微积分 A(3)综合测试解答

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性和偏导数.

解：取 $y=kx^2$, $f(x,kx^2)=\dfrac{k}{1+k^2}$. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\overline{\overline{\underline{\quad y=kx^2\quad}}}\dfrac{k}{1+k^2}$ 随 k 而异，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.\ \text{同理}\ f_y'(0,0)=0.$$

2. 设 F 具有连续的偏导数，且 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：方法一，代公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot1+F_3'\cdot(-1)}{F_2'\cdot(-1)+F_3'\cdot1}=\frac{-F_1'+F_3'}{-F_2'+F_3'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot(-1)+F_2'\cdot1}{F_2'\cdot(-1)+F_3'\cdot1}=\frac{F_1'-F_2'}{-F_2'+F_3'}.$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

方法二，将 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 两边对 x 求偏导, 视 z 为 x,y 的函数，有

$$F_1'+F_2'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})+F_3'\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_3'-F_1'}{F_3'-F_2'}$，类似可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'-F_2'}{F_3'-F_2'}$，从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 由 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，方法一，代公式. 令 $F(x,y,z)=z+\mathrm{e}^z-xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{-y}{1+\mathrm{e}^z}=\frac{y}{1+\mathrm{e}^z}.$$

方法二，将 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 两边对 x 求导，将 z 看成 x,y 的函数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}=y,\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+\mathrm{e}^z}.$$

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$方法，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{1+\mathrm{e}^z}\right)=\dfrac{(1+\mathrm{e}^z)1-y(0+\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial y})}{(1+\mathrm{e}^z)^2}$.

为此，还要先计算出$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^z}$，代入上式，有$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^z}-\dfrac{xy\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$.

4. 设平面$2x+2y+cz-3=0$是曲面$z=\dfrac{1}{2}x^2+y^2$的切平面，求常数c的值.

解：已知平面的法向量为$\{2,2,c\}$, 曲面$z=\dfrac{1}{2}x^2+y^2$在其上点(x,y,z)的法向量为$\{-x,-2y,1\}$，两向量应平行, 故$c\neq 0$，且$\dfrac{-x}{2}=\dfrac{-2y}{2}=\dfrac{1}{c}$,得$x=-\dfrac{2}{c},y=-\dfrac{1}{c}$. 代入平面方程得

$$-\frac{4}{c}-\frac{2}{c}+cz-3=0，得 z=\frac{3}{c}+\frac{6}{c^2}.$$

又由$z=\dfrac{1}{2}x^2+y^2$，有$z=\dfrac{2}{c^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{3}{c^2}$，从而有$c=-1$.

5. 造一个长方形露天水池，容积一定为v，四侧面造价为a元/米^2，底面的造价为b 元/米^2，求长x、宽y、高z的值，使四侧面与底面造价之和为最小.

解：四侧面与底面造价之和 $S=2a(xz+yz)+bxy$, 约束条件为$xyz=v$和$x,y,z>0$，

命$F(x,y,z,\lambda)=2a(xz+yz)+bxy+\lambda(xyz-v)$，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2az+by+\lambda yz=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2az+bx+\lambda xz=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2a(x+y)+\lambda yx=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=xyz-v=0.$$

解得$x=y=-\dfrac{4a}{\lambda},z=-\dfrac{2b}{\lambda},\lambda=-\left(\dfrac{32a^2b}{v}\right)^{\frac{1}{3}}$. 最后可得$x=y=\left(\dfrac{2av}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$，$z=\left(\dfrac{b^2v}{4a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

6. 设D是由双曲线$x^2-y^2=1$及直线$y=0,y=1$所围成的平面区域，求$\displaystyle\iint_D yx^2\mathrm{d}\sigma$.

解：画出D（图略），先x后y

$$\iint_D x^2 y\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{+\sqrt{1+y^2}} x^2 y\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 y\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}y = \frac{2}{15}\left(4\sqrt{2}-1\right).$$

若先 y 后 x，则分三段，显然麻烦

$$\iint_D x^2 y\mathrm{d}\sigma = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x^2-1}}^{1} x^2 y\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_0^1 x^2 y\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x^2-1}}^{1} x^2 y\mathrm{d}y.$$

7. 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}x.$

解：先画出二重积分对应的积分区域 D，再交换积分次序为先 y 后 x：

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x\mathrm{e} - x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}}{2}x^2 - (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{8}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$$

8. 计算 $\iint_D \frac{1+y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$.

解：D 关于 y 轴对称，函数 $\frac{y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}$ 为 x 的奇函数，故 $\iint_D \frac{y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = 0.$

对于 $\iint_D \frac{1+y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 用极坐标，

$$\iint_D \frac{1+y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{1+r\sin\theta}{1+r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{r+r^2\sin\theta}{1+r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r + \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r^2\sin\theta}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2(1-\frac{\pi}{4}).$$

9. 设 Ω 是由曲线 $y^2=2z, x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与二平面 $z=2, z=8$ 所围的空间有界闭区域，计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+x+y)\mathrm{d}v$.

解：用柱面坐标，原式 $= \iiint_\Omega (r^2 + r\cos\theta + r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. 令平面域 $D_z = \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le 2z\right\}$，

则原式为 $\int_2^8 \mathrm{d}z \iint_{D_z} (r^3 + r^2\cos\theta + r^2\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$= \int_2^8 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2z}} (r^3 + r^2\cos\theta + r^2\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\int_{2}^{8}\frac{\pi}{2}(2z)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12}(2z)^3\Big|_2^8=336\pi.$$

10. 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]$的敛散性.

解：考察$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}$. 改为考察$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}.$

故$u_n=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})$与$\frac{1}{n^2}$为同阶无穷小. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]$收敛.

11. 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\tan\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\tan\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\tan\frac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\frac{\pi}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1.$由比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\tan\frac{\pi}{3^n}$收敛.

12. 设a为常数且$a\neq -1$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$是绝对收敛，条件收敛，还是发散？说明理由.

解：应讨论a的不同情形. 分$|a|<1,|a|=1,|a|>1$讨论之.

（1）$|a|<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$，通项不趋于 0，发散.

（2）$a=1$，通项为$\frac{1}{2}$，发散.

（3）$|a|>1$，方法一，用比值法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{1}{1+a^{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{1+a^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+a^n}{1+a^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^{-n}+1}{a^{-n}+a}\right|=\left|\dfrac{1}{a}\right|<1.$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$绝对收敛.

方法二，比较法的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{1}{1+a^n}\right|}{\left|\frac{1}{a^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^n}{1+a^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{a^{-n}+1}\right|=1.$

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a^n}\right|$收敛. 从而知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{1+a^n}\right|$收敛. 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$绝对收敛.

13. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(3^n+2^n)n}$ 是绝对收敛，条件收敛，还是发散？说明理由.

解：记 $u_n=\frac{3^n}{(3^n+2^n)n}=\frac{1}{\left[1+(2/3)^n\right]n}$.

记 $f(x)=(1+b^x)x$，其中 $b=\frac{2}{3}$，有 $f'(x)=(1+b^x)+xb^x\ln b=1+b^x(1+x\ln b)$.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}b^x(1+x\ln b)=0$，所以当 x 足够大之后，$f'(x)>0$.

所以 $\{u_n\}$ 当 n 足够大之后，单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 由莱布尼茨定理知，原级数收敛.

又：$u_n>\frac{1}{2n}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 故知原级数条件收敛.

14. 求 $y\mathrm{d}x-(x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=0$ 的通解，其中 $y>0$.

解：此为齐次微分方程，写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$，

命 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=yu$，有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，原方程化为 $y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\sqrt{u^2+1}$.

分离变量，积分，得 $\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln y+\ln c$.

去掉对数记号，得 $u+\sqrt{u^2+1}=cy$，化简得 $y=\frac{1}{c}\sqrt{1+2cx}$，$c>0$.

15. 求 $(5x^2y^3-2x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y$ 的通解.

解：视 x 为未知函数，化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2x}{y}=-5x^2y^2$.

此为以 x 为未知函数的伯努利方程：$\frac{\mathrm{d}x^{-1}}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}x^{-1}=5y^2$.

从而 $x^{-1}=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 5y^2\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right]=\frac{1}{y^2}\left[\int 5y^4\mathrm{d}y+c\right]=y^3+\frac{c}{y^2}$.

得通解 $x=\frac{y^2}{y^5+c}$.

16. 一容器在开始时盛有水 100 升，其中含净盐 10 公斤，然后以每分钟 3 升的速率注入清水，

同时又以每分钟 2 升的速率将冲淡的溶液放出. 容器中装有搅拌器使容器中的溶液保持均匀，求过程开始后 1 小时溶液的含盐量.

解：设在开始后 t 分钟容器内含盐 x 公斤，此时容器内溶液为$100+3t-2t$（升）. 因而，此时溶液的浓度为$\dfrac{x}{100+t}$公斤/升.

从 t 到$t+\mathrm{d}t$这段时间内，溶液中含盐量改变了$\mathrm{d}x(\mathrm{d}x<0)$，这些盐，以浓度$\dfrac{x}{100+t}$排去，即$\mathrm{d}x=-\dfrac{x}{100+t}\cdot 2\mathrm{d}t$，这是一个可分离变量的一阶微分方程，把它改写为$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{-2\mathrm{d}t}{100+t}$，两边积分得$\ln x=-2\ln(100+t)+\ln c$，故有$x=\dfrac{c}{(100+t)^2}$.

由题意知道初始条件是$x|_{t=0}=10$，将其代入上式，得$c=10^5$，因此得到 x 与 t 的函数关系式$x=\dfrac{10^5}{(100+t)^2}$.因此可知，在过程开始后一小时，亦即当$t=60$（分）时，容器内溶液的含盐量为$x|_{t=60}=\dfrac{10^5}{160^2}\approx 3.9$（千克）.