近似算法作业

学号：SA17011142　　姓名：姜贵平

1. 证明：G 中最大团的 size 为 α 当且仅当 G^m 里最大团的 size 是 mα

解：

1 充分性：即证当G^m里最大团的 size 是 **mα** 时，G 中的最大团的 size 为 **α**

假设 G 中最大团 C 的 size 为 β，且 β 不等于 α：

如果 β > α，因为G^m是取 G 的 m 个拷贝，并且连接每个拷贝中的任意两点构成，所以每个拷贝中的最大团 C 中的任意一点一定和其他拷贝中的 C 的任意一点相连,所以能够形成 size 为 mβ 的团，又因为 β>α，所以 G 中的最大团的 size 一定不是 mα，这和条件矛盾，所以 C 的 size β 不大于 α。

如果 β＜α，因为G^m里最大团的 size 是 mα，由鸽巢原理，必定有一个 G 的拷贝 G'，使得G^m最大团中的结点在G'中的数量大于等于α。这些结点构成的完全子图同样为G'的完全子图，又因为假设 β＜α，这与 G 中最大团的 size 为 β 相矛盾。所以 C 的 sizeβ 不小于 α。

综上，当G^m里最大团的 size 是 **mα** 时，G 中的最大团的 size 为 **α。**

2 必要性：即证 G 中最大团的 size 为 α，则 G^m 里最大团的 size 是 mα

因为G^m中的不同拷贝之间的结点相互连接，所以每个拷贝中的最大团之间同样相互连接，构成的子图仍然为完全子图，由充分性的证明可知，不存在 size 大于 **mα** 的子团，所以G^m的最大子团的 size 为 mα。

综上，G 中最大团的 size 为 α 当且仅当 G^m 里最大团的 size 是 mα。

2. 完善证明 Th1.9LPT 算法的近似性能比$R_{lpt} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$

课件中给出了近似比的上界，定理中为紧致界，所以需要证明在一定条件下等号成立。

考虑输入实力I'，使得以下条件成立：

$$P_i = 2m - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, i = 1, 2, \ldots, 2m$$

$$P_{2m+1} = m$$

P_1	P_{2m}	P_{2m+1}
P_2	P_{2m+1}	
…		
P_{m-1}	P_{m+2}	
P_m	P_{m+1}	

LPT 运行结果

P_1	P_{2m-2}	

P_2	P_{2m-3}	
…		
P_{m-1}	P_m	
P_{2m-1}	P_{2m}	P_{2m+1}

OPT 结果

所以 $A(I') = 4m - 1$, $OPT(I') = 3m$, 近似比为$R_{lpt} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$