层次分析法建模

层次分析模型

背景

- 日常工作、生活中的许多决策问题

- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化

- **Saaty于20世纪70年代末提出层次分析法 AHP (Analytic Hierarchy Process)**

- **AHP——**一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

8.1 预备知识

1、正互反矩阵：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若元素 a_{ij}

满足

$$a_{ij}>0,\quad a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 为正互反矩阵。例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2、一致阵：若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个正互反矩阵，且满足

$$a_{ij}\bullet a_{jk}=a_{ik}\quad (i,j,k=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 为一致阵。例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{21}\bullet a_{13}=2\bullet 1/3=2/3=a_{23}$$

$$a_{32}=a_{31}\bullet a_{12}=3\bullet 1/2=3/2$$

3、一致阵的性质：

（1）A 的各行（列）的元素对应成比例，从而 $R(A)=1$；

（2）A 的最大特征值为 $\lambda_{\max}=n$，其余特征值均为零；

（3）若 $\lambda_{\max}=n$ 对应的特征向量为

$$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$$

则 $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$。

注：

1）若 A 为一致阵，则 A 可表示为：

$$A=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

2）若 A 为一致阵，则 A 的任一列向量均为 $\lambda_{\max} = n$ 的特征向量。

$$A=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

$$a_{23}=a_{21}\bullet a_{13}=w_2/w_1\bullet w_1/w_3=w_2/w_3$$

$$a_{2n}=a_{21}\bullet a_{1n}=w_2/w_1\bullet w_1/w_n=w_2/w_n$$

$$A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix}$$

即

$$A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$ 也是特征向量。

4、定理：

设 A 为 n 阶正互反矩阵，则 A 最大特征值 $\lambda_{\max} \geq n$，当 $\lambda_{\max} = n$ 时，A 为一致阵。

注：n 阶正互反阵 A 为一致阵 $\Leftrightarrow$ A 最大特征值 $\lambda_{\max} = n$

5、正互反矩阵的最大特征值与特征向量的求法：

（1）幂法：

归一化：分量之和为1

1）任取归一化初始向量 $w^{(0)}$, k:=0，设置精度 ε

2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

3）归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

4）若 $\max_i \left| w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)} \right| < \varepsilon$，**停止；否则转2**

5) 计算 $\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$

（2）和法：

例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{列向量归一化}}\begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{按行求和}}\begin{bmatrix}1.760\\ 0.972\\ 0.268\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{归一化}}\begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$$

$$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.286\end{bmatrix}\xRightarrow{Aw\ =\lambda w}\lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确结果：$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$