学院： 专业班级： 学号： 姓名：

答题纸不够时，可以写到纸的背面 注意保持试卷完整，试卷拆开无效

密封线 装订线

桂林理工大学考试试卷

（2023~ 2024 学年度 第 1 学期）

课程代码：20120029 课程名称：数值分析 命题者：信息与计算科学教研室

考核年级：2023 研 [B]卷

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题（每空 2 分，共 4 分）

1.已知函数 $f(x)=3x^3+1$，则 $f(x)$ 的 4 阶均差 $f[0,1,2,3,4]=$ <u>0</u>。

2.如果存在实数 $L>0$，使得 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$，$\forall y_1,y_2\in R$，则称 f 关于 y 满足 <u>**利普希茨**</u> 条件，L 称为 f 的 <u>**利普希茨**</u> 常数。

二、选择题（每小题 2 分，共 6 分）

3.根据数值运算误差分析的方法与原则，无需避免的是（ B ）。

A.绝对值很大的数除以绝对值很小的数 B.两个非常相近的数相乘

C.绝对值很大的数加上绝对值很小的数 D.两个非常相近的数相减

4.若线性代数方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 为严格对角占优阵，若用雅可比法和高斯-赛德尔法求解，则下列说法正确的是（ A ）

A.两者都收敛 B.两者都发散 C.前者收敛，后者发散 D.前者发散，后者收敛

5.下列方法不是常微分方程数值解法的是(B)。

A.欧拉方法 B.牛顿方法 C.梯形方法 D.龙格-库塔方法

三、计算题（8 小题，共 90 分）

6．(10 分) 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解： 设 x 的近似值 x^*，则由假设有 $\dfrac{x^*-x}{x^*}=\delta$，……2 分

对于 $f(x)=\ln x$，因 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故由 P7 公式

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*) \quad ……6 分$$

得 $$\ln x-\ln x^*=\varepsilon(f(x^*))\approx\left|\frac{1}{x^*}\right|(x^*-x)=\frac{1}{x^*}(x^*-x)=e_r(x^*)=\delta \quad ……9 分$$

即 $$\varepsilon(\ln x^*)\approx\delta \quad ……10 分$$

7．(10 分) 求过点(-1,-2)，(1,0)，(3,-6)，(4,3)的三次插值多项式。（拉格朗日基底、牛顿基底，**可任选一种基底计算**，要求化成最简形式）

法一： 若用拉格朗日基底，则

$$L_3(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2+l_3(x)y_3 \quad ……3 分$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)}\cdot(-2)+\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)}\cdot 0+\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-0)(3-4)}\cdot(-6)+\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-0)(4-3)}\cdot 3 \quad ……8 分$$

$$=x^3-4x^2+3 \quad ……10 分$$

法二： 用牛顿基底，则

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-1	-2			
1	0	1		
3	-6	-3	-1	
4	3	9	4	1

……4 分

所以，

$$N(x)=f(x)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad ……6 分$$

$$=-2+1\cdot(x+1)+(-1)\cdot(x+1)(x-1)+1\cdot(x+1)(x-1)(x-3) \quad ……8 分$$

$$=x^3-4x^2+3 \quad ……10 分$$

8．(15 分) 已知实验数据如下

x_i	-3	-2	-1	2	4
y_i	14.3	8.3	4.7	8.3	22.7

用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式。

解： 由题意 $\phi=\mathbf{span}(1,x^2)$，$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x^2$，因而

$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^5 1^2=5$，$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=1}^5 x_i^2=34$，$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^5 x_i^4=370$，

$(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^5 y_i=58.3$，$(\varphi_1,y)=\sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i=563$，……5 分

从而得法方程组 $\begin{cases}5a+34b=58.3\\34a+370b=563\end{cases}$ ……8 分

解得 $a=3.5$，$b=1.2$，所以经验公式 $y=3.5+1.2x^2$。……10 分

学院： 专业班级： 学号： 姓名：

答题纸不够时，可以写到纸的背面 注意保持试卷完整，试卷拆开无效

密封线 装订线

9．(15 分) 确定求积公式$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

解：令 $f(x)=1,x,x^2$ 代入公式精确成立，得

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=4h \\ A_{-1}(-h)+A_1 h=0 \to -A_{-1}+A_1=0 \\ A_{-1}(-h)^2+A_1h^2=\dfrac{2}{3}(2h)^3 \to A_{-1}+A_1=\dfrac{16}{3}h \end{cases} \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{8}{3}h$， $A_0=-\dfrac{4}{3}h$。……10 分

得求积公式$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \dfrac{8h}{3}f(-h)-\dfrac{4h}{3}f(0)+\dfrac{8h}{3}f(h)$。……12 分

令 $f(x)=x^3$，得$\int_{-2h}^{2h}x^3dx=\dfrac{1}{4}\left[(2h)^3-(-2h)^3\right]=0$，而对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故求积公式具有 3 次代数精度。……15 分

10．(15 分) 用直接三角分解(杜利特(Doolittle)分解)求线性方程组

$$\begin{cases} 2x+x_2+x_3=4, \\ x_1+3x_2+2x_3=6, \\ x_1+2x_2+2x_3=5, \end{cases}。$$

的解。

解：$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$，

则由对应元素相等，有$u_{11}=a_{11}=2$，$u_{12}=a_{12}=1$，$u_{13}=a_{13}=1$，

$l_{21}=a_{21}/u_{11}=1/2=$，$l_{31}=a_{31}/u_{11}=1/2$，

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=3-\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{5}{2}$，$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=2-\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$，

$l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}=(2-\dfrac{1}{2}\cdot 1)/\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{5}$，$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=2-\dfrac{1}{2}\cdot 1-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{5}$

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{5}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

解 $Ly=b$，得 $y_1=4$，$y_2=4$，$y_3=\dfrac{3}{5}$。

解 $Ux=y$，得 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$。

11．(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$，判断用高斯-塞德尔迭代法解方程组 $Ax=b$ 时的收敛性。

解：高斯-塞德尔迭代法的迭代矩阵

$$B_S=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{11}{12}\end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$\left|\lambda I-B_S\right|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\frac{2}{3}\\0&\lambda&\frac{1}{2}\\0&0&\lambda-\frac{11}{12}\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-\frac{11}{12})，\ \lambda_{1,2}=0，\ \lambda_3=\frac{11}{12} \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$\rho(B_S)=\dfrac{11}{12}<1$，所以，高斯-塞德尔迭代法收敛。……10 分

12.(10 分) 若将方程 $x^3-x^2-1=0$ 写成下列两种迭代函数求不动点的形式：

（1）$x=\varphi_1(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$；　　（2）$x=\varphi_2(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$。

试判断由它们构成的迭代法在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性。

解：考虑 $x_0=1.5$ 的邻域[1.4，1.6]。

（1）$\varphi_1'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$，$\left|\varphi_1'(x)\right|=\dfrac{2}{x^3}\le\dfrac{2}{1.4^3}=0.729<1$，$x=[1.4,1.6]$，所以迭代收敛。

（2）$\varphi_2'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$，$\left|\varphi_2'(x)\right|>1$，$x=[1.4,1.6]$，所以迭代发散。

13.(10 分) 用欧拉法解初值问题 $y'=x^2+100y^2$，$y(0)=1$。取步长 $h=0.1$，计算到 $x=0.3$(保留到小数点后 4 位)。

解：欧拉公式为 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(x_n^2+100y_n^2),n=0,1,2,3$，……5 分

取步长 $h=0.1$，代入 $y_0=1$，计算结果为

x_n	0.1	0.2	0.3
y_n	0	0.0010	0.0050

……10 分