动态规划

维基百科，自由的百科全书

动态规划（英語：Dynamic programming，简称DP）是一种在数学、管理科学、计算机科学、经济学和生物信息学中使用的，通过把原问题分解为相对简单的子问题的方式求解复杂问题的方法。

动态规划常常适用于有重叠子问题[1]和最优子结构性质的问题，动态规划方法所耗时间往往远少于朴素解法。

动态规划背后的基本思想非常简单。大致上，若要解一个给定问题，我们需要解其不同部分（即子问题），再根据子问题的解以得出原问题的解。

通常许多子问题非常相似，为此动态规划法试图仅仅解决每个子问题一次，从而减少计算量：一旦某个给定子问题的解已经算出，则将其记忆化存储，以便下次需要同一个子问题解之时直接查表。这种做法在重复子问题的数目关于输入的规模呈指数增長时特别有用。

目录

概述

动态规划在查找有很多**重叠子问题**的情况的最优解时有效。它将问题重新组合成子问题。为了避免多次解决这些子问题，它们的结果都逐

动态规划只能应用于有**最优子结构**的问题。最优子结构的意思是局部最优解能决定全局最优解（对有些问题这个要求并不能完全满足，故有时需要引入一定的近似）。简单地说，问题能够分解成子问题来解决。

适用情况

1. 最优子结构性质。如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，我们就称该问题具有最优子结构性质（即满足最优化原理）。最优子结构性质为动态規劃算法解决问题提供了重要线索。
2. 无后效性。即子问题的解一旦确定，就不再改变，不受在这之后、包含它的更大的问题的求解决策影响。
3. 子问题重叠性质。子问题重叠性质是指在用递归算法自顶向下对问题进行求解时，每次产生的子问题并不总是新问题，有些子问题会被重复计算多次。动态規劃算法正是利用了这种子问题的重叠性质，对每一个子问题只计算一次，然后将其计算结果保存在一个表格中，当再次需要计算已经计算过的子问题时，只是在表格中简单地查看一下结果，从而获得较高的效率，降低了时间复杂度。

实例

切割钢条问题,Floyd最短路问题,最大不下降子序列,矩阵链乘,凸多边形三角剖分,0-1背包,最长公共子序列,最优二分搜索树

背包问题

背包问题作为NP完全问题，暂时不存在多项式时间算法。动态规划属于背包问题求解最优解的可行方法之一。此外，求解背包问题最优解还有搜索法等，近似解还有贪心法等，分数背包问题有最优贪心解等。 背包问题具有最优子结构和重叠子问题。动态规划一般用于求解背包问题中的整数背包问题（即每种物品所选的个数必须是整数）。 解整数背包问题： 设有n件物品，每件价值记为P_i，每件体积记为V_i，用一个最大容积为$V_{\max}$的背包，求装入物品的最大价值。 用一个数组$f[i,v]$表示取i件商品填充一个容积为v的背包的最大价值，显然问题的解就是$f[n,V_{\max}]$。

$$f[i,v]=\begin{cases} f[i-1,v], v<V_i \\ \max\{f[i-1,v], f[i-1,v-V_i]+P_i\}, v\geq V_i \\ 0, iv=0 \end{cases}$$

对于特例0 1背包问题（即每件物品最多放1件，否则不放入）的问题，状态转移方程：

$$f[i,v]=\begin{cases} f[i-1,v], v<V_i \\ \max\{f[i-1,v], f[i-1,v-V_i]+P_i\}, v\geq V_i \end{cases}$$

```
for i:=1 to n do
  for v:=totv downto v[i] do
    f[v]:=max(f[v],f[v-v[i]]+p[i]);
writeln(f[totv]);
```

参考C++代码（不含include和数组声明）

```
#define max(x,y) (x)>(y)?(x):(y) //max宏函数，也可以自己寫或者使用algorithm
for(int i=1;i<=n;i++)
  for (v=totv;v>=v[i];v--)
    f[v]=max(f[v],f[v-v[i]]+p[i]);
printf("%d",f[totv]); //或std:cout<<f[totv];
```

使用动态规划的算法

- 最长公共子序列
- Floyd-Warshall算法
- Viterbi算法
- 求解馬可夫決策過程下最佳策略[2]

参考

1. S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, and U.V. Vazirani, '**Algorithms**', p 173, available at http://www.cs.berkeley.edu/~vazirani/algorithms.html
2. Richard S. Sutton; Andrew G. Barto. Reinforcement Learning: An Introduction Second Edition. The MIT Press. 2018: 73.

外部链接

维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。