

# In-place BFS a DFS

V LINEÁRNÍM ČASE NA MODELU RAM

TOMÁŠ SLÁMA

7. 4. 2020

# Úvod

- pracujeme s modelem RAM
  - paměť je pole slov velikosti  $w$
  - operace se slovy (čtení, psaní, přístupy) jsou konstantní
  - vstup je na prvních  $n \in \mathbb{N}$  slovech
  - velikost  $w = \Omega(\log n)$
- **restore model:** vstup může být měněn v průběhu výpočtu, ale na jeho konci musí být v původním stavu
- graf je zadán v setříděném seznamu sousedů

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	5	7	9	12	14	17	12	2	5	1	3	4	2	4	2	3	5	1	4
	$n$	$T$					$2m$												

**Obrázek:** setříděná reprezentace

DFS

1. graf převedeme do speciální reprezentace
2. budeme v ní kódovat stav DFS (a trochu ji tím rozbijeme)
3. obnovíme původní stav
4. převedeme zpět do setříděné reprezentace

<i>operace</i>	<i>význam</i>	<i>podpora</i>
pre-process	po vstoupení do vrcholu	✓
pre-explore	po iteraci přes souseda	
post-process	po zpracování všech sousedů	✓
post-explore	po vrácení z vrcholu	

**Tabulka:** podporované funkce DFS

# REPREZENTACE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	5	7	9	12	14	17	12	2	5	1	3	4	2	4	2	3	5	1	4
	$n$	$T$					$2m$												

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	5	7	9	12	14	17	12	9	17	7	12	14	9	14	9	12	17	7	14
	$n$	$T$					$2m$												

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	5	9	7	9	9	7	12	1	17	2	12	14	3	14	4	12	17	5	14
	$n$	$T$					$2m$												

**Obrázek:** setřizená, pointerová a prohozená reprezentace

- pozor na stupně 0 (zachovávají si jména vrcholů)!

# SETŘÍZENÁ $\rightarrow$ POINTEROVÁ

## Lemma 1

*Setříděná reprezentace jde do pointerové reprezentace převést in-place v čase  $\mathcal{O}(n)$ .*

## Důkaz

Nastavíme  $A[i] = T[A[i]] \forall i \in \{n+2, \dots, n+m+2\}$   
a  $T[v] = v$  (pro vrcholy  $v$  stupně 0). □



## Lemma 2

*Pointerová jde do prohozené reprezentace (a zpět) převést in-place v čase  $\mathcal{O}(n)$ .*

## Důkaz

Převod  $\rightarrow$ :

$$T[i] = A[T[i]] \text{ a } A[T[i]] = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, i \neq T[i]$$

Převod  $\leftarrow$ :

$$T[A[i]] = i \text{ a } T[A[i]] = i \quad \forall i \in \{n+2, \dots, n+m+2\}, A[i] < n$$



## Lemma 3

*Prohozená jde do setříděné reprezentace převést in-place v čase  $\mathcal{O}(n)$ .*

## Důkaz

Nejprve nastavíme

$$A[i] = A[A[i]] \quad \forall i \in \{n+2, \dots, n+m+2\}, A[i] > n$$

a

$$T[i] = A[T[i]] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Pak postupně hledáme jména vrcholů  $v$  na pozicích  $p$  v každém poli sousednosti a nastavujeme:

$$A[p] = T[v] \text{ a } T[v] = p$$

Nakonec opravíme vrcholy stupně 0 procházením  $T$  a nastavením

$$T[i] = T[i-1] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, T[i] = i$$



## PROHOZENÁ → SETŘÍZENÁ

- důkaz z článku je problematický<sup>1</sup>, jelikož nepoznáme, když procházíme nové pole sousednosti

9	10	11	12	13	14	15	16	17
<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>5</b>	<b>16</b>

Obrázek: problematický případ

### Důkaz (fix)

Při nalezení chybného prohození iterujeme o rozdíl správného  $v$  s aktuálním a prohazujeme zpět. □

<sup>1</sup>Pokud jsem ho tedy pochopil správně :).

# DFS

Vrcholy se stupněm  $\geq 2$

# ZAVEDENÍ INVARIANTU

## Invariant

Vrchol  $v$  je bílý  $\iff A[T[v]] \leq n$ .

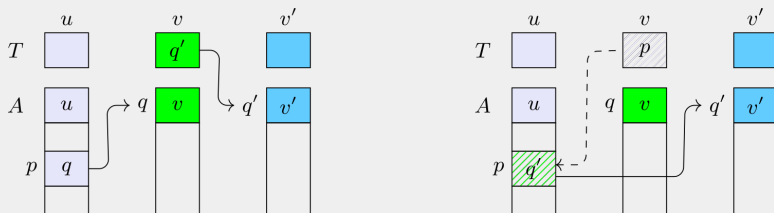
- stav vrcholů budeme udržovat přes invariant
- na začátku platí pro všechny vrcholy

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	5	9	7	9	9	7	12	1	17	2	12	14	3	14	4	12	17	5	14
	$n$	$T$					$2m$												

**Obrázek:** prohozená reprezentace

# PROCHÁZENÍ PŘES OBRÁCENÉ POINTERY

- jsme ve vrcholu  $u$  a iterujeme přes jeho sousedy
- na pozici  $p$  jsme narazili na pointer  $q$  do bílého vrcholu  $v$ , jehož nejmenší soused je na pozici  $q'$
- nastavíme  $T[v] = p$  a  $A[p] = q'$

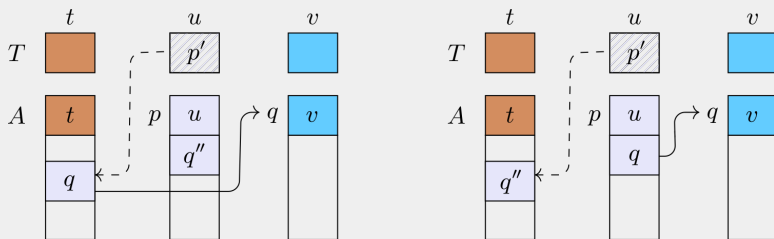


**Obrázek:** diagram konstrukce obráceného pointeru

- pozorování: vrchol  $v$  už není bílý

# PROBLÉMY S OBRÁCENÝMI POINTERY

- na pozici  $p$  uvažujeme první hranu vrcholu  $u$  (uložená na  $A[T[u]]$ ) směřující do  $v$ : kam nasměrovat obrácený pointer?
  - uložit do  $A[p]$  – ztratíme pojem o tom, kde  $u$  začíná
  - uložit do  $T[u]$  – tam už je obrácený pointer
- problém vyřešíme tím, že ho nebudeme řešit:
  - pokud by měl nastat, tak prohodíme  $T[u]$  s  $A[p + 1]$
  - jelikož jsou pointery setříděné, tak prohození poznáme

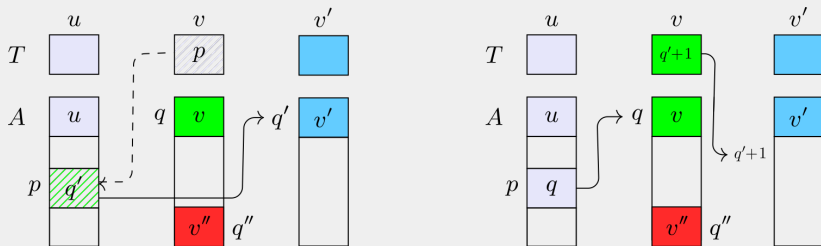


**Obrázek:** problémy a řešení konstrukce prohozeného pointeru



# BACKTRACKOVÁNÍ

- po prozkoumání sousedů  $v$  narazíme na pozici  $q''$  na vrchol  $v''$ 
  - poznáme tak, že  $A[q''] \leq n$
- iterujeme zpět do té doby, než  $A[p] \leq n$



**Obrázek:** backtrackování

- problém: vrchol  $v$  už je zase bílý
  - fix:  $q' = q' + 1$  – jelikož jsou stupně všech vrcholů  $\geq 2$ , tak po inkrementu  $q'$  ukazuje na nějaký pointer

# DFS

Průběh algoritmu

1. Vrchol  $v$  je bílý  $\iff$  není startovní a  $1 \leq A[T[v]] \leq n$
2. Každý šedočerný vrchol (kromě startovního) na aktuální DFS cestě si ukládá obrácený pointer na pozici  $T[v]$ , která ukazuje, kde byl pointer na  $v$  původně uložen v poli sousednosti svého rodiče.
3. První pointer aktuálně neprocházeného šedočerného vrcholu  $v$  (uložený v  $T[v]$ ), ukazuje na druhou pozici pole sousedů nějakého vrcholu.

 dfs.py

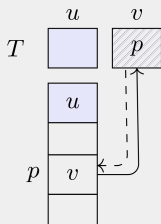
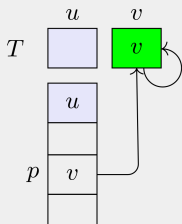
# DFS

Vrcholy se stupněm 0

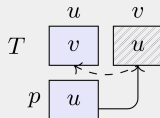
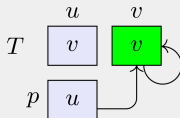
## Invariant

Vrchol  $v$  je bílý  $\iff A[T[v]] \leq n \vee T[v] = v$ .

- chováme se normálně



- vytvoříme pointer do  $T[u]$



- na rozdíl od vrcholů stupně 2 po sobě neuklízíme
  - vlastně vytváříme smyčky (bude se hodit při obnovení)

# DFS

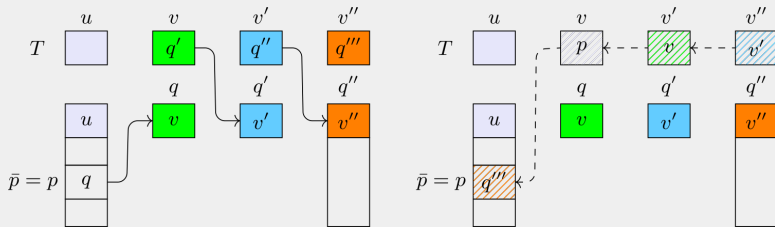
Vrcholy se stupněm 1

# DOKONČENÍ INVARIANTU

## Invariant

Vrchol  $v$  je bílý  $\iff \underbrace{(T[v] = v)}_{\text{stupeň 0}} \vee \underbrace{T[v] > n}_{\text{stupeň 1,2}} \wedge \underbrace{A[T[v]] \leq n}_{\text{stupeň } \geq 2}$ .

- z vrcholu  $u$  stupně  $\geq 2$  navštívíme bílý vrchol  $v$  stupně 1
- podle stupně jediného souseda  $v'$  vrcholu  $v$  se chováme různě:
  - 0) jako jsme popisovali výše
  - 1) nastavíme  $T[v'] = v$  a pokračujeme
  - $\geq 2$ ) nastavíme  $A[\bar{p}] = T[v'']$  a  $T[v''] = v'$





# DFS

## Obnovení

$\geq 2$ ) stačí nastavit  $T[v] = T[v] - 1$

0) tvoří smyčku, nebo ukazuje na druhou pozici vrcholu:

- iterujeme přes pole sousednosti a hledáme  $v = A[p] : v \leq n$ :
  - $T[v] = p$  (smyčka, stupeň 2)
  - $T[v] \leq n \wedge T[T[v]] = p + 1$  (prohozený 1 a 2 vrchol, stupeň 2)
  - $T[v] \leq n \wedge T[T[v]] = v$  (stupeň 1)

1) postupně hledáme vrcholy  $v'$  stupně 1

- pokud ještě nebyly opraveny, obracíme psource and resultrohozené pointery

BFS

1. graf získáme v setříděné reprezentaci
2.  $T$  zkomprimujeme na  $\mathcal{T}$  s tím, že:
  - zachováme konstantní přístup
  - uvolníme lineární počet bitů
3. uvolněné místo použijeme na datovou strukturu pro ukládání stavů vrcholů
4. provedeme BFS
5.  $\mathcal{T}$  dekomprimujeme na  $T$ , čímž obnovíme původní stav

- zobecnění struktury choice dictionary
- udržuje  $S_0, \dots, S_{c-1}$  podmnožin  $\{1, \dots, n\}$ , kde:

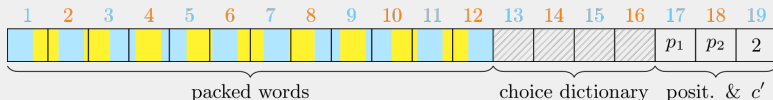
$$\bigcap_{i=0}^{c-1} S_i = \emptyset \qquad \bigcup_{i=0}^{c-1} S_i = \{1, \dots, n\}$$

- vyžaduje řádově  $nc$  bitů paměti

operace	význam	složitost
<code>setColor(v, c)</code>	nastaví barvu $v$ na $c$	$\mathcal{O}(1)$
<code>getColor(v)</code>	získá barvu $v$	$\mathcal{O}(1)$
<code>choice(c)</code>	získá libovolný $v$ s barvu $c$	$\mathcal{O}(1)$

**Tabulka:** podporované operace CCD

- potřebujeme uvolnit  $nc$  bitů
- najdeme pozice, kde se mění  $c + 1$  MSbitů ve slovech z  $T$ 
  - díky setříděnosti jich bude právě  $2^{c-1}$
  - každé slovo o tolik bitů zkrátíme
  - zapamatujeme si pozice změn v  $T$
- dohromady  $nw - n(w - (c + 1)) = n(c + 1) = nc + n$ 
  - omezení:  $n \geq 2^{c-1}w$ , abychom mohli uložit pozice



**Obrázek:** komprimovaná reprezentace  $\mathcal{T}$

1. bitovými operacemi získáme  $w - (c + 1)$  LSbitů slova
  - $i$ -té slovo v  $\mathcal{T}$  začíná na pozici  $(w - (c + 1))(i - 1)$
2. procházíme postupně  $2^{c-1}$  pozic, podle kterých zrekonstruujeme  $c + 1$  MSbitů





# PRŮBĚH BFS

```
1  D = ColorChoiceDictionary(WHITE, LIGHT, DARK, BLACK)
2  D.setColor(start, LIGHT)
3
4  while choice(LIGHT) is not None:
5      while choice(LIGHT) is not None:
6          v = D.choice(LIGHT)  # pop node
7
8          # open all white neighbours
9          for i in range( $\mathcal{T}[v]$ ,  $\mathcal{T}[v+1]$ ):
10             if D.getColor( $A[i]$ ) is WHITE:
11                 D.setColor( $A[i]$ , DARK)
12
13             D.setColor(v, BLACK)  # close the node
14
15     LIGHT, DARK = DARK, LIGHT  # next round
```



DÍKY ZA POZORNOST!

# ZDROJE A DODATEČNÉ MATERIÁLY

-  TORBEN HAGERUP.  
**Small uncolored and colored choice dictionaries.**  
*CoRR*, abs/1809.07661, 2018.
-  FRANK KAMMER AND ANDREJ SAJENKO.  
**Linear-time in-place DFS and BFS in the restore model.**  
*CoRR*, abs/1803.04282, 2018.
-  FRANK KAMMER AND ANDREJ SAJENKO.  
**Space efficient (graph) algorithms.**  
<https://github.com/thm-mni-ii/sea>, 2018.
-  TOMÁŠ SLÁMA.  
**Zdrojový kód k prezentaci.**  
<https://github.com/xiaoxiae/inline-bfs-dfs-presentation>.