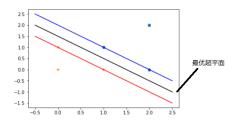
1 Homework 4.2 Neural Network

解: (a) 依题意可得: 令 w1 标签为 -1, w2 标签为 +1, 即 $z_1=z_2=z_3=-1$, $z_4=z_5=z_6=+1$ 由图可得最优超平面为 (3/2-1-1)(1y1y2)=0 为了使 $z_k\mathbf{ay}\geq 1$, 权重向



量该为 $(3-2-2)^t$, 而最优间隔为 $\sqrt{2}/4$

- (b) 支持向量为距离超平面最近的点,由此可知本题所述的支持向量为: $x_1 = (1,1)^t$; $x_3 = (2,0)^t$; $x_5 = (1,0)^t$; $x_6 = (0,1)^t$
 - (c) 最大化拉格朗日函数 $L(\alpha)$ 其中

$$L(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{n} \alpha_k \alpha_j z_k z_j \mathbf{y}_j^t \mathbf{y}_k$$
 (1)

约束条件为:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \alpha_k = 0 \tag{2}$$

其中 $\alpha_k \ge 0$ 基于上述约束条件,有 $\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5$. 令

$$\frac{\partial L(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{3}$$

此时 $\alpha = 1/5(0, -2, -2, 8, -8, -4)^t$ 不满足条件。而

$$\frac{\partial L(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4, \alpha_5)}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{4}$$

方程不相容。再令

$$\frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_5)}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{5}$$

得到 $\alpha = 1/5(16, 0, 4, 0, 14, 6)^t$ 满足条件, 此时 $L(\alpha) = 4$ 最后令

$$\frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0)}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{6}$$

得到 $\alpha = 1/5(2,2,2,0,0,6)^t$ 满足条件,此时 $L(\alpha) = 1.2$ 由此可得 $\alpha = 1/5(16,0,4,0,14,6)^t$ 。

现在求权重向量 a。即最大化对偶空间目标函数,对偶空间目标函数对 a 求导可得:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k y_k = 0 \tag{7}$$

将 $\alpha = 1/5(16, 0, 4, 0, 14, 6)^t$ 代入上式可得 a = (0, -2, -2)

由于 $|||a|||^2$ 并没有包含向量 a, 而且 $\sum_k a_k z_k = 0$. 为了求 a_0 通过使用其中一个支持向量 $y_1 = (1,1,1)^t$, 由于有 $a^t y_1 z_1 = 1$, 因此 $-(0,-2,-2)^t (1,1,1) = -a_0 + 4 = 1$. 由此可得 $a_0 = 3$ 由此可得全部的权重向量为 $a = (3,-2,-2)^t$

2 Homework 4.2 Neural Network

解: (a) 依题意可得: 隐含层 h_1, h_2, h_3 分别为:

$$h_1 = w_{1,1}^{[1]} x_1 + w_{2,1}^{[1]} x_2 + w_{0,1}^{[1]}; (8)$$

$$h_2 = w_{12}^{[1]} x_1 + w_{2.2}^{[1]} x_2 + w_{0.2}^{[1]}; (9)$$

$$h_3 = w_{13}^{[1]} x_1 + w_{2,3}^{[1]} x_2 + w_{0,3}^{[1]}; (10)$$

sigmoid 激活函数的数学表达式为:

$$s(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{11}$$

于是可得输出为:

$$o = s(w_1^{[2]}s(h_1) + w_2^{[2]}s(h_2) + w_3^{[2]}s(h_3) + w_0^{[2]})$$
(12)

损失函数为:

$$l = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (o^{(i)} - y^{(i)})^2$$
(13)

由题意可知学习率为 α 利用梯度下降法求参数 $w_{1,2}^{[1]}$ 的更新方式为:

$$w_{1,2}^{[1]} = w_{1,2}^{[1]} - \alpha \frac{\partial l}{\partial w_{1,2}^{[1]}}$$
(14)

将 h_1, h_2, h_3 代入 o 中, 再将 o 代入 l 中求导可得:

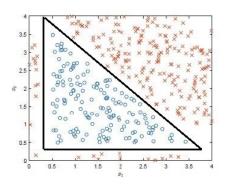
$$\frac{\partial l}{\partial w_{1,2}^{[1]}} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m} (o^{(i)} - y^{(i)}) \frac{\partial o}{\partial w_{1,2}^{[1]}}$$
(15)

利用 python 计算 $\frac{\partial o}{\partial w_{1,2}^{[1]}}$

于是可得 $w_{1,2}^{[1]}$ 的更新方式为: (其中 diff_so 由上式给出.)

$$w_{1,2}^{[1]} = w_{1,2}^{[1]} - \alpha \text{diff_so}$$
 (16)

(b) 在激活函数为 step function 的情况下,可以用三条线性函数对数据分类,划分方式如图一



其中三条线分别为: $x_1=0.25; x_2=0.25; x_1+x_2=4.3$,也就是说数据满足条件 $x_1\leq 0.25, x_2\leq 0.25$ $x_1+x_2\geq 4.3$ 时,此时分类为 1,其余分类为 0. 由此可推出各个权重参数的一个组合为:

$$w_{0,1}^{[1]} = 1, w_{1,1}^{[1]} = 1, w_{2,1}^{[1]} = -4.3$$
 (17)

$$w_{0,2}^{[1]} = 0, w_{1,2}^{[1]} = 4, w_{2,2}^{[1]} = -1.3$$
 (18)

$$w_{0,3}^{[1]} = 4, w_{1,3}^{[1]} = 0, w_{2,3}^{[1]} = -1.3$$
 (19)

$$w_0^{[2]} = 1, w_1^{[2]} = 1, w_2^{[2]} = 1, w_3^{[2]} = 0$$
 (20)

(c) 如果激活函数为一个线性函数 f(x) = x, 不存在一个权重组合使得损失函数为 0. 在激活函数为线性函数的情况下,题中所述的神经网络其实还是一个线性函数,而线性函数是不能够将题中所述的两类数据完全分开的。如下图所示。

