有奇异的, 则 LU 分解也可能存在 (但此时一定不唯一). 如

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&1&1\\3&3&1\end{bmatrix},$$

此时 A_2 奇异, 但 A 仍有 LU 分解

$$\begin{bmatrix}2&2&1\\1&1&1\\3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\3/2&\alpha&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\0&0&1/2\\0&0&-1/2-\alpha/2\end{bmatrix},$$

其中 a 可任意取值, 即 LU 分解不唯一.
(2) A 非奇异不能保证 LU 分解存在, 如

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$\det A=1\neq 0$, 即 A 非奇异, 但 LU 分解不存在.

2024-04-02

用直接三角分解法 (LU 分解) 求解以下线性方程组 $\begin{cases}5x-y+z=5,\\x-10y-2z=-11,\\-x+2y+10z=11.\end{cases}$

系数矩阵 A 为:
系数矩阵的 Doolittle 分解中求解矩阵 L 和 U 的过程:

求解未知量的过程:
方程组的解 $(x, y, z)^{\mathrm{T}} =$

为了求解给定的线性方程组，我们首先使用 Doolittle 方法进行 LU 分解. 给定的线性方程组可以表示为 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -10 & -2 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

LU 分解的目标是找到矩阵 L（单位下三角矩阵）和 U（上三角矩阵），使得 $A = LU$. 一旦我们找到了 L 和 U，我们可以使用前向替换来求解 $LY = b$，然后使用后向替换求解 $UX = Y$，从而找到 X.
首先计算 $\boldsymbol{U}$ 的第一行元与 $\boldsymbol{L}$ 的第一列元:

$$u_{11} = 5, \quad u_{12} = -1, \quad u_{13} = 1$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{5}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = -\frac{1}{5}$$

进而计算 $\boldsymbol{U}$ 的第二行元与 $\boldsymbol{L}$ 的第二列元:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -10 - \frac{1}{5} \times (-1) = -\frac{49}{5}, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -2 - \frac{1}{5} \times 1 = -\frac{11}{5};$$

$$l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}u_{12})}{u_{22}} = \frac{2 - (-\frac{1}{5}) \times (-1)}{-\frac{49}{5}} = -\frac{9}{49}.$$

计算 $\boldsymbol{U}$ 的第三行元:

$$u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 10 - (-\frac{1}{5}) \times 1 - (-\frac{9}{49}) \times (-\frac{11}{5}) = \frac{480}{49}$$

故

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{9}{49} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{49}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{480}{49} \end{bmatrix}$$

解下三角形方程组 $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{9}{49} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix} \implies y_1 = 5, y_2 = -12, y_3 = \frac{480}{49}$$

解上三角形方程组 $\boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{49}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{480}{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ \frac{480}{49} \end{bmatrix} \implies x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1.$$

通过 Doolittle 方法进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解并求解给定的线性方程组后，我们得到方程组的解为 $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (1, 1, 1)$. 这意味着线性方程组的解是 $x = 1, y = 1, z = 1$.

4 解线性方程组的迭代法及非线性方程迭代法

2024-04

1. 设有方程组 $Ax=b$, 其中 A 为对称正定矩阵, 迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right)(k=0,1,2,\cdots).$$

试证: 当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时, 上述迭代法收敛 (其中 $0<\alpha\leq\lambda(A)\leq\beta$).

将迭代格式改写成

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

即迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A}$, 设迭代矩阵的特征值为 μ, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}$, 因此 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v}$, 于是 $(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v}$, 整理可得 $\boldsymbol{v}-\omega\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v}$, 进一步整理即可得到迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu=1-\omega\lambda(\boldsymbol{A})$. 由 $|\mu|<1$, 即 $|1-\omega\lambda(\boldsymbol{A})|<1$, 得 $0<\omega<\frac{2}{\lambda(\boldsymbol{A})}$, 而 $0<\alpha\leq\lambda(A)\leq\beta$, 所以 $0<\omega<\frac{2}{\beta}<\frac{2}{\lambda(\boldsymbol{A})}$. 故当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时, 有 $|\mu|<1,\rho(\boldsymbol{B})<1$, 因此迭代格式收敛.

2024-04

2. 设方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ $,a_{11}a_{22}\neq0$. 求证:

(1). 用 Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法解此方程组收敛的充要条件为 $\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$;

(2). Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法同时收敛或同时发散.

(1) 由题意可知, Jacobi 迭代法的迭代矩阵

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-a_{12}\\-a_{21}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0\end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda I-B_J)=\lambda^2-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{21}}$, 计算其特征值 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}$, 因此 Jacobi 迭代法收敛满足:

$$\rho\left(B_J\right)=\sqrt{\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}<1\iff\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$$

同理, Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-a_{12}\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}\\0&\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{12}}\end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}}\begin{bmatrix}a_{22}&0\\-a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}^{-1}$. 由 $\det(\lambda I-B_G)=\lambda\left(\lambda-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{12}}\right)$, 计算其特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$, 因此

$$\rho\left(B_G\right)<1\iff\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$$

(2) 当 $|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}| < 1$ 时两种方法同时收敛; 当 $|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}| \geqslant 1$ 时两种方法同时发散.

2024-04

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & t+1 \\ 0 & -t+1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax = b$, 其中 t 为实参数.

(1). 求用 Jacobi 法解 $Ax = b$ 时的迭代矩阵;

(2). t 在什么范围内 Jacobi 迭代法收敛.

(1)

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -(t+1) \\ 0 & t-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(t+1) \\ 0 & 1-t & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \lambda & \frac{1}{4}(t+1) \\ 0 & t-1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{\lambda}{4}\left(t^2-1\right) = 0$$

所以 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}$, 由 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = \frac{1}{2}|\sqrt{t^2-1}| < 1$, 解得 $-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$.

2024-04

4. 设 $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & t & 0 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Ax = b$, 试问用 Gauss-Seidel 迭代法解 $Ax = b$ 时, 实参数 t 在什么范围内上述迭代法收敛.

$$\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t} & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t^3} & \frac{1}{t^3} \\ 0 & \frac{1}{t^3} & \frac{1}{t^3} \end{bmatrix}$$

所以

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_G) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{t^3} & -\frac{1}{t^3} \\ 0 & -\frac{1}{t^3} & \lambda - \frac{1}{t^3} \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{t^3}\right)^2 - \lambda\left(\frac{1}{t^6}\right) = \lambda^2(\lambda - \frac{2}{t^3}) = 0$$

解得 $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \frac{2}{t^3}$, 即 $\rho(\boldsymbol{B}_G) = |\frac{2}{t^3}| < 1$, 解得 $t > \sqrt[3]{2}$ 或 $t < -\sqrt[3]{2}$.

2024-04

5. 利用非线性方程迭代方法求根的思想, 证明:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2$$

首先建立迭代公式. 令

$$x_k=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

则有迭代公式

$$\begin{cases} x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}, & k=0,1,2,\cdots \\ x_0=0 \end{cases}$$

其中迭代函数

$$\varphi(x)=\sqrt{2+x},\quad \varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

显然当 $x\in[0,2]$ 时 $\varphi(x)\in[\sqrt{2},2]\subset[0,2]$, 且成立

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$$

因此这一迭代过程收敛于方程 $x^2-x-2=0$ 的正根 $x^*=2$.

2024-04

6. 给定线性方程组 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ 其中 a 为非零常数, 分析 a 在什么范围取值时, Gauss-Seide 迭代格式收敛.

G-S 迭代矩阵 B_G 计算如下:

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{16a} & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{16a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix}$$

于是 Gauss-Seide 迭代矩阵 B_G 的特征方程为

$$\det(\lambda I-B_G)=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{4a} & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{16a} & \lambda-\frac{1}{4a} \end{vmatrix}=\lambda^2\cdot\left(\lambda-\frac{1}{2a}\right)$$

求得特征值

$$\lambda_{1,2}=0,\quad \lambda_3=\frac{1}{2a},$$

所以 $\rho(\boldsymbol{B_G})=\left|\frac{1}{2a}\right|$. 由 $\rho(\boldsymbol{B_G})<1$ 得 $|a|>2$. 因此当 $|a|>\frac{1}{2}$ 时, 原方程组 Gauss-Seide 迭代格式收敛.

2024-04

7. 试确定 $a(a \neq 0)$ 的取值范围, 使得求解方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 的 Jacobi 迭代格式收敛.

系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix} = D - L - U = \begin{bmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

于是雅可比迭代矩阵 B_J 计算如下:

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{a} & \\ & & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & & \\ -1 & 0 & \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{a} & \\ & & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

于是 Jacobi 迭代矩阵 B_J 的特征方程为

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ \frac{1}{a} & \lambda & \frac{2}{a} \\ -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda \cdot (a^2\lambda^2 + 4)}{a^2}$$

求得特征值

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \frac{2}{|a|} \mathrm{i},$$

所以 $\rho(\boldsymbol{B_J}) = \left|\frac{2}{a}\right|$. 由 $\rho(\boldsymbol{B_J}) < 1$ 得 $|a| > 2$. 因此当 $|a| > 2$ 时, 原方程组 Jacobi 迭代格式收敛.

2024-04

8. 设 $n \geq 2$ 为正整数, c 为正常数, 记 $f(x) = x^n - c = 0$ 的根为 x^*,
(1) 假设 $0 < x_k < \sqrt[n]{c}$, 试说明迭代格式 $x_{k+1} = cx_k^{1-n}, (k = 0, 1, 2 \cdots)$ 不能用来计算 x^* 的近似值
(2) 试写出求解 x^* 近似值的牛顿迭代格式, 并计算迭代格式的收敛阶数.

(1) 记 $\varphi(x) = cx^{1-n}$, 则 $\varphi'(x) = c(1-n)x^{-n}, \varphi'(x^*) = 1 - n$.
(a) 当 $n \geqslant 3$ 时, $|\varphi'(x^*)| = n - 1 \geqslant 2$, 迭代格式发散.
(b) 当 $n = 2$ 时, 有 $x_{k+1} = \frac{c}{x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$
设 $x_0 \neq x^*$, 则有 $x_1 = \frac{c}{x_0} \neq x^*$, 且 $x_k x_{k+1} = c, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$

$$x_{k+1} - \sqrt{c} = \frac{c}{x_k} - \sqrt{c} = -\frac{\sqrt{c}}{x_k}(x_k - \sqrt{c}) = \left(-\frac{\sqrt{c}}{x_k}\right)\left(-\frac{\sqrt{c}}{x_{k-1}}\right)(x_{k-1} - \sqrt{c}) = x_{k-1} - \sqrt{c}, k = 1, 2, \cdots,$$

即 $x_{k+1} = x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$, 于是 $x_{2m} \equiv x_0, \quad x_{2m+1} \equiv x_1, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$, 即迭代格式不收敛.

(2) 考虑方程 $f(x) \equiv x^n - c = 0, f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, 则 x^* 为其单根. 用 Newton 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_k + \frac{c}{n} x_k^{1-n}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

求解. 由于 Newton 迭代格式对单根是 2 阶局部收敛的, 所以迭代格式当 x_0 比较靠近 x^* 时是收敛的, 且收敛阶数为 2 .

定理: 对于迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 及正整数 p, 如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续, 并且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0,$$

则该迭代过程在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的.

令 $\varphi(x) = (1 - \frac{1}{n})x + \frac{c}{n} x^{1-n}$, 则 $\varphi'(x) = (1 - \frac{1}{n}) + \frac{c(1-n)}{n} x^{-n}, \varphi''(x) = c(n-1)x^{-n-1}$. 由于 $x^* = \sqrt{n}$, 且 $\varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) \neq 0$. 所以迭代格式当 x_0 比较靠近 x^* 时是二阶收敛的.

2024-04

9. 设 $f(x) = 0$ 有根, 且 $M \geqslant f'(x) \geqslant m > 0$ 求证: 用迭代格式

$$x_{i+1} = x_i - \lambda f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots,$$

取任意初值 x_0, 当 λ 满足 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$ 时, 迭代序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $f(x) = 0$ 的根.

根据迭代公式构造迭代函数 $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, 因为 $\varphi(x^*) = x^* - \lambda f(x^*) = x^*$, 故 $f(x) = 0$ 的根 x^* 是迭代函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点. 显然迭代函数 $\varphi(x)$ 的导数存在且为

$$\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$$

注意到 $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$ 及 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$, 有

$$0 < \lambda m \leqslant \lambda f'(x) \leqslant \lambda M < 2$$

以上不等式所有项同乘以 -1 , 然后再都加 1 , 由不等式运算规则, 有

$$-1 < 1 - \lambda M \leqslant 1 - \lambda f'(x) \leqslant 1 - \lambda m < 1$$

注意到

$$|1 - \lambda f'(x)| \leqslant \max\{|1 - \lambda m|, |1 - \lambda M|\} < 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

取 $L = \max\{|1 - \lambda m|, |1 - \lambda M|\}$, 则有

$$|\varphi'(x)| \leqslant L < 1, x \in \mathbf{R}$$

此外, 显然有任取 $x \in \mathbf{R}$ 可得 $\varphi(x) \in \mathbf{R}$. 因此迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 对任意初值 x_0 均收敛于 $\varphi(x)$ 的唯一不动点 x^*, 即它收敛于 $f(x) = 0$ 的根 x^*.

$$|x_k - x^*| \leqslant L\,|x_{k-1} - x^*| \leqslant \cdots \leqslant L^k\,|x_0 - x^*| \to 0(k \to \infty)$$

即 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

2024-04

10. 证明: 当 $x_0 = 1.5$ 时, 迭代法 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$ 收敛于方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1,2]$ 内唯一实根 x^*.

首先，我们建立迭代公式:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x_k}} \\ x_0 = 1.5 \end{cases}$$

设迭代函数为 $\varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$，我们很容易验证 $x = \varphi(x)$ 与 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 是等价的方程. 显然 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是单调递减的, 当 $x = 1$ 时, $\varphi(1) = \sqrt{2}$, 当 $x = 2$ 时, $\varphi(2) = \sqrt{\frac{5}{3}}$. 所以当 $x \in [1,2]$ 时, $1 < \varphi(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1) < 2$, 即 $\varphi(x) \in [1,2]$. 而 $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{(4+x)^3}}$. 易知 $\varphi'(x)$ 是一个增函数, 则有（注意添了绝对值）

$$\max_{1\leqslant x\leqslant 2} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1)| = \left| -\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{(4+1)^3}} \right| = \left| -\sqrt{\frac{1}{50}} \right| < 1$$

所以 $|\varphi'(x)| < 1$. 依照收敛性定理, 迭代法 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$ 收敛于方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1,2]$ 内唯一实根 x^*.

2024-04

11. 已知求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的迭代格式:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\mu}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(1) 求此迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U})$;
(2) 当 A 是严格行对角占优矩阵, $0 < \mu \le 1$ 时, 给出 $\|M\|_\infty$ 表达式, 并证明此时迭代格式收敛.

(1) 要求迭代矩阵 M ，我们首先需要明确分解系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ ，其中 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对角部分，$\boldsymbol{L}$ 是严格下三角部分 (所有上三角元素为 0)，$\boldsymbol{U}$ 是严格上三角部分（所有下三角元素为 0）.
将迭代格式重写为更符合矩阵运算的形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \mu \boldsymbol{D}^{-1} \left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} \right)$$

展开后得到:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I} - \mu \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}^{(k)} + \mu \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}$$

因此 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \mu \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{A}$.

(2) 将 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$ 代入 $\boldsymbol{M}$ 得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U})\\&=\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}+\mu\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\\&=I-\mu I+\mu\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\\&=(1-\mu)\boldsymbol{I}+\mu(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&-\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}&-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{M}\|_\infty=\|(1-\mu)\boldsymbol{I}+\mu(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\|_\infty=|1-\mu|+|\mu|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}=|\mu|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}+|1-\mu|$$

由 $\boldsymbol{A}$ 是严格行对角占优知 $|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, 所以

$$\|\boldsymbol{M}\|_\infty<|\mu|\cdot 1+|1-\mu|=|\mu|+|1-\mu|$$

当 $0<\mu\leq 1$ 时，$\|\boldsymbol{M}\|_\infty<|\mu|+|1-\mu|=\mu+1-\mu=1$. 此时迭代格式收敛得证.

5 数值积分与数值微分练习题

2024-05

1. 给定求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(x_0)+cf(x_1)$, 试确定 x_0,x_1,c, 使求积公式的代数精度尽可能高, 并指出代数精度的次数.

当 $f(x)=1$ 时, 左边 $=\int_0^1 1\ \mathrm{d}x=1$, 右边 $=\frac{1}{2}+c$;
当 $f(x)=x$ 时, 左边 $=\int_0^1 x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 右边 $=\frac{1}{2}x_0+cx_1$;
当 $f(x)=x^2$ 时, 左边 $=\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, 右边 $=\frac{1}{2}x_0^2+cx_1^2$.
要使求积公式至少具有 2 次代数精度, 当且仅当

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+c=1, \\ \frac{1}{2}x_0+cx_1=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}x_0^2+cx_1^2=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

求得 $c=\frac{1}{2}, x_0=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), x_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 所以求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

当 $f(x)=x^3$ 时, 左边 $=\int_0^1 x^3\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

$$\text{右边}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^3+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^3=\frac{1}{4};$$

当 $f(x)=x^4$ 时, 左边 $=\int_0^1 x^4\ \mathrm{d}x=\frac{1}{5}$,

$$\text{右边}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^4+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^4=\frac{7}{36},$$

因为左边 $\neq$ 右边, 所以求积公式的代数精度为 3 .

2024-05

2. 已知函数 $f(x)\in C^3[0,2]$, 给定求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(x_0)$$

(1) 试确定 A,B,x_0, 使该求积公式的代数精度尽可能高, 并指出代数精度的次数;
(2) 给出参数确定后该求积公式的截断误差表达式.

(1) 当 $f(x)=1$ 时, 左边 $=\int_0^2 1\ \mathrm{d}x=2$, 右边 $=A+B$;
当 $f(x)=x$ 时, 左边 $=\int_0^2 x\ \mathrm{d}x=2$, 右边 $=Bx_0$;
当 $f(x)=x^2$ 时, 左边 $=\int_0^2 x^2\ \mathrm{d}x=\frac{8}{3}$, 右边 $=Bx_0^2$.

求积公式至少具有 2 次代数精度的充分必要条件为:$\begin{cases} A+B=2, \\ Bx_0=2, \\ Bx_0^2=\frac{8}{3}, \end{cases}$

求解得 $A=\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2}, x_0=\frac{4}{3}$.

当 $f(x)=x^3$ 时, 左边 $=\int_0^2 x^3\ \mathrm{d}x=4$, 右边 $=\frac{32}{9}$, 左边 $\neq$ 右边, 所以该求积公式的代数精度为 2 .

(2) 作 $f(x)$ 的 2 次插值多项式 $H(x)$, 满足

$$H(0)=f(0), \quad H\left(\frac{4}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right), \quad H'\left(\frac{4}{3}\right)=f'\left(\frac{4}{3}\right),$$

由于求积公式有 2 次代数精度, 所以有

$$\int_0^2 H(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}H(0)+\frac{3}{2}H\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f\left(\frac{4}{3}\right),$$

所以截断误差为

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f\left(\frac{4}{3}\right)\right) &= \int_0^2 [f(x)-H(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{f'''(\xi)}{3!}x\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{9}\cdot\frac{f'''(\eta)}{6}=\frac{2}{27}f'''(\eta), \quad \eta\in(0,2).
\end{aligned}$$

2024-05

3. 设 $f(x)\in C^3[a,b]$, 且 $f(a)=f(b)=f'(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^4}{72}f'''(\xi)$$

作 2 次 Hermite 插值多项式 $H(x)$, 使其满足

$$H(a)=f(a), \quad H(b)=f(b), \quad H'(b)=f'(b),$$

于是有 $H(x)=f(a)+f[a,b](x-a)+f[a,b,b](x-a)(x-b)$, 其中

$$f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, f[a,b,b]=\frac{f[b,b]-f[a,b]}{b-a}=\frac{f'(b)-0}{b-a}=0$$

所以 $H(x)=0$.

由 Hermite 插值多项式的余项得

$$f(x)-H(x)=f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-b)^2, \quad \xi\in(a,b)$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-b)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{f'''(\eta)}{6}\int_a^b (x-a)(x-b)^2\ \mathrm{d}x=\frac{(b-a)^4}{72}f'''(\eta), \quad \eta\in(a,b)
\end{aligned}$$

2024-05

4. 考虑积分 $I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx$ 及对应的求积公式 $S(f)=\sqrt{3}(f(-1)+f(1))$.
(1) 证明求积公式 $S(f)$ 是以 $x_0=-1,x_1=0,x_2=1$ 为求积节点的插值型求积公式.
(2) 求积公式 $I(f)\approx S(f)$ 的代数精度
(3) 设 $f(x)\in C^4[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, 求截断误差形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式, 其中 $\xi\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}],\alpha,\beta$ 为常数

(1) 我们先构造以 $x_0=-1,x_1=0,x_2=1$ 为插值节点的拉格朗日插值基函数:

$$l_0(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{(x)(x-1)}{2},$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=-(x+1)(x-1),$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{(x+1)(x)}{2}.$$

插值多项式为:

$$P(x)=f(-1)l_0(x)+f(0)l_1(x)+f(1)l_2(x).$$

我们现在计算 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} l_i(x)\,dx$:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} l_0(x)\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{x(x-1)}{2}\,dx=\sqrt{3}$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} l_1(x)\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}-(x+1)(x-1)\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}-(x^2-1)\,dx=0,$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} l_2(x)\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{(x+1)x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x^2+x\,dx=\sqrt{3}.$$

因此，求积公式 $S(f)=\sqrt{3}(f(-1)+f(1))$ 是以 $x_0=-1,x_1=0,x_2=1$ 为求积节点的插值型求积公式.
(2) 令 $f(x)=1$,

$$I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}1\,dx=2\sqrt{3},\quad S(f)=\sqrt{3}(1+1)=2\sqrt{3}.$$

令 $f(x)=x$,

$$I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x\,dx=0,\quad S(f)=\sqrt{3}(-1+1)=0.$$

令 $f(x)=x^2$,

$$I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x^2\,dx=2\sqrt{3},\quad S(f)=\sqrt{3}((-1)^2+1^2)=\sqrt{3}(1+1)=2\sqrt{3}.$$

令 $f(x)=x^3$,

$$I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x^3dx=0,\quad S(f)=\sqrt{3}(-1+1)=0.$$

令 $f(x)=x^4$,

$$I(f)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^4 dx=\frac{18\sqrt{3}}{5}, \quad S(f)=\sqrt{3}(1+1)=2\sqrt{3}.$$

所以求积公式的代数精度为 3 .

(3) 构造 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H(x)$，使其满足

$$H(-1)=f(-1), \quad H(1)=f(1), \quad H'(-1)=f'(-1), \quad H'(1)=f'(1).$$

则 $H(x)$ 存在且唯一，有:

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x+1)^2(x-1)^2, \quad \eta\in(-1,1).$$

因此,

$$\begin{aligned}
I(f)-S(f)&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx-\sqrt{3}[f(-1)+f(1)]\\
&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx-\sqrt{3}[H(-1)+H(1)]\\
&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} H(x)\,dx\\
&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [f(x)-H(x)]\,dx\\
&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x+1)^2(x-1)^2\,dx\\
&=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x+1)^2(x-1)^2=\frac{\sqrt{3}}{15}f^{(4)}(\xi) \quad \xi\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

因此截断误差形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式为:

$$I(f)-S(f)=\frac{\sqrt{3}}{15}f^{(4)}(\xi), \quad \xi\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}), \alpha=\frac{\sqrt{3}}{15}, \beta=4.$$

2024-05

5. 已知 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 此时 Simpson 数值求积公式的余项为 $R(S)=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$,

(1) 证明: 复合 Simpson 公式的余项为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$, 其中 $h=\frac{b-a}{n}$;

(2) 利用复合 Simpson 公式求解积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x\mathrm{d}x$, 至少需要多少求积节点才能保证误差不超过 10^{-7}.

(1) 将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份, 分点 $x_k=a+kh, h=\frac{b-a}{n}, k=0,1,\cdots,n$, 在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上采用辛普森公式 $S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$, 若记 $x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+\frac{1}{2}h$, 则得

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x_k\right)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right]+R_n(f).$$

其中复合辛普森求积公式

$$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x_k\right)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right]=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_k\right)+f(b)\right].$$

由于 Simpson 数值求积公式的余项为 $R(S)=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$, 则复合辛普森求积公式余项

$$R_n(f)=I-S_n=-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}\left(\eta_k\right),\quad \eta_k\in\left(x_k,x_{k+1}\right).$$

由于 $f(x)\in C^4[a,b]$, 且

$$\min_{0\leqslant k\leqslant n-1}f^{(4)}\left(\eta_k\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}\left(\eta_k\right)\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}f^{(4)}\left(\eta_k\right),$$

所以根据介值定理知 $\exists\eta\in(a,b)$ 使

$$f^{(4)}(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}\left(\eta_k\right).$$

于是当 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时, 有

$$R_n(f)=I-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in(a,b).$$

(2) 取 $f(x)=\sin x$, 则易知 $f^{(4)}(x)=\sin x$, 因此 $f^{(4)}(\eta)\leqslant\frac{1}{2},\eta\in(0,\frac{1}{2})$. 根据题意得:

$$\left|R_n(f)\right|=\left|-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\eta)\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-5}}{2880n^4}\leqslant 10^{-7}\Rightarrow n^4\geqslant\frac{15624}{288}\approx 54.253\Rightarrow n\geqslant 2.714$$

因此，需要至少 $n=3$ 个子区间, 即用 $n=3$ 的复合辛普森公式计算即可达到精度要求. 注意，每个子区间包含两个端点，总节点数为 $2n+1$，即 7 个节点.

6 常微分方程的数值解法练习题

2024-04

设有常微分方程初值问题如下: $\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{cases}$

(1) 试推导数值求解公式 $y_{i+1}=y_{i-1}+2hf\left(x_i,y_i\right)$, 并验证公式的阶数

(2) 在初值问题中取 $f(x,y)=2x+3y, x_0=0, y_0=2$, 试用改进欧拉方法求 $y(0.1)$ 的近似值, 并利用 (1) 中的公式求 $y(0.2)$ 的近似值

(3) 求数值计算公式 $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}f\left(x_i,y_i\right)\right)\right]$ 的阶数

(1) 中心差商近似导数:

$$y'(x_i)\approx\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}$$

将中心差商代入微分方程，得到：

$$\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}=f(x_i,y(x_i))$$

通过移项和整理，得到数值求解公式：

$$y(x_{i+1})=y(x_{i-1})+2hf(x_i,y(x_i))$$

将 $y(x_i)$ 用 y_i 表示，得到：

$$y_{i+1}=y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)$$

接下来我们验证公式的阶数. 将 $y=y(x)$ 在 x_{i+1} 和 x_{i-1} 点的函数值 $y(x_{i+1})$ 和 $y(x_{i-1})$ 展开为关于 x_i 点的泰勒级数：

$$\begin{aligned}y(x_{i+1})&=y(x_i)+hy'(x_i)+\tfrac{h^2}{2}y''(x_i)+\tfrac{h^3}{6}y'''(\xi_1),\quad x_i<\xi_1<x_{i+1}\\ y(x_{i-1})&=y(x_i)-hy'(x_i)+\tfrac{h^2}{2}y''(x_i)-\tfrac{h^3}{6}y'''(\xi_2),\quad x_{i-1}<\xi_2<x_i\end{aligned}$$

将这两个式子相减，得：

$$y(x_{i+1})-y(x_{i-1})=2hy'(x_i)+\frac{h^3}{6}\left(y'''(\xi_1)+y'''(\xi_2)\right)=2hy'(x_i)+\frac{h^3}{3}y'''(\xi),\quad x_{i-1}<\xi<x_{i+1}$$

因此有

$$y(x_{i+1})=y(x_{i-1})+2hy'(x_i)+O(h^3)$$

因此，局部截断误差为：

$$y(x_{i+1})-y_{i+1}=[y(x_{i-1})+2hy'(x_i)+O(h^3)]-[y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)]=O(h^3)$$

故该公式为二阶方法.

(2) 改进欧拉方法的公式为 $\begin{cases}\widetilde{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)\\ y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f\left(x_{i+1},\widetilde{y}_{i+1}\right)\right]\end{cases}$ 或写成如下形式：

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f\left(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i)\right)\right]$$

给定初值问题：$\begin{cases}y'=2x+3y\\ y(0)=2\end{cases}$ 我们需要用改进欧拉方法求 $y(0.1)$ 的近似值，取步长 $h=0.1$. 初始条件：$x_0=0,\quad y_0=2,\quad x_1=x_0+h=0+0.1=0.1$, $f(x_0,y_0)=2x_0+3y_0=2(0)+3(2)=6$

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_1&=y_0+hf(x_0,y_0)=2+0.1\cdot 6=2+0.6=2.6\\ f(x_1,\widetilde{y}_1)&=2x_1+3\widetilde{y}_1=2(0.1)+3(2.6)=0.2+7.8=8\end{aligned}$$

改进的 y 值：

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f(x_1,\widetilde{y}_1)\right]=2+\frac{0.1}{2}[6+8]=2+0.7=2.7$$

因此，改进欧拉方法下 $y(0.1)$ 的近似值为 2.7.

我们使用公式 $y_{i+1}=y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)$ 来求 $y(0.2)$ 的近似值.

使用两步中点法计算 y_2：现在我们有两个初始点 $y_0=2$ 和 $y_1=2.7$. 使用两步中点法公式来计算 y_2：

$$y_2=y_0+2hf(x_1,y_1)$$

根据 $x_1=0.1,\quad y_1=2.7$ 计算得

$$f(x_1,y_1)=2x_1+3y_1=2\cdot 0.1+3\cdot 2.7=0.2+8.1=8.3$$

因此，

$$y_2=y_0+2\cdot 0.1\cdot 8.3=2+1.66=3.66$$

所以，使用两步中点法公式求得 $y(0.2)$ 的近似值为 3.66.
(3) 对方程两边求导, 可得

$$\begin{aligned}
y'(x)=&f(x,y),\quad y''(x)=\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial x}+y'(x)\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y},\\
y'''(x)=&\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial x^2}+y'(x)\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial x\partial y}\\
&+y'(x)\left[\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial x\partial y}+y'(x)\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial y^2}\right]+y''(x)\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y},
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
R_{i+1}=&y\left(x_{i+1}\right)-\left[y\left(x_i\right)+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}f\left(x_i+\frac{h}{2},y\left(x_i\right)+\frac{h}{2}f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)\right)\right]\\
=&y\left(x_{i+1}\right)-y\left(x_i\right)-\frac{h}{2}f(x_i,y_i)-\frac{h}{2}f\left(x_i+\frac{h}{2},y\left(x_i\right)+\frac{h}{2}y'\left(x_i\right)\right)\\
=&hy'\left(x_i\right)+\frac{h^2}{2}y''\left(x_i\right)+\frac{h^3}{6}y'''\left(x_i\right)+O\left(h^4\right)-\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\\
&-\frac{h}{2}\left\{f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)+\frac{h}{2}\frac{\partial f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial x}+\frac{h}{2}y'\left(x_i\right)\frac{\partial f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial y}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial x^2}+\frac{h^2}{2}y'\left(x_i\right)\frac{\partial^2 f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial x\partial y}+\left(\frac{h}{2}y'\left(x_i\right)\right)^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial y^2}\right]+O\left(h^3\right)\right\}\\
=&\frac{h}{2}y'\left(x_i\right)+\frac{h^2}{2}y''\left(x_i\right)+\frac{h^3}{6}y'''\left(x_i\right)+O\left(h^4\right)\\
&-\frac{h}{2}\left\{y'\left(x_i\right)+\frac{h}{2}y''\left(x_i\right)+\frac{h^2}{8}\left[y'''\left(x_i\right)-y''\left(x_i\right)\frac{\partial f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial y}\right]+O\left(h^3\right)\right\}\\
=&\frac{1}{4}h^2y''\left(x_i\right)+\frac{5}{48}h^3y'''\left(x_i\right)+\frac{1}{16}h^3y''\left(x_i\right)\frac{\partial f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)}{\partial y}+O\left(h^4\right),
\end{aligned}$$

所给求解公式是一个一阶公式.

2024-04

用梯形方法解初值问题 $\left\{\begin{array}{l}y'+y=0\\ y(0)=1\end{array}\right.$ 证明其近似解为 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$, 并证明: 当 $h\to 0$ 时, 它收敛于原初始问题的精确解 $y=e^{-x}$

梯形方法是一个数值解常微分方程的方法，其迭代格式为:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$$

其中，h 是步长，$f(x,y)$ 是微分方程 $y'=f(x,y)$ 中的右端函数.

对于给定的初值问题 $\begin{cases} y'+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$，我们有 $f(x,y)=-y$. 将其代入梯形方法的迭代格式中，得到：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(-y_n-y_{n+1})$$

整理得到：$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n$. 于是

$$y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1}=\cdots=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

因此，我们证明了 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$ 是给定初值问题的近似解.
因为 $y_0=1$, 故

$$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

对于给定的步长 h，经过 n 步运算后，我们可以得到 $y(x)$ 的近似值 y_n. 在每一步中，我们都会在 x 的位置上进行计算，因此总共进行 n 步运算后，我们得到的 x 的取值为 $x=nh$. 即 $n=\dfrac{x}{h}$, 代入上式有:

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} \\ \lim_{h\to 0} y_n &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}}\right]^{\frac{2h}{2+h}\cdot\frac{x}{h}} = \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

因此，当 $h\to 0$ 时，$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$ 收敛于原初值问题的精确解 $y=e^{-x}$.

2024-04

应用 Taylor 定理构建求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=-y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 的 2 阶近似求解方法

对于给定的初值问题 $y'(x)=-y(x)^2$，我们可以对 $y(x)$ 进行 Taylor 展开：

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)$$

其中，h 是步长，$y'(x_i)$ 和 $y''(x_i)$ 是 $y(x)$ 在 x_i 处的导数和二阶导数.
已知 $y'(x)=-y^2$, 所以有 $y'(x_i)=-y^2(x_i)$. 对 $y'(x)$ 再求导得到 $y''(x)$:

$$y''(x)=\frac{d}{dx}(-y^2)=-2y\cdot y'(x)$$

将 $y'(x)=-y^2$ 代入上式得到：$y''(x)=-2y\cdot(-y^2)=2y^3$.
利用 Taylor 展开式在 x_i 处展开：

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)$$

代入计算得到的 $y'(x_i)$ 和 $y''(x_i)$:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h(-y^2(x_i)) + \frac{h^2}{2}(2y^3(x_i)) + O(h^3) \\ &= y(x_i) - hy^2(x_i) + h^2y^3(x_i) + O(h^3) \end{aligned}$$

因此，二阶近似求解方法为:

$$y_{i+1} = y_i - hy_i^2 + h^2y_i^3$$

2024-04

导出用 Euler 法求解 $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(\lambda \neq 0)$ 的公式, 并证明它收敛于初值问题的精确解.

令 $x_i = ih$，根据欧拉法 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, 则 $y_{i+1} = y_i + hy'(x_i)$. 对于 $y'(x) = \lambda y$，有:

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = y_i(1 + h\lambda)$$

初值条件为 $y(0) = 1$. 因此，欧拉法的递推公式可以写成：$y_{i+1} = y_i(1 + h\lambda)$.
我们从初始值 $y_0 = 1$ 开始，逐步计算 $y_1, y_2, \ldots$，可以得到一般公式:

$$\begin{aligned} &y_1 = y_0(1 + h\lambda) = 1 \cdot (1 + h\lambda) \\ &y_2 = y_1(1 + h\lambda) = (1 + h\lambda)^2 \\ &\cdots\cdots \\ &y_n = (1 + h\lambda)^n \end{aligned}$$

而易知初值问题的精确解为：$y(x) = e^{\lambda x}$, 为了证明欧拉法求解的数值解 $y_n = (1 + h\lambda)^n$ 收敛于精确解 $y(x) = e^{\lambda x}$, 我们需要分析 $(1 + h\lambda)^n$ 和 $\left(e^{\lambda x}\right)$ 之间的关系. 由于 $x = nh$，利用指数函数的定义，我们知道当 $h \to 0$ 时，有:

$$\lim_{h \to 0} (1 + \lambda h)^n = \lim_{h \to 0} (1 + \lambda h)^{\frac{1}{\lambda h} \cdot \lambda h \cdot \frac{x}{h}} = \lim_{h \to 0} (1 + \lambda h)^{\frac{1}{\lambda h} \cdot \lambda x} = e^{\lambda x}$$

因此，当步长 $h \to 0$ （即 $n \to \infty$）时，欧拉法的数值解 $y_n = (1 + h\lambda)^n$ 收敛于精确解 $y(x) = e^{\lambda x}$.

7 期中测试题 5 道及章节测试题 5 道

7.1 期中测试题 5 道

1. 用直接三角分解法 (LU 分解) 求解以下线性方程组 $\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ 2x-3y+4z=3, \\ 3x-4y+6z=5. \end{cases}$

2. 已知函数表如下, 应用二次多项式 $P_2(x)$ 拟合函数 $f(x)$, 求出二次多项式 $P_2(x)$ 的表达式。

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-1	-2	-1	0

3. 证明：当 $x_0=1.5$ 时，迭代法 $x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}$ 收敛于方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在区间 [0,2] 内唯一实根。

4. 试确定 $a(a\neq 0)$, 使得求解方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 的 Jacobi 迭代格式收敛。

5. 求一个次数不超过 4 次的插值多项式, 使它满足:

$$\begin{aligned} &p(0)=f(0)=0, p(1)=f(1)=1, p'(0)=f'(0)=0, \\ &p'(1)=f'(1)=2, p''(1)=f''(1)=0 \end{aligned}$$

并写出其余项表达式（设存在 5 阶导数）

7.2 数值积分单元测试题 (5 道题)

1. 确定求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2\left[f'(0)-f'(h)\right]$$

2. Newton-Cotes 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(x_k\right)$, 则 $\sum_{k=0}^n A_k=$

3. 证明 Simpsion 数值积分公式的误差:

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

4. 给定求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

（1）求该求积公式的代数精度；

（2）证明：存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$$

5. 考虑积分 $I(f)=\int_0^3 f(x)dx$ 及对应的求积公式 $Q(f)=\frac{3}{4}f(0)+\frac{9}{4}f(2)$

（1）证明求积公式 $Q(f)$ 是以 $x_0=0, x_1=1, x_2=2$ 为求积节点的插值

（2）型求积公式. $(f)\approx Q(f)$ 的代数精度

（3）设 $f(x)\in C^3[0,3]$, 求截断误差 $I(f)-Q(f)$ 形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式，其中 $\xi\in(0,3)$ α,β 为常数