



# 语音识别：从入门到精通

## 第七讲：语言模型

主讲人 吕航

西北工业大学博士

hanglyu1991@gmail.com





## 内容提要

- 统计语言模型
- N-gram语言模型与评价方法
- 平滑算法(Smoothing)
  - 拉普拉斯平滑(Laplace Smoothing/Add-one Smoothing)
  - 古德图灵平滑(Good-turing Smoothing)
  - 插值(Interpolation) 与 回退(Back off)
  - 卡茨平滑(Katz Smoothing)
  - 克奈瑟-内平滑(Kneser-Ney Smoothing)
- 语言模型的存储格式—APRA Format 及工具包
- RNN语言模型
- 其它语言模型思想简介(Class-based N-gram & Cache Model)
- 大词汇量连续语音识别梳理



一个统计语言模型包含一个有限集合 $V$ ，和一个函数 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ：

1. 对于任意 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in V^+$ ，  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

$$2. \sum_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in V^+} p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

简言之：统计语言模型是所有词序列上的一个概率分布。



问：统计语言模型有什么用？

1. 它可以给我们任意词序列的概率，即帮助我们确定哪个词序列可能性大。
2. 给定一个词序列，可以预测下一个最可能出现的词语！[用于ASR，MT等]

给定一个词序列  $S = (w_1, \dots, w_n)$ ，它的概率可以表示为：

$$\begin{aligned} P(S) &= P(x_1 = w_1, \dots, x_n = w_n) = P(w_1^n) \\ &= P(w_1)P(w_2|w_1)P(w_3|w_1^2) \dots P(w_n|w_1^{n-1}) \\ &= \prod_{k=1}^n P(w_k|w_1^{k-1}) \end{aligned}$$



## 统计语言模型

如何获得语言模型中的概率？ 在语料库(Corpus)中计数。

训练集(training-set)与测试集(test-set)

保留集(held-out set): 从训练集中分离, 用来计算一些其它参数,  
如插值模型中的插值系数。

语言模型中一些常见术语:

1. I uh gave a re- report yesterday

2. 我是不是老了

有声停顿(fillers/filled pauses): 如uh就是一个没有实际意义的有声停顿。

截断(fragment): 表示没有说完整, 如re-。

词目(lemma): 词语主干(stem)相同, 比如dogs和dog是一个词目。

词形(wordforms): 完整的词语样子, 比如dogs和dog是两个词形。

型(type): 语料库或者字典中不同单词的数目。

例(token): 语料中单词数目。(数数)

字典(vocabulary): 语言模型的基本组件, 规定了我对那些元素进行统计。



## N-gram语言模型与评价方法

例句: It is too expensive to buy

$$P(\text{buy} \mid \text{It is too expensive to}) = \frac{C(\text{It is too expensive to buy})}{C(\text{It is too expensive to})}$$

问题: 当历史信息越长, 我们越难在语料库中发现完全一致的序列。

直觉(Intuition): 用最近的几个历史词代替整个历史词串, 从而近似。



回忆Markov  
assumption



## N-gram语言模型与评价方法

N-gram: 用前N-1个词作为历史，估计当前(第N个)词。

$$P(w_i | w_1^{i-1}) = P(w_i | w_1^{i-N+1})$$

$$\text{bigram example: } P(w_i | w_1^{i-1}) = P(w_i | w_{i-1})$$

$$P(S) = P(x_1 = w_1, \dots, x_n = w_n) = P(w_1^n)$$

$$= P(w_1)P(w_2|w_1)P(w_3|w_1^2) \dots P(w_n|w_1^{n-1})$$

$$= \prod_{k=1}^n P(w_k | w_1^{k-1}) \quad \longrightarrow \quad = \prod_{k=1}^n P(w_k | w_{k-N+1}^{k-1})$$

N-gram  
语言模型



如何估计N-gram? 最大似然方法(MLE)→数数

$$P(w_i | w_{i-N+1}^{i-1}) = \frac{C(w_{i-N+1}^{i-1} w_i)}{C(w_{i-N+1}^{i-1})}$$

$$bigram\ example : P(w_i | w_{i-1}) = \frac{C(w_{i-1} w_i)}{C(w_{i-1})}$$

开头结尾如何处理，与未知词？

习惯上，ASR领域用<s>和</s>来标记开头结尾，并方便统计。  
没有在vocabulary中的词(OOV, out of vocabulary)，一般标记为<UNK>。





如何评估？ 1. 根据应用实地测试 2. 困惑度(Perplexity)

在测试集  $W = w_1, w_2, \dots, w_N$ , 困惑度就是用单词数归一化后的测试集概率:

$$\begin{aligned} PP(W) &= P(w_1 w_2 \dots w_N)^{-\frac{1}{N}} \\ &= \sqrt[N]{\frac{1}{P(w_1 w_2 \dots w_N)}} \\ &= \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \frac{1}{P(w_i | w_{i-N+1}^{i-1})}} \end{aligned}$$

小贴士:  
在工具包里,  
你会见到PPL和PPL1

PPL: 考虑词数和句子数  
(i.e. 考虑</s>)

PPL1: 只考虑词数

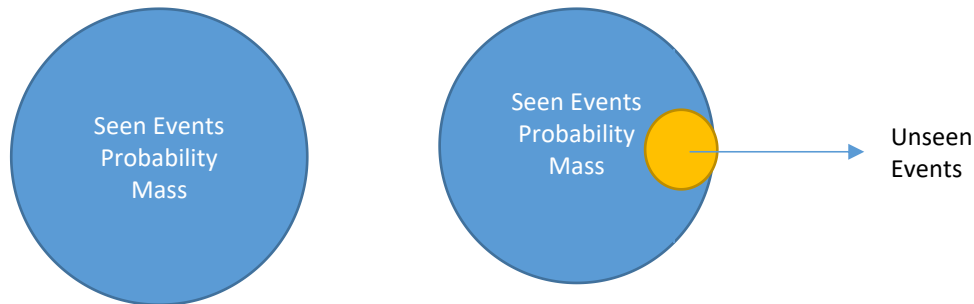


## 平滑算法(Smoothing)

由于语料的稀疏性(sparse data), 有些词序列找不到怎么办?

**平滑!**

**将一部分看见的事件概率量分给未看见的事件。**





### 拉普拉斯平滑(Laplace Smoothing/Add-one Smoothing)

**Intuition:** 将每个计数加一，从而使得任何词序列都有计数。

以unigram为例:  $P(w_i) = \frac{C(w_i)}{N}$ ,  $N$ 为总token数。  $P_{laplace}(w_i) = \frac{C(w_i) + 1}{N + V}$

那么bigram呢?  $P_{laplace}(w_i|w_{i-1}) = \frac{C(w_{i-1}w_i) + 1}{C(w_{i-1}) + V}$



## 平滑算法(Smoothing)—Laplace Smoothing

以unigram为例:  $P(w_i) = \frac{C(w_i)}{N}$ ,  $N$ 为总token数。  $P_{laplace}(w_i) = \frac{C(w_i) + 1}{N + V}$

两个重要的概念: (我们将词 $w_i$ 的token数简记为 $c_i$ )

1. 调整计数(adjusted count) —  $c^*$ : 描述平滑算法仅对分子的影响。

$$\text{Laplace smoothing为例 } c_i^* = (c_i + 1) \frac{N}{N + V}$$

2. 相对打折 (relative discount)/打折率(discount ratio) —  $d_c$ : 打折计数和原计数的比率。

$$d_c = \frac{c^*}{c}$$

Laplace Smoothing缺点: 原来计数量较高的词序列, 概率削减严重。

--> Add-delta smoothing (缓解)

## 平滑算法(Smoothing)—Good-turing Smoothing

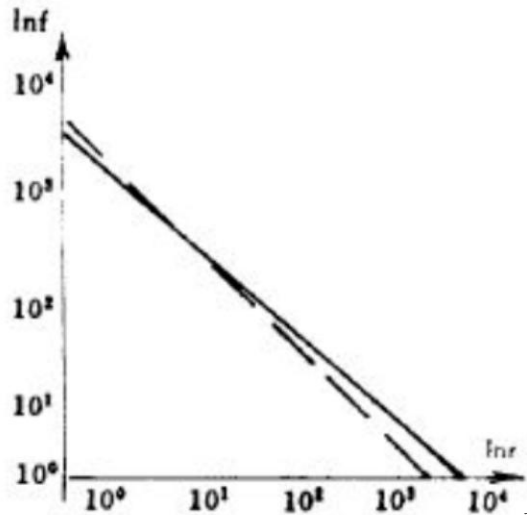
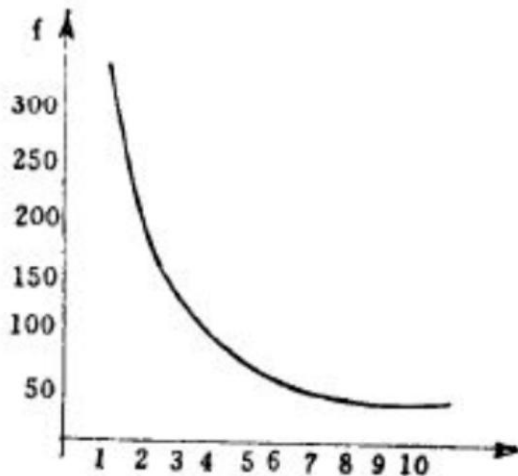
齐夫(Zipf)定律:

Given a large sample of words used, the frequency of any word is inversely proportional to its rank in the frequency table.—Wikipedia

自然语言语料库中，一个词出现的频率与它在频率表里面的排名成反比。

告诉了我们什么?

语言中大部分词都是低频词，只有很少的常用词。





# 平滑算法(Smoothing)—Good-turing Smoothing

## 古德图灵平滑(Good-turing Smoothing)

**Intuition:** 用你看见过一次的事情(Seen Once)估计你未看见的事件(Unseen Events), 并依次类推。

频率 $c$ 出现的频数(frequency of frequency  $c$ ) —  $N_c$

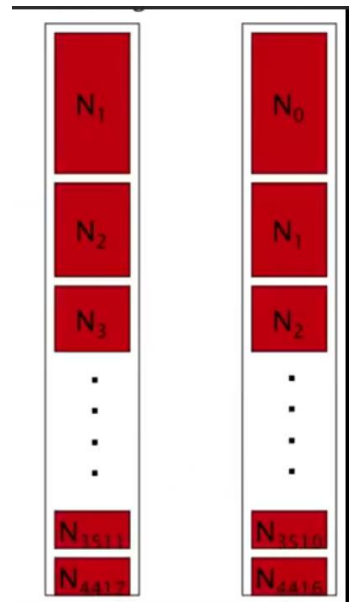
$$N_c = \sum_{x: \text{count}(x)=c} 1$$

算法:

$$c^* = (c + 1) \frac{N_{c+1}}{N_c}$$

思考一下如何  
由上式获得

$$P_{GT}^*(\text{Unseen Events}) = \frac{N_1}{N} \quad \text{也称为遗漏量(missing mass)}$$





## 平滑算法(Smoothing)—Good-turing Smoothing

问题：显然，如果一个词在语料中出现了5000次的词序列(e.g. the)，但是没有出现5001次的词序列。难道这个概率变为0？

方法1：当 $c > k$  (e.g.  $k = 5$ )时， $N_c \approx \alpha c^\beta$ ，其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 为参数，对 $N_c$ 进行平滑。

方法2：认为 $c > k$  (katz建议 $k = 5$ )，认为计数可靠不进行打折。 [Katz 1987]

$$\left\{ \begin{array}{l} c^* = c \\ c^* = \frac{(c+1) \frac{N_{c+1}}{N_c} - c \frac{(k+1)N_{k+1}}{N_1}}{1 - \frac{(k+1)N_{k+1}}{N_1}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} c > k \\ 1 \leq c \leq k \end{array}$$

Good-turing算法  
很少单独使用，  
通常结合后面的  
算法使用



## 平滑算法(Smoothing)—插值(Interpolation) 与 回退(Back off)

### 插值(Interpolation)法

**Intuition:** 从所有 **N-grams** 估计中，把所有的概率估计混合。例如，我们优化一个 tri-gram 模型，我们将统计的 tri-gram，bigram 和 unigram 计数进行插值。

### 回退(Back off)法

**Intuition:** 如果有非零的高阶语言模型，我们直接只用。只有当高级语言模型存在计数零时，我们回退到低阶语言模型。(递归)  
例如，一个 tri-gram，某些概率为0，我们将 tri-gram 非零计数打折后，获得遗漏量，将遗漏量用 bi-gram 进行重分配，依次类推。





## 平滑算法(Smoothing)—插值(Interpolation) 与 回退(Back off)

以tri-gram为例介绍插值法:

$$P_{ML}(w_i|w_{i-2}w_{i-1}) = \frac{C(w_{i-2}w_{i-1}w_i)}{C(w_{i-2}w_{i-1})}$$

$$P_{ML}(w_i|w_{i-1}) = \frac{C(w_{i-1}w_i)}{C(w_{i-1})}$$

$$P_{ML}(w_i) = \frac{C(w_i)}{N}$$

$$P_{interp}(w_i|w_{i-2}w_{i-1}) = \lambda_1 P_{ML}(w_i|w_{i-2}w_{i-1}) + \lambda_2 P_{ML}(w_i|w_{i-1}) + \lambda_3 P_{ML}(w_i)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

小贴士:

参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$   
可以是经验  
值, 也可以  
由MLE等优化  
算法获得。



## 平滑算法(Smoothing)—插值(Interpolation) 与 回退(Back off)

如何确定系数？ 在held-out set上使用MLE的方法

目标：  $\operatorname{argmax}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{w_i, w_{i-1}, w_{i-2}} c'(w_{i-2}, w_{i-1}, w_i) \log [\lambda_1 P_{ML}(w_i | w_{i-2} w_{i-1}) + \lambda_2 P_{ML}(w_i | w_{i-1}) + \lambda_3 P_{ML}(w_i)]$$



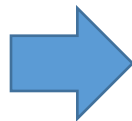
从Held-out集合  
上统计



## 平滑算法(Smoothing)—插值(Interpolation) 与 回退(Back off)

Bucketing方法扩展Interpolation:

在实际工程中, 参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 通常不是全局的, 而是根据历史(i.e.  $P_{ML}(w_i|w_{i-2}w_{i-1})$ 中的 $w_{i-2}w_{i-1}$ )计数做一些调整。



$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)}$$

根据历史计数 $c(w_{i-2}w_{i-1})$ 定义函数  $(k) = \pi(w_{i-2}, w_{i-1})$ : [简例如下]

$$\Pi(w_{i-2}, w_{i-1}) = 1 \quad \text{if } c(w_{i-2}, w_{i-1}) > 0$$

$$\Pi(w_{i-2}, w_{i-1}) = 2 \quad \text{if } c(w_{i-2}, w_{i-1}) = 0 \text{ and } c(w_{i-1}) > 0$$

$$\Pi(w_{i-2}, w_{i-1}) = 3 \quad \text{otherwise}$$



$$P_{interp}(w_i|w_{i-2}w_{i-1}) = \lambda_1^{(k)} P_{ML}(w_i|w_{i-2}w_{i-1}) + \lambda_2^{(k)} P_{ML}(w_i|w_{i-1}) + \lambda_3^{(k)} P_{ML}(w_i)$$



## 平滑算法(Smoothing)—Katz Smoothing

### 卡茨平滑(Katz Smoothing)—递归回退算法

**Intuition:** 若N阶语言模型存在，直接使用打折后的概率(常使用Good-turing算法进行打折)；若高阶语言模型不存在(i.e. unseen events)，将打折节省出的概率量，依照N-1阶的语言模型概率进行分配，依此类推。

$$P_{katz}(w_i | w_{i-N+1}^{i-1}) = \begin{cases} P^*(w_i | w_{i-N+1}^{i-1}) & C(w_{i-N+1}^i) > 0 \\ \alpha(w_{i-N+1}^{i-1}) P_{katz}(w_i | w_{i-N+2}^{i-1}) & \text{其它} \end{cases}$$

$\alpha(w_{i-N+1}^{i-1})$ 为归一化系数



## 平滑算法(Smoothing)—Katz Smoothing

### 卡茨平滑(Katz Smoothing)—归一化系数怎么求？

思想：将打折获得的概率量分配给未知事件。

$$\alpha(w_{i-N+1}^{i-1}) = \frac{1 - \sum_{w_i: c(w_{i-N+1}^i) > 0} P^*(w_i | w_{i-N+1}^{i-1})}{\sum_{w_i: c(w_{i-N+1}^i) = 0} P_{katz}(w_i | w_{i-N+2}^{i-1})}$$

分子：1 - 对N阶语言模型存在的序列打折 = 打折获得的概率量。

分母：N阶不存在部分，用N-1阶按比例分配

$$= \frac{1 - \sum_{w_i: c(w_{i-N+1}^i) > 0} P^*(w_i | w_{i-N+1}^{i-1})}{1 - \sum_{w_i: c(w_{i-N+1}^i) > 0} P^*(w_i | w_{i-N+2}^{i-1})}$$



分母为什么可以这么变？

N阶存在，那么N-1阶必存在，  
所以对这类词序列以久按照打折算法打折。



## 平滑算法(Smoothing)—Kneser-Ney Smoothing

### 克奈瑟-内平滑(Kneser-Ney Smoothing) [以bigram为例]

#### 一、绝对折扣(absolute discounting)

引自Dan Jurafsky, Stanford University, NLP

$c(\text{MLE})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c^*(\text{GT})$	0.0000270	0.446	1.26	2.24	3.24	4.22	5.19	6.21	7.24	8.25

研究人员对“AP新闻专线”语料的bigram进行Good-turing打折后获得此表



现象：除了0和1以外，其它  
近似减0.75就可以了。

$$P_{\text{absolute}}(w_i|w_{i-1}) = \begin{cases} \frac{C(w_{i-1}w_i) - D}{C(w_{i-1})} & C(w_{i-1}w_i) > 0 \\ \alpha(w_i)P(w_i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

小贴士：实际应用，0和1会特殊处理。如用专有的D值等。



## 平滑算法(Smoothing)—Kneser-Ney Smoothing

### 克奈瑟-内平滑(Kneser-Ney Smoothing) [以bigram为例]

现象：我们训练好了一个bigram的语言模型，之后我们准备填空：I'm finding my new \_\_\_\_。我们发现这里填glasses似乎比Zealand更好。但是我语料库里New Zealand很多，导致bigram认为这里填Zealand更好。

**Intuition:** 对于一个词，如果它在语料库中出现更多种不同上下文(context)时，它可能应该有更高的概率。

为了刻画这种想法，我们定义接续概率(continuation probability):

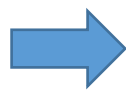
$$P_{\text{continuation}}(w_i) = \frac{|\{w_{i-1} : C(w_{i-1}w_i) > 0\}|}{\sum_{w_i} |\{w_{i-1} : C(w_{i-1}w_i) > 0\}|}$$



## 平滑算法(Smoothing)—Kneser-Ney Smoothing

克奈瑟-内平滑(Kneser-Ney Smoothing) [以bigram为例]

$$P_{KN}(w_i|w_{i-1}) = \begin{cases} \frac{C(w_{i-1}w_i) - D}{C(w_{i-1})} & C(w_{i-1}w_i) > 0 \\ \alpha(w_i)P_{continuation}(w_i) & otherwise \end{cases}$$



回退式

$$\begin{aligned} P_{KN}(w_i|w_{i-1}) &= \frac{C(w_{i-1}w_i) - D}{C(w_{i-1})} + \beta(w_i)P_{continuation}(w_i) \\ &= \frac{C(w_{i-1}w_i) - D}{C(w_{i-1})} + \beta(w_i) \frac{|\{w_{i-1}: C(w_{i-1}w_i) > 0\}|}{\sum_{w_i} |\{w_{i-1}: C(w_{i-1}w_i) > 0\}|} \end{aligned}$$



插值式

小贴士：研究表明插值式效果更好。





## 语言模型的存储格式—APRA Format 及工具包

ARPA Format是N-gram的标准储存模式：是一个ASCII文件，在小标题后跟着一个表，列举出所有非零的N元语法概率。

每个N元语法条目中，依次为：

折扣后对数概率(log10格式存储)，  
词序列，  
回退权重(log10格式存储)

e.g.  $\log_{10} P^*(w_i|w_{i-1}) \quad w_{i-1}w_i \quad \log \alpha(w_{i-1}w_i)$

### 思考题

1. 最高阶语法和</s>结尾的任意阶语法没有回退权重。
2. 插值模型和回退模型都可以如此储存。

```
\data\  
ngram 1=19979  
ngram 2=4987955  
ngram 3=6136155  
  
\1-grams:  
-1.6682 A -2.2371  
-5.5975 A'S -0.2818  
-2.8755 A. -1.1409  
-4.3297 A.'S -0.5886  
-5.1432 A.S -0.4862  
...  
  
\2-grams:  
-3.4627 A BABY -0.2884  
-4.8091 A BABY'S -0.1659  
-5.4763 A BACH -0.4722  
-3.6622 A BACK -0.8814  
...  
  
\3-grams:  
-4.3813 !SENT_START A CAMBRIDGE  
-4.4782 !SENT_START A CAMEL  
-4.0196 !SENT_START A CAMERA  
-4.9004 !SENT_START A CAMP  
-3.4319 !SENT_START A CAMPAIGN  
...  
\end\
```



## 语言模型的存储格式—APRA Format 及工具包

工具包:

--SRILM(最常用):

<http://www.speech.sri.com/projects/srilm>

--KenLM:

<https://github.com/kpu/kenlm>

--KaldiLM:

[http://www.danielpovey.com/files/kaldi/kaldi\\_lm.tar.gz](http://www.danielpovey.com/files/kaldi/kaldi_lm.tar.gz)

--IRSTLM:

<https://github.com/irstlm-team/>



回头看统计语言模型的目标：

$$\begin{aligned} P(S) &= P(x_1 = w_1, \dots, x_n = w_n) = P(w_1^n) \\ &= P(w_1)P(w_2|w_1)P(w_3|w_1^2) \dots P(w_n|w_1^{n-1}) \\ &= \prod_{k=1}^n P(w_k|w_1^{k-1}) \end{aligned}$$

Recurrent Neural  
Network正好满  
足这个要求

如果可能它希望依赖所有历史推测当前。



## RNN语言模型

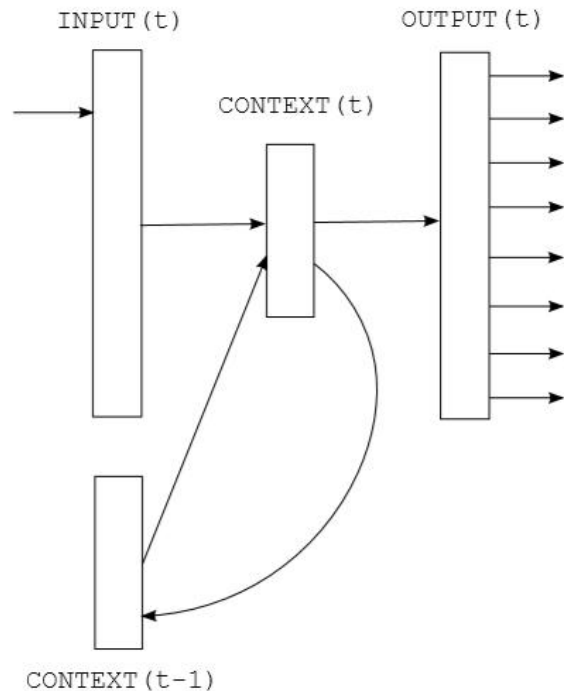
Input: vocabulary size one-hot vector

Structure: Simple Recurrent Neural Network  
(extend: LSTM, GRU and so on)

Output: vocabulary size vector with softmax  
(extend: Top N(e.g. 2k) high frequency words  
+ 1 low frequency word bag)

优化：低频词袋法

$$P(w_i(t+1)|w(t), s(t-1)) = \begin{cases} \frac{y_{rare}(t)}{C_{rare}} & \text{if } w_i(t+1) \text{ is rare,} \\ y_i(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$





## 其它语言模型思想简介(Class-based N-gram & Cache Model)

基于类的N元语言模型(Class-based/Clustering N-gram):

**Intuition:**在语言学中，将具有同样语义的字词归为一类是一种常见的解决数据稀疏的方法。受此启发，在语言模型中，根据词性分析，语义分析，或者特定任务时人为设计，我们可以将词和类别建立联系，通过类别信息，帮助我们提升语言模型建模性能。（e.g.航空订票系统）

以bigram为例：  $P(w_i|w_{i-1}) \approx P(c_i|c_{i-1}) * P(w_i|c_i)$

缓存模型(Cache Model):

**Intuition:** 如果一个词在句子中用到，那么它很可能被再次用到。

例如：两个人在讨论旅游，它们可能反复用到同一个地名。

$P(w_i|w_{i-N+1}^{i-1}) = \lambda P(w_i|w_{i-N+1}^{i-1}) + (1 - \lambda)P_{cache}(w_i|w_{i-k}^{i-1})$  假设cache中保留前K个词

$$P_{cache}(w_i|w_{i-k}^{i-1}) = \frac{w_i \text{在} cache \text{中出现次数}}{K}$$

$$P_{cache}(w_i|w_{i-k}^{i-1}) = \beta \sum_{j=i-k}^{i-1} I_{\{w_i=w_j\}} e^{-\alpha(i-j)}$$



# 大词汇量连续语音识别梳理

## 我们都学了什么？

语言模型：建模word间的跳转概率。

字典(vocabulary)：提供word到phone的映射，及语言模型建模元素。

HMM：建模phone或triphone等基本单元发声过程。

GMM：建模每个HMM状态的发射概率，即声学似然分。

决策树：triphone等建模单元绑定(共享pdf)，解决数据稀疏问题。

前向后向算法：更新HMM参数。

EM算法：更新GMM参数。

Viterbi算法：解码或对齐。

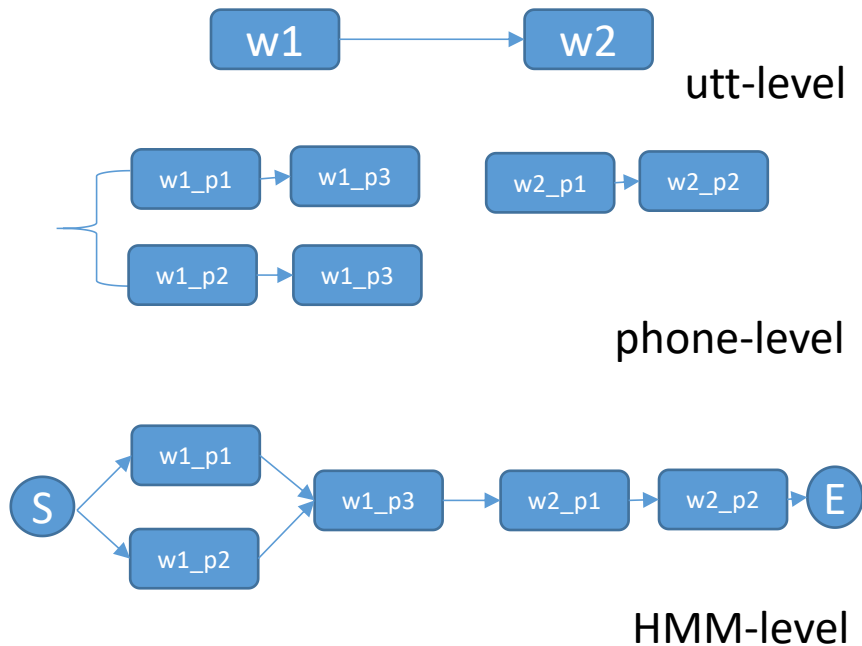
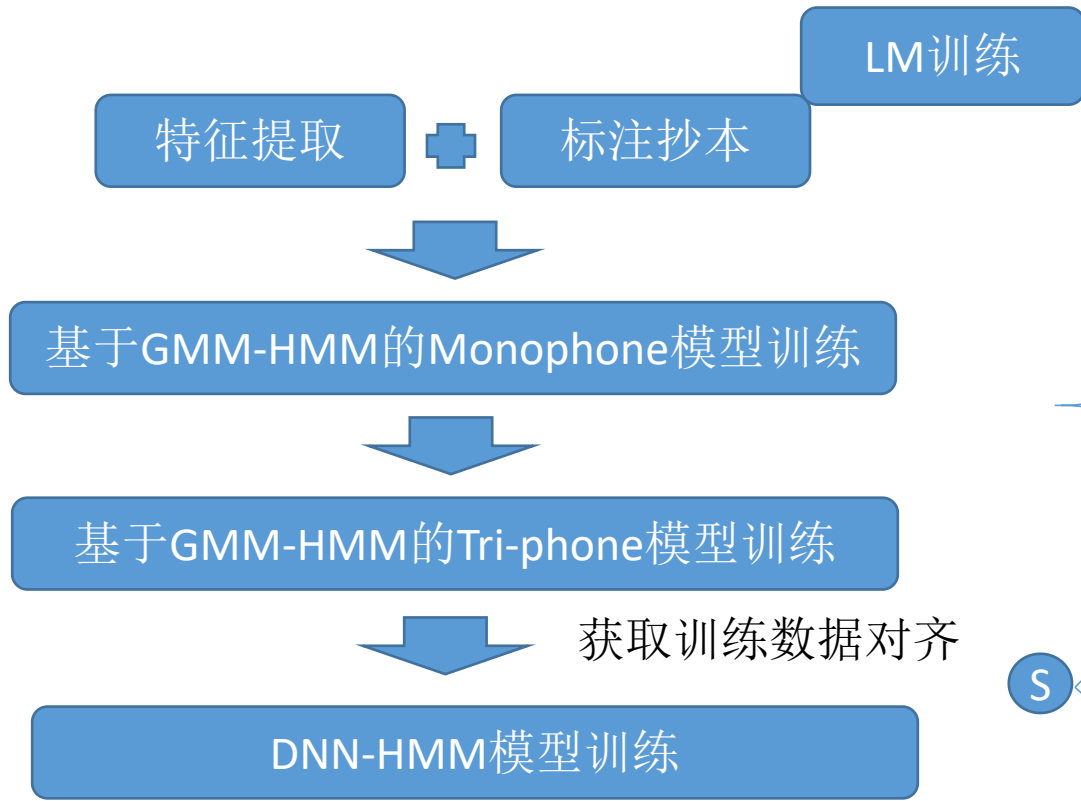
Embedding Training算法：更新GMM-HMM模型参数，即Viterbi Training。

特征提取：从音频获取MFCC，PLP，Fbank等特征。

DNN：建模每帧观测的后验概率，后转化为似然概率，提供给每个HMM状态。



# 大词汇量连续语音识别梳理





## 作业

作业1：利用上次作业下载的THCHS30数据，学习使用SRILM。

- 1.使用SRILM获得经过interpolation式的Kneser-Ney平滑的3-gram以上的语言模型。总结你观察到的一些现象。
- 2.使用SRILM计算在识别测试集上计算PPL。

作业2：写出插值语言模型的递归格式，并根据递归格式给出插值系数的EM计算公式。

作业3：[修改自哥伦比亚大学语音识别课程E6870的一部分]（阅读代码框架）

- 1.实现N-gram计数 (实验指导书part 2.2)
- 2.实现Witten-Bell smoothing部分(总结它的Intuition) (实验指导书part 4)





结语

感谢各位聆听!

Thanks for Listening





作业写完了么？  
写完再看吧！



1. 在使用srilm，出现问题，可以使用'-debug N'来调试，发现你的问题。
2. 有的时候数据集太小，或者人为写的，通常会发现对于高阶N-gram出现没有n\_x统计计数。这时候常换为witten bell。
3. srilm在处理3阶或者更高的n-gram时候，会设置min-count最小计数(默认是2)，把低于计数的认为是pseudo-events，然后丢弃，余下来的概率也用来平滑。你可以通过-gt3min修改。
4. 对于KN算法，具体的打折通常有两种：
  - ukndiscount是原始的
  - kndiscount是goodman等人提出的改进方法

$$D = \frac{n_1}{n_1 + 2n_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{n_1}{n_1 + 2n_2} \\ D1 = 1 - 2Y \frac{n_2}{n_1} \\ D2 = 2 - 3Y \frac{n_3}{n_2} \\ D3 += 3 - 4Y \frac{n_4}{n_3} \end{array} \right.$$



插值平滑的递归形式:

$$P_{interp}(w_i | w_{i-N+1}^{i-i}) = \lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}} P_{ML}(w_i | w_{i-N+1}^{i-i}) + (1 - \lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}}) P_{interp}(w_i | w_{i-N+2}^{i-1})$$

更新公式:

$$E(\lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}}) = \sum_{w_i} c(w_{i-N+1}^i) \frac{\lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}} * P_{ML}(w_i | w_{i-N+1}^{i-1})}{\lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}} P_{ML}(w_i | w_{i-N+1}^{i-1}) + (1 - \lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}}) P_{interp}(w_i | w_{i-N+2}^{i-1})}$$

$$\widetilde{\lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}}} = \frac{E(\lambda_{w_{i-N+1}^{i-1}})}{\sum_{j=1}^N E(\lambda_{w_{i-N+j}^{i-1}})}$$

<http://www.cs.jhu.edu/~hajic/courses/cs465/cs46506/ppframe.htm>

Witten-Bell是此算法的一个特例，唯一不同在于插值系数的设置方式。