



第十九届“快手杯”北京航空航天大学程序设计竞赛

预赛

2024 年 12 月 5 日 — 9 日

题目概况

题号	题目名	时间限制	空间限制
A	BCPC 2024	1 s	2 GB
B	一句话题面	1 s	2 GB
C	I Am the Captain of USTA	1 s	2 GB
D	这个题简单，先做这个！	1 s	2 GB
E	游戏高手	1 s	2 GB
F	模四识别	1 s	2 GB
G	两句话题面	1 s	2 GB
H	Good Digits	1 s	2 GB
I	晶体化	1.5 s	2 GB
J	叶的距离	1.5 s	2 GB
K	似花还似非花	1.5 s	2 GB
L	基于 λ 演算的关于 p -进范数下 动力系统稳定性的探究与应用	1 s	2 GB
M	Oops	1 s	2 GB
N	Lament Rain	1.5 s	2 GB
O	Toxel 与 Toxtricity	2 s	2 GB

A BCPC 2024

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

校赛题在哪里? 原来在 A 题题面。

—— sd0061

给定正整数 x , 试求正整数 y 使得 $x \times y$ 除以 2024 得到的余数最大。如果有多个 y 满足条件, 则输出其中最小的。

输入格式

一行, 一个正整数 x ($0 < x < 2024$)。

输出格式

一行, 一个正整数 y , 表示满足条件的最小的正整数。

样例

标准输入	标准输出
1	2023
2	1011
6	337

B 一句话题面

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

注册了。

—— sd0061

给定 x, y , 求 $\max_{x < z < y} (\gcd(x, z) + \gcd(z, y))$ 。

输入格式

本题包含多组数据。

第一行包含一个整数 T ($1 \leq T \leq 10$), 表示数据组数。

对于每组数据:

一行, 两个整数 x, y ($1 \leq x < y \leq 10^6$, $y - x \geq 2$)。

保证所有数据的 y 之和不超过 10^6 。

输出格式

对于每组数据:

输出一行, 一个正整数, 表示答案, 即 $\max_{x < z < y} (\gcd(x, z) + \gcd(z, y))$ 。

样例

标准输入	标准输出
2	5
3 8	16
5 77	

提示

对于样例中的第一组数据, 有:

- $\gcd(3, 4) + \gcd(4, 8) = 5$
- $\gcd(3, 5) + \gcd(5, 8) = 2$
- $\gcd(3, 6) + \gcd(6, 8) = 5$
- $\gcd(3, 7) + \gcd(7, 8) = 2$

因此最大值为 5。

C I Am the Captain of USTA

时间限制： 1 秒 输入文件： 标准输入
空间限制： 2 GB 输出文件： 标准输出

这题搞一下就行了。

—— sd0061

给定 n 个人的网球水平 UTR (UTR 是一个至多 2 位小数的实数, 满足 $0 \leq UTR \leq 14$) 以及性别 (0 为男, 1 为女)。你需要选出 4 支队伍, 每支队伍 2 个人, 参加 4 条线的双打比赛, 要求:

- 派出的 8 个人当中至少有 2 个女生;
- 4 条线各有一个 cap, 分别要求参赛选手的 UTR 不超过 12、10.5、9、8;
- 每条线派出的两个人 UTR 之差不超过 4。

问满足条件的所有参赛方案中, 所有参赛选手的 UTR 跟其参赛线 cap 之差的和最小是多少。如果不存在满足要求的参赛方案, 输出 -1 。

输入格式

- 第一行一个正整数 n ($8 \leq n \leq 30$)。
- 第二行 n 个实数, 代表 n 个人的 UTR ($0 \leq UTR \leq 14$)。
- 第三行 n 个整数, 每个数均为 0 或 1, 代表 n 个人的性别 (0 为男, 1 为女)。

输出格式

- 如果不存在满足要求的参赛方案, 输出 -1 。
- 否则输出一行一个实数, 代表所求答案, 保留两位小数。

样例

标准输入	标准输出
9 3.32 0.46 12.91 3.05 2.64 9.03 7.70 6.78 2.95 0 0 0 1 0 0 0 0 1	43.07

D 这个题简单，先做这个！

时间限制： 1 秒 输入文件： 标准输入
空间限制： 2 GB 输出文件： 标准输出

战神！

—— sd0061

你有一个正整数 n 。

构造一个长度为 n 的排列 p ，使得 $\sum_{i=1}^{n-1} \gcd(a_i + 1, a_{i+1})$ 的值最小。

一个长度为 n 的排列是由 n 个从 1 到 n 组成的互不相同的整数数组，顺序可以任意。例如， $[2, 3, 1, 5, 4]$ 是一个排列，但 $[1, 2, 2]$ 不是一个排列（2 在数组中出现了两次），而 $[1, 3, 4]$ 也不是排列（ $n = 3$ 但数组中有 4）。

输入格式

本题包含多组数据。

第一行包含一个整数 T （ $1 \leq T \leq 1000$ ），表示数据组数。

对于每组数据：

第一行包含一个整数 n （ $2 \leq n \leq 10^5$ ），表示排列 p 的大小。

保证 $\sum n$ 不超过 10^5 。

输出格式

对于每组数据：

输出一行包含 n 个整数 p_1, p_2, \dots, p_n ，其中 p 是一个长度为 n 的排列，使得 $\sum_{i=1}^{n-1} \gcd(a_{i+1}, a_i + 1)$ 最小化。

如果有多个解，你可以输出其中任意一个。

样例

标准输入	标准输出
2	2 1
2	2 1 3
3	

提示

在第一组数据中， $\sum_{i=1}^{n-1} \gcd(a_i + 1, a_{i+1}) = \gcd(a_1 + 1, a_2) = \gcd(3, 1) = 1$ ，这是最小化的结果。

在第二组数据中， $\sum_{i=1}^{n-1} \gcd(a_i + 1, a_{i+1}) = \gcd(a_1 + 1, a_2) + \gcd(a_2 + 1, a_3) = \gcd(3, 1) + \gcd(2, 3) = 2$ ，这是最小化的结果。

E 游戏高手

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

有机会的!

—— sd0061

小团子最近在玩大热的国产 3A 游戏《黑神话：广智》。在这款游戏中，小团子扮演一名叫广智的和尚，迎击不断变成金蝉飞过来扰你清静的天命人。广智这名角色有多个技能，每个技能可通过一个小写英文字母来代表。小团子可以通过一次性连续放出多个技能来对天命人造成更高的伤害。在这多个技能里，不同的技能数量越多，造成的伤害越高。但连续释放的技能越多，也会导致造成的伤害越低。

具体来说，一段连招对天命人造成的伤害，是连招中不同技能数量的平方除以连招的技能长度。例如连招 `abca` 造成的伤害就是 $\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$ ，连招 `ssss` 造成的伤害就是 $\frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}$ 。

现在小团子手里有一段操作序列，他希望从中截取一段连续的操作作为连招，可以对天命人造成的伤害最大。

输入格式

输入共一行，一个仅由小写英文字母构成的字符串 S ($1 \leq |S| \leq 10^5$)，表示一段操作序列。

输出格式

输出一行，两个互质的正整数 a 和 b ，表示最大伤害为 $\frac{a}{b}$ 。

样例

标准输入	标准输出
abca	3 1

提示

在样例中，能造成最大伤害的操作段为 `abc` 或 `bca`。

F 模四识别

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

事在人为。

—— sd0061

对于数列 a , 定义函数

$$f(a) = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \dots, |a|\} \\ T \neq \emptyset}} \prod_{i \in T} a_i$$

其中 $|a|$ 表示数列 a 的长度。例如, 对于 $a = [1, 2]$ 有 $f(a) = 1 + 2 + 1 \times 2 = 5$ 。

定义一个数列 a 能被**模四识别**, 当且仅当 $f(a) \bmod 4 = 0$, 也即 $f(a)$ 是 4 的倍数。

给出一个长度为 n 的数列 $\{a_n\}$, 请问数列 a 有多少个非空子序列能被模四识别? 由于答案可能很大, 你只需要输出答案对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

称 a' 是 a 的子序列, 当且仅当在 a 中删除任意多个元素之后 (也可以不删除) 可以得到 a' 。

输入格式

第一行, 一个正整数 n ($1 \leq n \leq 2 \times 10^5$), 表示数列长度。

第二行, n 个整数 a_1, a_2, \dots, a_n ($0 \leq a_i \leq 3$)。

输出格式

输出一行, 一个整数, 表示答案对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

样例

标准输入	标准输出
4 2 0 0 2	7
24 0 0 2 1 3 1 2 1 1 0 2 3 2 2 1 0 0 0 1 1 1 2 3 1	2047

提示

对于样例一, 我们可以选择 $\{0_1\}, \{0_2\}, \{0_1, 0_2\}, \{2_1, 2_2\}, \{2_1, 0_1, 2_2\}, \{2_1, 0_2, 2_2\}, \{2_1, 0_1, 0_2, 2_2\}$ 这 7 种子序列。

G 两句话题面

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

太强了!

—— sd0061

建议先做“一句话题面”。

给定 x, y , 求 $\max_{x < z < y} (\gcd(x, z) + \gcd(z, y))$ 。

输入格式

本题包含多组数据。

第一行包含一个整数 T ($1 \leq T \leq 10$), 表示数据组数。

对于每组数据:

一行, 两个整数 x, y ($1 \leq x < y \leq 10^9, y - x \geq 2$)。

保证所有数据的 y 之和不超过 10^9 。

输出格式

对于每组数据:

输出一行, 一个正整数, 表示答案, 即 $\max_{x < z < y} (\gcd(x, z) + \gcd(z, y))$ 。

样例

标准输入	标准输出
3	5
3 8	16
5 77	959906
114514 1919810	

提示

对于样例中的第一组数据, 有:

- $\gcd(3, 4) + \gcd(4, 8) = 5$
- $\gcd(3, 5) + \gcd(5, 8) = 2$
- $\gcd(3, 6) + \gcd(6, 8) = 5$
- $\gcd(3, 7) + \gcd(7, 8) = 2$

因此最大值为 5。

H Good Digits

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

就这么搞一下!

—— sd0061

对于一个正整数 n , 令 $r_{n,i} = n \bmod i$ ($2 \leq i \leq 9$)。

我们称一个正整数 n 是好的, 当且仅当从 $r_{n,2}, r_{n,3}, \dots, r_{n,9}$ 中选出一些数字, 作为数位能恰好排列出 n , 且对每个 i ($2 \leq i \leq 9$), $r_{n,i}$ 至多只能被选一次。

也就是说, 一个好的 k 位正整数 n 可以写作 $\overline{r_{n,m_1} \dots r_{n,m_k}}$, 正整数 m_i 满足 $2 \leq m_i \leq 9$, 且对 $i \neq j$ 有 $m_i \neq m_j$ 。

给出正整数 l, r , 问 $[l, r]$ 中有多少个好整数。

输入格式

一行两个正整数 l, r ($1 \leq l \leq r \leq 10^9$)。

输出格式

一行一个整数, 表示 $[l, r]$ 中好整数的个数。

样例

标准输入	标准输出
1 100	30
1 1000	89

I 晶体化

时间限制: 1.5 秒

输入文件: 标准输入

空间限制: 2 GB

输出文件: 标准输出

[可怜]

—— sd0061

在人迹罕至的自然洞穴深处, 游离在环境中不可见的魔力在某些特定条件下会聚合为实体而产生魔晶。魔晶是重要的魔法资源, 其本身也有很高的研究价值。

你是一个冒险家, 在旅途中调研各种洞穴里的魔晶是你的一大乐趣。现在你身在一处洞穴深处, 洞穴被抽象为一个直角坐标系: x 轴代表洞穴的地面; x 轴上方 $\{|x| \leq 10^9, 0 < y \leq 10^9\}$ 的区域代表洞穴内的空间。洞穴的地面上有 n 个魔晶根, 由 x 轴上的 n 条线段表示; 洞穴的空间内有 m 个悬浮的魔力凝结核, 由洞穴区域内不同的 m 个点表示。

一个魔晶根和一个魔力凝结核可以匹配, 并生长出一个以魔晶根为底边、以凝结核为上顶点的三角形魔晶。根据你以往的观察, 魔晶在生长过程中如果接触到其他凝结核, 其生长会受到严重影响, 因此魔晶三角形的内部和边界上都不能有其他凝结核; 但其他魔晶根对魔晶生长的影响很小, 因此魔晶的生长不受其他魔晶根的影响。

目前, 洞穴中还没生长出任何魔晶。你想知道, 如果接下来洞穴中会生长出一个魔晶, 其面积的最大值 S_{\max} 是多少?

输入格式

第一行包含两个整数 n, m ($1 \leq n \leq 2222, 1 \leq m \leq 2222$)。

接下来 n 行, 每行包含两个整数 l, r ($-10^9 \leq l < r \leq 10^9$), 表示一个魔晶根位于连接 $(l, 0)$ 和 $(r, 0)$ 的线段处。

接下来 m 行, 每行包含两个整数 x, y ($-10^9 \leq x \leq 10^9, 0 < y \leq 10^9$), 表示一个魔力凝结核的坐标是 (x, y) 。

不同的魔晶根可能相互重叠, 但保证魔力凝结核的位置两两不同。

输出格式

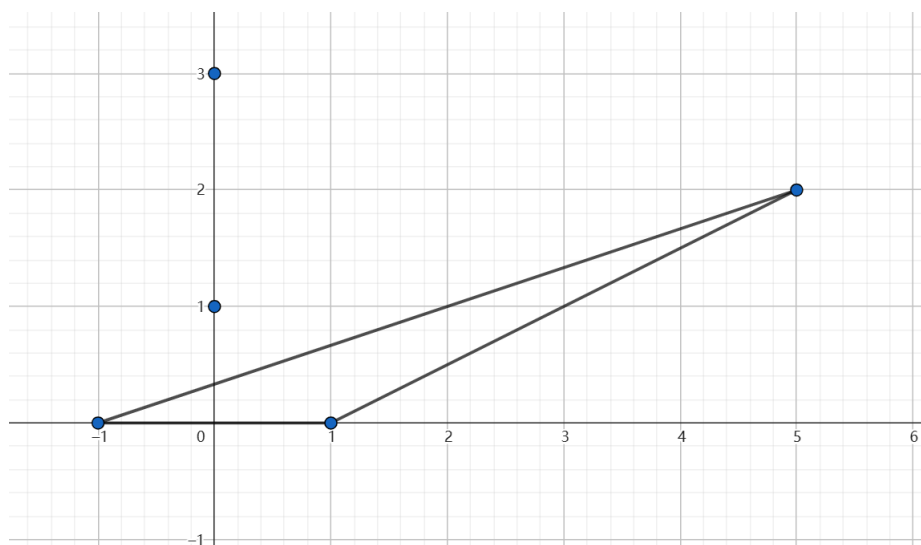
输出一行一个整数, 表示 $2S_{\max}$ 。根据输入限制可知其一定是一个整数。

样例

标准输入	标准输出
1 3 -1 1 0 1 0 3 5 2	4

提示

样例中，唯一的魔晶根与第三个凝结核匹配产生魔晶。魔晶根无法与第二个凝结核匹配，因为这样第一个凝结核会落在生成的魔晶内部，干扰魔晶的生长。



J 叶的距离

时间限制： 1.5 秒 输入文件： 标准输入
空间限制： 2 GB 输出文件： 标准输出

今天训练了吗？
—— sd0061

给定一棵有 n 个点的树，点的编号为 $1, 2, \dots, n$ ，其中 1 号点为根。请对于每个点 $u = 1, 2, \dots, n$ ，选择任意一个节点 x_u 使得 $S_u = \sum_{y \in L(u)} d(x_u, y)^2$ 最小，并输出 S_u 的值。其中 $L(u)$ 表示以 u 为根的子树中的叶子节点的集合， $d(x, y)$ 表示 x, y 之间的树上距离，即 x, y 之间简单路径所包含的边数。

输入格式

第一行，一个整数 n ($2 \leq n \leq 10^6$)。
第二行， $n - 1$ 个整数 f_2, f_3, \dots, f_n ($1 \leq f_i \leq n$)，其中 f_i 表示节点 i 的父节点编号。

输出格式

输出一行 n 个整数，第 i 个整数表示 $u = i$ 时的答案。

样例

标准输入	标准输出
6 1 1 1 3 1	7 0 0 0 0 0
10 1 2 2 4 5 5 6 8 7	22 22 0 13 13 0 0 0 0 0

K 似花还似非花

时间限制: 1.5 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

也无人惜从教坠。

——苏轼

给定一棵 n 个结点的树，结点依次以 $1, 2, \dots, n$ 标号，其中结点 i 有权值 a_i 。

对于树上的两个点 u, v ，定义 u, v 之间的路径 $p(u, v)$ 为一系列顶点 $u = p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_k = v$ ，对于 $1 \leq i < k$ 要求结点 p_i 与 p_{i+1} 之间有边相连，并且对于任意 $1 \leq i < j \leq k$ 有 $p_i \neq p_j$ 。定义 u, v 之间的距离 $d(u, v)$ 为 $p(u, v)$ 中边的数量。

对于每个结点 u ，求树上与 u 相异的一点 v 使得 $\bigoplus_{x \in p(u, v)} a_x = 0$ ，其中 \oplus 表示异或运算。若有多个结点满足条件，取其中距离 u 最小的结点。若有多个距离相同的结点满足条件，取其中编号最小的结点。若不存在满足条件的结点，则认为结点编号为 0。

输入格式

第一行，一个正整数 n ($1 \leq n \leq 2 \times 10^5$)，表示结点数量。

第二行， n 个整数 a_1, a_2, \dots, a_n ($0 \leq a_i < 2^{20}$)，表示结点的权值。

接下来 $n - 1$ 行，每行两个正整数 u_i, v_i ($1 \leq u_i, v_i \leq n, u_i \neq v_i$)，表示树上的一条边。

输出格式

输出一行， n 个整数，分别表示对于结点 $1, 2, \dots, n$ 求出的满足条件的结点编号。

样例

标准输入	标准输出
7 1 0 4 8 5 7 6 1 2 1 3 2 5 4 3 4 7 6 4	0 0 5 0 3 0 0

L 基于 λ 演算的关于 p -进范数下动力系统稳定性的探究与应用

时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

恭喜! 以下论文已被本刊接收。

——《折纸大学学报(人文社科版)》编辑部

给定正整数 x, y 。你每次可以对 x 执行以下二者操作之一:

- $x \leftarrow x \times 2$
- $x \leftarrow x + 1$

请你求出将 x 变为 y 的不同操作序列的数量。由于答案可能很大, 你只需要求出其对 998 244 353 取模的结果。

输入格式

一行, 两个正整数 x, y ($1 \leq x, y \leq 10^{18}$)。

输出格式

一行, 一个整数, 表示将 x 变为 y 的不同操作序列的数量对 998 244 353 取模的结果。

样例

标准输入	标准输出
3 9	3

提示

对于样例, 将 3 变为 9 有以下三种不同的操作序列:

- $3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9$
- $3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{+1} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{+1} 9$
- $3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{+1} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{+1} 9$



时间限制: 1 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

明天宝日?
—— sd0061

Toxel 非常喜欢说 `oops`, 来表达他惊讶的心情。有时他还会将 `o` 重复更多次, 以表达不同的惊讶程度。

某天, Toxel 发现他的一段聊天记录被神秘力量混杂在了一起, 成为了一个由小写字母组成的字符串 s 。现在他只知道他发的每一条消息都是该字符串 s 中的一个子序列。现给出不同长度的 `o...ops` 串所表达的惊讶值, Toxel 希望从 s 中找到若干个 `o...ops` 子序列, 使得它们的惊讶值之和最大。

注意: `o...ops` 中至少要有两个 `o`, 且每个字符至多出现在一个子序列中。

输入格式

- 第一行, 一个正整数 n ($4 \leq n \leq 10^4$), 表示字符串 s 的长度。
- 第二行, 一个长度为 n 的仅包含小写英文字母的字符串 s 。
- 第三行, $n-3$ 个正整数 w_4, \dots, w_n ($1 \leq w_i \leq 10^9$), 依次表示 `o...ops` 长度为 $4, \dots, n$ 时的惊讶值。

输出格式

一行, 一个正整数表示最大的惊讶值之和。

样例

标准输入	标准输出
8 ooooppss 1 1 2 2 2	2
4 oops 10	10
18 ooooooooopoooooposo 1 1 1 2 2 2 3 1 2 3 3 1 4 4 3	4

提示

对于第一个样例, 可以将字符串分成 ooooppss, 其中 ooo 和 ppss 的分别是一条消息 (子序列)。长度为 4 的 `oops` 惊讶值是 1, 因此惊讶值之和是 2。

N Lament Rain

时间限制: 1.5 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

飞龙一般的。

——小伙子

Lacrimira 将在 $[1, n] \cap \mathbb{Z}$ 中等概率挑选一个整数 p 。
Nel 将在 $[1, m] \cap \mathbb{Z}$ 中等概率挑选一个整数 q 。
给出正整数 k , 请你计算 p/q 在 k -进制下是无限小数的概率。
你只需要输出这个概率对 998 244 353 取模的结果。

输入格式

一行, 三个正整数 n, m, k ($1 \leq n \leq 10^{12}$, $1 \leq m \leq 10^{12}$, $2 \leq k \leq 10^{12}$), 含义见上。
保证 998 244 353 不是 n 或 m 的因子。

输出格式

一行, 一个整数, 表示所求概率对 998 244 353 取模的结果。

样例

标准输入	标准输出
616 616 616	774156575
999999999998 999999999999 1000000000000	305530170

Toxel 与 Toxtricity

时间限制: 2 秒 输入文件: 标准输入
空间限制: 2 GB 输出文件: 标准输出

终究会有那么一年出不了线。
—— sd0061

Toxel 和 Toxtricity 为它们的好朋友 JHDONGHJ 准备了一道有趣的题目:

令 $p = 998\,244\,353$ 。设有形式幂级数 $f(x), g(x) \in F_p[[x]]$ (可以理解成模 p 意义下的多项式) 满足 $\sum_{i=0}^t c_i f(x+i) = g(x)$ 。你需要求出 $f(x)$ 。为了使得答案唯一, 保证 $(\sum_{i=0}^t c_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$ 。

但是 JHDONGHJ 最近正忙于参加 XCPC 区域赛, 暂时没时间做这道题, 因此他把这道题交给了你。

输入格式

- 第一行包含一个整数 t ($0 \leq t \leq 10^5$)。
- 第二行包含 $t+1$ 个整数 c_0, c_1, \dots, c_t ($0 \leq c_i < p$)。保证 $(\sum_{i=0}^t c_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$ 。
- 第三行包含一个整数 n ($0 \leq n \leq 10^5$), 表示 g 的度数。
- 第四行包含 $n+1$ 个整数 g_0, g_1, \dots, g_n ($0 \leq g_i < p$), 其中 g_i 表示 $g(x)$ i 次项的系数。保证 $g_n \neq 0$ 。

输出格式

可以证明 $f(x)$ 一定也是一个 n 次多项式, 答案唯一且一定存在。输出一行 $n+1$ 个整数, 第 i 个整数表示 $[x^{i-1}]f(x)$ 。

样例

标准输入	标准输出
1 1 1 2 1 2 2	0 0 1
3 1 2 3 4 3 134 150 60 10	0 0 0 1
5 102 99 100 53 56 56 5 101 52 55 53 98 100	46053845 63112959 546668433 740037445 280190229 274195874

提示

对于第一个样例, 有 $x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$, 故有 $f(x) = x^2$ 。

对于第二个样例, 有 $x^3 + 2(x+1)^3 + 3(x+2)^3 + 4(x+3)^3 = 10x^3 + 60x^2 + 150x + 134$, 故有 $f(x) = x^3$ 。