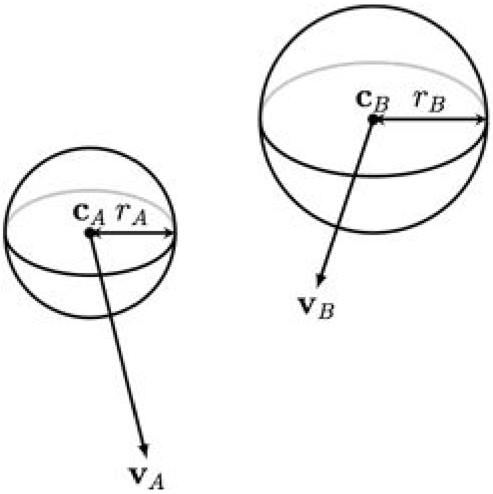
200180426 面试题 两个匀速移动球体的碰撞

原文链接：https://zhuanlan.zhihu.com/p/22614318?refer=milocode

为了不再重复问相同的面试题（怠惰！真是怠惰啊！），我决定公开一条我常用的面试题（游戏客户端 / 移动端开发职位）。

> 在三维空间，给定两个球体 A 和 B 的球心初始位置 $\mathbf{c}_A$ 和 $\mathbf{c}_B$，半径 r_A 和 r_B，匀速移动速度 $\mathbf{v}_A$ 和 $\mathbf{v}_B$，如何判断它们两者会否碰撞，如会碰撞求碰撞时间。



错误思路：

- 求两射线是否相交：在三维中两射线相交几乎是不可能发生的。
- 求两圆柱体是否相交：即使相交，还不能判断是否碰撞。

如果没有头绪，给第一个提示：

> 如果不考虑移动，怎样判断两个静态的球体是否相交？

这算是最基本的相交测试，通常都可以答出来。如果两球心的距离小于等于两半径之和，即两者相交：

第二个提示：

> 那么，可以把两个匀速移动的球心位置表示为时间 t 的函数么？

这是简单的运动学，速度乘以时间等于位移，再加上初始位置：

到这一步，多数同学能想到可以用这两个函数代入上面的方程。由于只需要考虑两个球刚触碰的时间，不需考虑不等式，只需考虑方程：

为简单起见，设

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B, \mathbf{c} = \mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B, r = r_A + r_B$$

：

到这一步，有些同学会用 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ 去展开，但理想地不需这样以分量去计算，而是以点积表示 $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$，并且知道点积在加法上的分配律：

同学应该看得出，这是关于 t 的一元二次方程 $at^2 + bt + c = 0$。

> 求解一元二次方程有多少种情况？每种情况表示什么碰撞情况？

前半是初中的数学知识，按判别式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

：

1. 如果 $\Delta > 0$，方程有两个根 t_1, t_2，设 $t_1 < t_2$；
2. 如果 $\Delta = 0$，方程有重根 t_1；
3. 如果 $\Delta < 0$，方程无实根。

后半的问题难倒了一些同学，主要是忘记了方程本来是表达什么。这个方程的意义，是求出某个时间点，当时两个球体刚好接触。那么三种情况对应的是：

1. 两个球体在时间 t_1 触碰，然后互相进入穿过（物理上不可能数学上可以），在时间 t_2 分离；
2. 两个球体在时间 t_1 擦身而过；
3. 两个球体不碰撞。

但两者是否碰撞还有一个约束

$$t \geq 0$$

，不应考虑逆向时间碰撞。所以我们还是需要求根，才能判断它们是否碰撞。

> 怎样解一元二次方程？写成程序有什么地方要注意？

不就是背公式么？

有同学看到**除数**都不敏感，除数是会出现 division by zero 错误的啊！

> $$a$$
> 在什么时候会为零？怎样处理？

在

的时候，一元二次方程就退化成一元一次方程

。不过在这个问题中，当

的时候，也表示

，所以

。最后原来的一元二次方退化成：

> 这是什么意思？若 $c = 0$ 代表什么？若 $c \neq 0$ 又代表什么？

从数学上说，若

代表方程有无穷解，

为任意值都满足方程；若

，代表方程无解，无论

为任何值都不能满足方程。

对于本问题来说，$a = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$ 即两个球体速度相同，那么它们是平行地往同一个方向匀速移动。而 $c = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} - r^2 = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\| = r_A + r_B$ 即两球球心初始位置的距离等于两球半径之和。换句话说，如果两球的速度相同，我们需要判断它们初始位置是否刚好接触，若是，它们永远碰撞不分离，若否，它们永远不碰撞。

前天，有一位同学想到，利用闵可夫斯基差的概念，这个问题可以转变为射线与球体相交问题（A 球体缩小至一点，B球体膨胀成半径 $r_A + r_B$；按相对速度，当 B 变为静上，A 的速度变为 $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$）。其实这也会得到相同的一元二次方程。不过按这个思路，也可以用上 RTR 中提到射线和球体相交测试的一些优化方法。

这个面试题的好处是有多个考查点，评估同学的数学基础能力，并可按同学的情况提供协助。缺点是时间比较长，前天面 12 位同学真是累死（还有问其他题目）。我还要想一些新题目，如想到有类似这种面试题，求私信提供。

（题图 Photo by Sebastian Pichler）

更新1（2016/9/26）

评论中很多人谈到相对速度、变换参考系等，我这里统一回应一下。

我们可以不考虑两球分别的速度，而仅考虑它们的相对速度。例如，假设球 B 是观察者，那么球 A 相对于球 B 的速度为：

我们也知道，两球的绝对位置是不重要的，我们只需要考虑它们的相对位移。以球 B 为原点的话，球 A 相对于球 B 的初始位置为：

然后，我们可以发现，这样和之前列出的方程是一模一样的：

此外，有人提出

> 在一个球静止的情况下，可用直线与原点的距离是否小于半径之和，来判定两者是否碰撞。

我们来试一下。首先，设直线为参数式 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c} + \mathbf{v}t$。设直线上最近原点的点为 $\mathbf{r}(t_0)$，原点过 $\mathbf{r}(t_0)$ 的直线与 $\mathbf{v}$ 垂直，因此它们的点积为零：

得出 t_0 后，$\mathbf{r}(t_0)$ 与原点的距离就是它的模，我们计算其模的平方：

然后我们检查它是否小于半径和的平方：

这个不等式是不是有点眼熟？我们之前没展开判别式

$$\Delta$$

：

我们发现，刚才计算直线$\mathbf{r}(t)$与原点的距离是否小于半径和的不等式，等价于检测 $\Delta \geq 0$。这不是巧合，事实上这两个问题是等价的。如果有同学想到直线距离的判断，也是正确的，不过之后也是要求直线和原点距离刚好等于半径和时候的 t，结果也要做相同的计算。