梯形方法

局部截断误差的推导：

我们知道梯形公式为：

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx \frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\bullet[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

可得梯形公式为： $y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\bullet[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

局部截断误差的计算：

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y^*_{n+1}$$

其中

$$y^*_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}[\frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}f(x_n,y(x_n))+\frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]dx$$

所以

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y^*_{n+1}$$

$$=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx-y(x_n)-\int_{x_n}^{x_{n+1}}[\frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}f(x_n,y(x_n))+\frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]dx$$

$$=\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left\{f(x,y(x))-[\frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}f(x_n,y(x_n))+\frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]\right\}dx$$

$$=\int_{x_n}^{x_{n+1}}[f(x,y(x))-P_1(x)]dx$$

其中 $P_1(x)$ 是 $f(x,y)$ 的二点插值多项式，由 Lagrange 插值余项可知

$$f(x,y)-p_1(x)=\frac{1}{2!}f^{(2)}(x+\zeta\bullet h)\bullet(x-x_n)\bullet(x-x_{n+1})$$

其中 $0<\zeta<1, f^{(2)}(x_n+\zeta\bullet h)=y^{(3)}(x_n+3\bullet h)$ 。在 (x_n,x_{n+1}) 上，显然有 $(x-x_n)\bullet(x-x_{n+1})<0$ 成立。

由中值定理：

$$R_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{1}{2!}f^{(2)}(x+\zeta\bullet h)\bullet(x-x_n)\bullet(x-x_{n+1})dx$$

$$=\frac{1}{2!}f^{(2)}(x+\zeta\bullet h)\bullet\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)\bullet(x-x_{n+1})dx$$

$$=-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(x+\zeta\bullet h)=-\frac{h^3}{12}y^3(x+\zeta\bullet h)$$

$$=-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(x+\zeta\bullet h)=-\frac{h^3}{12}y^{(3)}(x+\zeta\bullet h)$$

局部截断误差阶为 $O(h^3)$，记 $R_n^{(1)}$ 为梯形公式的局部截断误差，$R^{(1)}$ 为 $R_n^{(1)}$ 的上确界，则有 $R^{(1)}\le\frac{h^3}{12}M_3$

其中，$M_3=\max\limits_{x_0\le x\le X}|y'''(x)|$

整体截断误差的推导：

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}^*$$

$$y_{n+1}^*=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]+R_{n+1}$$

可以推出：

$$\varepsilon_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]+R_{n+1}$$

$$-y_n-\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$$=\varepsilon_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n)-f(x_n,y_n)]+\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y(x_{n+1}))-f(x_{n+1},y_{n+1})]+R_{n+1}$$

两边取绝对值，如果 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，则：

$$|f(x,\bar{y})-f(x,\tilde{y})|\le L\bullet|\bar{y}-\tilde{y}|$$

L 是 Lipschitz 常数

$$|\varepsilon_{n+1}|\le|\varepsilon_n|+|\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n)-f(x_n,y_n)]|+|\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y(x_{n+1}))-f(x_{n+1},y_{n+1})]|+|R_{n+1}|$$

$$\le|\varepsilon_n|+\frac{h}{2}\bullet L\bullet|\varepsilon_n|+\frac{h}{2}\bullet|\varepsilon_{n+1}|+|R_{n+1}|$$

当 hL<1 时，

$$(1-\frac{h}{2}\bullet L)\bullet|\varepsilon_{n+1}|\le|\varepsilon_n|+\frac{h}{2}\bullet L\bullet|\varepsilon_n|+|R_{n+1}|$$

$$|\varepsilon_{n+1}|\le(2+hL)\bullet|\varepsilon_n|+2\bullet|R_{n+1}|$$

设 $2\bullet|R_{n+1}|\leq R$

R 为局部截断误差的上界
开始递推：

$$
\begin{aligned}
&|\varepsilon_n|\leq(2+hL)\bullet|\varepsilon_{n-1}|+R\\
&\leq(2+hL)\bullet[(2+hL)\bullet|\varepsilon_{n-2}|+R]+R\\
&\leq(2+hL)^2\bullet|\varepsilon_{n-2}|+(2+hL)\bullet R+R\\
&\ldots\ldots\\
&\leq(2+hL)^n\bullet|\varepsilon_0|+[(2+hL)^{n-1}+(2+hL)^{n-2}+\ldots+(2+hL)+1]\bullet R\\
&\leq(2+hL)^n\bullet|\varepsilon_0|+\frac{(2+hL)^n-1}{hL+1}\\
&\leq e^{2nhL}\bullet|\varepsilon_0|+\frac{e^{2nhL}}{hL}\\
&\leq e^{2(x-x0)L}\bullet|\varepsilon_0|+\frac{e^{2(x-x0)L}}{hL}
\end{aligned}
$$

如果 $y_0=y(x_0)$，即 $\varepsilon_0=0$，由此有

$$|\varepsilon_n|\leq\frac{e^{2(x-x0)L}}{hL}$$

即 $|\varepsilon_n|=O(h^2)$

推导完毕！