系部______ 专业班级______ 学号______ 姓名______

答题纸不够时，可以写到纸的背面　注意保持试卷完整，试卷拆开无效

密封线　装订线

桂林理工大学考试（考查）试卷

（2017～2018 学年度　第二学期）

课程名称：数值分析　　　　试卷类型：[B] 卷

命 题 人：信息与计算科学教研室　　　　课程序号：377580

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

1.（10 分）设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

[解]设 $x^*>0$ 为 x 的近似值，则有相对误差为 $\varepsilon_r^*(x)=\delta$，绝对误差为 $\varepsilon^*(x)=\delta x^*$，

从而 $\ln x$ 的误差为 $\varepsilon^*(\ln x)=\left|(\ln x^*)'\right|\varepsilon(x^*)=\dfrac{1}{x^*}\delta x^*=\delta$，

相对误差为 $\varepsilon_r^*(\ln x)=\dfrac{\varepsilon^*(\ln x)}{\ln x^*}=\dfrac{\delta}{\ln x^*}$。

2.（12 分）令 $x_0=0$，$x_1=1$，写出 $y(x)=e^{-x}$ 的一次插值多项式 $L_1(x)$，并估计插值余项。

[解]由 $y_0=y(x_0)=e^{-0}=1$，$y_1=y(x_1)=e^{-1}$ 可知，

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=1\times\frac{x-1}{0-1}+e^{-1}\times\frac{x-0}{1-0},$$

$$=-(x-1)+e^{-1}x=1+(e^{-1}-1)x$$

余项为 $R_1(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)=\dfrac{e^{-\xi}}{2}x(x-1),\quad \xi\in(0,1)$，

故 $\left|R_1(x)\right|\le\dfrac{1}{2}\times\max\limits_{0\le\xi\le1}\left|e^{-\xi}\right|\times\max\limits_{0\le x\le1}\left|x(x-1)\right|=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$。。

3.（12 分）给定数据表：$i=1,2,3,4,5$，

x_i	1	2	4	6	7
$f(x_i)$	4	1	0	1	1

求 4 次牛顿插值多项式，并写出插值余项。

[解]

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	4				
2	1	−3			
4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$		
6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{60}$	
7	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{180}$

由差商表可得 4 次牛顿插值多项式为：

$$N_4(x)=4-3(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)-\frac{7}{60}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{1}{180}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

，插值余项为

$$=4-3(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)-\frac{7}{60}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{1}{180}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(x-7),\quad \xi\in(1,7)。$$

4．（8 分）用高斯消去法解方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -5\end{pmatrix}$$

解：对系数矩阵的增广矩阵进行初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & -3 & 5 & -6\\ 0 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}，故\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=0\end{cases}。$$

5．（10 分）用矩阵的直接三角分解法 LU 法求解方程组：$\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 10 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$。

［解］ $\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 10 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & & \\ 1 & 3 & \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & 3 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}$。求解 $\begin{pmatrix}2 & & \\ 1 & 3 & \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$ 可得 $\begin{cases}y_1=\frac{3}{2}\\ y_2=\frac{3}{2}\\ y_3=\frac{1}{2}\end{cases}$，求解

$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & 3 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ 可得 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}\\ x_2=\frac{1}{2}\\ x_3=\frac{1}{2}\end{cases}$。

6．（14 分）分别用复合梯形公式（$n=4$）和复合辛普森公式（$n=2$）计算数值积分：$\int_0^1 e^{-x}dx$，并分别估计它们的误差.

［解

$$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=\frac{1}{16}[\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\frac{k}{8}}{4+\left(\frac{k}{8}\right)^2}+\frac{1}{5}]$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5})$$

$$=\frac{1}{16}[\frac{1}{4}+2(\frac{8}{257}+\frac{4}{65}+\frac{24}{265}+\frac{2}{17}+\frac{40}{281}+\frac{12}{73}+\frac{56}{305})+\frac{1}{5}]\approx 0.11140$$

$$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$

$$=\frac{1}{48}[\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{\frac{2k+1}{16}}{4+\left(\frac{2k+1}{16}\right)^2}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\frac{k}{8}}{4+\left(\frac{k}{8}\right)^2}+\frac{1}{5}]$$

$$=\frac{1}{48}(\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{16(2k+1)}{1024+(2k+1)^2}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5})\approx 0.11157$$

精确值为 $\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\,|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\approx 0.11157$.

用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差。

［解］

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)]=\frac{1-0}{6}[f(0)+4f\left(\frac{0+1}{2}\right)+f(1)]$$

$$=\frac{1}{6}(e^{-0}+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1})=\frac{1}{6}(1+2.42612+0.36788)\approx 0.63233$$。

$R_S=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)=-\frac{1-0}{180}\frac{1}{16}e^{-\eta}$，从而 $|R_S|\le\frac{1}{180}\frac{1}{16}=3.472\times10^{-4}$。

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)]=\frac{1-0}{6}[f(0)+4f\left(\frac{0+1}{2}\right)+f(1)]$$

$$=\frac{1}{6}(e^{-0}+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1})=\frac{1}{6}(1+2.42612+0.36788)\approx 0.63233$$。

$R_S=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)=-\frac{1-0}{180}\frac{1}{16}e^{-\eta}$，从而 $|R_S|\le\frac{1}{180}\frac{1}{16}=3.472\times10^{-4}$

7．（16 分）设方程组$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\ -x_1+4x_2+2x_3=20\\ 2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$，

（a）考察用雅可比迭代法，高斯-赛德尔迭代法解此方程组的收敛性；
（b）用雅可比迭代法及高斯-赛德尔迭代法解此方程组，要求分别写出迭代方程，并进行一次迭代。

［解］（a）由系数矩阵$\begin{pmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\2&-3&10\end{pmatrix}$为严格对角占优矩阵可知，使用雅可比、高斯-赛德尔迭代法求解此方程组均收敛。［精确解为$x_1=-4,x_2=3,x_3=2$］

（b）使用雅可比迭代法：

$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$

$$=-\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&0&2\\2&-3&0\end{pmatrix}x^{(k)}+\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\\20\\3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&0\end{pmatrix}x^{(k)}+\begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\5\\\frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

使用高斯-赛德尔迭代法：

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$

$$=-\begin{pmatrix}5&0&0\\-1&4&0\\2&-3&10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}x^{(k)}+\begin{pmatrix}5&0&0\\-1&4&0\\2&-3&10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-12\\20\\3\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\\frac{1}{20}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{40}&\frac{3}{40}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}x^{(k)}+\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\\frac{1}{20}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{40}&\frac{3}{40}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\\20\\3\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}0&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{1}{10}&\frac{11}{20}\\0&-\frac{1}{20}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}x^{(k)}+\begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\\frac{22}{5}\\\frac{21}{10}\end{pmatrix}$$

$\{x_1+2x_2-2x_3=1$ $\qquad(0)$

8．（18 分）用欧拉法、改进的欧拉法、四阶经典的龙格-库塔方法求解初值问题$\begin{cases}y'=x^2+x-y\\y(0)=0\end{cases}$，取步长$h=0.1$计算，要求分别进行一次迭代，并给出他们的收敛阶数。

［解］
由改进的欧拉公式可知

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+h(x_n^2+x_n-y_n)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{x_n^2+x_n-y_n+x_{n+1}^2+x_{n+1}-[y_n+h(x_n^2+x_n-y_n)\}\\ =(1-h+\frac{h^2}{2})y_n+\frac{h(1-h)}{2}(x_n^2+x_n)+\frac{h}{2}(x_{n+1}^2+x_{n+1})\end{cases}$$，又由$x_0=0$，$y_0=0$，

$h=0.1$，可得$y_{n+1}=0.905y_n+0.045(x_n^2+x_n)+0.05(x_{n+1}^2+x_{n+1})$，从而

$y_1=0.905\times0+0.045\times(0^2+0)+0.05\times(0.1^2+0.1)=0.0055$；

$y_2=0.905\times0.0055+0.045\times(0.1^2+0.1)+0.05\times(0.2^2+0.2)$；
$=0.0049775+0.00495+0.012=0.0219275$

$y_3=0.905\times0.0219275+0.045\times(0.2^2+0.2)+0.05\times(0.3^2+0.3)$；
$=0.0198443875+0.0108+0.0195=0.0501443875$

$y_4=0.905\times0.0501443875+0.045\times(0.3^2+0.3)+0.05\times(0.4^2+0.4)$；
$=0.0453806706875+0.01755+0.028=0.0909304706875$

$y_5=0.905\times0.0909304706875+0.045\times(0.4^2+0.4)+0.05\times(0.5^2+0.5)$。
$=0.0822922569721875+0.0252+0.0375=0.14499225697218755$