

前言

引力乃人尽皆知，自我们蹒跚学步便相伴。纵使物体因它下坠，仍有许多驾驭引力的高手，如轻松掷筐的篮球球员，亦或挥拍自如的羽毛球手。鸟天生长有一对契合空气动力学的翅膀，高耸入云，更胜一筹。而大气的压强分布仍需借引力来稳定，故结论稍显意外：引力虽可能使鸟丧命，但也正是引力使鸟脱身。这皆拜引力所赐。

它如此普遍，人们自古以来便在思索其缘由。古希腊先贤 Aristotle 认为，物体含有一定比例的重质 (gravitas) 和轻质 (levitas)，其自然运动分别向着和远离宇宙中心，但未明确动体速度与其重轻质、所处介质等的具体关系。6 世纪，拜占庭哲学家 Philoponus 提出，任何物体于同一点皆以相同方式自由落体 (free fall)。16 世纪，意大利弥漫着复兴之息，Galileo 利用斜坡和单摆实验发现下落距离正比于时间平方，依连续性思想并忽略阻力，合理外推至自由落体。通过微积分的思想雏形，Galileo 认为任何物体于同一点加速度一致，与其质量无关。17 世纪，人们已普遍承认 Kepler 三大定律¹：椭圆轨道、掠面恒速、周期关系。由此 Newton 阐明了更为精确且统一天地的规律：行星绕恒星的掠面恒速说明角动量守恒，行星所受（由 Newton 第二定律定义）的引力是有心力，必然是保守力。进而椭圆轨道现象就可将引力大小确定到平方反比距离。用今日的术语讲，质量密度 $\mu(\mathbf{x}, t)$ 所激发的引力势 $\phi(\mathbf{x}, t)$ （取无穷远为零势）满足

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\mu(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \implies \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \mu(\mathbf{x}, t).$$

后者称**引力 Poisson 方程**，推导类似于电场的 Gauss 定律。试验质点的运动方程为 $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi$ 。

这一理论取得了巨大成功，但临近 20 世纪时遇到了一系列困难。Newton 引力明显是超距的： \mathbf{x} 处 t 时的 ϕ 由空间各点一齐于 t 时的 μ 决定，引力场传播无限快。而电磁学中 Coulomb 定律仅是静态解，电势应记作 $\varphi(\mathbf{x})$ 。电磁学能排除超距解，因为还有涉及磁场、时间的方程参与约束。Newton 引力场论没有这种外援，因为默认

¹较早的英语文献会给人名添后缀（常为 -an）表示形容词和名词，如 Galilean, Newtonian, Jacobian。这些表达沿用至今，但对当代人物来说一般不再采取。为迎合时代，本书中这些旧时人物亦不添后缀。

平方反比律在动态也成立. Newton 尝云, 平方反比律只是数学上的方便描述, 但也难以提供更合理的解释了. 欲解决超距作用, 一种思想是想象周遭弥漫着媒介性质的物质, 用于传递相互作用, 即所谓**定域场**, 从而将平方反比作为近似情形. 这一概念最初由 18 世纪 Faraday 提出, 经由 Gauss、Maxwell 等人对数学的发展, 定域场逐渐作为一种物理实质而占据一席.

目前实验范围内, 描述引力最成功的定域场论仍归于 Albert Einstein. 他另辟蹊径, 于 1915 年 11 月完成了其 8 年奋斗之终幕:

$$G_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$
$$\sum_{\sigma} g^{\sigma\sigma} T_{\sigma\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma\sigma} = T$$

图: 取自《引力的场方程》(*Die Feldgleichungen der Gravitation*)

Einstein 称之**广义相对论** (general relativity). 1919 年, Eddington 日全食实验验证了光线曲折的关键结论. 彼时欧洲正值战后阴霾, 故实验结果被相继刊登在各大报章的头版, 冠之“科学革命”. 这的确是现代物理学的伟大胜利. 诚然, 新符号自带

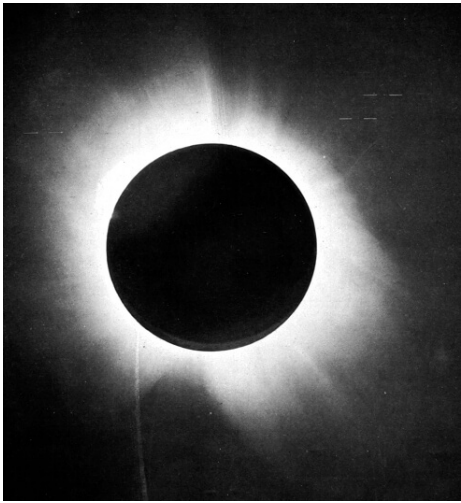


图: Eddington 日全食实验结果

神秘面纱, 固然令人费解, 败坏了大众印象. 但我们不必妄自菲薄, 无非是 Newton 理论需要微积分, 而 Einstein 理论需要额外的几何学罢了. Einstein 方程仍类似于引力正比于物质的形式. 它们都是人类漫漫长征的里程碑. 所需的基本知识并非完全陌生, 甚至一旦接受后, 将发现 Einstein 的思想其实更自然、更简单.

想真正了解一套理论，仅仅知道方程还远不够。广义相对论与 20 世纪物理学所作的一些最蔚为奇观的预言相联系。读者多少在科普或艺术作品中，听说过这些现象：黑洞视界、平行宇宙、虫洞、宇宙膨胀、暗物质、信息熵、全息投影……1915 年时，这些还远未为人知，唯有人们理解方程的动力学后才能发现。花费的时间长得惊人，这其中的艰辛事迹并不逊色于 Einstein 的孤勇奋斗。本书聊物理时亦将对历史简要一瞥。目前，物理学能分析的一般解往往只是简单解的微扰，所谓的宇宙监督假设、一般条件的奇点等问题都未得到普适解答。这些问题恰恰是一套理论意义和适用范围的基础考量。我们只能期望后续理论，继续揭示出美丽的结构，帮助人类进一步认识世界。

谨以此段阐明本书之深度、广度。本书以理工类专业一年级的多元微积分、线性代数、普通物理学为基础，致力讲述引力、时空等话题，为理解前沿进展作准备。将尽可能剖析概念动机，搭建新旧知识之桥梁。本书划分为广义相对论、数值计算以及量子理论，附录提供数学知识以飨读者。仅为证明单个命题所需的知识也放于附录，供有兴趣的读者查阅。细节未必完整提供，未提供时将给出简介和参考资料。故最终，附录在深度上似乎要讲透现代微分几何，但广度上又不完整。此乃笔者故意为之。因为本书不是要向读者大肆摆弄概念，而是补充看懂前沿所最少必要的、作了严格定义的数学。本书看似未设习题，但实际上巧置省略，足当练习。给出概念、结论时或通过字体改变暗示，或带编号地引入。不都采用编号只是为行文流畅，以免让本就不易的内容雪上加霜，但代价是失去链接便利。这固然重要，因为定义、命题在文中一般只出现一次，难免要来回翻阅，故敬请读者不厌其烦。

夏草

2025 年 6 月

参考文献

- [1] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, 1687, Eng: *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (California, University of California Press, 1999). 1
- [2] Einstein A. et al. (1958) *The Principle of Relativity*. New York: Dover. 1.1.2
- [3] Brans C. H, Dicke R. H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Phys. Rev., 1961, 124: 925-935. 1.4.2
- [4] Bhabra A, Sarkar K. *On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory*. Gen. Rel. Grav., 2005, 37: 2189-2199. 1.4.2
- [5] Will C M. *The confrontation between general relativity and experiment living*. Rev. Rel., 2014, 17: 4. 1.4.2
- [6] Will, Clifford M. 2018. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge: Cambridge University Press. 5.1
- [7] Ohanian H C, Ruffini R. 2013. *Gravitation and Spacetime*(3rd Edition). Cambridge: Cambridge University Press. 5.1
- [8] Weinberg S. 1971. *Gravitation and Cosmology (Principles and Applications of the General Theory of Relativity)*, WILEY.
- [9] Parrott S (1987) *Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry*. Berlin: Springer. 2