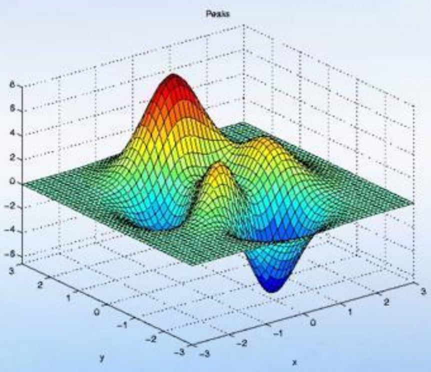
安徽财经大学
Anhui University of Finance & Economics

第3篇 层次分析法模型及应用



第11章 层次分析法的基本原理和步骤

第12章 模糊层次分析方法

AHP model and its application

数学建模方法

安徽财经大学数学建模实验室编制

前言

§12-1　模糊互补判断矩阵排序方法

1.1、基本概念

1.2、几个定理

§12-2　层次分析法建模案例：教学质量的评价

2.1、问题重述

2.2、问题分析

2.3、模型假设

2.4、符号说明

2.5、模型建立与求解

2.6、模型优化与评价

>>*AHP*方法作为一种定性与定量结合的决策工具，近十年来得到迅速的发展。但由于在进行检验比较判断矩阵是否具有一致性时计算上的困难性，修改比较判断矩阵时的复杂性以及如何更有效解决比较判断矩阵的一致性与人类思维的一致性有显著差异等问题，人们将模糊数学思想和方法引入了层次分析法。1983年荷兰学者*Van Loargoven*提出了用三角模糊数表示*Fuzzy*比较判断的方法，之后许多学者纷纷加入*Fuzzy AHP*的研究工作。由于判断的不确定性及模糊性，人们在构造比较判断矩阵时，所给出的判断值常常不是确定的数值点，而是以区间数或模糊数形式给出。常见的不确定型判断矩阵有：区间数互补判断矩阵、区间数互反判断矩阵、区间数混合判断矩阵、三角模糊数互补判断矩阵、三角模糊数互反判断矩阵、三角模糊数混合判断矩阵、模糊互补判断矩阵等。这里我们只介绍模糊互补判断矩阵一种排序方法。

1.1 基本概念

定义12.1 设判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $i,j=1,2,\dots,n$,对任意的i,j均有$0<a_{ij}<1$, $a_{ij}+a_{ji}=1$，则称A为**模糊互补判断矩阵**。对于模糊互补判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若"$k(0\le k\le n)$，有$a_{ij}=a_{ik}-a_{jk}+0.5$,则称A为**模糊一致性判断矩阵**。

定义12.2 设有s个判断矩阵$A_k=(a^{(k)}_{ij})_{n\times n}$, $k=1,2,\dots,s$,令

令$\bar{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k a_{ij}^{(k)}, \lambda_k>0, \sum_{k=1}^{s}\lambda_k=1$, 则称$\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$为$A_k$ $(k=1,2,\cdots,s)$的合成矩阵，记为 $\bar{A}=\lambda_1A_1\oplus\lambda_2A_2\oplus\cdots\oplus\lambda_sA_s$.

由于 $\bar{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k a_{ij}^{(k)}=\lambda_1 a_{ij}^{(1)}+\lambda_2 a_{ij}^{(2)}+\cdots+\lambda_s a_{ij}^{(s)}$

$$=\lambda_1(a_{ik}^{(1)}-a_{jk}^{(1)}+0.5)+\lambda_2(a_{ik}^{(2)}-a_{jk}^{(2)}+0.5)+\cdots+\lambda_s(a_{ik}^{(s)}-a_{jk}^{(s)}+0.5)$$

$$=(\lambda_1 a_{ik}^{(1)}+\lambda_2 a_{ik}^{(2)}+\cdots+\lambda_s a_{ik}^{(s)})-(\lambda_1 a_{jk}^{(1)}+\cdots+\lambda_s a_{jk}^{(s)})+0.5(\lambda_1+\cdots+\lambda_s)$$

$$=\bar{a}_{ik}-\bar{a}_{jk}+0.5.$$

故模糊一致性判断矩阵的合成矩阵仍然是模糊一致性判断矩阵。

给出模糊标度如表3-2-1所示。

表12-1　模糊标度及其含义表

标度	含义
0.1	表示两个元素相比，后者比前者极端重要
0.3	表示两个元素相比，后者比前者明显重要
0.5	表示两个元素相比，后者比前者同等重要
0.7	表示两个元素相比，前者比后者明显重要
0.9	表示两个元素相比，前者比后者极端重要

可以看出，按上述标度构成的判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$具有以下性质：

$$(1)\ a_{ij}+a_{ji}=1;\ (2)\ a_{ii}=0.5;\ (3)\ 0<a_{ij}<1,$$

$$i,j=1,2,\cdots,n.$$

因此判断矩阵称为**模糊互补判断矩阵**。

1.2 几个定理

定理12.1 设$W=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$为模糊互补判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的排序向量,若 $a_{ij}=w_i-w_j+0.5$
则A为模糊一致性判断矩阵。

证明 对于$\forall i,j,k(1\le i,j,k\le n)$,

由于 $a_{ij}=w_i-w_j+0.5$， $a_{ik}=w_i-w_k+0.5$， $a_{jk}=w_j-w_k+0.5$，

于是$a_{ik}-a_{jk}+0.5=w_i-w_k+0.5-(w_j-w_k+0.5)+0.5=w_i-w_j+0.5=a_{ij}$

由定义12.1知， $A=(a_{ij})_{n\times n}$为模糊一致性判断矩阵。

当A不是模糊一致性判断矩阵时，则$a_{ij}=w_i-w_j+0.5$不成立，为此有

定理12.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个模糊互补判断矩阵，$W=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$ 是 A 的排序向量，则 W 满足：

$$w_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+1-\frac{n}{2}\right),\ i=1,2,\cdots,n.$$

证明 令 $F(W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-(w_i-w_j+0.5))^2$，其中 w_i 非负且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1.$

作拉格朗日函数 $L(W,\lambda)=F(W)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right)$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial w_i}=0, i=1,2,\cdots,n,$ 有

$$\sum_{j=1}^{n}2[a_{ij}-(w_i-w_j+0.5)](-1)+\lambda=0,\text{则}$$

$$-2\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}-(w_i-w_j+0.5)]+\lambda=0,\ \text{那么}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-2[\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}-nw_i+1+0.5n]+\lambda)=0,$$ 于是

$$-2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-n+n-0.5n^2\right]+\lambda n=0,$$ 则有

$$-2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-0.5n^2\right]+\lambda n=0.$$

由模糊互补判断矩阵的性质 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0.5n^2$, 推得 $\lambda=0$

从而 $-2[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-nw_i+1-0.5n]=0$

推得 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-nw_i+1-0.5n=0$

$$\therefore w_i=\frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+1-\frac{n}{2})\quad ,i=1,2,\cdots,n.$$