

# 顾及先验海底地形信息的多波束测线设计建模方法

职首旭<sup>1</sup>, 夏生杰<sup>2</sup>, 史蓉蓉<sup>3</sup>

(1. 兰州大学物理科学与技术学院, 甘肃 兰州, 730000; 2. 兰州大学信息科学与工程学院, 甘肃 兰州, 730000;  
3. 兰州大学材料与能源学院, 甘肃 兰州, 730000)

**摘要:** 为提升海底地形测量精度和效率, 本文聚焦多波束测深技术在复杂海域的应用, 建立了一种顾及先验海底地形信息的测线设计模型。研究采用数学几何推导与遗传算法相结合的方法, 构建了不同海底地形条件下多波束测深覆盖宽度与相邻测线覆盖宽度重叠率之间的数学关系模型, 并引入蒙特卡罗法辅助建立更高效的模型, 实现在二维静态和三维动态环境下测线轨迹的优化设计。结果表明, 基于遗传算法的测线设计能显著提高测深数据采集的准确性与全面性, 优化测线轨迹, 为多波束测线问题的实际应用提供数学支持。

**关键词:** 海底探测; 多波束测深技术; 计算机仿真; 遗传算法; 蒙特卡罗法

**中图分类号:**

**文献标识码:**

**文章编号:**

## Multibeam Line Design Modeling Approach

### Incorporating a Priori Seabed Topographic Information

ZHI Shouxu<sup>1</sup>, XIA Shengjie<sup>2</sup>, SHI Rongrong<sup>3</sup>

(1. School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China;

2. School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China;

3. School of Materials and Energy, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

**Abstract:** The objective of this paper is to enhance the precision and efficacy of seabed topographic surveying through the utilisation of multibeam bathymetry technology in intricate marine environments. The study adopts a combination of mathematical geometric derivation and genetic algorithm to construct a mathematical relationship model between the coverage width of multibeam bathymetry and the overlap rate of the coverage width of neighbouring lines under different seabed terrain conditions, and then introduces Monte Carlo to assist in the establishment of a more efficient model, so as to achieve the optimization of the design of survey line trajectories under the two-dimensional static and three-dimensional dynamic environments. The results show that the line design based on genetic algorithm can significantly improve the accuracy and comprehensiveness of the bathymetric data acquisition, optimise the line trajectory, and provide mathematical support for the practical application of the multibeam line survey problem.

**Key words:** Undersea Exploration; Multibeam Depth Measurement Technique; Computer Simulation; Genetic Algorithm; Monte Carlo Method<sup>1</sup>

## 1 引言

近年来, 随着海洋资源开发和环境保护的需要, 海底地形的精确测绘越来越受到重视。多波束测深

技术具有快速测量和高精度等优势, 已成为海洋测绘的首选工具<sup>[1]</sup>。传统测线设计方法, 如基于海区平均水深和最浅水深的简单测线布局, 往往难以适应复杂多变的海底地形特征<sup>[2]</sup>。因此, 如何根据不

<sup>1</sup>作者简介: 职首旭(2003-), 男, 北京, 理论物理专业本科生。 E-mail: zhishx21@lzu.edu.cn 电话: 13601003089

同海底地形条件优化测线轨迹设计，确保测量的高效性和测量结果的准确性，成为了亟需解决的问题。

目前，国内外学者在多波束测深技术的优化应用方面开展了广泛的研究。例如，蒙特卡罗法被用于评估多波束测深系统的性能<sup>[3,4]</sup>，而遗传算法则被用来优化多波束测深系统的参数配置和测线布局<sup>[5]</sup>。尽管这些研究取得了显著成果，但在实际应用中，复杂地形条件下测线设计如何有效调整测线间隔和路径，直接关系着多波束测深的效率和成果质量，仍是一个未完全解决的问题<sup>[6,7]</sup>。

鉴于此，本文构建了一种顾及先验海底地形信息的多波束测线设计模型，旨在通过数学几何推导与遗传算法的综合应用，解决复杂海域条件下测线轨迹优化设计的问题。首先考虑二维静态简化情况，即海洋测线参数仅与多波束换能器自身开角和海洋地形坡度有关，而开角在测线设计中无法自主决定的情形，构建数学模型描述覆盖宽度与相邻测线覆盖宽度重叠率之间的关系。扩展至三维动态情况，即引入的扫描测线方向与坡面法向在水平面上投影夹角会随扫描位置变化而自主决定变化的情形，以适应复杂的海洋环境。

通过模型构建与算法优化，构建基于整数规划的多波束测线问题的海底探测分析模型为多波束测深技术的优化提供了数学基础，可提升多波束测深技术在海洋测绘中的应用效果<sup>[8,9]</sup>。

## 2 数学模型构建

通过建立二维静态斜面和理想三维动态海底地形模型，进行理想条件下全覆盖测线的设计，再将其推广至实际复杂海底地形情形。

### 2.1 二维静态情形下的覆盖宽度与重叠率模型

在二维静态情形下，建立多波束测深覆盖宽度与相邻测线覆盖宽度重叠率之间的数学关系<sup>[8,9]</sup>。

根据几何关系推导和分析出覆盖宽度和重叠率与其他变量（如海水深度、坡度、开角等）之间的数学表达式。再根据设定的初始条件（如开角为 $3\pi/4$ ，坡度为 $\pi/120$ ，海域中心点处的海水深度为70m等），计算在不同测量点的覆盖范围及相应的重叠率<sup>[8,9]</sup>。

单条测线几何结构见图1。

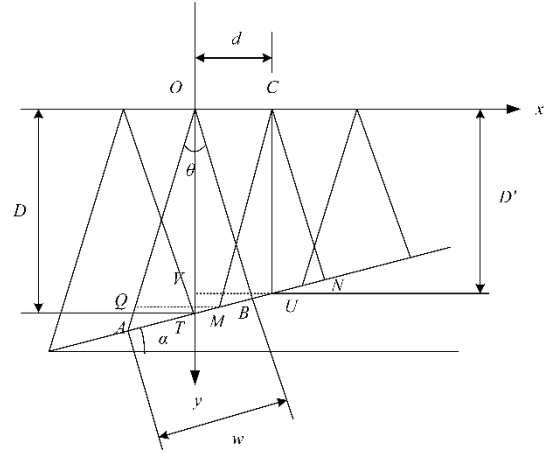


图1 单条测线几何结构示意图

过M点作 $QM \parallel OC$ 交OA于Q点，过U点作 $UV \parallel OC$ 交OT于V点，根据几何关系可得重叠率 $\eta$ 为：

$$\eta = 1 - \frac{d \cos \frac{\theta}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right)}{D \sin \theta \cos \alpha} \quad (1)$$

覆盖宽度MN为：

$$MN = \frac{w(1 - d \tan \alpha)}{D} = w' \quad (2)$$

由以上分析推广至一般情况。设海水深度为 $D(x)$ ，海域中心点处海水深度为 $D$ ，测线距中心处距离为 $x$ ，斜面坡度为 $\alpha$ ，覆盖宽度为 $W(x)$ ，海域中心点处覆盖宽度为 $W$ ，与前一条测线的重叠率为 $\eta(x)$ ，测线间距为 $d$ ，多波束换能器的开角为 $\theta$ ，则：

$$D(x) = D - x \tan \alpha \quad (3)$$

$$W(x) = W \left( 1 - \frac{x \tan \alpha}{D} \right) \quad (4)$$

$$\eta(x) = 1 - \frac{d \cos \frac{\theta}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right)}{D - (x - d) \tan \alpha} \quad (5)$$

$$W = \frac{D \sin \theta \cos \alpha}{\cos \left( \frac{\theta}{2} + \alpha \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \quad (6)$$

### 2.2 三维动态情形下的覆盖宽度模型

基于给定轨迹条件下的三维动态情形，为进一步优化测线轨迹，将蒙特卡洛法<sup>[10]</sup>与遗传算法<sup>[11]</sup>整合到分析中，可提高测深数据的采集效率和准确性<sup>[10,12]</sup>。因相关算法易于并行化，可在多个处理单元运行，有效提高建模布线效率<sup>[5,10,13]</sup>。

东西向海底坡面侧视结构见图2。

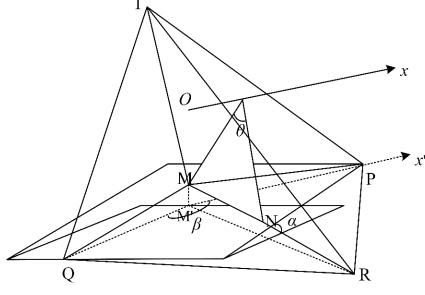


图2 东西向海底坡面侧视图

MM' 垂直于水平面，MT 为坡面法向，M'P 平行于测线方向，MP ⊥ MR，Q 在海底坡面与水平面的交线上。设覆盖宽度与其在水平面上投影的夹角为  $\gamma$ ，测线方向与其在水平面上的夹角为  $\delta$ ，测线方向与坡面的法向在水平面上投影的夹角为  $\beta$ ，经过海域中心点的测线方向上海水的深度为  $\lambda(x)$ ，测线与中心点的直线距离为  $\epsilon$ ，其中有小量近似处理  $MM' \approx 0$ 。

由几何推导得及联立方程组得：

$$\gamma = \tan^{-1}(\tan \alpha \sin \beta) \quad (7)$$

同理，在三棱锥 M-M'QP 与三棱锥 T-MQP 中，可得：

$$\delta = \tan^{-1}(|\tan \alpha \cos \beta|) \quad (8)$$

则：

$$\lambda(\epsilon) = \begin{cases} D + \epsilon \tan \delta, & \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ or } [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ D - \epsilon \tan \delta, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$W(\epsilon) = \frac{\lambda(\epsilon) \sin \theta \cos \gamma}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma) \cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)} \quad (10)$$

### 2.3 最优化测线设计模型

基于上述数学关系，综合考虑三维地形等复杂因素，进行最优化测线轨迹分析，建立更高效的测线设计模型。采用遗传算法，优化数据采集的全面性，确保对地形变化的有效捕捉。通过整合二维和三维模型，为不同地形条件下测线轨迹的优化设计提供数学基础。

由图 1 可知各测线波束排列构成一系列相似三角形结构。记矩形海域长为  $a$ ，宽为  $b$ ，可推导出此系列相似三角形的相似系数  $s$  为：

$$s = \frac{MN}{AB} = 1 - \frac{d \tan \alpha}{D} \quad (11)$$

由式(6)、式(11)可知，当地形平坦时，设计测线时应尽可能分布平均，即测线应围绕海域的中心对称布设<sup>[89]</sup>。由 2.1 的分析可知，总覆盖宽度  $W$  遵循式(12)的数学关系：

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \approx nw = \frac{nD \sin \theta \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (12)$$

令

$$d' = \begin{cases} d, & n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N} \\ d/2, & n = 2k \end{cases} \quad (13)$$

对于全覆盖水深测量，相邻测线覆盖宽度重叠率应不少于 10%<sup>[14]</sup>。经计算，当重叠率大于 20% 时会导致模型计算量比重叠率为 10% 时大 10 余倍以上。为兼顾计算效率和测量精度，将重叠率控制在 10%-20%。因此对于每个测线覆盖宽度，有

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{d \cos \frac{\theta}{2} \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)}{(D - \frac{n-1}{2} d' \tan \alpha) \sin \theta \cos \alpha} \leq 20\% \quad (14)$$

$$\eta_{\min} = 1 - \frac{d \cos \frac{\theta}{2} \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)}{(D + \frac{n-1}{2} d' \tan \alpha) \sin \theta \cos \alpha} \geq 10\% \quad (15)$$

其中，测线总长度  $\xi$  为：

$$\xi = nb \quad (16)$$

相邻测线的间距  $d$  为：

$$d = \frac{a}{n} \quad (17)$$

测线覆盖宽度的平均重叠率  $\bar{\eta}$  为：

$$10\% \leq \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \leq 20\% \quad (18)$$

由图 2 可知， $\beta$  为测线方向与东西向水平线的夹角。因该海域南北方向长度较短，为提高测量精度，需兼顾测线覆盖率与重叠率。故沿东西方向进行测量布线。

在一般情况下，若海底地形平坦，设测线总长度为  $\xi$ ，可知测线设计需满足以下约束关系：

$$\begin{cases} \min \xi \\ \text{s.t. } n \in \mathbb{N}^+, \quad \bar{\eta} \in [0.1, 0.2], \quad \eta_{\max} \leq 20\%, \quad \eta_{\min} \geq 10\% \end{cases} \quad (19)$$

讨论实际复杂海底地形情形时，可将其看作为无数个坡度各异的平坦海面的集合，由此可利用式(6)、式(11)、式(19)求解。将待测海域划分为  $m \times n$  个网格，每个网格边长为  $k$ 。

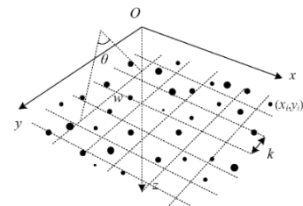


图3 海域曲面网格化示意图

对该海域任意位置  $i$ ，坐标记为  $(x_i, y_i)$ 。设现

有 $\mu$ 条测线，每条测线均会经过一组连通的网格集合 $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_p\}$ ，且满足：

$$\begin{cases} \forall i \in Oxy, & i \in \mathcal{S}_j (1 \leq j \leq \mu) \\ \exists \mathcal{S}_u \in \mathcal{S}_i, & \mathcal{S}_v \in \mathcal{S}_j, \quad d(\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v) < w \end{cases} \quad (20)$$

由式(6)、式(11)、式(19)、式(20)可知，测线设计需要满足以下约束关系：

$$\begin{cases} \min \xi = \min_{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} l_i \\ s.t. \quad \forall i, \exists j, x_i - \bar{x}_j \leq \frac{w}{2}, \bar{x}_j - x_i \leq \frac{w}{2}, y_i - \bar{y}_j \leq \frac{w}{2}, \bar{y}_j - y_i \leq \frac{w}{2} \\ \forall i < j, intersections(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) \geq \max(0, 0.2 * \min(area(\mathcal{S}_i), area(\mathcal{S}_j))) \end{cases} \quad (21)$$

其中， $intersections(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j)$ 表示任意两个连通网格集合 $\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_j$ 的重叠面积， $\min(area(\mathcal{S}_i), area(\mathcal{S}_j))$ 表示两个连通网格集合的最小面积。

3 试验分析

利用已构建的曲面测量布线数学模型，通过使用一组若干年前某海域（东西长 9260m、南北宽 7408m）单波束测深数据来进行模型的应用及验证，计算测线条数、测线覆盖宽度、测线总长度、测线分布、漏测海域占待测海域比例等相关参数。先验的单波束测深数据通过每间隔 37m 记录一次海水深度，共有 $251 \times 201$  个数据点。

3.1 二维静态情形下的覆盖宽度与重叠率计算结果

利用式(3)-式(6)，可得二维静态情形下覆盖宽度及重叠率计算结果，如表 1 所示，其中海水深度为某海域海底地形单波束测深实测数据。

表 1 测线覆盖宽度及重叠率计算结果

测线距中心点距离/m	海水深度/m	测线覆盖区域宽度/m	相邻测线覆盖宽度重叠率/%
-800	90.9487	86.2185	——
-600	85.7116	81.2537	33.64
-400	80.4744	76.2889	29.5852
-200	75.2372	71.3241	25.0027
0	70	66.3593	19.7822
200	64.7628	61.3945	13.7805
400	59.5256	56.4297	6.80822
600	54.2884	51.4649	-1.391
800	49.0513	46.5001	-11.172

由表 1 可知，海洋深度越大，测线覆盖宽度的值越大，重叠率越高。随着海洋深度的减小，测线覆盖宽度的值变为负值，即会出现海域测漏的情况。因此在深海域需要着重考虑测线设计，以控制重叠率的同时提高测线的覆盖率。

3.2 三维动态情形下的覆盖宽度计算结果

利用式(7)-式(10)，可得三维动态情形下海域不同位置测线覆盖宽度计算结果，见表 2。

表 2 海域不同位置测线覆盖宽度计算结果

w/m	测量船距海域中心点处的距离/m							
$\beta/\text{rad}$	0	556	1111	1667	2222	2778	3334	3889
0	415.692	466.091	516.49	566.889	617.288	667.686	718.085	768.484
$\pi/4$	416.192	451.872	487.552	523.232	558.912	594.592	630.273	665.953
$\pi/2$	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692
$3\pi/4$	416.192	380.511	344.831	309.151	273.471	237.791	202.110	166.430
$\pi$	415.692	365.293	314.894	264.496	214.097	163.698	113.299	62.900
$5\pi/4$	416.192	380.511	344.831	309.151	273.471	237.791	202.110	166.430
$3\pi/2$	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692	416.692
$7\pi/4$	416.192	451.872	487.552	523.232	558.912	594.592	630.273	665.953

由表 2 可知，测线覆盖宽度随着测线方向与坡面法向在水平面上投影夹角的变化关于 $\pi$ 呈对称分布。投影夹角取 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，测线覆盖宽度最大。

3.3 最优化测线设计分布情况

对不规则海底地形（东西长 9260m、南北宽 7408m）下全覆盖测线设计为整数规划问题，利用式(12)-式(18)和式(21)进行布线设计。通过对海底坡面不规则曲面进行网格化处理，该海域的海水深度分布见图 4。因海底为非规则曲面，且测量点数庞大，导致计算复杂，故使用优化算法求解测线设计方案。

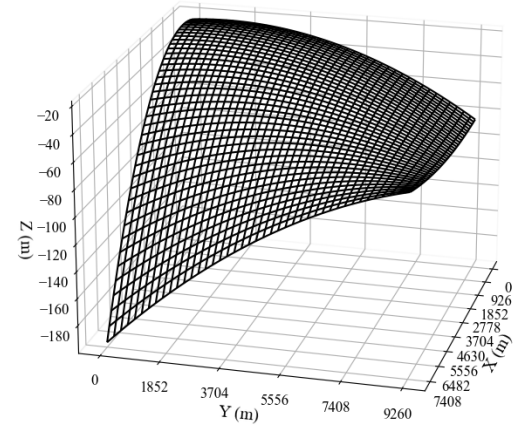


图 4 海域海水深度网格图

通过计算测线条数、测线总长度、测线分布、漏测海域占待测海域比例等相关参数。可知沿海域东西方向共布设 18 条测线，见图 5。取海域最南侧为原点，测线位置分别为（单位：m）：258.7843，644.6490，1098.6112，1363.9249，1827.0025，2322.4201，2698.7520，3099.3792，3397.4247，3988.0982，4303.9852，4644.9741，5106.1479，5504.6330，6010.6615，6372.3063，6577.4710，7046.9807。测线分布不均匀，主要集中在南北方向

0-4000m 范围内,随着向北推进,测线密度并非处处一致。由图 4、图 5 可知,海洋地形坡度较大处测线较密集。

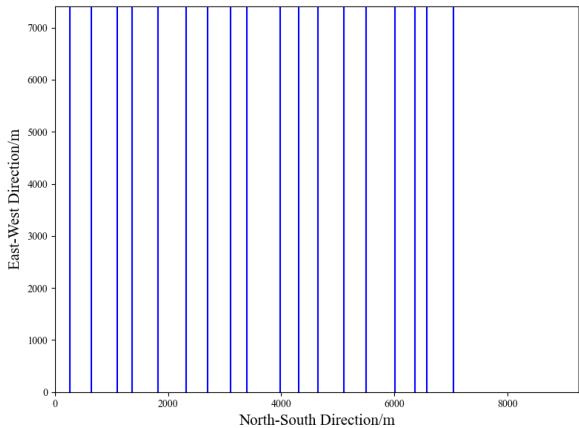


图 5 海底曲面测线分布情况

通过计算可得,漏测海域占待测海域的百分比为 0.2186%,测线总长度为 166680m,重叠区内所有测线重叠率均处于 10%至 20%区间内。

4 结束语

本文基于多波束测深技术在先验海底地形信息条件下的测线设计,采用数学几何推导与遗传算法等方法,构建了描述多波束测深覆盖宽度和相邻测线覆盖宽度重叠率之间关系的数学模型。在三维动态环境中,通过引入遗传算法优化测线轨迹,可控制相邻测线覆盖宽度重叠率、降低漏测率。结合数学模型构建与试验分析,可知本文的测线设计可显著提升测深数据采集的效率和准确性,为多波束测深技术在海洋调查和环境监测领域的应用提供了数学基础,能够有效指导测线轨迹的最优化设计,为多波束测深技术的高效应用开辟新的途径,具有推广应用价值。

本文涉及的一些简化假设在真实世界的大规模应用中仍有待进一步验证。未来工作将致力于模型的进一步完善以及对大规模整数规划问题求解效率的优化。此外,还将探索如何将机器学习和人工智能技术融入模型,以期实现更智能的测线设计和数据分析。

参考文献:

[1] ELEFTHERAKIS D,et al. Backscatter calibration of high-frequency multibeam echosounder using a reference single-beam system, on natural seafloor[J]. Marine Geophysical Research, 2018, 39: 55-73.

[2] IGBINENIKARO O,PADEKOYA O O,ETUKUDOH E A.

Emerging underwater survey technologies: a review and future outlook[J]. Open Access Research Journal of Science and Technology, 2024, 10.02: 071-084.

[3] 张杰,王翔,严小娟. 基于蒙特卡罗方法的多波束测深系统误差分析[J]. 海洋测绘, 2017, 37(6): 44-47.

[4] 李立东,张建秋,崔煜. 基于蒙特卡罗法的多波束测深系统性能分析[J]. 海洋测绘, 2007, 27(1): 38-42.

[5] 刘亚楠,周涛,张小明. 基于遗传算法的多波束测深声纳系统参数优化设计[J]. 海洋测绘, 2018, 38(3): 83-97.

[6] 朱永亮,周建国,祝剑峰. 基于计算机仿真的多波束测深系统设计与性能分析[J]. 海洋测绘, 2011, 31(3): 90-93.

[7] COLBO K,et al. A review of oceanographic applications of water column data from multibeam echosounders[J]. Estuarine, coastal and shelf science, 2014, 145: 41-56.

[8] 北京开运联合信息技术集团股份有限公司. 多波束测量船的测量布线设计方法、装置、设备和介质[P]. CN202410160915.2, 2024-02-03.

[9] 北京开运联合信息技术集团股份有限公司. 数学模型的处理方法、装置、电子设备和存储介质[P]. CN:202410166444.6, 2024-02-04.

[10] KROESE D P,et al. Why the Monte Carlo method is so important today[J]. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2014, 6.6: 386-392.

[11] MIRJALILI S, MIRJALILI S. Genetic algorithm[M]. In: Evolutionary algorithms and neural networks: Theory and applications, 2019: 43-55.

[12] HALDURAI L,MADHUBALA T,RAJALAKSHMI R. A study on genetic algorithm and its applications[J]. International Journal of computer sciences and Engineering, 2016, 4.10: 139.

[13] DING S,SU C,YU J. An optimizing BP neural network algorithm based on genetic algorithm[J]. Artificial intelligence review, 2011, 36: 153-162.

[14]海道测量规范:GB 12327-2022[S]. 北京:国家市场监督管理总局,国家标准化管理委员会, 2022.