数学分析简明教程习题答案

作者：BlackSmith

时间：September 15, 2023

满招损，谦受益

目录

第 1 章 绪论

1.1 绪论

1.2 实数连续统

第 2 章 函数

2.1 函数概念

2.2 复合函数与反函数

2.3 初等函数

第 3 章 极限与函数的连续性

3.1 极限问题的提出

3.2 数列的极限

1. 用定义证明下列数列极限为零

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$;

解 由数列极限的定义可知，要使

$$\left|\frac{n+1}{n^2+1}-0\right|=\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$;

解 由数列极限的定义可知，要使

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}$;

解 由数列极限的定义可知，要使

$$\left|\frac{1}{n!}-0\right|=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{n!}-0\right|<\varepsilon.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}$;

解 由数列极限的定义可知，要使

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}-0\right|=\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}<\frac{n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}-0\right|<\varepsilon.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

解 由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0\right|=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0\right|<\varepsilon.$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}$;

解 令

$$A=\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdots\frac{10}{10},$$

考虑 $n>10$ 的情况, 由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|\frac{10^n}{n!}-0\right|=\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdots\frac{10}{10}\cdots\frac{10}{n}=A\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{10}{n}<A\frac{10}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{\left[\frac{10A}{\varepsilon}\right],10\right\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{10^n}{n!}-0\right|<\varepsilon.$$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}(a>1)$;

解 因为 $a>1$, 所以可令 $a^n=1+\lambda(\lambda>0)$, 故 $a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$, 又由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{(1+\lambda)^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2}=\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon.$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$;

解 由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon.$$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$;

解 由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|=\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|<\varepsilon.$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+a^{(-n)}\right)$;

解 因为 $a>1$, 所以 $a^(-n)>0$, 故由数列极限的定义可知, 要使

$$\left|\left(\frac{1}{n}+a^{(-n)}\right)-0\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\left(\frac{1}{n}+a^{(-n)}\right)-0\right|<\varepsilon.$$