P-I-3 Zahrádka

Tomáš Sláma

Vrát 19, Železný Brod, 468 22

Počet stran řešení: 2

1 Řešení pro $n \leq 100$

Pro každý bod lze projít všechny ostatní body, čímž vyčteme všechny možné dvojice bodů. Pro každou tuto dvojici lze opět vyčíst všechny ostatní body a pro každou takto vzniklou trojici vypočítat obsah trojúhelníku, který tvoří.

Pro každý bod tedy uděláme následující:

a) Posuneme souřadnice všech bodů tak, aby námi vybraný bod měl souřadnice $[0, 0]$.

b) Pro každou trojici bodů $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[0, 0]$ spočítáme obsah jimi tvořeného trojúhelníku jako polovina délky jejich vektorového součinu.

Vektorový součin je však aplikovatelný pouze na body o třech souřadnicích, proto musíme přirat třetí souřadnici s nulovou hodnotou:

$$S = \frac{|[x_1, y_1, 0] \times [x_2, y_2, 0]|}{2} = \frac{|[y_1 \cdot 0 - 0 \cdot y_2, 0 \cdot x_2 - x_1 \cdot 0, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2]|}{2} = \frac{|x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2|}{2}$$

Nejmenší z takto vytvořených trojúhelníků je řešením našeho problému. Časová složitost výše popsaného algoritmu je $O(n^3)$, protože procházíme všechny trojice z dané množiny bodů.

2 Řešení pro $n \leq 1000$

Problém s algoritmem pro $n \leq 100$ je ten, že pro každý bod kontrolujeme všechny dvojice tvořeny ostatními body.

Z výrazu $\frac{|x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2|}{2}$ je patrné, že k nalezení trojúhelníku s nejmenším obsahem potřebujeme minimalizovat výraz v absolutní hodnotě.

Místo toho, abychom zkoušeli všechny dvojice, můžeme zkusit pro každý bod setřídit všechny ostatní body porovnáváním $x_1 \cdot y_2 < y_1 \cdot x_2$ (nebo $>$). Poté stačí vypočítat obsahy trojúhelníků tvořenými dvojicemi body, které spolu v setřízeném poli sousedí a bodem $[0, 0]$.

Pro každý bod tedy uděláme následující:

a) Posuneme souřadnice všech bodů tak, aby námi vybraný bod měl souřadnice $[0, 0]$.

b) Všechny body (kromě bodu $[0, 0]$) setřídíme porovnáváním $x_1 \cdot y_2 < y_1 \cdot x_2$ a po setřízení pro každé dva sousední body a bod $[0, 0]$ spočítáme obsah jimi tvořeného trojúhelníku (opět pomocí poloviny vektorového součinu).

Nejmenší z takto vytvořených trojúhelníků je řešením našeho problému.

Je nutno dodat, že je možné, že pro daný bod zvolený v části (a) našeho algoritmu nebude nejmenší jím (a dalšími dvěma body) tvořený trojúhelník v části (b) nalezen. Tento trojúhelník bude ovšem nalezen při zvolení jednoho z dalších dvou bodů, které nenalezený trojúhelník tvoří.

Časová složitost výše popsaného algoritmu je $n^2 \cdot log(n)$, protože pro každý z množiny n bodů třídíme v čase $O(n \cdot log(n))$ všechny ostatní body.