P-I-4 Dva lupiči

Tomáš Sláma

Vrát 19, Železný Brod, 468 22

Počet stran řešení: 2

Nechť jsou pro řešení zadání (a), (b) a (c) dány:

- Vstup v jako posloupnost různých hodnot věcí $v = p_1, p_2, ...p_n; n \in N$.
- Součet hodnot věcí $s = \sum_{i=1}^{n} p_i$ pro daný vstup o velikosti n.
- Vstup v_{opt} pro který platí, že $\mathrm{OPT}(v_{opt}) = s/2$ (tj. vstup produkující optimální výstup[1]).
- Polovina absolutní hodnoty rozdílu velikostí hromádek r.

1 Řešení zadání (a)

Pro zadání (a) dává ALG pro libovolný vstup v všechen lup na první hromadu. Proto se hromada s větší hodnotou musí při každém vstupu rovnat součtu hodnot věcí s (na druhé hromadě nic není)... $\mathrm{ALG}(v) = s$.

$\mathrm{OPT}(v_{opt})$ vždy produkuje optimální výstup, takže musí platit nerovnost $s/2 \leq \mathrm{OPT}(v)$. Úpravou nerovnosti získáváme:

$$s \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}(v)$$
$$\mathrm{ALG}(v) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}(v)$$

Z poslední úpravy je patrné, že výše popsaný algoritmus je 2-kompetitivní.

2 Řešení zadání (b)

Mějme algoritmus $\mathrm{ALG}(v)$, který věci dává na hromádky následovně:

- Pokud hromady nejsou stejné, umístí prvek na hromádku s menší hodnotou.
- Pokud hromádky stejné jsou, umístí prvek na libovolnou z obou hromádek.

2.1 Důkaz 3/2 kompetitivnosti

Pro algoritmus OPT s libovolným vstupem v platí:

- $\mathrm{OPT}(v) \geq s/2$ (viz. úloha (a)).
- $\mathrm{OPT}(v) \geq p \;\; \forall\, p \in v$ (je zřejmé, že OPT nemůže nikdy vyprodukovat nic menšího než hodnotu největšího prvku vstupu).

[1] V rámci našeho problému musí být optimální výstup $s/2$, protože rovnoměrněji než na dvě poloviny nic rozdělit nejde).

Pro algoritmus ALG s libovolným vstupem v platí:

- Pokud se před přidáním posledního prvku hromádky rovnají, tak pro poslední prvek posloupnosti platí $p_n = 2r$ (je dvojnásobek poloviny rozdílu hromádek). Pokud se nerovnají, tak je p_n nutně větší než rozdíl hromádek: $p_n \geq 2r$.
- $\mathrm{ALG}(v) = r+\frac{s}{2}$ (vždy produkuje polovinu celkového součtu plus polovinu rozdílu hromádek).

$\mathrm{OPT}(v) \geq p \;\forall\; p \in v$, což musí platit i pro p_n. Dosazením do nerovnosti dostáváme:

$$\mathrm{ALG}(v) = r + \frac{s}{2} \qquad 2r \leq \mathrm{OPT}(v) \qquad \frac{s}{2} \leq \mathrm{OPT}(v)$$
$$\mathrm{ALG}(v) = r + \frac{s}{2} \leq \frac{\mathrm{OPT}(v)}{2} + \mathrm{OPT}(v)$$
$$\mathrm{ALG}(v) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT}(v)$$

Výše popsaný algoritmus je tedy 3/2-kompetitivní.

3 Řešení zadání (c)

Uvažujme vstup $v_{opt} = 1, 1+a, 2+a; a \in R^+$ (je *opt*, protože součet prvních dvou se rovná tomu třetímu), jeho součet $s = 4 + 2a; a \in R^+$ a libovolný on-line algoritmus ALG.

Pro optimální algoritmus s námi zkonstruovaným vstupem v_n platí, že $\mathrm{OPT}(v_{opt}) = s/2$.

ALG však dopředu nevidí, že vstup takto vypadá, proto musí (mimo první prvek, který dá na libovolnou hromádku) umisťovat prvky vždy na hromádku s menší hodnotou. Pokud by dva po sobě jdoucí prvky umístil na stejnou hromádku, vstup bychom zkrátili tak, aby se ALG zastavil právě v tomto bodě.

Pro náš vstup by se to mohlo stát mezi 1. a 2. prvky, kdy by tedy nejmenší ALG v poměru s OPT vyšel $\frac{2+a}{1+a}$ čímž bychom pro libovolné a přesáhli hranici 3/2. Další případ by mohl nastat mezi prvky č. 2 a 3, pro který by ALG v poměru s OPT vyšel $\frac{3+2a}{2+a}$, což by pro libovolné a překročilo hranici 3/2.

Pokud námi uvažovaný vstup bude dávat prvky vždy na tu menší hromádku, musí platit, že $\mathrm{ALG}(v_{opt}) = 3 + a$ (1. a 3. prvek). Pro a přibližující-se k nule vychází (v poměru s výsledkem optimálního algoritmu OPT) hodnoty:

$$\lim_{a\to 0} \frac{\mathrm{ALG}(v_{opt})}{\mathrm{OPT}(v_{opt})} = \lim_{a\to 0} \frac{3+a}{2+a} = \frac{3}{2}$$

Z tohoto výsledku je patrné, že každý on-line algoritmus lze pro vstup tohoto formátu "donutit" do výsledku, který se v poměru s optimálním výsledkem přibližuje libovolně blízko hodnotě 3/2.

Proto žádný on-line algoritmus nemůže být lépe než 3/2-kompetitivní.