深蓝学院

shenlanxueyuan.com

# 频率波束响应、GSC最优问题求解以及阵列增益计算

主讲人 王亮亮

# 纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：作业题目
- 第二部分：批阅原则
- 第三部分：算法实现
- 第四部分：作业问题

# 作业题目

1、考虑均匀线性阵列，阵元个数 $N=11$，采用均匀加权方式，$w_i=1/N, i=0,\ldots,N-1$，阵元间距 $d=0.05m$，声速 $c=340m/s$，频率 $f_c=1700Hz$，主波束方向为$\theta=90°$。【60 分】

(1) 使用 matlab 绘制频率-波束响应$B_\theta(\theta)$的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(2) 将主波束调向至$\theta=120°$，绘制频率-波束响应$B_\theta(\theta)$的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(3) 将主波束调向至$\theta=180°$，绘制频率-波束响应$B_\theta(\theta)$的图像（直角坐标系和极坐标系），总结出你所观察到的现象。

(4) 主波束仍为$\theta=90°$，且在$\theta=155°$处形成一个零点，绘制频率-波束响应$B_\theta(\theta)$的图像（直角坐标系和极坐标系）。

(5) 附加题【选做】：分别调节$N$、$d$、$f_c$、以及权重向量w使用不同的加权方式，观察波束方向图的特点。

# 作业题目

2、求解 GSC 最优化问题中$\mathbf{w}_a$的闭式解表达式：【20 分】

$$\min\left(\mathbf{w}_q-\mathbf{B}\mathbf{w}_a\right)^H\mathbf{R}_{xx}\left(\mathbf{w}_q-\mathbf{B}\mathbf{w}_a\right)$$

3、假设我们利用 $N$ 个阵元得到了 $N$ 路观测信号$y_i(t), i=0,1,\dots,N-1$，每一路信号中具有一个相同的信号分量$s(t)$和一个随机噪声分量$n_i(t)$。噪声分量具有零均值，且相互统计独立。信噪比定义为信号分量的能量与噪声分量的方差之比。

请比较，对 $N$ 路观测信号做算术平均以后得到的信噪比，和单个阵元的信噪比之间的关系。【20 分】

# 纲要

- 第一部分：作业题目
- 第二部分：批阅原则
- 第三部分：算法实现
- 第四部分：作业问题

# 批阅原则

✓**第一题：**波束方向图结果正确且Matlab代码正确—4*15=60分.波束方向图结果与Matlab代码都不正确—4*7=28分.附加题有做+(5-10)分

✓**第二题：**有推导过程+10分，结果正确+10分

✓**第三题：**有推导过程+10分，结果正确+10分

# 纲要

- 第一部分：作业题目
- 第二部分：批阅原则
- 第三部分：算法实现
- 第四部分：作业问题

# 算法实现-频率波束响应

$$\mathbf{v_k}(k_z) = \left[e^{-j\left(0-\frac{N-1}{2}\right)k_z d} \quad e^{-j\left(1-\frac{N-1}{2}\right)k_z d} \quad \dots \quad e^{-j\left(N-1-\frac{N-1}{2}\right)k_z d}\right]^T$$

$$k_z = -\frac{2\pi}{\lambda} cos\theta$$

$$\Upsilon(\omega, k_z) = \mathbf{w}^H \mathbf{v_k}(k_z) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* e^{-j\left(i-\frac{N-1}{2}\right)k_z d}$$

# 算法实现-频率波束响应

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\mathbf{x}(n,\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(n-\tau_0) \\ x(n-\tau_1) \\ \vdots \\ x(n-\tau_{N-1}) \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{X}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \cdot X(\omega) \\ e^{-j\omega\tau_1} \cdot X(\omega) \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \cdot X(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \\ e^{-j\omega\tau_1} \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \end{bmatrix} X(\omega) = \mathbf{v}_k(k)X(w)$$

$$h_i(n) = \frac{1}{N}\delta(n+\tau_i) \Longrightarrow \mathbf{H}(w) = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} e^{jw\tau_0} \\ e^{jw\tau_1} \\ \vdots \\ e^{jw\tau_{N-1}} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\mathbf{v}_k^*(k)$$

$$w_i^* = e^{-j(i-\frac{N-1}{2})(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta)d}$$

# 算法实现–频率波束响应

- 越靠近轴向(180° )，主波束越宽。越靠近径向(90° )，主波束越窄
- 探索：影响波束主瓣性能的因素

$$w_i^* = e^{-j(i-\frac{N-1}{2})(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta)d}$$

N增加：主瓣宽度变窄

d增加：主瓣宽度变窄，过大会导致发生空域混叠

f 增加：主瓣宽度变窄，过大会导致发生空域混叠

# 算法实现-零点调向

$$\min \varepsilon = \|\mathbf{w}_d - \mathbf{w}\|^2$$

$$s.t.\ \mathbf{w}^H\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\mathbf{w}^H = \mathbf{w}_d^H - \lambda^H\mathbf{C}^H = \mathbf{w}_d^H(\mathbf{I}_N - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H)}$$

# 算法实现-GSC最优问题求解

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$f(x) = Ax \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = A^H$$

$$f(x) = x^H A \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = A$$

$$f(x) = x^H Ax = Bx \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} x + B^H = \frac{\partial \left( x^H A \right)}{\partial x} x + \left( x^H A \right)^H = Ax + A^H x$$

# 算法实现-GSC最优问题求解

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$
\begin{aligned}
J(w_a) &= (w_q - Bw_a)^H R_{xx} (w_q - Bw_a) \\
&= (w_q^H R_{xx} - w_a^H B^H R_{xx})(w_q - Bw_a) \\
&= w_q^H R_{xx} w_q - w_q^H R_{xx} B w_a - w_a^H B^H R_{xx} w_q + w_a^H B^H R_{xx} B w_a
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial J(w_a)}{\partial w_a} = 0 - \left(w_q^H R_{xx} B\right)^H - B^H R_{xx} w_q + 2B^H R_{xx} B w_a = -2B^H R_{xx} w_q + 2B^H R_{xx} B w_a
$$

$$
\frac{\partial J(w_a)}{\partial w_a} = 0 \Rightarrow B^H R_{xx} w_q = B^H R_{xx} B w_a \Rightarrow w_a = \left(B^H R_{xx} B\right)^{-1} B^H R_{xx} w_q
$$

# 算法实现-阵列增益

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$$w = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} e^{jw\tau_0} \\ e^{jw\tau_1} \\ \vdots \\ e^{jw\tau_{N-1}} \end{bmatrix}$$

$$w^H w = \frac{1}{N^2} * N = \frac{1}{N}$$

$$y = vs + n$$

$$x = w^H y = w^H vs + w^H n = s + w^H n = s + n'$$

$$P_{n'} = E\{w^H n n^H w\} = w^H E\{n n^H\} w = P_n w^H I_N w = P_n w^H w = \frac{P_n}{N}$$

$$\frac{P_s}{P_{n'}} = \frac{P_s}{P_n / N} = N \frac{P_s}{P_n}$$

# 纲要



- 第一部分：作业题目
- 第二部分：批阅原则
- 第三部分：算法实现
- **第四部分：作业问题**

# 作业问题

- 频率波束响应中的w计算
  - ✓ 和期望信号的角度有关
- 算法中涉及矩阵运算的性质维度
  - ✓ 需要掌握矩阵的基本操作
  - ✓ 需要知道矩阵运算过程中数值维度的变化

# 作业问题

- 矩阵求导
  - ✓ 矩阵求导的基础性质需掌握
  - ✓ 实际复杂矩阵求导可利用基础性质
- 阵列增益
  - ✓ 需要理解更复杂波束在不同噪声场中提供的增益

# 参考文献

Michael Brandstein · Darren Ward (Eds.)

## Microphone Arrays

Signal Processing
Techniques and Applications

# 在线问答



Q&A

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

# 感谢各位聆听！

Thanks for Listening