

Chapter 1

经典引力场论

1.1 场论初步

1.1.1 时空与相对性原理

物理学研究各类**事件 (event)**。类似于撰写记叙文，真实事件总持续一段时间并占据一定体积，但可将事件理想化，只用时刻和位置点构成**时空点**来确定事件。目前认为物质都由**粒子 (particle)**组成，其占据一个位置点，而日常物质隶属**有质粒子**，我们只需一个有质粒子即可作为事件的**观者 (observer)**，实验上总选足够小的仪器。尽管空间这个概念已深入人心，但它并不严格。我们不假思索地认为空间是同一时刻所有物质的分布，可实际上，观者只能对自己身上的事件做**直接观测**或**当时当地观测 (local measurement)**。欲观测其它地方的事件，单个观者必须想办法**间接观测**。首先想到人类总用信号感知世界。可依靠观者和被观测物的信息交流，比如能给予视觉图像的可见光，或更深奥的天文观测。然而无论可见光还是神经元生物电，其传播速率皆有限，传递过程花费时间，图像通常存在扭曲和滞后²，故不可能通过信号真正体会与周围的同时性。当然，这些信号依旧很快，以至于直到 Einstein 之前，人类都对同时性保有错觉。

通常考虑另一办法：尽可能处处设置观者形成**参考系**。任取事件，总存在一个观者经过它，进而记录直接测量结果，后续视需求再传递给其余观者。记录事件时选择坐标方法。读者或许认为，可通过叙述事件来确定某一点，即“此处何物发生何事”，而事件本身用其它自然语言叙述。但这只对其目击者有意义，缺乏科学数据的可传达性。若目击者欲转告事件发生的位置，或欲为后代留下记录，则不得不用经纬度这种明确、或某栋大楼正北一百米这种含蓄的坐标来描述位置。实质上，坐标给出了确定点的操作程序，此乃叙述性方法所不及。叙述性方法只对那些有真实事件的地方才有效，但大多数

²对高速物体、强引力场现象的测算足以总结为一门课题，又同计算机图形学结合，称为**相对论视觉**。

时空点是“空”的，没有任何真实事件发生过。坐标空间是连续的、不可数的集合，而实际事件的集合是分离的、有限归纳的集合。因此不可能认为这两种集合是等同的。

细节在于，标准钟只确保各观者的钟全同，即只约束**走时率** (rate)，而对**初始设定** (setting) 即零点选取未做要求。约定各零点才能得到坐标系，从而确定哪些事件构成时刻 t 的**同时事件集** Σ_t ，此即比空间更严格的替代概念。建立坐标系需要约定基准测量工具：**标准钟**和**标准尺**。我们必须约定某种足够稳定的周期事件以定义时间单位。当今国际单位制正行此道： ^{133}Cs 基态的两超精细能级之间跃迁辐射周期为 $1/9192631770\text{ s}$ ，因而可取 ^{133}Cs 原子钟，其均匀流逝、走时准确。其读数称为该观者的**固有时** (proper time)。再约定某种信号，在任何时刻、任意参考系下，沿任意方向的速率测值相同，记作 c ，进而定义长度单位。国际单位制规定 $c = 299792458\text{ m/s}$ ，实际载体约定为真空电磁波或**光子** (photon)。因为在历史上即使单位制有不同，且承认 Newton 意义的惯性参考系，人们仍然发现：光速在任意惯性参考系下测值相同，这称为**光速不变**。实验精度极高，可认为光和 ^{133}Cs 一样是稳定基准的合适候选。当代理论中，(静) 质量特指粒子在相对静系所测质量，而光不存在相对静系，故光子没有甚至不可定义质量，属于**无质粒子**。

更普遍地，考察全体事件规律排布的集合。比如，以某参考系为基准，可连续堆叠各时刻的同时事件集，即给空间补上时间轴就形成了**时空连续统** (spacetime continuum)，简称**时空**。故同时事件集又可形象地称为**同时面** (simultaneity surface)。由于存在不同参考系选择，故建议直接默认存在一个 4 维**流形** (manifold) 作为时空的理想模型。流形由点连续地而非离散地分布而成，以建立坐标系¹。同时面只是截取时空的一系列切片。实际上物理研究总要预设背景流形。比如，Newton 力学的研究背景是 \mathbb{R}^3 空间；亦或更为抽象，如热力学研究压强、温度的相图。无论坐标系选取如何，描述任一事件的 4 个坐标依次记作 x^0, x^1, x^2, x^3 ，约定 x^0 对应时间，正方向为**未来**，反方向为**过去**，其余坐标对应空间：

$$x^0 := ct, \quad x^1 := x, \quad x^2 := y, \quad x^3 := z. \quad (1.1.1)$$

其中给时间乘上无歧义常数 c 以使量纲一致。此后多采用几何制 ($c = G = 1$)，则 $x^0 = t$ ，这样 x^0, t 都可称**坐标时**。时空中的曲线称**世界线** (worldline)。一族世界线构成**世界管** (worldtube) 或**线汇** (congruence) \mathcal{C} 。参考系 \mathcal{R} 就是其每条世界线 γ 都有观者对应的世界管。无交叉线汇 \mathcal{C} 所占时空范围内每一点，都 $\exists! \alpha \in \mathcal{C}$ 对应。各观者按 a^i 编号，且用固有时 a^0 参数化，便建立了所谓**共动系**或**固有系** $\{a\}$ 。将实际对象从粒子改为流体质元，则观者即流线，进而对应于流体力学的 Lagrange 表述。凡示意时空及世界线的图就是**时空图** (spacetime diagram)。就一般的四维时空，固然画不出直观图像，但许多问

¹最初，我们仅用微积分和坐标系研究背景的**局部** (local) 性质，建立了**微分几何** (differential geometry)。随着集合论和**拓扑学**发展，我们发现可将背景准确称为**拓扑空间** (topological space)，其上提供了连续性定义。赋有坐标系的拓扑空间即流形，总规定系 $\{x\}, \{x'\}$ 间的变换 $x'' = x''(x)$ 可逆且光滑，这样可随意做微积分。拓扑学提供了分析**整体** (global) 性质的工具，便有了**现代微分几何**。

题总能借助对称性，省略部分空间维度。

这些概念看起来都很显然，但事实远非如此：时空结构很可能极其怪异。我们有野心将时空流形施以整个宇宙，但宇宙的拓扑形状迄今未知，也许在大尺度上无法用 \mathbb{R}^4 覆盖；在 10^{-15} m 或 10^{-25} m 的小尺度上，不可能建立起足够刚性的参考系。目前我们认为这是因为微观量子性质，但也或许存在更深刻的物理。Wheeler 认为在 10^{-35} m 的亚核子尺度，量子引力的涨落极其剧烈，产生量子泡沫，戳破时空连续统。读者或许听说过 **Planck 长度**

$\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$ ，其中 $\hbar = h/2\pi$ 是约化 Planck 常数。它实际上给出的是涨落的特征尺度。即便如此，人类仍只能间接地探测变态性质，即假设时空能用连续坐标描述。若基于这一假设成功描述了涨落，就有理由相信，至少日常生活中的时空结构良好，因为 Planck 长度确实太小。对于复杂的拓扑，仍然希望邻域上能连续地标记坐标，用 \mathbb{R}^4 去近似。这正是流形的定义。拓扑背景不提供物理量的计算能力。

fig/chpt01/worldlines.pdf

图 1.1: 2 维时空图及世界线

fig/chpt01/reflecting.pdf

fig/chpt01/reflec2.pdf

(a) 静系对钟

(b) 动系对钟

图 1.2: 对钟以确定正交同时面

同时面选取过程称为**对钟**或**钟同步** (clock synchronization)，通常规定同时面与各观者线正交¹。时空上的正交性具体定义如下。先讨论惯性参考系。规定**惯性观者**走匀速

¹理论上的几何概念只能代数地定义，如勾股定理。实际用物理定律来约定一类基准，各类规则形状的日常用品就是这样生产的。比如，默认光走直线、Lorentz 力确定空间正交性、宇称不守恒确定右手性。

直线，由惯性观者构成的世界管正是惯性参考系。下面用光信号给出对钟操作。无论技术发展如何，光速的测量原理至今仍和 **Fizeau 程序** 一致：从坐标原点发射球面光波，然后由放置在某处（尽量邻近）距离已知的镜子反射，随后记录光回到原点的时间，这样可计算光速。当然，按当今的国际单位制，不需要再测量光速，故以上步骤更倾向于测距。任取某条惯性观者线 G ，规定为坐标原点。设相对静止的另一惯性观者 G' ；实验上若任意时刻测距均相同，就认为二者相对静止。二者可同属一个惯性参考系。 G 在某时刻发出光（事件 A ），到达 G' 反射（事件 B ），最后 G 在某时刻接受该光（事件 C ）。取 A, C 的中间事件 D ；实验上由 ^{133}Cs 原子钟测量。只需约定 B, D 同时。按此规定，惯性参考系的固有系称为**惯性坐标系**或 **Lorentz 系**。不必认真区分时可笼统称为**惯性系** (inertial frame)。以某惯性系为**绘图基准**指时空图的如下绘制习惯：将其坐标网格画成欧氏正交、时间轴未来方向朝上（空间轴右手排列）、尺度均匀的，这样迎合几何制，入射光 AB 与反射光 BC 也平面正交。若以 G 为绘图基准，只需使反射光与 G 夹角呈 45° 即可使 BD, AC 正交，结果如图 1.2(a)。以该系为基准，研究一个运动惯性观者的对钟情况，结果如图 1.2(b)。从图上看，动系坐标轴不是欧氏正交，但被约定为时空上的正交。当然，并非所有参考系都能办到满足时空正交的对钟。最后注意，实验意义上，光速的确只能理解为双程平均光速，而非单程光速。迄今为止，单程光速从未被实验测量过；目前也不可能实验测量，除非找到非光信号的对钟方式。

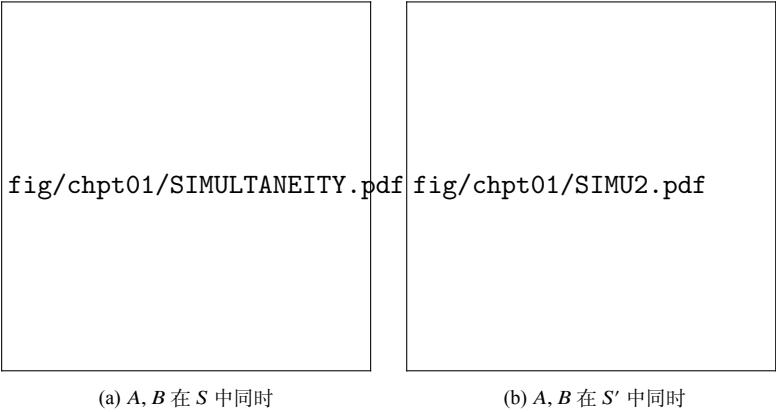


图 1.3: 同时的相对性

作某事件的同时面可投影得其坐标时。设静系 S 和动系 S' 。如图 1.3，某事件的 t 坐标可做 S 系同时面截得，而 t' 坐标可做 S' 系同时面截得。所以在一个惯性系同时的一对不同事件在另一惯性系中不同时。没办法把特定的同时面区别出来，此即**同时的相对性**的直观图像。相比于代数计算，可见图像语言的优雅。

结合相对性原理，

人们很早就开始用矩阵书写物理量。比如，标量往往取值于 \mathbb{R} 。 \mathbb{R}^3 中的矢量可用

三个实数确定, 直观上用有向线段或箭头来看待, 并用粗体 \mathbf{A} 或箭头顶标 \vec{A} 表示. 这样矢量微积分学的表述将十分简洁, 不必展为分量. Cauchy 在研究弹性力学时还意识到, 一点处质元与质元的作用力不能只由一个数组描述, 需用多维矩阵, 他称之为**张量** (tensor). 因此物理量总需要与其分量联系, 如矢量 $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$, 其中 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是坐标系的基底. 更重要的是, 部分坐标系具有参考系测量的含义. 实验者不能直接去测量一个抽象的矢量, 而只能测量分量, 这些信息通过仪器被提取成实验数据.

关键在于坐标变换下分量如何变. 分量及其方程的数学形式在某类坐标变换下不变, 称为**协变性** (covariance). 狭义相对论具有 Lorentz 系间变换下的 **Lorentz 协变性**, Minkowski (参见 [3]) 对伪转动变换微分后发现, 记

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1.2)$$

则其具有 Lorentz 协变性. Newton 理论分开定义绝对时间长度和空间长度, 但上述洞察表明可直接定义整体事件间距或**时空线元**. 不仅如此, 考虑到任意变换在局部上线性, 故可推至广义协变的, 即 $\eta_{\mu\nu}$ 的确是数学上的度规, 称**闵氏度规**. $(\eta_{\mu\nu})$ 作为广义的单位阵, 易证 $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$. 现代观点将直接把重心放在闵氏度规, 从它可反向得到狭义相对论的所有知识. 比如, 事件显然不能在任意惯性系中具有一致坐标时, 即必导致同时的相对性; 某系测得光速为 $\sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j} / dt = 1$, 换言之 $0 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$, 即光速不变; 其次我们不能区分各惯性系, 可体现相对性原理; 最重要的是可得伪转动变换. Lorentz 系 $\{x\}, \{x'\}$ 间满足

$$\eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\gamma\sigma} dx^\gamma dx^\sigma \iff \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} = \eta_{\gamma\sigma}, \quad (1.1.3)$$

由 (1.3.7) 式可快速证明变换仿射性.

后续可证 Lorentz 系间的变换总是仿射性的:

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\epsilon} = 0 \iff x'^\mu = x_0^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda^\mu{}_\nu \text{ 满足 } \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\sigma\lambda}. \quad (1.1.4)$$

其中 $(\eta_{\mu\nu}) := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 并对 ν 使用求和约定. 满足上式的变换称 **Poincaré 变换**. 置 S, S' 的时空原点重合, 则 $x_0^\mu = 0$, 变换仅线性. 设空间轴初态重合, 但 S' 相对于 S 沿共同 x, x' 轴匀速运动, 则 y, z 坐标一致. 设正方向速率 u , 则 $x = ut$ 对应 $x' = 0$, 时空图形如 1.2(b). 读者可证**二维 boost 变换** (普通教材称之 Lorentz 变换):

$$t' = \gamma(t - ux), \quad x' = \gamma(x - ut), \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \geq 1. \quad (1.1.5)$$

这里 γ 称为 **Lorentz 因子**. Einstein 最初用同时性对钟定义、仿射性假设得到上式. 由此发展出来的理论被 Lorentz 命名为**相对性理论** (the theory of relativity), 简称**相对论**. 当下主流称呼是**狭义相对论** (special relativity). boost 变换仅为特例, 一般情形的推导见 1.2.5 节.

上式在低速极限下退回经典力学的 Galileo 变换 $t' = t, x' = x - ut$. 直观图像如下. x' 轴直线 $t' = 0$ 即 $t = ux$, 同理 t' 轴即 $t = (1/u)x$, 则动系坐标轴总关于 45° 斜线对称. 速率 u 代表动系时间轴斜率. 以转动变换类比之, 相应的三角函数应替换为双曲函数. $\theta := \text{artanh } u$ 不是绘图意义的倾角, 称为**快度**. 这样有 $\cosh \theta = \gamma, \sinh \theta = \gamma u$. “boost”一词取时间轴上的推动之意, 但可见一个较好称呼是**伪转动** (pseudo rotation): $t' = t \cosh \theta - x \sinh \theta, x' = x \cosh \theta - t \sinh \theta$. 如图 1.4, 光速相对于日常情形较大, 因此图上光线应“下压”, 则空间轴转动不明显, 退回到 Galileo 变换, 大家共用绝对时间. 快度概念比速度更简洁. 比如, 设 $u_1 = \tanh \theta_1$ 是 B 相对于 A 的速度, 而 $u_2 = \tanh \theta_2$ 是 C 相对于 B 的速度, 则 C 相对于 A 的速度是 $u = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = (u_1 + u_2)/(1 + u_1 u_2)$, 此即速度叠加公式.

现光速不变、相对性原理可整合为如下更严格的说法. 物理方程具有 Lorentz 协变性, 且与物质状态无关的标量常数保持同样的值, 如 $c = 1, \pi/2$ 和 \hbar . 合称 **Lorentz 不变性** (invariance). 例如, 经典电动力学虽然能将光解释为无源电磁波, 但 Maxwell 方程的 Lorentz 协变性只涉及其数学形式, 将协变性提升为不变性才能给出光速不变.

量子场论教材常选择 $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 以直接使 $ds^2 > 0$. 定义号差 (signature) 为 $(\eta_{\mu\nu})$ 的迹, 则该选择的号差为 -2 , 戏称**西海岸**习惯. 本书一般选择 $+2$ 即**东海岸**习惯. 更有甚者选择将时间分量排在最后作为第 4 分量, 这样有 $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$ 但并不影响号差. 无论怎样这些选择纯粹只是习惯¹.

1.1.2 定域性

默认光速不变导致的遗憾是: 有限能量下, 亚光速有质粒子不能加速至光速. 目前未发现实际的超光速快子 (tachyon), 故我们更愿意承认亚光速粒子、光子在时间上的连续性, 即确认某两事件属同一粒子. 凡信息就需载体, 故光速是信息传速上限. 注意, 存在粒子能依次经历的两事件才称有**因果联系**, 可见并非所有事件都能涉及因果. 相互作用是一种信息, 物质总通过动量、能量、质量的变化反馈. 可见相互作用至多以光速影响邻域, 此即**定域性** (locality) 或**局域性**. 从而, 我们总能适当忽略环境对所关心的系统的作用以建立**孤立系统**模型, 即忽略环境与系统的动量、能量、质量交换. 此乃物理研究之根基: 宇宙是无所不包的最大时空, 但我们往往只关心某些局部区域, 即宇宙子系统. 理解子系统必须且可以使用孤立系统, 否则讨论任何客体时都须考虑整个宇宙的作用, 结果一事无成. 经典力学无定域性. Newton 引力定律是典型的超距案例, 任二事件可通过 Newton 引力涉及因果. 这一定律现只作为近似. 对不具备连续性的事件亦能定义速率, 比如介质光速. 谈论超光速现象时往往指这种含义, 以因果为前提的速度自然默认亚光速.

¹也有一种可能有哲学区别的习惯, 称 **Wick 技巧**: 令 $x^0 = ict$ 则 $ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, 这样线元仿佛还原回勾股定理, 伪转动变换的确变成了 $x\text{-}ict$ 平面的旋转变换. 一般除讨论某些理论复结构方面的问题外不使用这种做法.

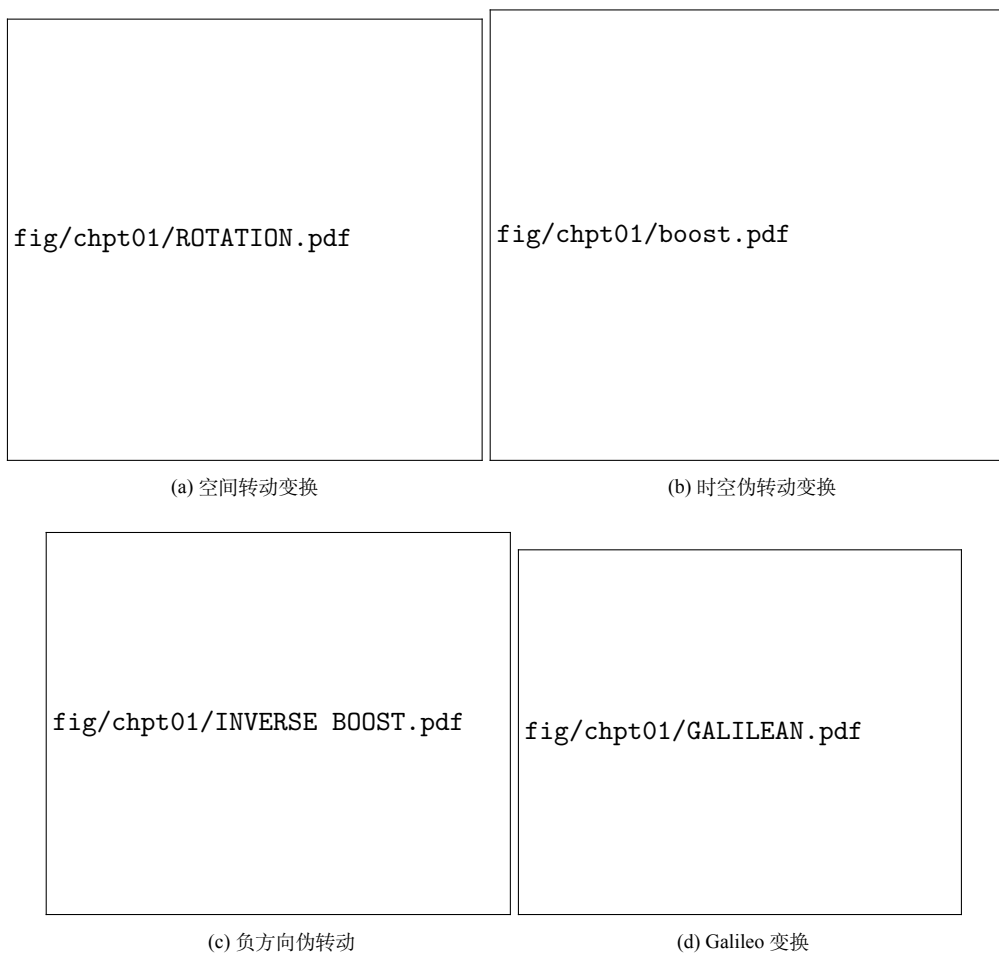


图 1.4: 四类变换的图像直观

场提供了定域性最自然的图像, 迄今所有基本相互作用都归结于定域场. 两相距较远的粒子的相互作用解释为: 粒子 (作为**源**) 与场接触作用, 再由场接触作用于另一粒子. 接触作用强度均涉及粒子的**荷** (charge). 实际上, 由于粒子动量、能量变化, 为保持总和守恒, 须设想粒子将其传递给周遭弥漫着的某种媒介. 起初我们这样理解场论: 设想一种**试验粒子** (test particle), 忽略其体积、形变及自旋, 最重要地是忽略其自场对外场之干扰, 就能测量受力来研究外场. 每单位荷的场力即**场强** (strength), 通常无关于试验粒子, 往往又能表为某个**势** (potential) 之导数. 在量子场论中, 粒子解释为量子场的激发态. 质子、电子、夸克等 Fermi 子携带作用荷, Bose 子场提供作用媒介. 比如, 电子场影响电磁场, 产生波包 (光子) 传递电磁作用, 在低能情形表现为电磁力. 故严格来说, 电磁场不依附于某个带电体, 将总场分解为由各源所产生的部分是一种经典分析方法.

1.1.3 惯性系存在性

前文对惯性系存在性的考虑, 仍然承袭 Newton 体系的思维, 即认为存在一个绝对静止系, 则相对其匀速的物体可作为惯性系, 而具有加速度的物体不能充当惯性系. 然而, 并无任何先验原理帮助我们确定绝对静止系在哪. 实际上, 物质间皆存在引力, 且可在长程上传递, 这称为引力的**万有性**, 而理想惯性系必须远离所有物质以孤立, 因此严格来说不存在. 但实验上 Newton 定律一定程度适用于地面系, 可见惯性系仍是有用概念. 问题出在哪里?

物质在仅受引力作用时有 **Galileo 性**: 任意试验质点在同一时空点所受加速度相同 (由任意坐标系测量), 与内部结构及组成无关. Newton 对 Galileo 性的解释如下. $\mathbf{f} = m_I \ddot{\mathbf{x}}$ 定义的质量 m_I 是**惯性质量**. Mach 提出了一种测量性定义: 承认动量守恒并规定好某一物体的质量数值, 使二者产生相互作用 (如碰撞), 根据加速度比值便可测得另一物体的质量. 而 $\mathbf{f} = m_G \mathbf{g}$ 定义的质量 m_G 是**引力质量**或**引力荷**. 联立有 $\ddot{\mathbf{x}} = (m_G/m_I) \mathbf{g}$, 说明 Galileo 性即指比例 m_G/m_I 与物质本身无关, 重新定义 G, m_G 还可使此二概念不再区分: $m_I = m_G \Rightarrow \mathbf{g} = \ddot{\mathbf{x}}$. 设 A, B 共同自由落体, 二者相对加速度近似为零. 关键在于, 总能以一者为研究对象, 另一者抽象为背景坐标系. 比如, B 可以是一部足够小、无自转的封闭电梯, 而 A 是乘客, 则 A 将感到失重. Newton 理论指出 B 系中出现惯性力, 但它与引力局域抵消, B 系中做任何局域的力学实验结果都与惯性系等效, 尤其在抛弃绝对系概念后, 我们无法分辨.

对任意自由落体质点而言, 总存在局域坐标系, 使质点相对于该系的动力学, 像是在理想惯性系中一样. 这种坐标系称为相应质点的**局域惯性系**. 参考系的惯性性在局域上不可物理观测, 惯性系可以且只能局域建立. 任何我们所规定的惯性系, 其实均是局域惯性系. Newton 的绝对运动不是相对于绝对系的运动, 而是相对于局域惯性系的运

动. Einstein 于 1907 年察觉到这一等效性¹. 尽管 Galileo 性是谈及质点的, 但他坚信任何物质都应如此, 他称之为**等效原理** (equivalence principle). 这里要包括电磁、量子等任何实验: 容易想象, 在落体电梯里打开手电筒, 光相对电梯按一定频率走直线, 而在地球上光只能弯曲且频率变化, 便能预言光的偏折、红移.

现在再研究可多大程度上建立局域惯性系. 对于两相距足够远的时空点, 引力加速度一般不同. 一水球各部分受力不均, 从而出现形变. 这就是**潮汐效应**. 邻近质元间相对力也称**潮汐力** (tidal force), 相对加速度称**潮汐加速度**. 可见, 理想的局域惯性系只建立在自由落体质点的世界线上. 当然, 只要在设备精度内未观测到潮汐, 就可认为是实验意义的局域惯性系. 若物质集团的尺度较大, 密度较稀疏, 则外部引力较弱, 潮汐现象不明显, 因此能近似为局域惯性系的时空区域很大. 比如, 地球、太阳系、银河系能作为局域惯性系的范围应依次增大. 现在, 理想惯性系只视作局域惯性系在无引力时延伸的极限. 综上, 实验意义的局域惯性系的范围由外部引力强弱决定.

1.1.4 广义协变性

等效原理指出惯性系与非惯性系局域难以区分, 因而最好是认同任意参考系. 更进一步地, 我们本就默认物理对象、规律不受坐标系影响, 即**坐标冗余性**, 因而不仅考虑与参考系有关的那类坐标系, 任意坐标系均可接受, 即直接寻求对任意坐标变换的**广义协变性**. 不妨考虑某条世界线, 它在 $\{x\}$ 下的参数式记作 $x^\mu(\sigma)$, 其关于 σ 的**切矢** (tangent vector) 或**速度** (velocity) 的该系分量为 $T^\mu := dx^\mu/d\sigma$. 广义协变性要求同一切矢在任意坐标系下皆表以 $dx^\mu/d\sigma$ 形式, 则根据全微分知:

$$T'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu. \quad (1.1.6)$$

称这种变换为**逆变的** (contravariant), 按这种方式变换的矢量称为**逆变矢量** (contravector) 或切矢, 故上指标又称**逆变指标**. 一点处全体逆变矢量构成该点**切空间** (tangent space). 实际上, 物理学很多矢量都与相切有关, 因而是逆变矢量. 可以存在变换与之互逆的矢量:

$$\omega'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \omega_j, \quad (1.1.7)$$

则称**协变矢量** (covector) 或**余切矢** (cotangent vector), 简称**余矢**. 下指标称**协变指标**. 这一称呼与“协变性”有区别, 没有物理方程“逆变性”的说法.

数学上, 给定线元 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 后用积分定义线长、矢量模, 借圆弧和三角函数定义角, 最后按投影定义切矢的内积 (inner product), 等价于 $g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$. 可用该式定义内

¹顺便提一句, Newton 这个天才是知道这件事的: “无论诸物体彼此间以何种方式运动, 若它们被沿着平行线的相等加速力所推动, 则它们都将继续彼此间的运动, 遵循的方式就如同没有那些力作用一样.” ——《原理》, 推论 VI “运动定律” [4]. Newton 用这个推论来计算太阳系中月球的复杂运动. 在地球系下, 惯性力和太阳引力在良好近似下相互抵消, 那么月球就遵循一个 Kepler 轨道.

积, 反之给出线长和夹角, 此即线性代数教材的逻辑. $g_{\mu\nu}$ 乃人为给定, 称为**度规** (metric). 据此定义有 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. 规定某系为 Descartes 系, 代入勾股定理 $d\ell^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$, $(\delta_{ij}) := I$ 就得欧氏几何. δ_{ij} 称为 **Kronecker 符号** 或**欧氏度规**. 欧氏几何现降级为一种选择, 而非保守派所认为的绝对真理. 还可有双曲几何 $d\ell^2 = (dx^2 + dy^2)/(1 - x^2 - y^2)$, 当接近 $x^2 + y^2 < 1$ 边缘时, 该线元相较于欧氏线元会越来越大, 但它除平面几何第五公理外符合其余公理. 公理的特征是可替代性, 故这说明第五公理不能由其余公理推出, 而只能作为欧氏几何的约束. **Gauss 假设** 希望存在坐标系使线元表为勾股定理, 进而在广义协变性要求下保持二次型:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g'_{\gamma\sigma}dx'^\gamma dx'^\sigma \iff g'_{\gamma\sigma} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}. \quad (1.1.8)$$

主流几何理论总研究二次型, 不研究 $d\ell = (|dx|^3 + |dy|^3)^{1/3}$ 等. 上式是合同变换, $g_{\mu\nu}$ 保持可逆, 故总可定义 $(g^{\mu\nu}) := (g_{\mu\nu})^{-1}$, 即满足 $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = g_{\nu\lambda}g^{\lambda\mu} = \delta_\nu^\mu$, 其中 δ_ν^μ 也是 Kronecker 符号. 称 $g^{\mu\nu}$ 为**度规逆**. 规定 T_μ 相应的**对偶矢量** (dual vector) 为 $T_\mu := \eta_{\mu\nu}T^\nu$, 内积就可紧凑写作 $V^\mu W_\mu = V_\mu W^\mu$. 它为协变矢量一例. 也可对偶回去: $T^\mu = \eta^{\mu\nu}T_\nu$.

推而广之的概念称为**广义协变张量**, 本书简称张量. 当然, 称 T^{\dots} 是张量, 准确是想称分量等价类 $[T^{\dots}] = \{T^{\dots}, T'^{\dots}, \dots\}$ 是张量. (k, l) 型张量简称 (k, l) -张量, 应满足如下**张量变换律**:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{\rho_1 \dots \rho_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\rho_k}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}}, \quad (1.1.9)$$

可记忆为是满足指标平衡的 Jacobi 矩阵元乘积, 这样就可快速写出公式. 常习惯于先将上指标写完, 再错开地写下指标. $(k+l)$ 叫作张量的**阶** (rank). $(0, 0)$ -张量就是不变标量. $(n, 0), (0, n)$ 型分别称 n 阶**逆变**、**协变张量**或 n -张量, 比如切矢是 1-逆变张量, 余矢是 1-协变张量; 度规是对称、非退化的 2-协变张量; Kronecker 符号是 2-张量. 由张量的变换律, 若存在坐标系使其分量为零, 其在任何坐标系下分量都为零, 故不论何型都称**零张量**. 只要求 Lorentz 协变性 $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \Lambda^\mu_\nu$ 则称 **Lorentz 张量**. 张量一定是 Lorentz 张量, 反之不然. 基本运算性质如下:

1. 张量的直接拼凑称**张量积**¹, 结果仍为张量, 比如将 $T^\mu, S_{\lambda\sigma}$ 拼成 $T^\mu S_{\lambda\sigma}$, 其变换式只是将各自的 Jacobi 矩阵元按实数的规律乘起来;
2. 张量的缩并仍是张量, 因为变换式只是消去一对 Jacobi 矩阵元;
3. 若干张量线性相加仍是张量;
4. 指标升降约定用 $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$, 构成**度规对偶**.

¹电动力学、量子力学中的并矢 (dyadic) 就是张量积, 如 $\mathbf{AB}, |\psi\rangle\langle\phi|$ 等.

虽然这在物理和计算上没有问题, 但似乎还是缺了些什么. 我们期望的是如果有分量, 就应该有某种数学对象, 使得分量是这一数学对象在不同坐标系下的不同转述. 当然希望能用类似 $A = A^I e_I$ 的形式表述矢量, 分量形式为 $A^\mu = A^I e_I^\mu$. 换一组 $\{e_I\}$ 就可给出另一组分量, 但这又涉及 e_I 的定义是什么. 鉴于对切矢图像的充分观察, Cartan 率先给出了这一数学对象的构造, 称为**映射语言**, 详见附录 D. 但这套框架比较抽象. 很多人因其语言之优雅, 成了 Cartan 及其后世之信徒, 常声称其优势在于“无需借助坐标”, 即 Cartan 关于矢量的定义是“几何”的、“坐标无关”的. 这一论断当然过分夸张. 这种所谓“坐标无关”, 我们给出准确陈述: **坐标独立性** (coordinate independence) 或**坐标选择无关**, 从而支撑了物理上的坐标冗余性. 最重要地, 计算时还存在一类高维矩阵不满足任何协变性, 常称**赝张量**. 对于赝张量, 映射语言需要将其强行定义为“坐标系依赖的张量”, 非常累赘, 分量语言反成聪明的选择. 唯遇到歧义或能简化推导时, 才讨论映射语言.

今后会经常遇到某些指标具有对称、反称性, 这往往是物理量的具体定义导致的, 且可以简化大量运算. 对赝张量和张量都可定义

$$T_{\dots(\mu_1 \dots \mu_k) \dots} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{\dots \mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(k)} \dots}, \quad (1.1.10)$$

$$T_{\dots[\mu_1 \dots \mu_k] \dots} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma T_{\dots \mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(k)} \dots}, \quad (1.1.11)$$

其中 S_k 是全体 $(1 \dots k)$ 排列之集; $\sigma \in S_k$ 为偶排列时 $\text{sgn } \sigma = 1$, 否则为 -1 ; $\sigma(k)$ 为 σ 的第 k 项. 上式分别称为 T_{\dots} 的**对称部分** (symmetric part) 和**反称部分** (alternating part). 除序 $1/k!$ 是为与原张量平均. 对上标定义同理. 对两个指标, 在代数学中就学过矩阵的对称、反称分解. 上下标之间的对称、反称性要用度规升降后再讨论. 有时会横跨地标注, 如 $V^{[\mu} W^{\nu]}$, $F_{(\mu|\sigma\lambda|\nu)}$ 都标记在了 μ, ν 指标. 运算性质如下:

1. 缩并时两种括号都有传递性, 如

$$T_{(\mu_1 \dots \mu_k)} S^{\mu_1 \dots \mu_k} = T_{(\mu_1 \dots \mu_k)} S^{(\mu_1 \dots \mu_k)} = T_{\mu_1 \dots \mu_k} S^{(\mu_1 \dots \mu_k)},$$

证明不难, 留给读者;

2. 嵌套括号时, 同种子括号可随意添删, 但异种子括号会直接为零, 如 $T_{[\dots[\dots]\dots]} = T_{[\dots]}, T_{[\dots(\dots)\dots]} = 0$. 这几乎显然, 只需不失一般性地考虑

$$\begin{aligned} T_{[[\mu_1 \dots \mu_k] \mu_{k+1} \dots \mu_{k+l}]} &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}, \tau \in S_k} \frac{\text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau}{(k+l)!k!} T_{\mu_{\sigma(\tau(1))} \dots \mu_{\sigma(\tau(k))} \mu_{\sigma(k+1)} \dots \mu_{\sigma(k+l)}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{k! \text{sgn } \sigma}{(k+l)!k!} T_{\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(k)} \mu_{\sigma(k+1)} \dots \mu_{\sigma(k+l)}} = T_{[\dots]}, \end{aligned}$$

而另一条证明类似;

3. 由此还可推出异种括号缩并为零, 如 $T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} S^{[\mu_1 \cdots \mu_k]} = 0$. 对 $k \geq 3$ 只能有 $T_{\mu_1 \cdots \mu_k} \neq T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} + T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$, 但仍可在**全对称**或**全反称**时有

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_k} = T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} \Rightarrow T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} = 0, \quad T_{\mu_1 \cdots \mu_k} = T_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \Rightarrow T_{(\mu_1 \cdots \mu_k)} = 0.$$

1.1.5 拉氏理论

许多相互作用定律能靠着一种信念得到: 实际规律总使系统**作用量**最小, 这称为**最小作用量原理** (principle of least action). 当然, 最小只是美学说法, 其实只要求导数为零, 故严格称为**稳恒** (stationary) **作用量原理**, 仅在分析解的稳定性时再关注最优化问题. 这一哲思由 Lagrange, Hamilton 等人于 18 世纪提出. 取惯性系及绝对时间, 对 N 个粒子的保守系统, 给定初末位置 $\mathbf{x}_i(a), \mathbf{x}_i(b)$, 势能 V 给出相互作用, 实际运动满足 Newton 第二定律 $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) = -\nabla V(\mathbf{x}_i)$, 其中 $i = 1, \dots, N$. 非保守力的实质是统计效应, 不在纯粹的经典力学范围中. 上式可使如下作用量 S 取最小值:

$$S(\mathbf{x}_i(t)) = \int_a^b L(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i) dt, \quad L = T - V, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2,$$

其中 L 称作**拉氏量** (Lagrangian), T 即总动能. 通俗地说, 这种函数的函数称为**泛函** (functional)¹, 通常表为积分形式, 如曲线的线长. 按 $L = T - V$ 设定的 $S(\mathbf{x}_i(t))$ 就给出关于 $\mathbf{x}_i(t)$ 的经典力学方程.

将此抽象到其它领域. 我们无非要研究系统的可能分布状态及其随参数的演化. 前者简称**位形** (configuration), 后者简称**路径** (path). 全体位形之集称**位形空间**, 其维数为**系统自由度**. 在 s 维位形空间上任取坐标系, 路径参数记 σ , 其坐标式表为 $q^i(\sigma)$. 对于经典力学的粒子系, 位形空间是 \mathbb{R}^{3N} , 路径参数为绝对时间, 表为 $x^i(t)$, 也即 $(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_N(t), y_N(t), z_N(t))$. 时空可看做单粒子事件的位形空间, 世界线是路径, 参数可取坐标时或固有时. 我们默认许多系统及其规律具备作用量表述, 且固定端点 A, B 并规定参数为 a, b 后, 总保为积分形式:

$$S(q^i(\sigma)) = \int_a^b L(q^i, \dot{q}^i) d\sigma, \quad \dot{q}^i := \frac{dq^i}{d\sigma}. \quad (1.1.12)$$

修改泛函往往给出不同方程, 可见拉氏量代表了一套理论. 固定端点间的全体路径之集称 **Fréchet 空间**, 作用量是其上的函数. 此处记 Ω_A^B . 实际路径称**正路**或在**壳** (on shell), 其余路径称**旁路**或**离壳** (off shell). 未给出实际规律之前, Fréchet 空间中所有元素皆可考虑. 但一般不再研究 $L(\sigma, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, \dots)$, 理由如下:

1. 承认 **Newton 决定性原理**: 仅由位置和速度即可确定经典运动, 更高阶导数不会出现;

¹设函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. $A = \mathbb{R}^n$ 时说明自变量可由 n 个独立实数描述, 称**自由度**为 n . 曲线的点无限多, 因此泛函可视为函数在**无穷自由度**下的极限. 泛函的自变量称为**宗量**.

2. 承认物理规律不随参数变化, L 就不显含 σ , 即 $\partial L/\partial\sigma = 0$.

L 只通过 q, \dot{q} 的关系隐含 σ . 按理来说因为有 $q(\sigma)$, L 就应能用 σ 表示, 似乎与 $\partial L/\partial\sigma = 0$ 矛盾. 其实这涉及符号混淆, 简单来说, 在给出运动方程前当然不知道正路 $q(\sigma)$.

泛函求导法称为**变分法**: 设正路 $q^i(\sigma)$ 存在, 任取旁路 $\hat{q}^i(\sigma)$, 但差值¹ $\delta q^i(\sigma) := \hat{q}^i(\sigma) - q^i(\sigma)$ 严格遵循 $\delta q^i(a) = \delta q^i(b) = 0$. 泛函变分指其增量的线性主部. 可见 δ 无关参数及其端点, 因此可与参数的微分、积分交换, 且代数性质与微分相似. 最小作用量原理指出正路上恒有 $\delta S = 0$, 即 S 增量总属于 $o(\delta q^i)$. 变分法关键是**分部积分法**, 从含有 \dot{q} 的部分得到**边界项**, 结合变分限制条件而消去.

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_a^b \delta L \, d\sigma = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) d\sigma \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \, d\sigma + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right|_a^b \\ &\simeq \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \, d\sigma = 0, \quad \forall \delta q^i \iff \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.\end{aligned}\quad (1.1.13)$$

此即 **Euler-Lagrange 方程**, 简称 **E-L 方程**. 常用 “ \simeq ” 强调消除边界项. 由反证法知等价性. 读者由此可推得经典力学方程. 不过需强调, 对简单的 L 才考虑计算 E-L 方程, 更多时候按以上标准流程直接变分. 即使不用等时变分, 基本上也总会找理由消除边界项. 故以后常省略积分域, 少数情况才讨论边界.

粒子受外场作用, 而场自身的演化也要服从最小作用量原理. 以粒子情形类比, 场的位形取相应空间场, 但场的路径应是空间场往时间的延伸, 即正是时空上的场 $\psi(x)$, 如张量场, 而位形是某 Σ_t 上的截取 $\psi(t, \mathbf{x})$. 不妨从离散粒子系统逼近. 假设 \mathbf{x} 的自由度是有限的, 场形同粒子系统, 拉氏量涉及对各粒子的求和, 其连续极限即对 \mathbf{x} 的积分: $L = \int \mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu}) \, d^3x \Rightarrow S = \int \mathcal{L} \, d^4x$, 其中坐标偏导记为 $\psi_{,\mu} = \partial_\mu \psi = \partial\psi/\partial x^\mu$. \mathcal{L} 称为**拉氏密度**, 毕竟泛函宗量是 $\psi(x)$, 故更彻底的做法是用时空坐标作为积分变量. $\psi, \partial_t \psi$ 源于对 q, \dot{q} 的类比, 而空间导数理解为场相邻单元间的势能. 同理, 默认许多理论能存在 \mathcal{L} 表述; \mathcal{L} 一般不显含时空点的坐标 x^μ , 且至少含一阶导. 在粒子情形我们通过决定性原理排除高阶导, 但现在是关于时空坐标的导数, 且空间项有相互作用势的含义, 冒然排除高阶是激进做法. 一般应写作

$$S(\psi(x)) = \int \mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu_1}, \dots, \psi_{,\mu_1 \dots \mu_k}) \, d^4x. \quad (1.1.14)$$

若 \mathcal{L} 至多含二阶导, 即 $\mathcal{L}(\psi, \psi_{,\mu})$, 则类似计算可得场的 E-L 方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0. \quad (1.1.15)$$

¹这也称为 Fréchet 微分或**等时变分**. 因 $\delta\sigma = 0$, 则即使 $\partial L/\partial\sigma \neq 0$ 也仍有 $\frac{\partial L}{\partial\sigma} \delta\sigma = 0$.

当然，实操中总是直接计算变分。单元微积分下，边界项即函数作差；在多元情形中这是高维 Gauss 定理，见附录 G。故为消除边界项可有三类方法：

1. 若无任何条件，可取无穷积分，认为场在无穷远没有贡献（被积项至少比 $1/r^2$ 更快地趋于零）或不存在边界；
2. 仅在 $\delta\psi = 0$ 条件下，可通过修改 \mathcal{L} 使其消除边界项；
3. 考虑积分域 U 时，规定边界上任意阶都有 $(\delta\psi)_{,\mu_1\cdots\mu_k} = 0$ （比如认为 U 外的旁路 ψ 恒定地与边界一致），这一更强的条件使 \mathcal{L} 无论含多少阶导数都能消除边界项。

总之，不与物理意义冲突时，默认舍去变分中的全微分项。

1.1.6 对称性

对称性是当代物理的重要概念。读者熟知动量、能量概念及其守恒，现代观点下，许多守恒量可解释为对称性的结果。在量子场论中，对称性还用于粒子分类、相互作用约束等。以圆为例，它具有左右对称、旋转对称等，实质是圆在反射变换、旋转变换下长相没变。作用量理论中，我们考虑的是位形空间上的**点变换**，描述点变换只需给定新旧点在同一坐标系下的坐标关系 $\tilde{q} = \phi(q)$ 。这说明点变换和坐标变换十分相似。区别在于，前者是点变、坐标系不变（**主动观点**），后者是点不变、坐标系变（**被动观点**）。为教学方便，常直接用坐标变换的语言讨论对称性。对于更复杂的对称性，为避免混淆概念，要明白实质是点变换。

全体变换构成一个群¹。比如沿 x 轴的任意平移变换表为 $\bar{x} = x + a$ ，记作 ϕ_a 。为使 $\{\phi_a | a \in \mathbb{R}\}$ 是群，只需规定群乘为 $\phi_a \phi_b := \phi_{a+b}$ ，这样 \mathbb{R} 的加法和乘法自动给出 ϕ_0 为恒等变换， ϕ_{-a} 为 ϕ_a 为逆元。像这样，可用实数作为表征参数的变换称为**单参变换**。参数只取有限值时称**离散变换**，比如反射变换只包含两种操作；参数取值为某区间 $I \subset \mathbb{R}$ 时称**连续变换**，如平移、旋转按平移量、旋转角来描述可有无穷多种。连续变换按 $\phi_a \phi_b := \phi_{a+b}$ 定义群乘，则称**单参群**。计算时为方便，常将连续变换视作一系列参数为小量的**无穷小变换**之累积。严格做法是先取参数 $\alpha = \epsilon$ ，最后同除以 ϵ 再令 $\epsilon \rightarrow 0$ 。因而能在取极限前，就开始放心地近似到一阶。参数与时间无关的变换称为**整体变换**，否则称**局域变换**。保持作用量形式不变的变换称为**对称变换**，称作用量具有这种对称性。当然也可让二者只相差边界项或常系数（称为**准不变性**），因为它们给出相同正路。

除点变换外还可考虑重参数化。无论路径是否在壳，在点变换连同重参数化 $q(t) \rightarrow \tilde{q}(\tilde{t})$ 下，可导致路径本身的改变 $\delta_s q(t) := \tilde{q}(t) - q(t)$ 以及参数变化 $\delta_s t := \tilde{t} - t$ 。无穷小时即 $\delta_s t = \epsilon \eta(t, q, \dot{q})$, $\delta_s q = \epsilon \xi(t, q, \dot{q})$ 。比如，沿某个空间单位矢量 \hat{e} 的无穷小

¹集合上若存在一个满足结合律的二元封闭运算，且具有恒等元和逆元的存在性，则这种集合称为**群** (group)，其元素称为**群元**，该运算称为**群乘**。

整体平移为 $\delta_s \mathbf{x}_i = \epsilon \hat{\mathbf{e}}, \delta_s t = 0$; 在某个空间单位法矢 \mathbf{n} 的平面上的无穷小整体转动为 $\delta_s \mathbf{x}_i = \theta \mathbf{n} \times \mathbf{x}_i, \delta_s t = 0$. 总的变化保留至一阶有

$$\Delta q(t) := \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t) = \delta_s q(t) + \left(\dot{q}(t) + \frac{d}{dt}(\delta_s q(t)) \right) \delta_s t = \delta_s q(t) + \dot{q}(t) \delta_s t,$$

而 $\dot{q}(t)$ 的总变化保留至一阶为

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q}(t) &:= \frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \dot{q}(t) = \frac{dt}{d\tilde{t}} \frac{d}{dt} (q(t) + \Delta q(t)) - \dot{q}(t) \\ &= \left(1 - \frac{d}{dt}(\delta_s t) \right) \left(\dot{q}(t) + \frac{d}{dt}(\delta_s q(t)) + \ddot{q}(t) \delta_s t + \dot{q}(t) \frac{d}{dt}(\delta_s t) \right) - \dot{q}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(\delta_s q(t)) + \ddot{q}(t) \delta_s t. \end{aligned}$$

整个系统的 $\Delta q(t)$ 将改变作用量的值, 变化是

$$\Delta S := \int L\left(\tilde{t}, \tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} - \int L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt,$$

这里我们添回了含时情形, 原则上还可考虑更高阶导数. 注意, 我们只是在讨论 $\Delta q(t)$ 导致的 ΔS . 无论 $q(t)$ 的函数形式如何, 只要 $\Delta S = 0$ 成立, 变换就称为对称变换. 注意两个积分的积分变量和边界不同, 我们可以对 \tilde{t} 换元而统一成变量 t , 这样边界一致就可以合并在一起, 并展开到一阶有

$$\begin{aligned} &\int L\left(\tilde{t}, \tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} dt \\ &= \int \left(1 + \frac{d(\delta_s t)}{dt} \right) L\left(t + \delta_s t, q + \delta_s q + \delta_s t \dot{q}, \dot{q} + \frac{d(\delta_s q)}{dt} + (\delta_s t) \ddot{q}\right) dt \\ &= \int \left(1 + \frac{d(\delta_s t)}{dt} \right) \left(L + \frac{\partial L}{\partial t} \delta_s t + \frac{\partial L}{\partial q} (\delta_s q + \delta_s t \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d(\delta_s q)}{dt} + \ddot{q} \delta_s t \right) \right) dt, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int L\left(\tilde{t}, \tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} dt - \int L dt \\ &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta_s q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta_s q)}{dt} + L \frac{d(\delta_s t)}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) \delta_s t \right) dt \\ &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta_s q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_s q \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_s q + L \frac{d(\delta_s t)}{dt} + \frac{dL}{dt} \delta_s t \right) dt, \end{aligned}$$

由 $\Delta S = 0$ 得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta_s q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_s q + L \delta_s t \right) = 0, \quad (1.1.16)$$

这称为 **Noether 条件**, 它是作用量对称性的判据. 第二项已经是时间全导数的形式, 特别是时间变换 $\delta_s t$ 的贡献总是时间全导数的形式. 所以 Noether 条件仅对 $\delta_s q$ 的形式做

出要求. 进一步地, 若 $q(t)$ 是正路, 且变换是整体变换, 则

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q := \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_s q + L \delta_s t \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xi + L \eta. \quad (1.1.17)$$

对于多参数变换的推广是类似的. 可见在壳时连续整体对称性导致相应的守恒量, 这称为 **Noether 定理**.

注意逆命题不一定成立, 因为并非所有守恒量都来源于某个对称性. 但对阐释常见的能量、动量来讲, Noether 定理是足够的. 它们正是**时空对称性**的结果. 考虑 N 个粒子的系统, **空间平移对称性**的守恒量为

$$Q = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta_s \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{e}} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}, \quad (1.1.18)$$

\mathbf{p}_i 称为**正则动量**. 此即总正则动量在 $\hat{\mathbf{e}}$ 方向上的分量守恒. 读者可验证 $L = T + V$ 的确给出了通常我们所理解的动量 $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{u} = m\mathbf{u}$. **空间各向同性**的守恒量为

$$Q = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \delta_s \mathbf{x}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i, \quad \mathbf{L}_i := \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (1.1.19)$$

即总角动量在 \mathbf{n} 方向上的分量守恒. 严格来说, 对称变换指的是 $\delta_s q$, 而不是诸如 $\delta_s t$ 这种积分参数的重参化. $\delta_s t$ 之所以也被称作对称变换, 是因为其通过 $\Delta q = \delta_s q + \dot{q} \delta_s t$ 导致的 $\delta_s q$ 是对称变换. 若系统具有**时间平移对称性**, 其中时间的无穷小整体平移记作 $\delta_s t = \epsilon$, 且 $q = \mathbf{x}$ 在该重参化下满足 $\Delta q = 0$, 因此 $\delta_s q = -\dot{q} \delta_s t = -\epsilon \dot{q}$, 时间平移对称性的守恒量为

$$H := -\frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \delta_s \mathbf{x}_i + L \delta_s t \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - L. \quad (1.1.20)$$

这称为**哈氏量** (Hamiltonian). 其与 L 的关系称为 **Legendre 变换**.

$$H := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L. \quad (1.1.21)$$

读者可验证 $H = 2T - L = T + V$, 后者即机械能. 因为仅考虑保守作用, 则机械能等同总能量. 故我们有系统总能量守恒. Legendre 变换是一个更有优势的写法, 因为这帮助我们在一般理论的拉氏量下直接定义能量. 当然, 由于存在准不变的不同 L , 哈氏量不一定等于能量. 若只从守恒角度考量, 非要称任意哈氏量都能作为能量定义亦可. 第 ?? 章对 Legendre 变换、Noether 条件等给出了直观理解.

另一种能轻松办到 $\Delta S = 0$ 的方法是假设 $\partial L / \partial \kappa = 0$, 则相应变换 $\bar{\kappa} = h(\kappa)$ 毫无意义. κ 称为**循环坐标**. 比如, 对某个粒子若有 $\partial L / \partial q = 0$, 则 $p := \partial L / \partial \dot{q}$ 守恒, 因为 E-L 方程给出 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. 若 q 是某个线坐标, 则此即沿该方向的线动量守恒 (读者可验证 $L = T - V$ 给出 $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$), 对应; 同理, 取某平面上的角坐标则给出沿法线的角动量守

恒, 对应. 再者, 当 $\partial L/\partial t = 0$ 时, 可证能量守恒: $\dot{H} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \dot{q}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = \dot{q}^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = 0$.

1.7 节将给出一般证明, 但实操时总按具体的作用量就事论事.

1.1.7 有效性

自场当然也作用自己, 但经典理论在处理这类问题时存在严重矛盾, 如辐射阻尼. 量子电动力学通过电子自能图的重整化来解决电子的自相互作用, 虽依旧不尽完美, 但至少知道症结在于点模型导致**无穷大自能**. 应当认为, 目前的理论都是某种尚未发掘的基本规律的**低能**情形, 低能意指理论所涉及的**能标** (energy scale) 远小于某个数量级很大的值. 现有理论视为**有效的** (effective). 因而无穷大及其截断是可以接受的, 因为这些无穷大究其本性是有效性导致的. 只要意识到物理理论总是近似的, 就可给人类的科学提供台阶. 所有理论都是错的, 但一些是有用的. 因此, 我们总是追求尽可能简单的理论, 但这不意味着自然规律 (若有且能被人总结) 从简. 美学纯粹是出于人为便利, 能迎合目前技术所能允许的实验即可.

研究各物质场间的相互作用, 就要用各对应的物理量来构建总作用量. 这一主题称为**耦合** (coupling). 目前除接受实验筛选, 没有先验原理支撑唯一的耦合方式. 以粒子和场的耦合为例. 有时可修改自由粒子作用量, 并保证无场时还原; 更多是直接相加的形式: 自由粒子作用量 + **耦合强度** \times 场与粒子的耦合项. 引入耦合强度无非是为了给理论参数更多自由余地. 从有效性和对称性出发, 并依据该相互作用的实验特征、量纲要求, 所考虑的最简单耦合称为**最小** (minimal) **耦合**.

1.2 狭义相对论

1.2.1 Lorentz 群

观察 $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\sigma\lambda}$, 其形同正交矩阵. 回忆一下, 正交矩阵 $R^i{}_j$ 满足保持矩阵 I 不变的同构变换

$$R^T R = I \iff (R^T)_k{}^i \delta_{ij} R^j{}_l = \delta_{ij} R^i{}_k R^j{}_l = \delta_{ij}.$$

其中注意矩阵转置满足 $(R^T)_k{}^i = R^i{}_k$; 矩阵乘法顺序涉及指标的相靠. 从正交右手归一系 $\{x\}$ 出发, 只要坐标变换是保定向的, 即 Jacobi 行列式满足

$$J = \det \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) > 0, \quad (1.2.1)$$

则称新系 $\{x'\}$ 也是右手系. 对上式取行列式有 $|R|^2 = 1$. 当 $|R| = 1$ 时它就是旋转变换, 当 $|R| = -1$ 时就存在空间反射. 右手 Descartes 系间相差保定向旋转变换、原点平移, 它们都保持 $d\ell$ 不变.

同理，我们要扩大对正交矩阵的直觉，考虑 $(\eta_{\mu\nu})$ 这种带负号的单位阵. 以后，凡满足 $|\Lambda|^2 = 1$ 的矩阵 Λ 都称正交矩阵. Λ 也代表转动，但无非是比空间转动还多出了时空伪转动. 取 (1.1.4) 式 $\sigma = \lambda = 0$ 就有

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \delta_{ij}\Lambda^i_0\Lambda^j_0 = 1 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2 \geq 1. \tag{1.2.2}$$

可见我们能按 $\Lambda^0_0, |\Lambda|$ 的符号将所有满足 (1.1.4) 的 Λ 分为四类. Λ^0_0 的符号代表时间是否反演，因此 $\Lambda^0_0 \geq 1$ 的 Λ 称**正时的**. 只有正时的变换才保持时间轴的未来、过去方向. $|\Lambda|$ 的符号代表整个时空坐标系的右手性， $|\Lambda| = 1$ 时称**固有的 (proper)**. 进而可分为如表 1.1 所示的四种情形. 固有、正时的线性 Poincaré 变换称为（正齐次）**Lorentz 变换**.

| $\Lambda^0_0 \backslash \Lambda $ | ≥ 1 | ≤ -1 |
|------------------------------------|----------|-----------|
| 1 | 正常时空 | 时空翻转 |
| -1 | 空间反射 | 时间反演 |

表 1.1: 变换的四种分类

线元在坐标变换下的不变性，可以通过主动观点理解为时空对称性，故物理学会直接称 Poincaré 变换构成的集合 P 为 **Poincaré 群**，而不区分该变换究竟是指坐标变换还是点变换. 只包含时空平移的群称**时空平移群**. 如果变换是线性的，则一种变换对应一种矩阵，故群乘可对应矩阵乘法，数学上称**广义正交群**，号差 +2 下记作 $O(1,3)$ ，这里前者指度规负项个数，后者指正项个数. 因此 P 可视为 $O(1,3)$ 和平移群所张成的，即数学上的半直积. 可按正时和负时分为 $O^+(1,3)$ 和 $O^-(1,3)$. $O(1,3)$ 的固有子群 $SO(1,3)$ 称**狭义正交群**，正时且固有的子群称 **Lorentz 群** $SO^+(1,3)$. 正时性和固有性之间无连续过渡，

| $\Lambda^0_0 \backslash \Lambda $ | ≥ 1 | ≤ -1 |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 | $SO^+(1,3)$ | $SO^-(1,3)$ |
| -1 | $O^+(1,3) \setminus SO^+(1,3)$ | $O^-(1,3) \setminus SO^-(1,3)$ |

表 1.2: 四个分支

故 $O(1,3)$ 分为四个连通分支¹. 显然若 $\Lambda^0_0 = 1$ ，则 Lorentz 变换实质只有固有的旋转作用，即空间部分是 (R^i_j) ，而剩下的是恒等变换. 固有空间旋转构成的集合是**空间转动群** $SO(3)$ ，可视为 $SO(1,3)$ 的子群. 号差不改变实质也可体现在群论中：可证 $O(1,3), O(3,1)$ 同构.

¹通俗地说，集合称为**连通的 (connected)**，是指集合是一整块的，其任意两点存在完全位于集合中的连续路径. 两个分离球体之并不是连通的，但二者都是其连通的子集，这称为**连通支集 (component)** 或**连通分支 (branch)**.

1.2.2 相对论动力学

在号差 +2 下, 切矢按模方为正、负或零, 分别称为**类空** (spacelike)、**类时** (timelike) 或**类光** (lightlike) 矢量. 光速不变要求 $ds^2 = 0$, 故光子线的切矢一定类光. 类光矢量亦称**零模** (null) 矢量. 所有类光矢量之集 C_N 称为**光锥** (light cone). 任意两个事件 p, q 间的直线线长 $\sqrt{|\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu|}$ 则称**距离**或**间隔**, 且可类似地分为三类. 注意 -2 号差习惯的

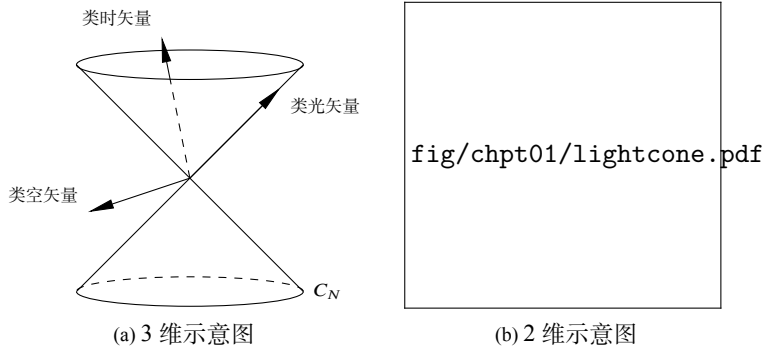


图 1.5: 光锥

模方符号刚好相反. 从三维 Cauchy-Schwartz 不等式可以看到, 若 V^μ 类时, 而 W^ν 是非零类时或类光矢量, 则当且仅当在任意按 Lorentz 变换 ($\Lambda^0_0 > 0$) 相联系的惯性系中满足 $V^0 W^0 > 0$ 时有 $V^\mu W_\mu < 0$. 因此可在光锥及其内部定义等价关系, 称 V^μ, W^ν 具有相同的**时间指向**. 容易发现存在两种等价方式. 先任意规定其中一种是**指向未来的** (future directed) 矢量, 那另一种方式指定的矢量就称为**指向过去的** (past directed). 忽略掉零矢量, 光锥被分成了两部分, 即**未来光锥**和**过去光锥**. 一般而言, 只在讨论某些反演对称性时才考虑指向过去的惯性系. 类空矢量没有未来或过去的分类.

任意类时线 C 于事件 $C(\tau_1), C(\tau_2)$ 间经历的 (elapsed along) **固有时间** $T = \tau_2 - \tau_1$ 在任意坐标系如何表示? 设置其固有坐标系 $\{\tau, x'\}$, C 上事件总满足 $x' = 0$, 则 $d\tau = \sqrt{d\tau^2 - dx'^2} \Rightarrow d\tau^2 = -ds^2$. 本节默认取惯性系, 有

$$T = \int_C \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma, \quad \gamma = \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.2.3)$$

其中 σ 是 C 的任取参数. 这里总默认世界线是分段光滑的. 此即观者线的线长, 故 τ 又称**线长参数**. 线性函数 $a\tau + b = \lambda$ 统称**仿射参数** (affine parameter). 光对其世界线上的事件标记为一致坐标时, 即对光而言不能定义固有时. 光不能充当观者. 描述光子世界线可用坐标时 t 参数化.

对于类时线, 可取固有时为参数:

$$U^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.2.4)$$

称为**4-速**. 显然 4-速是单位类时切矢: $U_\mu U^\mu = -1$, 且是广义的逆变矢量. $u^i := \dot{x}^i$ 称为**3-速**, 其对偶为 $u_i = \eta_{ij} u^j = \delta_{ij} u^j$, 模长即 $u := \sqrt{u_i u^i}$. 可见 4-速分量为 $U^0 = \gamma, U^i = \gamma u^i$. 同理, **4-加速**为

$$A^\mu := \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = U^\nu \partial_\nu U^\mu. \quad (1.2.5)$$

由于 $A^\mu U_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (U^\mu U_\mu) = 0$, 4-加速一定类空. $d^2 x^\mu / d\tau^2$ 是 Lorentz 张量, 但还不是张量, 后续将对此详解. $a^i := \ddot{x}^i$ 称为 (坐标) **3-加速**. 可见 4-加速分量为 $A^0 = \gamma \dot{\gamma} = \gamma^4 u \dot{u} = \gamma^4 u^i a_i, A^i = \gamma^2 a^i + \gamma^4 u^j a_j u^i$, 其中考虑到 3-加速在 3-速上投影为 \dot{u} ; 模长为 $A^\mu A_\mu = \gamma^4 a^i a_i + \gamma^6 (u^i a_i)^2$. 故 $A^\mu = 0$ 时任意坐标 3-加速都为零.

对单个自由质点构造拉氏量. 对称性指出它是 Lorentz 不变标量. 我们能找到的只有 $d\tau, m, c = 1$, 故 $S \propto m \int d\tau$. 注意 $u \ll 1$ 时

$$m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt = m \int \sqrt{1 - u^2} dt \approx m \int \left(1 - \frac{u^2}{2}\right) dt,$$

其中常数不影响变分, 可见若想还原至经典力学的自由质点动能, 只能取

$$L = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -m/\gamma, \quad S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt. \quad (1.2.6)$$

若想取参数为固有时 τ , 则默认是正路的固有时. 对于任何邻近旁路, τ 都非其固有时而只是纯粹的参数. 为何不能用每条路径自己的固有时来作参数? 因为变分应与参数无关. 比如置有限积分域, Fréchet 空间中任意邻近旁路上所用参数的取值范围, 必为同一区间, 若每条路径皆用自己的固有时作参数就办不到. 既然该参数无论如何都只有数学意义, 我们取坐标时 t 就可避免这些讨论. 变分得到实际方程后, 再将 4-速模方 $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1$ 代入, 就相当于将 $x^\mu(t)$ 重参化为 $x^\mu(\tau)$. 许多书籍对如下现象都未解释或作出错误解释: 若用固有时 τ 作参数, 则 $L = -m$, 得不到任何方程, 故强行解释为需还原代数形式才能进行变分. 正确的解释是 $U^\mu U_\mu = -1$ 只对正路成立, 其中参数 τ 与固有时一致. 变分必须考虑邻近旁路, 有它们自己的不同于 τ 的固有时, 因而沿这些旁路 $U^\mu U_\mu \neq -1$. 由 $L = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ 可计算得 $\partial L / \partial \dot{x}^\kappa = m \eta_{\kappa\lambda} \dot{x}^\lambda$ 和 $\partial L / \partial x^\kappa = 0$, 则 E-L 方程在约去 m 并与 $\eta^{\mu\kappa}$ 缩并后是直线方程 $\ddot{x}^\mu = 0$, 也可重参化为 $A^\mu = 0$, 符合实验对自由质点的观测结果, 可以认为作用量构造正确. 我们知道两点间直线最短, 但由于 $ds^2 = -d\tau^2$, 故时空中的直线是使固有时最大而非最小, 即“长程线”. 对于分段光滑情形, 显然总能转化为分段直线情形, 故只需考虑三角情形, 而显然斜线的固有时短于竖线, 故结论仍成立. 曲线性质更差的情形见第 3 章. 可计算知 $\partial u / \partial u^i = u_i / u$, 故

$$p_i = \partial L / \partial u^i = \gamma m u_i \implies p^i = \gamma m u^i = m u^i + \frac{1}{2} m u^2 u^i + \cdots, \quad (1.2.7)$$

后者称为**3-动量**, 并将 γ 按二项式定理展开. 可见若 $u \ll 1$, 则 3-动量近似于经典动量 $m u^i$, 即 3-动量给出了其相对论修正. 也可用 4-速 $U^\mu = \gamma \dot{x}^\mu$ 得出相应动量, 注意

$L = mU^\mu U_\mu / \gamma = mU_\mu \dot{x}^\mu$, 则

$$P_\mu = \partial L / \partial \dot{x}^\mu = mU_\mu \implies P^\mu = mU^\mu. \quad (1.2.8)$$

后者称为**4-动量**. 易知 $p^2 := p_i p^i = m^2 u^2 / (1 - u^2)$, 则 $u = p / \sqrt{p^2 + m^2}$, $\gamma = \sqrt{p^2 + m^2} / m$. 故在相对论中能量为

$$E = p_i u^i - L = pu + m/\gamma = \sqrt{p^2 + m^2} = \gamma m = m + \frac{1}{2}mu^2 + \cdots, \quad (1.2.9)$$

此即我们悉知的**质能方程**, 经典动能 $(1/2)mu^2$ 的出现表明 $(\gamma - 1)m$ 是其相对论修正. 可见质点静止时也有能量, 其应能释放并得到应用, 对核能的开发已验证了这一点. P^μ 同时具备能量和动量意义, 即 $P^0 = \gamma m = E$, $P^i = \gamma mu^i = p^i$, 则模方为 $-E^2 + p^2 = P^\mu P_\mu = -m^2$ 或者 $E^2 = p^2 + m^2$, 此即**质壳 (mass-shell) 关系**或 **Hamilton-Jacobi 方程**.

$F^\mu := dP^\mu / d\tau$ 称**4-力**, 分量 $F^0 = \gamma \dot{E}$, $F^i = \gamma f^i$, 其中**3-力**为 $f^i := \dot{p}^i$. 质量守恒时 $F^\mu = mA^\mu$, $f^i = ma^i$, 功能关系 $f^i u_i = \dot{E}$ 得到保留. 质点线不能从类时光滑演变为类光, 换言之, 不可能在任意有限过程下达到类光, 因为达到光速所需的力或能量无穷大, 不被目前的物理规律允许. 质点必走类时线, 从而亚光速. 质点宿命在光锥之内. 此即**相对论限制**. 故通常不考虑切矢模方符号变化的世界线.

对于光, 虽不能定义固有时和质量概念, 但可借量子理论的 de Broglie 关系定义其能量和动量. 设频率 ν 和波矢 k^i , 则能量为 $E = h\nu$, 3-动量为 $p^i = \hbar k^i$. 4-动量仍满足 $P^0 = E$, $P^i = p^i$.

1.2.3 典型相对论效应

狭义相对论有许多著名的运动学效应, 它们可从伪转动变换定量获得. “两颗超新星是同时爆发的吗”? “介子存活了多长时间”? “蟹状星云和半人马星座 α 星之间有多远”? 这些问题的答案都是相对的. 本节介绍的是如何从时空图直观并且同样定量地得到这些结果.

若间隔类光或类时, 则各惯性系将一致认同两个事件的先后顺序, 因为 Lorentz 变换具有正时性. 但对于类空间隔, 其事件的坐标时差距可以在不同惯性系下取任意实数. 即存在一些观者判定两个事件同时, 另一些观者则断言 p 先于 q , 剩下的观者反之. 这在图 1.3, 1.6 中一目了然. 类空间隔的事件先后次序没有意义. 类时或类光线统称**因果线 (causal curve)**, 能用因果线连接的事件正是具有因果联系的事件. 在 \mathbb{R}^4 中这等价于用类时间隔去连接. 数学上不妨设曲线分段光滑, 并使用高数里的中值定理即可. 比较间隔的方法是用双曲线校准. 令双曲线 $x^2 - t^2 = x_1^2$, 其与 x 轴交于 $(t, x) = (0, x_1)$. 双曲线上的点 $(t, x) = (x_1 \sinh \theta, x_1 \cosh \theta)$ 与原点连线是类空间隔且恒定, 可用来比较类空间隔, 故称**类空校准线**. 从 $(0, x_1)$ 至 (t, x) 扫过角度 θ , 易得扫过面积为 $x_1^2 \theta / 2$, 可类比欧氏几何的圆. 同理推知**类时校准线**的结论.



图 1.6: 类空间隔

每个观者都认为其他的相对运动的时钟走时慢，比如与 S' 相对静止的质点经历其固有时 $\Delta t'$ ，则在 S 看来两个事件的时间差是 $\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$ ，这种现象称为**钟慢效应**或**时间膨胀**。这种效应是完全对称的，每个观者都认为其它的相对运动的时钟走时慢。用时空图的校准线便一目了然。例如，两个观者都看到 S 系原点上的时钟读数“0”，但直线 $t' = t_1$ 与该时钟世界线（ t 轴）在 $(t, x) = (t_1, 0)$ 下方的 $(t_1/\gamma, 0)$ 相交。须强调，这种现象的物理意义是完全真实的。在宇宙射线内发现的介子的寿命是如此之短，以至于即使以光速运动，它们穿透大气层所需时间也要比其通常寿命大几十倍。按理来说介子不可能到达地面，但钟慢效应“使其保持年轻”，在我们看来实际寿命长很多，故仍可到达。

由于一般来说，不同的惯性观者对事件的同时性各抒己见，而测量一运动物体“长度”的唯一方法，就是要利用一把量尺“同时”测量物体两端；所以我们不应当诧异，不同的惯性观者所测量的长度和时间的确会不同。考虑一把沿 S' 系 x' 轴静置的测量尺子。在这个坐标系中它的“长度”是 L' 。尺子两端的世界线是平行于 t' 轴的两条直线。若 S 观者在这些世界线上同时观测两个事件，则其所测的长度为 $L = L'/\gamma < L'$ ，即量尺在其运动方向上缩短了 $1/\gamma$ 倍。这种现象称为**尺缩效应**或**长度收缩**。就像钟慢效应那样，尺缩效应完全对称且实在。沿 S 系 x 轴静置尺子的情况由时空图道尽。

尺缩效应导致了有趣的**车库佯谬**¹。设汽车与车库静长相等。汽车朝库匀速前进，司机认为动库变短、不能放下，司库认为动车收缩、放下有余。二者矛盾吗？不妨设车库无后墙（类似于隧道洞口），画图时借用校准曲线以保证



¹英语为 ladder paradox，由 Rindler 提出，最初是借梯子和谷仓 (barn) 举例的；还可用火车和隧道。

fig/chpt01/HYPERBOLOIDS.pdf

图 1.7: 校准线

车和库有相等静长。由图易见，以司库所在惯性系的同时面衡量，车短于库；以司机所在惯性系的同时面衡量，车长于库。两人观点都对，因为同时性的相对性导致结论的相对性。“到底放下还是放不下？”这种问题没有意义，正如在尺缩问题中“到底哪把尺子较长”亦无意义。我们若真要“比较”，能让各位意见一致的做法只能是都放入静系中去。从因果角度来理解将更便于在脑海里建立物理图像。“车尾接触入口”“车头接触出口”两个事件没有因果联系，故二人观点都对。我们在脑海中，不假思索地以为有因果联系，这个错觉来源于火车的车身。但在相对论中没有严格的刚体，只能将车身各质元的恒定高速运动理解为独自的、互相影响很小的。当然，现实生活中没有这么长且如此高速的火车，相互作用能在车头车尾间迅速传递，的确具有因果联系。当车库有坚硬后墙时，车头固然撞墙停止。但撞墙信息以相互作用纵波传至车身各部分皆需时间，只当车尾获悉后整个车身才能停住，因而汽车将缩至比司库期初所测长度更短的程度。这时的确在谁看来都装得下。设材料性质理想，使信息传递为光速且质点获悉信号后立即停止，读者不妨在图上补出撞车后的时空图。

最后，著名的**孪生佯谬** (twin paradox) 就是说，设

fig/chpt01/TWIN PARADOX.pdf

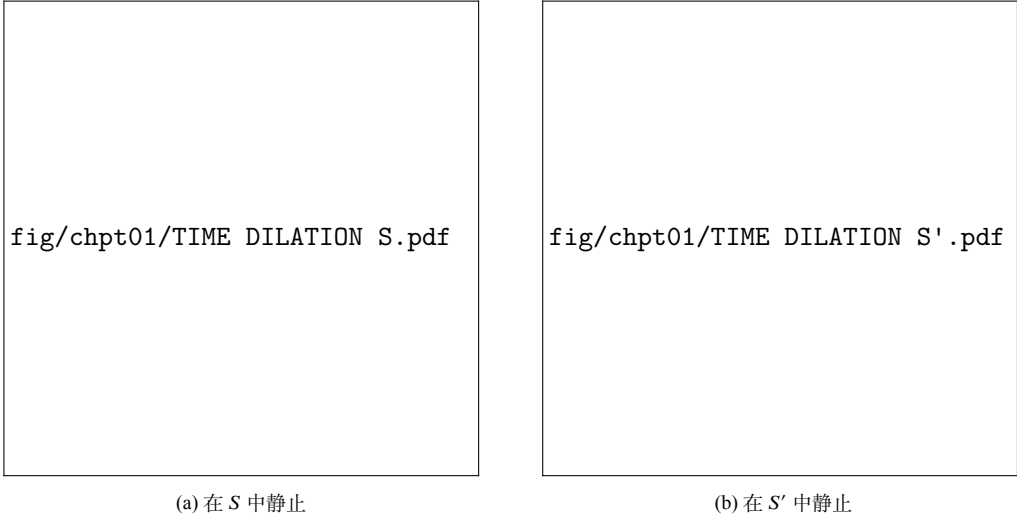


图 1.8: 钟慢效应

一对双胞胎从某时空点分离，并回合于另一时空点，则惯性运动者将年长于非惯性运动者。前文已直接证明了这一点。图 1.12 给出了三角情形，也可理解为，折线的同时面在 B 处发生突变，因此惯性观者多出了图中阴影部分的时间差。结论是不能交换的，因为不能将相对性原理滥用于非惯性系和惯性系间；而实际情形中，两人非质点，因此走惯性运动较为舒适，而走非惯性运动将感受到巨大的加速度，使相对论现象足够明显的物理量达光速级。

1.2.4 经典电动力学

狭义相对论缘起于经典电动力学，其研究经典电磁场、电荷构成的系统。我们曾从电荷守恒假设、若干实验定律推测出 Maxwell 方程，其优美的对称性启发我们寻找这些假设的根源。而 Noether 定理正也指出，对称性与守恒量有关。类比波函数，考虑闵氏时空上的标量场 ϕ 。置惯性系，场是粒子系统连续化，作用量中的动能项显然用 $\partial_\mu \phi$ 构造。若 ϕ 是实的，最简单的选择是 $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ 。其系数总可适当标度，但要求为正，则系数为负。我们可取

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - U(\phi) \implies \square \phi - \partial U / \partial \phi = 0, \quad (1.2.10)$$



fig/chpt01/INVARIANT HYPERBOLOIDS.pdf

图 1.9: S' 系的钟根据同时面 $t' = t_1, t' = 0$ 认为 S 的钟慢



(a) 在 S' 中静止



(b) 在 S 中静止

图 1.10: 尺缩效应

从 E-L 方程可以看出, ϕ 的一次项对运动方程无实质贡献, 故势能项最简单的取法是至少二次项, 如 $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, 则得 **Klein-Gordon 方程** $\square\phi - m^2\phi = 0$. 这最初是为得到相对论量子力学的一种尝试. 在量子场论中用以描述自旋为零的粒子, 如 π 介子. m 表示量子化后的粒子静质量. 当然, 量子理论通常考虑复标量场 ϕ , 则标量可用其共轭 $\bar{\phi}$ 构造:

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \bar{\phi} - U(\phi \bar{\phi}). \quad (1.2.11)$$

作用量具有 Lorentz 不变性, 涉及时空的 Lorentz 变换. 但作用量的内在结构还会导致另一种对称性, 其不涉及时空变换, 称为**内部对称性**. 比如上式还在整体**相位变换**或 **U(1) 变换** $\phi \rightarrow e^{i\theta}\phi$ 下保持不变. 相应地 $\bar{\phi} \rightarrow e^{-i\theta}\bar{\phi}$. 这称为 **U(1) 对称性**. 引入耦合强度 e 使 $\theta = e\alpha$, 取小量 $\alpha = \epsilon$, 则场的 (一阶) 改变为

$$\delta_s \psi(x) = \epsilon F(x), \quad (1.2.12)$$

$$\delta_s \phi := \tilde{\phi} - \phi = i\epsilon \phi, \quad \delta_s \bar{\phi} = -i\epsilon \bar{\phi}, \quad \delta_s x^\mu = 0, \quad (1.2.13)$$

则

$$\delta_s \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu, \quad (1.2.14)$$

直接导出守恒流 $J^\mu = ie(\phi \partial^\mu \bar{\phi} - \bar{\phi} \partial^\mu \phi)$, 但读者仍可验证 $\partial_\mu J^\mu = 0$. 定义 $\rho := J^0, j^i := J^i$, 则 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, 于是 ρ, \mathbf{j} 分别解释为该系所测电荷密度和电流密度. 称 J^μ 为 **4-电流密度**.

然 ϕ 只代表电荷系统, 电磁场从何而来? 原来, 场论的定域性使相位往往应随时空点可变, 这称为相位变换的**局域化或规范化** (gauging). 为得局域 U(1) 对称性, 需引入矢量场 A_μ , 而最小耦合指出, 只需给作用量加上缩并项 $ie(\phi \partial^\mu \bar{\phi} - \bar{\phi} \partial^\mu \phi) A_\mu$, 则

$$\mathcal{L} = -D^\mu \phi \overline{D_\mu \phi} - U(\phi \bar{\phi}), \quad D_\mu \phi := (\partial_\mu - ie A_\mu) \phi. \quad (1.2.15)$$

注意 $\overline{D_\mu \phi} = \partial_\mu \bar{\phi} + ie A_\mu \bar{\phi}$. 考虑局域相位变换 $\phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \phi$, 为使作用量不变, 只需 $D^\mu \phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)} D^\mu \phi$, 也即

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.2.16)$$

即任意 $A_\mu + \partial_\mu f$ 导致一致作用量, 此称**规范自由性** (gauge freedom). 守恒流更新为

$$J^\mu = ie \left(\phi \overline{D^\mu \phi} - \bar{\phi} D^\mu \phi \right). \quad (1.2.17)$$

$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$ 称为**规范协变导数**. 定义 $\varphi := A^0, a^i := A^i$, 从而分别解释为电标势和磁矢势. A_μ 称为 **4-势**, 可见规范自由性导致 $\varphi + C, \mathbf{a} + \nabla f$ 的选取自由.

回到经典宏观视角将有所裨益, 这时场还原回带电粒子. 置点电荷 q 及其 4-速 U^μ , 同样考虑最小耦合

$$S = \int (-m + q A_\mu U^\mu) d\tau, \quad (1.2.18)$$

其中耦合强度收进荷的单位定义. 耦合项变分为

$$\delta \int A_\mu U^\mu d\tau = \int \left(\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu U^\mu + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \right) d\tau \simeq \int F_{\mu\nu} U^\nu \delta x^\mu d\tau,$$

其中 $F_{\mu\nu} := 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ 称**电磁张量**. 变分结果为

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (1.2.19)$$

只需注意电磁场 $\mathbf{B} := \nabla \times \mathbf{a}, \mathbf{E} := -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{a}$, 便能将其解释为 Lorentz 力定律. 首先, 叉乘 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的分量写法为 $\varepsilon_{ijk} A^j B^k$, ε_{ijk} 称为 **Levi-Civita 符号**, 若 $(ijk) \in S_n$, 则 $\varepsilon_{ijk} = \text{sgn}(ijk)$, 否则为零. 且可证明 (见附录 C.6 节)

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon^{kmn} = 2\delta_{[i}^m \delta_{j]}^n = 2\delta_i^{[m} \delta_j^{n]}. \quad (1.2.20)$$

再注意 $A_0 = -\varphi, A_i = a_i$, 则¹

$$E_i = F_{i0}, \quad B_i = \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k = \varepsilon_{ijk} \partial^{[j} A^{k]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \Leftrightarrow F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k. \quad (1.2.21)$$

可使用矩阵表示为

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.22)$$

它确有场强意义. 取 $f^i = m\dot{u}^i$ 可看出该方程正是 $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. 称 $qF^\mu{}_\nu U^\nu$ 为 **4-Lorentz 力**. 类似地, 欲直接得 3 维表述可用惯性坐标时 t 作为参数, 位形空间取同时面 Σ_t , 这样可表为 $L = -m\sqrt{1-u^2} - q\varphi + qu_i a^i$, 对 x^i 变分即可. 可见最小耦合迫使场强成为 4-速的线性变换. 从定义立即得到微分恒等式

$$F_{[\mu\nu, \lambda]} = 2A_{[[\nu, \mu], \lambda]} = 2A_{[\nu, (\mu, \lambda)]} = 0, \quad (1.2.23)$$

这已给出 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$.

为研究 A_μ 的动力学, 需构造自由电磁场作用量. 选择用 $F_{\mu\nu}$ 构造, 因为 A^μ 的运动方程应至少二阶, 且由 $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} + 2\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} f = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f)$ 可知 $F_{\mu\nu}$ 保持 U(1) 对称性. 最简单构造是 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$. 考虑

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \left(D^\mu \phi \overline{D_\mu \phi} + U(\phi \bar{\phi}) \right), \quad (1.2.24)$$

其中耦合强度由实验测定并取 Gauss 几何制 ($4\pi\epsilon_0 = 1$). 进而

$$\delta \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x = 4 \int F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) d^4x \simeq -4 \int \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^4x.$$

另一项 $-\delta \int (D^\mu \phi \overline{D_\mu \phi} + U(\phi \bar{\phi})) d^4x = \int J^\mu \delta A_\mu d^4x$, 故

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu, \quad (1.2.25)$$

这给出了 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j}$.

为消除规范自由度, 可约定**规范固定** (gauge fixing) 条件, 简称规范条件. 比如 **Lorentz 规范**²

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.2.26)$$

这种 A^μ 总是存在的, 因为对任意 $\partial^\mu A_\mu \neq 0$ 的 A^μ , 总可构造 $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ 且 $\partial^\mu \partial_\mu f = -\partial^\mu A_\mu$, 即可有 $\partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0$. 而 $\partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ 即电动力学中的 d'Alembert 算子 \square , 类似

¹不同于普通代数等式有乘除消项的说法, 指标运算中, 必须理解为是用缩并得到 δ^μ_μ 以消项.

²指丹麦物理学家 Ludvig Valentin Lorentz(1829-1891). 当然它又是 Lorentz 协变的, 所以也可叫做 Lorentz 规范. 二人名字的发音相同, 容易混淆, 需要注意 Lorentz 是荷兰的物理学家, 相对论的奠基者之一.

于 3 维空间中的 Laplace 算子 ∇^2 . “ $\square f = \text{常数}$ ” 的非零解存在且甚多. 利用 A^μ 和 Lorenz 规范, 可将 Maxwell 方程组写作一条:

$$-4\pi J_\nu = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \square A_\nu. \quad (1.2.27)$$

此即 **d'Alembert 方程**. 而 $F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0$ 自动由定义满足.

最后研究经典宏观下带电粒子如何推广到连续介质.

考虑质量守恒且无内部作用的流体, 称为**尘埃 (dust)**. 设 μ^* 是**固有能量密度或质量密度**. 置尘埃系统仅受外引力场作用, 则 $\mathcal{L}_M = -\mu^*$. 质量守恒等价于 $\partial_\nu(\mu^* U^\nu) = 0$

研究耦合项 $q \int A_\mu U^\mu d\tau$. 取共动系 $\{a\}$ 测得**固有电荷密度** ρ^* , 即满足 $q = \int \rho^* d^3a$, 则 $q \int d\tau = \int \rho^* d^4a$. 惯性系变换保持 Jacobi 行列式为 1, 则 $d^4x = d^4a$. 进而耦合项为 $\int A_\mu J^\mu d^4x$, 其中 $J^\mu = \rho^* U^\mu$. 设某荷电系统的 3-速场 u^i

对于给定流线, 守恒方程可通过流线上某点的初值唯一地确定 J^μ 在同一流线上的值, 因此 $\delta J^\mu = 0$. 因而 $\delta \int A_\mu J^\mu d^4x = \int J^\mu \delta A_\mu d^4x$, 故

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu - \mu^*. \quad (1.2.28)$$

对 $F_{\mu\nu}$ 的动力学, μ^* 项无关. 对流线的动力学

而运动方程为 $\mu^* Z^\mu \partial_\mu Z^\nu = F^\mu{}_\lambda J^\lambda$, 式右称为 **4-Lorentz 力密度**.

1.2.5 Lorentz 变换推导 *

本节旨在补上任意 Lorentz 变换的代数证明. 由于重点只在矩阵的行列指标, 故本节将上标都写作下标以简化运算. 根据相对性原理, 对 Λ 的分类同样适用于相应 Λ^{-1} . 当然, 亦可直接证明之. 注意 $|\Lambda^{-1}| = |\Lambda|^{-1}$, 我们只需证明 $(\Lambda^{-1})_{00} = \Lambda_{00}$. 欲用 Λ 表示 Λ^{-1} . 由式 (1.1.4) 有

$$\eta_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})_{\mu\sigma} = \eta_{\sigma\lambda}\Lambda_{\lambda\nu}, \quad (1.2.29)$$

进而

$$(\Lambda^{-1})_{\lambda\sigma} = \eta_{\mu\sigma}\Lambda_{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda}. \quad (1.2.30)$$

此即用 Λ 表示 Λ^{-1} 的方法, 取其 $\sigma = \lambda = 0$ 就有 $(\Lambda^{-1})_{00} = \Lambda_{00} = (\Lambda^T)_{00}$.

下面用 $\{x\}, \{x'\}$ 的相对速度表示 Lorentz 变换. 我们说 S' 系相对于 S 的速度是 $u_i = dx_i/dt$, 是指 S' 任意的相对静止的世界线在 S 下测得的速度分量都是 u_i . 显然这等价于研究 S' 系的空间原点运动. 反之, 设 S 系的空间原点在 S' 下测得 $u'_i = dx'_i/dt'$. 先考虑 S' 的空间原点, 其世界线始终满足 $dx'_i = 0$, 则 $dx_\lambda = (\Lambda^{-1})_{\lambda 0} dx'_0$, 故 $\Lambda_{00} = (\Lambda^{-1})_{00} = dt/dt'$, $(\Lambda^{-1})_{i0} = u_i dt/dt'$, 据式 (1.2.29) 有 $\eta_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})_{\mu\sigma}(\Lambda^{-1})_{\nu\lambda} = \eta_{\sigma\lambda}$, 取 $\sigma = \lambda = 0$ 有 $(\Lambda_{00})^2 = 1 + \delta_{ij}(\Lambda^{-1})_{i0}(\Lambda^{-1})_{j0}$. 再结合正时条件有 $\Lambda_{00} = (\Lambda^{-1})_{00} = \gamma$, 以及 $(\Lambda^{-1})_{i0} = \gamma u_i$,

其中 $u := \sqrt{u_i u_i}$. 再考虑 S 的空间原点, 类似地有 $\Lambda_{00} = dt'/dt$, $\Lambda_{i0} = u'_i dt'/dt = \gamma u'_i$, 以及

$$u'_i u'_i = u_i u_i = u^2. \quad (1.2.31)$$

这看似是显然的, 但现在要作为经过证明的结论. 不过, 这是用 u'_i 表示 Λ , 固然渴望用 u_i 直接表示. 对 (1.2.30) 其余 σ, λ 值讨论有 $(\Lambda^{-1})_{i0} = -\Lambda_{0i}$, $(\Lambda^{-1})_{0i} = -\Lambda_{i0}$, 以及 $(\Lambda^{-1})_{ij} = (\Lambda^T)_{ij}$. 可得 $\Lambda_{0i} = (\Lambda^T)_{i0} = -\gamma u_i$.

还差 $\Lambda_{i0}, \Lambda_{ij}$. 尝试用 u_i 表示 u'_i . 取 (1.1.4) 式 $\sigma = 0, \lambda = k$ (反之亦可), 有

$$\delta_{ij} \Lambda_{i0} \Lambda_{jk} = \Lambda_{00} \Lambda_{0k} \implies \Lambda_{jk} u'_j = -\gamma u_k. \quad (1.2.32)$$

同理取 $\eta_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma\mu} \Lambda_{\lambda\nu} = \eta_{\sigma\lambda}$ 的 $\sigma = 0, \lambda = k$ 有

$$\Lambda_{kj} u_j = -\gamma u'_k. \quad (1.2.33)$$

故只需关注 Λ_{ij} . 更直观的表达可利用 $R \in \text{SO}(3)$. 若两坐标系仅差一个旋转变换, 则仍相对静止, 相对论的动力学效应不会体现. boost 变换即指这类相对速度可朝任意方向的 Lorentz 变换, 但保持空间坐标轴平行. 二维特殊情形保持 $y' = y, z' = z$. boost 变换是“时空旋转”, 故任意 Lorentz 变换应可表为一个 boost 变换和一个空间旋转的复合 (因此不一定有 $u_i = -u'_i$). 为找到 R , 注意总可假设 $R_{ij} =: \Lambda_{ij} + S_{ij}$, 其中 Λ_{ij} 的符号取正是为迎合固有条件. 由定义, R_{ij} 满足

$$\delta_{ik} R_{ij} R_{kl} = \delta_{jl}, \quad R_{ij} u_j = -u'_i, \quad R_{ij} u'_i = -u_j. \quad (1.2.34)$$

取 (1.1.4) 式 $\sigma = j, \lambda = l$ 有 $\delta_{ik} \Lambda_{ij} \Lambda_{kl} = \delta_{jl} + \gamma^2 u_j u_l$, 结合式 (1.2.32), (1.2.33) 以及上式, 经过一些繁琐计算后可得 $S_{ij} = \frac{\gamma-1}{u^2} u'_i u_j$, 综上任意 Lorentz 变换可表为

$$\Lambda_{00} = \gamma, \quad \Lambda_{0i} = -\gamma u_i, \quad \Lambda_{i0} = -\gamma R_{ij} u_j, \quad \Lambda_{ij} = R_{ij} + \frac{\gamma-1}{u^2} R_{ik} u_k u_j. \quad (1.2.35)$$

取 $R_{ij} = \delta_{ij}$ 就可得任意 boost 变换

$$\Lambda_{00} = \gamma, \quad \Lambda_{0i} = \Lambda_{i0} = -\gamma u_i, \quad \Lambda_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{u^2} u_i u_j. \quad (1.2.36)$$

再令 $u_2 = u_3 = 0$ 就有 $\Lambda_{11} = \Lambda_{00} = \gamma, \Lambda_{01} = \Lambda_{10} = -\gamma u_1$, 即二维 boost 变换, 常记作 $\Lambda(\theta)$. 鉴于此, 任意 Lorentz 变换可用 $R_1, R_2 \in \text{SO}(3)$ 表为 $R_1 \Lambda(\theta) R_2$ 的形式.

1.3 广义相对论

1.3.1 引力度规

引力场强正是试验质点加速度, 加速度又恰是运动学概念, 仅涉及时空坐标; 另一方面, 由于涉及运动坐标系, 局域惯性系必将完整涉及 4 个坐标. 可见四维时空很适合

用于描述引力. 先考虑试验粒子在外场中的运动. 根据等效原理, 试验粒子的**最小引力耦合** (minimal gravitational coupling) 即要求在局域惯性系中还原回狭义相对论. 置自由落体质点, 世界线在某局域惯性系 $\{\xi\}$ 中表为 $\xi^\alpha(\tau)$, 则

$$\delta \int d\tau = \delta \int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta} = 0 \implies \tilde{A}^\alpha = \frac{d\tilde{U}^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (1.3.1)$$

考虑任意坐标系 $\{x\}$. 注意 4-速表为 $U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \tilde{U}^\alpha = dx^\mu/d\tau$, 则

$$A^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \tilde{A}^\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} U^\mu \right) = \frac{dU^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu = 0, \quad (1.3.2)$$

其中

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.3.3)$$

称为 **Christoffel 符号**, 简称**克氏符**. 微积分学的 Fubini 定理指出, 任意坐标均有 $\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} = 0$, 因此有 $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda = 0$. 同理, 固有时满足

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} := \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (1.3.4)$$

此**即时空度规**或 **Lorentz 度规**. 光属于电磁或量子实验的内容, 也符合等效原理. 取参数 $\lambda := \xi^0$, 同理得

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (1.3.5)$$

可从度规计算出克氏符. 为构造克氏符定义式 (1.3.3), 应对度规定义式 (1.3.4) 求坐标偏导:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}, \quad (1.3.6)$$

其中注意 $\eta_{\alpha\beta,\lambda} = 0$. 为从中提出克氏符, 做指标轮换便可合并同类项. 做轮换 $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \mu$ 再消元得 $g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma} = 2g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. 两边与 $g^{\sigma\alpha}$ 缩并可移项, 再将 α 换回 λ 就有

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (1.3.7)$$

由此快速证明 Poincaré 变换的仿射性: 任意惯性系下克氏符全零, 则 $\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} = 0$. 也可通过一般坐标系下的作用量得到运动方程. 由等效原理知

$$\delta \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0. \quad (1.3.8)$$

由 $L = -\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ 计算得 $\partial L / \partial \dot{x}^\kappa = g_{\kappa\lambda} \dot{x}^\lambda$ 和 $\partial L / \partial x^\kappa = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\kappa} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, 则 E-L 方程是

$$\ddot{x}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (2g_{\kappa\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \implies \ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (1.3.9)$$

最后一步是注意 $g_{\kappa\nu,\mu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = g_{\kappa(\mu,\nu)}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. 再重参数化即可.

克氏符没有错开指标书写是考虑到一般不会混淆, 且它其实是赝张量:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}},\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

可见多出一项. $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 是坐标系自身信息. 比如, 平面上的测地线是直线, 但是克氏符仍可非零, 只要选择复杂的坐标系即可.

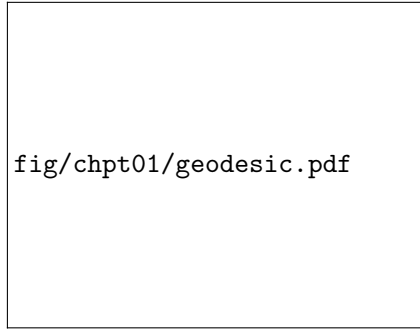


图 1.13: \mathbb{R}^2 任意坐标系及直线

引力作用现解释为度规非闵. 因为倘若存在某系使得处处 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 该系就为惯性系, 而自由粒子运动为直线, 说明无引力. 可见即使克氏符是赝张量, 其实也能体现绝对的引力现象, 因为度规非闵等价于不存在坐标系使克氏符处处为零. 只保证存在局域惯性系使克氏符严格在测地线上全零. 引力场可由时空度规描述, 而前文提过, 度规决定一套几何学, 故引力可表为时空的几何效应, 即 **Lorentz 几何**. Poincaré 和 Riemann 都尝试过仅用空间几何构建引力理论, 但未能成功. 引力几何理论的关键就在于补上时间这一维, 时间对引力亦有贡献.

测地线方程指出 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 具有引力场强的意义, 进而 $g_{\mu\nu}$ 具有引力势的意义. 实际上的确可直接寻找度规同引力势的关系. 置一孤立场源. 研究时坐标系可取为与场源共动, 比如地面系或某个遥远观者所尽可能构造的坐标系. 注意孤立系统各不影响, 因而所关心场源的外引力场很弱, 则该系近似为惯性系的余地很大. 并且, 当远离所关心的孤立系统时, 引力场是**渐弱的**, 即任取某种距离 r (如欧氏距离) 后有 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1})$. 当然, 也可直接考虑的场源质量较小. 可见无论如何, 都能考虑**线性近似**, 即与 $\eta_{\mu\nu}$ 只差小量:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.\tag{1.3.11}$$

从而能在 $\eta_{\mu\nu}$ 的惯性系中将引力近似解释为 $h_{\mu\nu}$. 在弱场意义上, 假若所研究的对象还**低速**, 即 $h_{\mu\nu,0} = 0$ 且试验质点近似静止, 便可认为 Newton 理论成立. 这其实也是对一套新理论的基本要求, 称为 **Newton 极限**. 由归一性知

$$U^\mu = (-g_{00})^{-1/2} \delta_0^\mu, \quad (1.3.12)$$

从而一阶意义上 $U^\mu = \delta_0^\mu$. 此时测地线方程为 $dU^\mu/d\tau = -\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{00,\nu}$, 则 $-\partial^i\phi = d^2x^i/dt^2 = \frac{1}{2}\delta^{ij}h_{00,j}$, 故

$$h_{00} = -2\phi, \quad g_{00} = -(1 + 2\phi), \quad (1.3.13)$$

其中规定 $h_{\mu\nu}, \phi$ 在无穷远处均衰减至零.

1.3.2 Levi-Civita 联络

可以看到 $dU^\lambda/d\tau$ 或偏导数只有 Lorentz 协变性而无广义协变性. 我们将 4-加速理解为对 4-速求一种保持张量协变性的导数, 这种导数只在局域惯性系中才还原为 $d\tilde{U}^\alpha/d\tau$. 不妨记 $D/d\tau$, 即 $A^\lambda = DU^\lambda/d\tau = dU^\lambda/d\tau + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu$. D 称为**绝对微分**或**协变微分**, 日文所翻译的**共变**或许更无歧义. $D/d\tau$ 称为**沿线协变导数**. 换言之 $D/d\tau$ 总保持其作用对象的广义协变性, 而只在局域惯性系中还原回 $d/d\tau$. 相应于 $d/d\tau$ 可按全微分关系表为若干坐标偏导 ∂_ν 的线性组合, 对 $D/d\tau$ 而言亦有**协变导数** ∇_μ 的概念¹. 一般只讨论张量的协变导数. 比如对逆变矢量 V^μ 而言有 $DV^\mu/d\tau =: \nabla_\nu V^\mu dx^\nu/d\tau = U^\nu \nabla_\nu V^\mu$, 且可有类似的分号简记: $V^\mu{}_{;\nu} = \nabla_\nu V^\mu := V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu V^\sigma$. 常把多出的克氏符项称为对偏导数的“协变性修正”. 协变导数的优势是无需借助于曲线及其参数, 但劣势是某点的 $V^\mu{}_{;\nu}$ 要求 V^μ 在该点邻域都有定义, 而沿线求导只要求曲线上的邻域有定义.

其它张量的协变导数仍可从局域惯性系出发, 按张量变换律推出, 但更简单地关注如下事实: 首先, 就标量 f 而言, 由全微分或链式法则可知, 偏导已有广义协变性, 故 $f_{;\nu} = f_{,\nu}$. 其次, 从局域惯性系的偏导可知, 任意协变导数应具有 **Leibniz 法则**, 便可从标量、逆变矢量的协变导数及 Leibniz 法则推出一般情形. 首先就协变矢量而言, 构造标量 $V^\mu \omega_\mu$, 则对任意 V^μ 有 $(V^\mu \omega_\mu)_{;\nu} = (V^\mu \omega_\mu)_{,\nu}$, 用 Leibniz 法则拆项并代入矢量协变导数有 $V^\mu \omega_{\mu;\nu} + \omega_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma = V^\mu (\omega_{\mu;\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \omega_\sigma) = V^\mu \omega_{\mu,\nu}$, 因此 $\omega_{\mu;\nu} = \omega_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \omega_\sigma$. 按此方法可得 (k, l) -张量的协变导数为

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l; \lambda} &= T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l, \lambda} \\ &+ \sum_{i=1}^k \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu_i} T^{\mu_1 \cdots \sigma \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} - \sum_{j=1}^l \Gamma_{\lambda\nu_j}^\sigma T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \sigma \cdots \nu_l}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

¹ 注意与规范协变导数 D_μ 相区分.

在记忆时注意, 此即先填上一个偏导, 再对所有指标依次添加相应的克氏符修正项 (正负取决于指标上下), 并满足指标平衡.

式 (1.3.6) 说明度规的协变导数为零: $g_{\mu\nu;\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - g_{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} = 0$, 称为**度规适配性** (metric-compatibility). 进而可直接在任意坐标系下证明 A^{μ}, U^{ν} 正交: $A^{\mu}U_{\mu} = \frac{1}{2} \frac{D}{d\tau}(g_{\mu\nu}U^{\nu}U^{\mu}) = 0$. 数学上称满足 $DV^{\mu}/d\tau = 0$ 的逆变矢量 V^{μ} 在做**平行移动** (parallel transport) 或 **Levi-Civita 移动**. 切矢 $T^{\mu} = dx^{\mu}/d\sigma$ 沿其自身平行移动的曲线称为**测地线** (geodesic), 即 $T^{\mu}\nabla_{\mu}T^{\lambda} = 0$. 此称**测地线方程**. 可见自由落体运动就是引力度规下的测地线. 假设 V^{μ}, W^{ν} 沿某条线平行移动, 则内积沿线恒定: $\frac{D}{d\tau}(V^{\mu}W_{\mu}) = 0$. 就单个 V^{μ} 而言说明模方恒定, 的确可看作一种“平行移动”. 不妨考察其直观含义. 如图 1.14, 设某



图 1.14: 图中 $\Delta\tau$ 等差值均夸大

曲线 $x^{\nu}(\tau)$ 上 p 为参数零点, 而邻近点 q 的参数记作 $\Delta\tau$ (可正可负). 若矢量场 V 至少在 p, q 线段上有定义, 便可讨论 p 处沿线导数算符. 设矢量场在 p, q 分别取值 $V|_p, V|_q$, 则

$$\left. \frac{dV^{\mu}}{d\tau} \right|_p = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}|_q - V^{\mu}|_p}{\Delta\tau}$$

是直接比较 $V|_q, V|_p$, 但二者隶属不同切空间, 差值 dV 意义不明. 这是 $dV^{\mu}/d\tau$ 不协变的直观理解. 欲画出 dV , 需将矢量照搬至同一点作差. 不妨考虑 q 点. 图中 q 点的 $V|_p$ 为照搬结果, 故 dV 标注如图. 另一方面,

$$\left. \frac{DV^{\mu}}{d\tau} \right|_p = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}|_q - V^{\mu}|_p}{\Delta\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}|_p V^{\nu}|_p \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x^{\lambda}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{V^{\mu}|_q - V^{\mu}|_{p \rightarrow q}}{\Delta\tau},$$

其中 $V^{\mu}|_{p \rightarrow q} = V^{\mu}|_p - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}|_p V^{\nu}|_p \Delta x^{\lambda}$. 可见 $DV^{\mu}/d\tau$ 是求 $V|_q$ 与 q 处新矢量 $V|_{p \rightarrow q}$ 之差. 这样 DV 表为如图. δV 为 $V|_{p \rightarrow q}, V|_p$ 之差. 由上式或图示知 $\delta V^{\mu} = dV^{\mu} - DV^{\mu} = -\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} V^{\sigma} dx^{\nu}$, 这便是克氏符项所给出的修正. $V|_{p \rightarrow q}$ 其实就是平移移动的结果. 为看出这一点, 只需令 V 自己就处处按这种方式移动, 则 $DV^{\mu}/d\tau = 0$.

设定时空上的逆变矢量场是给各时空点赋予其相应的逆变矢量, 一个逆变矢量是绑定于一点的, 故任意两点 p, q 处各自的逆变矢量本无关联. 然而给定某 p, q 间之曲线, 可

通过矢量的平行移动, 将两个切空间联系起来. 因此 ∇_ν 又被称为**联络** (connection). 附录 E 给出了一般的联络定义, 每种联络都有相应的**联络系数** $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, 相应测地线用 $U^\nu \hat{\nabla}_\nu U^\mu = 0$ 定义. 设**挠率** (torsion) 为 $T^\lambda_{\mu\nu} := 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$, 它靠着克氏符作差消除了这一项, 故是张量. 按式 (1.3.3) 定义的联络系数满足 $T^\lambda_{\mu\nu} = 0$, 这种联络称为**无挠** (torsion-free) **联络**. 度规适配的无挠联络称为 **Levi-Civita 联络**. 由此二条件可证联络系数正是克氏符, 故 Levi-Civita 联络存在且唯一. 我们主要研究**无挠时空**, 必须选择 Levi-Civita 联络. 一是出于方便, 二是每一时空点都有局域的 Lorentz 不变性. 若要求还要涵盖局域的平移对称性, 即总地要求局域 Poincaré 对称性, 需要考虑有挠联络. 这仍能遵循等效原理, 因为测地线方程中 $U^\mu U^\nu = U^{(\mu} U^{\nu)}$, 只要求对称部分 $\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$ 等于 (1.3.3) 式也仍使粒子在引力下走测地线. 同理 $g_{[\mu\nu]} \neq 0$ 亦可, 但为方便总选二阶对称张量作为度规.

1.3.3 广义不变性

Einstein 想要借由广义协变性发展出一套坐标选择无关的理论, 以尽可能排除人为因素. 但协变性对约束引力理论是不够的, 事实上还需要不变性. 首先, 将 Lorentz 不变性中的常数不变推广到所谓的**绝对对象** (absolute object), 即与物质状态无关的各种量, 除了常数 $c = G = 1, \hbar/2$, 最重要的是还包括更高指标的, 比如 Jacobi 矩阵元 $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$. 与物质状态有关而可变的称**动力学对象** (dynamical object), 例如粒子的位置和动量、场的场强和能量密度等. 给定任何物理方程, 按定义总能把其中的量分为这两类. **广义不变性**就是说, 任何物理定律有广义协变性, 且方程中的绝对对象在任意坐标变换下相同, 就能决定了哪些绝对对象才可以出现于方程中. Jacobi 矩阵元这种一定是绝对对象的项就不能出现了. 一个描述物理定律的方程必须是指标平衡的张量方程, 才可在坐标变换下消除 Jacobi 矩阵元, 进而一种坐标系对应方程的一种表达, 并保持广义不变性, 不会同时出现两种坐标系符号.

广义不变性所提出的要求当然高于 Lorentz 不变性. $c = 1, \hbar$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 有资格成为 Lorentz 不变性下的绝对对象, 但 $\eta_{\mu\nu}$ 不能在任意坐标变换下严格不变, 它可变成某个 $g_{\mu\nu}$. 在引力理论中, 由于 $g_{\mu\nu}$ 必须出现, 我们只能期望 $g_{\mu\nu}$ 是动力学对象, 它所满足的某个方程才能有广义不变性. 结合等效原理, 我们知道这是物质源产生引力场的定量关系, 称为**引力场方程**或**场方程**. 当今主流上称这套理论为**广义相对论**. 当然, 最初他认为“广义相对”一词来自广义协变性, 但现在看来是来自等效原理和广义不变性. 为避免歧义, Wheeler 很早就提议将该理论称为**几何动力学** (geometrodynamics) 以强调其本质, 即与物质相互作用的动力学几何.

正如运动方程是 $x^\mu(\tau)$ 的常微分方程, 场方程是 $g_{\mu\nu}$ 的偏微分方程, 且根据广义不变性, 它应是张量方程, 其中的张量由度规及其偏导构造. 记自由引力场、物质场的总拉氏密度为 \mathcal{L} . 尽管可在局域惯性系中消除引力, 但作为物理规律的作用量是不能在局域惯性系中失去耦合性的, 它必须是标量场. 取局域惯性系 $\{\xi\}$ 并置 $S = \int \mathcal{L} d^4\xi$. 体元

变换 $d^4x = \tilde{J} d^4\xi$ 的 \tilde{J} 能用度规行列式表示. 记度规在 $\{x\}$ 系的行列式是 $g := \det(g_{\mu\nu})$. 对 $g_{\mu\nu}$ 的定义取行列式有

$$g = \det\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\right) \det(\eta_{\alpha\beta}) = -\tilde{J}^{-2}, \quad (1.3.15)$$

则

$$\text{sgn } g = -1 \implies 1/\tilde{J} = \sqrt{-g} \implies S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.3.16)$$

这里 sgn 表示取符, 并不妨假设坐标变换保持右手性. 可见 g 虽与坐标选择有关, 但在变换下一定保号, 即引力度规的行列式总是负的 (无关号差). 规定**适配体元** D^4x 只在局域惯性右手系 $\{\xi\}$ 中表为 $d^4\xi$, 就有 $D^4x = \sqrt{-g} d^4x$. 可以考虑用张量缩并获得标量. 这种张量必须直接代表引力强弱, 它不能是 $g_{\mu\nu}$ 级的, 因为可用局域惯性系消为 $\eta_{\alpha\beta}$; 也不能是 $g_{\mu\nu,\lambda}$ 级的, 因为其可表为克氏符, 在一点处可取局域惯性系使其为零. 这意味着至少要考虑二阶导的构造, 故最终场方程至少是二阶的. 按有效性精神, 先考虑有且仅有二阶的情形; 且注意 Newton 引力论在低精度实验中是成立的, 故广义相对论必须囊括这一理论, 而 Poisson 方程恰好也是二阶的. 然暂不清楚将二阶导数作用于何物, 因此要回到物理学. 相比于单条测地运动, 潮汐现象必须在足够大邻域内, 等效原理不再适用. 若欲寻求尽可能简单的定义, 则该张量场在一点就应具备潮汐意义.

1.3.4 潮汐

设物质场与引力场的最小耦合项为 $S_M = \int \mathcal{L}_M D^4x$, 并通常令

$$S = S_G + S_M = \int \left(\frac{1}{2\kappa} \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.3.17)$$

其中 κ 是按习惯设置的待定耦合常数. 为构造 \mathcal{L}_G , 先找到具有潮汐意义的张量. 考虑任意流体, 如图 1.15, 对共动系的空间部分讨论如下. 任选一条不自交的光滑曲线, 使其上任一切矢都与过该点的观者相交, 称为**横向曲线**. 用 s 参数化横向曲线, 则与其相交的观者对应了交点参数, 即在线汇中挑出了一个**单参族**, 横向曲线沿各观者 4-速便扫出一张 2 维曲面, 可称**世界面** (worldsheet). 设任意坐标系 $\{x\}$, 则可表为 $x^\mu(\tau, s)$, 其中 $\{\tau, s\}$ 可以视为共动系的子集, 当然也可不要求对钟, 直接约定某初始的横向曲线 $x^\mu(0, s)$. 可取单参族中的一者为**基准观者** (fiducial observer), 比如 $x^\mu(\tau, 0)$, 而 s 正方向的邻近观者称其**邻居** (neighbor), 或者用**偏离矢量** (separation vector) $S^\mu := \partial x^\mu / \partial s$ 来指代, 其大小象征相对间距. 这样 $x^\mu(\tau, s)$ 上建立了观者 4-速场 $Z^\mu := \partial x^\mu / \partial \tau$ 和偏离矢量场 S^μ . 由链式法则, 它们的确逆变.

再考虑类时测地线汇, 其共动系可称**测地系**. 相对加速度场表征为偏离矢量沿 4-速场的二阶协变导数 $Z^\nu \nabla_\nu (Z^\kappa \nabla_\kappa S^\lambda)$, 部分书籍也采用记号 $D^2 S^\lambda / d\tau^2$. 很容易展开证明



图 1.15: 测地偏离

$Z^\nu \nabla_\nu S^\mu = S^\nu \nabla_\nu Z^\mu$, 则

$$\begin{aligned}
 Z^\nu \nabla_\nu (Z^\kappa \nabla_\kappa S^\lambda) &= Z^\nu \nabla_\nu (S^\kappa \nabla_\kappa Z^\lambda) = (Z^\nu \nabla_\nu S^\kappa) \nabla_\kappa Z^\lambda + Z^\nu S^\kappa \nabla_\nu \nabla_\kappa Z^\lambda \\
 &= (S^\nu \nabla_\nu Z^\kappa) \nabla_\kappa Z^\lambda + Z^\nu S^\kappa (\nabla_\kappa \nabla_\nu Z^\lambda + 2\nabla_{[\nu} \nabla_{\kappa]} Z^\lambda) \\
 &= S^\kappa \nabla_\kappa (Z^\nu \nabla_\nu Z^\lambda) + 2Z^\nu S^\kappa \nabla_{[\nu} \nabla_{\kappa]} Z^\lambda \\
 &= R^\lambda_{\mu\nu\kappa} Z^\mu Z^\nu S^\kappa, \quad R^\lambda_{\mu\nu\kappa} := 2\nabla_{[\nu} \nabla_{\kappa]} Z^\lambda, \tag{1.3.18}
 \end{aligned}$$

称为**测地偏离** (geodesic deviation) 方程, 解 S^λ 称为 **Jacobi 场**. $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 表征潮汐形变程度, 是 $g_{\mu\nu, \lambda\kappa}$ 级的张量: 式左是协变导数, 式右 Z^μ, S^κ 是逆变矢量. 这称为 **Riemann 张量**. Jacobi 场固然无穷多种, 但我们感兴趣满足对钟正交性的 Jacobi 场. 实际上, 任意 S^λ 总可投影为正交 Jacobi 场

$$\eta^\lambda = S^\lambda + Z_\nu S^\nu Z^\lambda, \tag{1.3.19}$$

而只要初始横向曲线与线汇正交, 则此后都保持正交: $Z^\nu \nabla_\nu (S^\mu Z_\mu) = Z_\mu Z^\nu \nabla_\nu S^\mu = Z_\mu S^\nu \nabla_\nu Z^\mu = \frac{1}{2} S^\nu \nabla_\nu (Z_\mu Z^\mu) = 0$. 可以展开定义式: 计算 $\nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda$ 时注意勿先展开内部, 将 $\nabla_\kappa V^\lambda$ 视作整体以避开对克氏符求导, 最后代入无挠性得

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} := -2\Gamma^\lambda_{\mu[\nu, \kappa]} + 2\Gamma^\lambda_{\sigma[\nu} \Gamma^\sigma_{\kappa]\mu}. \tag{1.3.20}$$

故 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 表征度规的非闵程度.

再考虑 Newton 极限. 取测地系 $\{\xi\}$ 并设正交 Jacobi 场 η^μ . 显然 $\tilde{Z}^\mu = \delta_0^\mu$ 且 $\tilde{\eta}^0 = 0$. 根据定义显然有反称性

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu[\nu\kappa]}, \quad (1.3.21)$$

则测地偏离方程在共动系下写作 $\frac{\partial^2 \tilde{\eta}^i}{\partial t^2} = -\tilde{R}^i_{0j0} \tilde{\eta}^j$. 设每条测地线足够低速, 故共动系成为了惯性系, 进而 $\frac{\partial^2 \tilde{\eta}^i}{\partial t^2} \approx \tilde{\eta}^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} = -\tilde{\eta}^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \tilde{\partial}^i \phi$. 从而 $\tilde{R}^\sigma_{0\sigma 0} = \tilde{R}^i_{0i0} \approx \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}^i \phi$. 可见 $R_{\mu\nu} := R^\sigma_{\mu\sigma\nu}$ 很有意义, 称为 **Ricci 张量**. 也可从 $g_{00} = -(1+2\phi)$ 及 $R_{\mu\nu}$ 定义得 $\tilde{R}_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 \phi$. 还可尝试展开. 首先可证线性代数中的 Jacobi 公式:

$$\partial_\lambda g = \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\sigma\nu,\lambda} = \frac{\partial(g\delta^\mu_\sigma)}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\mu\nu,\lambda} = g^{*\gamma\mu} \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\mu\nu,\lambda} = g g^{\gamma\mu} \delta^\nu_\gamma g_{\mu\nu,\lambda} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda},$$

其中 $(g^{*\mu\nu})$ 是 $(g_{\mu\nu})$ 的伴随, 具有性质 $g\delta^\mu_\sigma = g_{\sigma\gamma} g^{*\gamma\mu}$ 和 $g^{*\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$. 注意伴随 (转置) 矩阵元是相应代数余子式, 当然有 $\partial g^{*\gamma\mu} / \partial g_{\sigma\nu} = 0$. 进而缩并克氏符为

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} (g_{\sigma\kappa,\mu} + 2g_{\mu[\kappa,\sigma]}) = \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} g_{\sigma\kappa,\mu} = \frac{1}{2g} \partial_\mu g = \partial_\mu \ln \sqrt{-g}. \quad (1.3.22)$$

故

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma} - (\ln \sqrt{-g})_{,\mu\nu} + (\ln \sqrt{-g})_{,\kappa} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\kappa\nu}. \quad (1.3.23)$$

可有进一步的缩并, 即 $R_{\mu\nu}$ 的迹

$$R := R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.3.24)$$

此即一个足够简单的 $g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$ 级的标量, 称为 **Ricci 标量**.

现可给出实验操作意义的局域惯性系的定量标准. 数学上固然要求局域惯性系严格建立在测地线上: 假若克氏符在邻域 U 内等于零, 则借助邻域按 (1.3.20) 式得在线上 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0$, 矛盾. 只要邻域足够大, $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 便可测量. 但观者往往又需借助时空邻域进行实验, 好在只要 U 尺寸数量级远小于 $1/\sqrt{R}$, 同时也远小于其测量精度时, 即使时空范围未严格至测地线, 但 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 也在精度范围内为零. 当然, 若实验范围较大或仪器精度够高, 还是可以测量潮汐, 见 5.1 节.

最小耦合指出可取 $\mathcal{L}_G = R$. 下面研究变分. 为简便运算, 选择对 $g^{\mu\nu}$ 而非 $g_{\mu\nu}$ 变分, 则 $\delta(R\sqrt{-g})$ 即涉及 $g^{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, \sqrt{-g}$ 三个部分. 首先是 $\delta\sqrt{-g}$. 注意 $\delta^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}$ 可得 $0 = g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\lambda}$, 故

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.3.25)$$

其次计算 $\delta R_{\mu\nu}$. 取局域惯性系有 $\delta \tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{\partial}_\sigma (\delta \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}) - \tilde{\partial}_\beta (\delta \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\sigma}) = \nabla_\sigma (\delta \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta (\delta \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\sigma})$. 注意, 虽克氏符不是张量, 但克氏符变分是张量 (作差消去非协变部分), 故任意坐标系下有如下 **Palatini 公式**

$$\delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu]\mu}, \quad (1.3.26)$$

于是 $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\lambda}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu] \mu}^{\lambda}) = 2\nabla_{\lambda}(g^{\mu[\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]})$, 其积分为边界项, 舍去后有

$$\delta \int R\sqrt{-g} d^4x \simeq \int G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} d^4x,$$

其中 $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 称 **Einstein 张量**. 还可有 $G := g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}R = -R \Rightarrow R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$. 这里没有引入物质场, 因此自由引力场在最小耦合意义上满足 $G_{\mu\nu} = 0$ 即 $R_{\mu\nu} = 0$, 称**真空方程** (vacuum equation). 闵氏度规显然是一个解. 真空方程已能描述很多引力现象, 因为场源往往限制在很小的区域内, 而外部区域真空, 可允许试验粒子运动.

再考虑物质部分 S_M . 约定 $\delta S_M = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x$, 即令

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M, \quad (1.3.27)$$

则 $\delta S \simeq \frac{1}{2\kappa} \int (G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, 此即引力场方程的一般形式. 可以预料 $T_{\mu\nu}$ 与场源质量 (因而能量、动量) 有关. 还可有

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (1.3.28)$$

称为**反迹** (trace-reversed) 表达. 当然, $T_{\mu\nu}$ 的具体意义和 κ 的值还需落实.

1.3.5 曲率的性质

数学上称 $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ 为 **Riemann 内禀曲率** (intrinsic curvature) 或**曲率**. $1/\sqrt{R}$ 相当于曲率半径. 曲率为零时称度规为**平直的** (flat), 非零时称**弯曲的** (curved), 物理学可以借用这些词而称**时空曲率**, 时空分为**平直时空**和**弯曲时空**. 渐弱度规也称**渐近平直** (asymptotically flat) 度规. 下面解释曲率称呼的意义. 我们预先规定欧氏空间是平直的, 以它为基准可判断某条线、某张面的弯曲. 考虑一个球面, 其上任意切矢沿自身平移所得测地线即过球心的大圆. 设从赤道某两处垂直延伸两条大圆弧, 它们的间距逐渐缩短并交于极点. 在一张平面上, 初态平行的直线不可能改变间距. 矢量平行移动就是相对于路径各处邻域平移, 然而考虑将扇形围成圆锥面, 矢量沿着包含尖端的环路平行移动后, 与原矢量不重合, 而直观上尖端处有曲率, 故曲率非零时, 平行移动结果往往与路径有关. 另一方面, 按如下操作可计算球面上的线元: 先用球坐标 $\{r, \theta, \phi\}$ 改写欧氏度规为

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (1.3.29)$$

当然, 此处 Ω 不是立体角 (solid angle), 立体角满足的是 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. 再取 $r = R$ 就有所谓的**球面度规** $d\ell^2 = R^2 d\Omega^2$, 由此可计算球面曲率不为零. 像这样, 约定背景空间中**嵌入** (imbedded) 曲面的长度是用背景度规衡量的, 这称为背景度规的**诱导** (induce) 度

规. 可见度规在非欧或非闵时, 内禀曲率非零而使测地间隔变化. 但内禀曲率其实只由度规和坐标系计算而来, 甚至无需嵌入某个高维背景来定义度规和曲率——对于四维时空, 我们就只能抛弃嵌入思想来想象它. 内禀曲率只反应内禀的弯曲程度而与曲面本身无关: 球面在内禀意义下弯曲, 但圆柱面在内禀意义下平直 (借柱坐标发现诱导度规平直), 尽管它在直观上弯曲. 数学上, 描述圆柱面这种对象的弯曲程度就需要嵌入思想, 称为**外 (extrinsic) 曲率**. 一个直观理解是, 凡能连续地展平的曲面, 尽管外曲率可不为零, 但内禀曲率为零; 真正不可连续展平的曲面内禀曲率、外曲率都非零. 读者可观察纸塑地球仪是如何尝试将平面纸张大致贴合球面的.

曲率具有若干性质. 首先注意无挠性导致 $\nabla_{[\nu}\nabla_{\kappa]}(V^\mu\omega_\mu) = 0$, 则可得

$$2\nabla_{[\nu}\nabla_{\kappa]}\omega_\mu = -R^\lambda_{\mu\nu\kappa}\omega_\lambda. \quad (1.3.30)$$

前文已提过反称性 (1.3.21) 式, 其次是所谓的 **Ricci 循环恒等式 (cyclic identities)**

$$R^\lambda_{[\mu\nu\kappa]} = 0. \quad (1.3.31)$$

证明只需默认无挠性, 并运用取测地系的技巧 (其中 $\tilde{R}^\lambda_{\mu\nu\kappa} = -2\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu[\nu,\kappa]}$).

降指标 Riemann 曲率 $R_{\lambda\mu\nu\kappa} := g_{\lambda\sigma}R^\sigma_{\mu\nu\kappa}$ 是一个常用概念, 它与原先 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 有等价的独立分量数, 因此有时也称 Riemann 曲率. 它使我们能看到更多性质, 如反称性

$$R_{\lambda\kappa\mu\nu} = R_{[\lambda\kappa][\mu\nu]}. \quad (1.3.32)$$

直接证明它亦可从无挠性和测地系入手. 由此可知 $R_{\mu\nu}$ 是 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 唯一非平凡缩并, 另两种缩并是平凡的: $R^\sigma_{\mu\nu\sigma} = -R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = -R_{\mu\nu}$, 以及 $R^\sigma_{\sigma\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g^{(\lambda\sigma)}R_{[\lambda\sigma]\mu\nu} = 0$. 最后是前一对指标和后一对指标的对称性:

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}. \quad (1.3.33)$$

同理默认无挠性并取测地系即可. 包括式 (1.3.21) 在内的这四条性质是我们能得到的所有代数性质了.

由 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu[\nu\kappa]}$ 可知 Ricci 恒等式还有如下形式:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} + R^\lambda_{\nu\kappa\mu} + R^\lambda_{\kappa\mu\nu} = 0. \quad (1.3.34)$$

注意, 上式若存在相同指标, 则总与另三条性质重复, 故常考虑指标各不相同的非平凡 Ricci 恒等式. 直观上, 四维时空的 Riemann 曲率的分量有 $4^4 = 256$ 之多, 但以上性质使其分量往往重复或为零. 利用简单的组合数学可知其实际只有 20 个独立分量. 由此还可证明, Riemann 曲率是唯一可由度规二阶导线性组合而成的张量. 细节放入附录 E. 故我们选择用 Riemann 曲率描述引力.

可用缩并将 Riemann 曲率进行压缩从而保留有用数据. 前文已说明, 初步缩并的唯一有用结果是 Ricci 曲率. 可直接根据定义得

$$R_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)}. \quad (1.3.35)$$

亦可根据 $R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ 有 $R_{\mu\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\nu\sigma\mu} = R_{\nu\mu}$. 此外, Ricci 标量也是非平凡缩并. 虽然这不是唯一能从 $g_{\mu\nu}, R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 得到的非平凡标量 (见附录 E), 但确实是足够简单的一个.

除了上述纯代数性质之外, Riemann 曲率还满足一个微分恒等式:

$$R^\lambda_{\mu[\sigma\nu;\kappa]} = 0, \quad (1.3.36)$$

这称为 **Bianchi 恒等式**. 可直接用无挠性和测地系证明之. 由 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu[\nu\kappa]}$ 可知 Bianchi 恒等式还有如下形式:

$$R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\kappa} + R^\lambda_{\mu\nu\kappa;\sigma} + R^\lambda_{\mu\kappa\sigma;\nu} = 0. \quad (1.3.37)$$

对上式缩并 λ, σ 再用 $g^{\mu\kappa}$ 升指标, 且注意 $g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\kappa\nu} = R^\kappa_{\lambda\kappa\nu} = R_{\lambda\nu}$, 则 $\nabla^\mu R_{\mu\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \partial_\nu R = 0 \Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu R$, 故 $G_{\mu\nu}$ 无散:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.38)$$

1.3.6 Einstein 方程

考虑尘埃及其 4-速场 Z^μ , 只需取局域惯性系即知质量守恒等价于 $\nabla_\nu(\mu^* Z^\nu) = 0$. 而协变散度可直接用偏导表示. 逆变矢量的散度为

$$V^\mu_{;\mu} = V^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} V^\nu = V^\mu_{,\mu} + V^\mu \partial_\mu \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu). \quad (1.3.39)$$

结论是任意系有 $\partial_\nu(\mu^* Z^\nu \sqrt{-g}) = 0$, 这给出 $\delta(\mu^* Z^\nu \sqrt{-g}) = 0$ 的理由前文已述. 注意 $\delta(Z^\mu Z_\mu) = \delta(-1) = 0$, 则易得 $\delta Z^\mu = \frac{1}{2} Z_\nu \delta g^{\mu\nu}$, 故

$$\delta(\mu^* \sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \mu^* Z_\mu Z_\nu \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \mu^* Z_\mu Z_\nu. \quad (1.3.40)$$

同理, 可取 $\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} D^4 x$ 而有

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}. \quad (1.3.41)$$

那么当然 $T^{\mu\nu} = \mu^* Z^\mu Z^\nu$. 可见 $T^{00} = T_{00} = \mu$ 即能量密度, $T^{i0} = T^{0i} = \mu u^i$ 即动量密度或能流密度, 而 $T^{ij} = \mu u^i u^j$ 即动流密度或应力张量. 因此, $T^{\mu\nu}$ 称为物质场源的 **4-动流密度或能动张量** (energy-momentum tensor). $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ 要求

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.3.42)$$

取 $\nu = 0$ 即能量局域守恒, 取 $\nu = i$ 即动量局域守恒. 代入 $T^{\mu\nu} = \mu^* Z^\mu Z^\nu$, 则 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \mu^* Z^\mu \nabla_\mu Z^\nu$. 故 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 等价于 $Z^\mu \nabla_\mu Z^\nu = 0$, 说明各质元自由落体.

考虑 Newton 极限. 取共动系, $R_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu = \tilde{R}_{00} = \nabla^2 \phi = 4\pi\mu^*$. 另一方面 $\tilde{Z}^\mu = \delta_0^\mu$, $\tilde{Z}_\mu = -\delta_{\mu 0}$, 则 $T_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu = \tilde{T}_{00} = \tilde{T}^{00} = \mu^*$. 进而 $T := g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -T^{00} = -\mu^*$. 由前文知 $R = -G = -\kappa T$, 场方程与 $Z^\mu Z^\nu$ 缩并得 $4\pi\mu^* - \frac{1}{2}(-1)\kappa\mu^* = \kappa\mu^*$, 则

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \kappa = 8\pi. \quad (1.3.43)$$

这称为 **Einstein 方程**. $\frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x$ 称为 **Einstein-Hilbert 作用量**.

1.3.7 电磁最小引力耦合

现设流体带固有电荷密度 ρ^* , 电流密度为 $J^\mu = \rho^* Z^\mu$. 电荷守恒从局域惯性系出发变换为 $\nabla_\mu J^\mu = 0$, 则后续对 $A_\mu, g^{\mu\nu}$ 的变分均有 $\delta(J^\mu \sqrt{-g}) = 0$. 研究电磁场 $F_{\mu\nu}$ 的最小引力耦合. 单粒子的运动方程遵循

$$\delta \int (-m + qA_\mu U^\mu) d\tau = 0 \implies \frac{DP^\mu}{d\tau} = qF^\mu{}_\nu U^\nu, \quad (1.3.44)$$

电磁场的运动方程遵循

$$\delta \int \left(-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\nu J^\nu \right) \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies \nabla_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu, \quad (1.3.45)$$

而 $F_{\mu\nu}$ 的定义和无挠性自动给出 $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$, 则

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0. \quad (1.3.46)$$

Lorenz 规范从局域惯性系出发变换为 $\nabla^\mu A_\mu = 0$, 则引力耦合的 d'Alembert 方程为

$$\begin{aligned} -4\pi J_\nu &= \nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla^\mu \nabla_\nu A_\mu = \nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - (\nabla_\nu \nabla^\mu A_\mu - g^{\kappa\mu} R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu} A_\lambda) \\ &= \square_g A_\nu - g^{\mu\kappa} g^{\lambda\sigma} R_{\mu\sigma\kappa\nu} A_\lambda = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda, \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

其中 $\square_g := \nabla^\mu \nabla_\mu$ 称为 **Laplace-Beltrami 算子**. $g_{\mu\nu}$ 出现在克氏符中, 以上都是 $g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$ 的耦合方程.

由定义, 电磁场的能动张量为

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} \right), \quad (1.3.48)$$

显然 $T = 0$. 以闵氏时空举例, 电磁场在惯性系中所测能量密度为 $T^{00} = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$; 能流或动量密度为 $T^{i0} = -T_{i0}$ 即 Poynting 矢量 $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/4\pi$; 动流密度或应力张量为

$T^{ij} = -(E^i E^j + B^i B^j)/4\pi + T^{00}\delta^{ij}$. 代入 $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$ 得 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -F_{\nu\lambda}J^\lambda$. 设荷电介质为尘埃, 则有 **Einstein-Maxwell 作用量**

$$S = \int \left(\frac{1}{16\pi} (R - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \mu^* + A_\nu J^\nu \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.3.49)$$

然 A_μ 不参与度规变分, 则能动张量只需加上 $\mu^* Z_\mu Z_\nu$. 而运动方程为 $\mu^* Z^\mu \nabla_\mu Z^\nu = F^\mu{}_\lambda J^\lambda$, 故电磁场和带电流体的总能动张量无散. 上式关于 $g^{\mu\nu}$ 的变分结果为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2 \left(F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} \right) + 8\pi \mu^* Z_\mu Z_\nu. \quad (1.3.50)$$

称为 **Einstein-Maxwell 方程**.

最小引力耦合基于等效原理. 可以看到以上弯曲时空中的电磁学方程, 似乎都是将其平直情形做直接替换:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu, \quad d \rightarrow D,$$

故许多人将最小引力耦合理解为这种所谓的**最小替换** (minimal replacement). 必须指出这不一定成立, 如 $-4\pi J_\nu = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda$ 就并非从 $\square A_\mu = -4\pi J_\mu$ 直接替换. 关键在于二阶及以上的协变导数将带来曲率效应, 这不能用任何坐标系消除. 能满足广义不变性的方程是很多的, 不能冒然只做最小替换而图高枕无忧. 企图从局域惯性系转化到一般坐标系的关键在于, 导数内所作用的量全部是广义不变的张量, 显然 $\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu)$ 括号内的 $\partial_\nu A_\mu$ 并不满足. 在一阶导时, 可轻松保证导数作用的量是张量, 故最小替换适用. 这才是能从最小耦合推出最小替换的实质关键.

也有人将等效原理及其最小耦合理解为: 若一个方程在平直情形时成立, 则在弯曲情形也成立. 这也是不一定的. 的确, 协变导数在平直时空的惯性系中表为偏导数. 但曲率在平直情形直接为零, 因此加上曲率额外项的方程也将符合这句话, 比如 $\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \alpha \nabla_\mu (F^{\mu\nu} R) = -4\pi J^\nu$. 但等效原理指的是, 利用局域惯性系来描述真实引力场, 这样才能排除 $\nabla_\mu (F^{\mu\nu} R)$. 切记, 这些张量和协变导数的定义是从局域惯性系中, 做广义坐标变换得来.

或许有读者指出, 具有曲率项的正确方程 (如 $-4\pi J_\nu = \square_g A_\nu - R^\lambda{}_\nu A_\lambda$) 也并不在局域惯性系中退回狭义相对论. 对此, 我们进一步指出最不容易混淆的正确理解: 将最小耦合应用于一开始的作用量上. 因为作用量始终是广义不变的标量, 不涉及坐标变换等麻烦的过程, 最小耦合只是引入了适配体元 $\sqrt{-g} d^4x$. 故其实并不需要用局域惯性系去讨论一个物理方程, 而只需要讨论最原始的作用量.

当然, 并不一定要把等效原理、最小耦合奉为教条. 若在量子理论中非要讨论诸如 $\nabla_\mu (F^{\mu\nu} R)$ 的曲率项, 可认为是在量子领域适当地放弃等效原理. 但在经典理论的视角下, 这些项的数量级太小, 且目前实验精度无法达到 (尤其是微弱的曲率), 故等效原理仍被默认. 总之, 包括等效原理在内, 最终都要接受实验的考验.

1.3.8 规范自由与双曲性

$g_{\mu\nu}$ 的独立分量有 $\binom{4+1}{2} = 10$ 个, 而仔细观察一下 Einstein 方程, 任取坐标系 $\{x\}$ 把分量显式地展开, 可发现 Einstein 方程是关于 $g_{\mu\nu}(x)$ 的二阶非线性偏微分方程组. 即使给定边界条件, 还不能完全确定 $g_{\mu\nu}$ 的具体表达. 比如对于真空方程, 由于自动满足 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, 独立方程实际为 $10 - 4 = 6$ 个, 不足以确定度规所有分量. 显然若 $g_{\mu\nu}(x)$ 是一个解, 则可通过坐标变换 $\{x\} \rightarrow \{x'\}$ 得到

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\sigma\lambda}(x(x')) \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}(x') \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}(x').$$

由广义协变性, 直接用 x 去替换函数 $g'_{\mu\nu}(x')$ 中的 x' , 也即直接去掉撇号, 得到的 $g'_{\mu\nu}(x)$ 本就可作为 $\{x\}$ 系下 $g_{\mu\nu}(x)$ 之外一个新解. 换言之, 度规解之间只能确定到相差 4 个任意函数, 其暗含坐标变换的意义. 完全确定只需补充 4 个方程, 称为**坐标条件**. Einstein 曾为此困扰而企图放弃广义协变性, 提出**空穴论证** (hole argument): 设某时空区域内无物质, 但存在由外部物质产生的引力场. 取“坐标变换函数”在穴外为恒等变换, 在穴内任意, 则这说明外部确定的物质分布仍无法决定穴内“引力场”. 其错误在于混淆了引力场和度规. 无论如何, 引力场、物质场是客体实在, 度规只是一种描述方法. 从被动观点来看, 度规未变, 坐标系是冗余的, 则“新解”是同一度规在其它坐标系的值直接搬到现有坐标系下:

$$\begin{aligned} \text{坐标系: } & \{\{x\}, \{x'\}, \{x''\} \cdots\}, \\ \text{旧度规 } g_{\mu\nu}: & \{g_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu}, g''_{\mu\nu} \cdots\}, \\ \text{新度规 } \tilde{g}_{\mu\nu}: & \{g'_{\mu\nu}, g''_{\mu\nu}, \cdots\}, \end{aligned}$$

而坐标系的物理实质已变. 我们的方程适于任意坐标系, 故坐标条件可视为用于挑选特定坐标系. 从主动观点来看, 我们认为产生了新度规, 但它们在物理上等价, 引力场仍一致, 类似于描述同一电磁场的不同 A^μ , 这也被称为**广义相对论的规范自由性**. 换言之, 主动观点认为坐标条件是度规的规范条件, 而被动观点认为坐标条件用于约束坐标系. 被动观点更通俗, 更建议读者使用.

由于空穴论证中假设的坐标变换只发生在空穴中, 因而 Einstein 开始讨论时空、坐标系在无物质时的存在性. 最终他提出**点重合** (point coincidence) **原理**: 各种可观测事件都归结为世界线的交叉点, 物理理论是在预言这些交叉的分布. 物理预言在这种意义下当然具有坐标冗余性. 在量子层面 Pauli 不相容似乎与之矛盾, 只要将这种重合性理解为通过相互作用交换信息即可. 当然, 点重合其实还有更多的哲学意义未发掘, 而这或许对量子引力的提出有帮助. Kretschmann 借鉴 Leibniz 的相对关系主义, 进一步提出**拓扑原理**, 即物质间的关系是拓扑性质的, 实质上是引力场、物质场、时空都被一齐拖拽, 而现实中看来, 时空未动而坐标系变动. 这其实分别就是主动和被动观点.

对于有源方程, 逻辑上自然想到是给定 $T_{\mu\nu}$ 后求解 $g_{\mu\nu}$, 但实际上, $T_{\mu\nu}$ 的确切定义也需要 $g_{\mu\nu}$ 给定, 比如 $Z^\mu Z_\mu = -1$. 换言之, 一般 $g_{\mu\nu}$ 同时出现于 $G_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ 中. 因此整个方程的未知量除了 $g_{\mu\nu}$, 实际上还包括描述物质场的物理量, 比如电磁场 $F_{\mu\nu}$. 故 Bianchi 恒等式 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 并不自动满足, 而要视作额外约束. 以尘埃为例, 未知量 $g_{\mu\nu}, \mu, Z^\mu$ 总共有 $10 + 4 + 1 = 15$ 个. 另一方面, Einstein 方程、坐标条件和 4-速归一化提供了 $10 + 4 + 1 = 15$ 个独立方程.

坐标条件的任务本就是消除广义协变性带来的自由度, 故当然不能是广义协变的等式. 一种常见的坐标条件是**波坐标条件**或**谐和坐标条件**¹:

$$\square_g x^\lambda = 0 \iff g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (1.3.51)$$

其中 x^μ 按标量场处理. 等价性只需展开: 标量场的 Laplace-Beltrami 算子、2 阶张量的散度分别为

$$\square_g f = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \nabla^\mu f) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f), \quad (1.3.52)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T^{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\lambda\nu}, \quad (1.3.53)$$

进而 $\square_g x^\lambda = (-g)^{-1/2} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}) = -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. 在谐和坐标条件下, 经过冗长计算发现 Einstein 方程呈 $\square_g g_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}$ 的形式, 其中 $N_{\mu\nu}$ 是度规及其一阶导的非线性表达式. 偏微分方程常见类型有椭圆型方程 (如 Poisson 方程)、抛物型方程 (如热传导方程) 和双曲型方程 (如波动方程). 考虑到 Lorentz 度规的号差, 该方程组属于数学上的**拟线性** (quasilinear) **波动方程**.

方程的双曲性带来两个重要话题. 第一是 Cauchy 适定问题, 也即动力学问题. **适定性**是指给定适当的**初值条件** (某 Σ_t 上的 $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,0}$), 必存在唯一的解. 换言之, 给定初值后, 研究场方程能否确定时空度规的未来演化. 下面要说清方程细节. 首先由 Bianchi 恒等式得 $\partial_0 G^{\mu 0} = -\partial_i G^{\mu i} - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\nu G^{\mu\lambda}$, 这不含度规的三阶及更高阶时间偏导, 故 $G^{\mu 0}$ 至多只含 $g_{\mu\nu,0}$, 即 $G^{\mu 0} = \kappa T^{\mu 0}$ 只能用以约束初值条件, 从而动力学方程只剩 $G^{ij} = \kappa T^{ij}$, 以确定 $g_{ij,00}$. 剩下 $g_{0\mu,00}$ 由坐标条件确定即可, 从而可代数或数值地求解方程. 第二是引力波. Einstein 本人在 1918 年就关注到方程的波动性, 并认为存在波动解. 在以后章节中, 我们会证明其存在性, 并说明其传播速度为光速.

1.3.9 球对称黑洞

首要任务是研究理想质点引力场. 以一质点为空间坐标原点, 观测结果建议质点引力场呈空间球对称 (spherical symmetry): 存在坐标系 $\{\bar{t}, \bar{r}, \theta, \phi\}$, 空间部分为正交球坐标

¹ 数学上 $\square f = 0$ 的解称为谐和 (harmonic) 函数.

系, 且变换 $\theta \mapsto -\theta, \phi \mapsto -\phi$ 保持度规形式, 则对经纬度只存在 $d\theta^2, d\phi^2$ 项; $\Sigma_{\bar{t}}$ 内任意 \bar{r} 球面的诱导度规为 $K(\bar{t}, \bar{r})d\Omega^2$; 其余分量只与 \bar{t}, \bar{r} 有关¹:

$$ds^2 = \bar{g}_{00}d\bar{t}^2 + \bar{g}_{11}d\bar{r}^2 + 2\bar{g}_{01}d\bar{t}d\bar{r} + Kd\Omega^2.$$

然而 $d\Omega^2$ 系数可无关于坐标时. 令 $r^2 = K(\bar{t}, \bar{r})$, 则 $2rdr = \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}d\bar{t} + \frac{\partial K}{\partial \bar{r}}d\bar{r}$, 代入

$$\begin{aligned} ds^2 &= \bar{g}_{00}d\bar{t}^2 + \bar{g}_{11} \left(\frac{2rdr - \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}d\bar{t}}{\partial K / \partial \bar{r}} \right)^2 + 2\bar{g}_{01}d\bar{t} \left(\frac{2rdr - \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}d\bar{t}}{\partial K / \partial \bar{r}} \right) + r^2d\Omega^2 \\ &= \left(\bar{g}_{00} + \bar{g}_{11} \frac{(\partial K / \partial \bar{t})^2}{(\partial K / \partial \bar{r})^2} - 2\bar{g}_{01} \frac{\partial K / \partial \bar{t}}{\partial K / \partial \bar{r}} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4K\bar{g}_{11}}{(\partial K / \partial \bar{r})^2} dr^2 \\ &\quad + \left(\frac{4r\bar{g}_{01}}{\partial K / \partial \bar{r}} - \frac{4r\bar{g}_{11} \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}}{(\partial K / \partial \bar{r})^2} \right) d\bar{t}dr + r^2d\Omega^2 \\ &= \tilde{g}_{00}d\bar{t}^2 + \tilde{g}_{11}dr^2 + 2\tilde{g}_{01}d\bar{t}dr + r^2d\Omega^2. \end{aligned}$$

这还不是遥远观者对钟出的坐标系, 因为 $\tilde{g}_{01} \neq 0$. 为此设 $C(\bar{t}, r)$ 使得 $d\hat{t} = C(\tilde{g}_{00}d\bar{t} + \tilde{g}_{01}dr)$. 这等价于 $\frac{\partial}{\partial r}(C\tilde{g}_{00}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}(C\tilde{g}_{01})$, 或者

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\tilde{g}_{01}} \left(\tilde{g}_{00} \frac{\partial \ln C}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{g}_{01}}{\partial \bar{t}} \right),$$

上式是关于 $\ln C$ 的简单偏微分方程, 只需给定边界函数 $\ln C(0, r)$ 便可积分求解, 必存在不唯一的非平凡解. 代入有

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{g}_{00} \left(\frac{d\hat{t}/C - \tilde{g}_{01}dr}{\tilde{g}_{00}} \right)^2 + \tilde{g}_{11}dr^2 + 2\tilde{g}_{01}dr \left(\frac{d\hat{t}/C - \tilde{g}_{01}dr}{\tilde{g}_{00}} \right) + r^2d\Omega^2 \\ &= \frac{d\hat{t}^2}{C^2\tilde{g}_{00}} + \left(\tilde{g}_{11} - \frac{\tilde{g}_{01}^2}{\tilde{g}_{00}} \right) dr^2 + r^2d\Omega^2 = -e^{2\nu}d\hat{t}^2 + e^{2\mu}dr^2 + r^2d\Omega^2, \end{aligned}$$

其中 $\mu(\hat{t}, r), \nu(\hat{t}, r)$ 可以是复函数.

再利用场方程确定分量: 质点模型使对 $r \neq 0$ 均满足真空方程 $R_{\mu\nu} = 0$. 注意, 并不推荐直接计算克氏符和曲率, 因为想办法跳过零分量的计算. 基本思想是, 注意到 $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 展开后自动省略零分量, 因而直接读取非零分量. 类似地, 由于无挠性, 也可给克氏符补上微元为 $\Gamma^\lambda := \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu dx^\nu = g^{\sigma\lambda} (dg_{\sigma\mu} dx^\mu - \frac{1}{2}\partial_\sigma(ds^2))$, 遍历 λ 四个坐标即可, 并注意对角矩阵的逆直接元素取倒数. 亦或者, 注意这与测地线方程相似, 而我们已有度规 ds^2 , 实际可直接对其变分. 比如, 只需取 $L = e^{2\nu}(\frac{d\hat{t}}{d\tau})^2 - e^{2\mu}(\frac{dr}{d\tau})^2 + r^2(\frac{d\Omega}{d\tau})^2$

¹此形式在数学上属于**扭曲积** (warped product): 度规可分离为 2 维和 $(n-2)$ 维部分: $g_{ab}(x^0, x^1)dx^a dx^b + K(x^0, x^1)\hat{g}_{ij}(x^2, \dots, x^{n-1})dx^i dx^j$, 其中 ab 取 $0, 1$; ij 取 $2, \dots, n-1$.

再计算 E-L 方程. 结果为

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{v}, & \Gamma_{01}^0 &= v', & \Gamma_{11}^0 &= e^{2(\mu-\nu)} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{00}^1 &= e^{2(\nu-\mu)} v', & \Gamma_{01}^1 &= \dot{\mu}, & \Gamma_{11}^1 &= \mu', & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\mu}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-2\mu} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \end{aligned}$$

其中点撇分别代表 ∂_t, ∂_r . 对 Ricci 张量同样可置 $R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \partial_\sigma \Gamma^\sigma - d^2 \ln \sqrt{-g} + (\ln \sqrt{-g})_{,\kappa} \Gamma^\kappa - \Gamma_{\sigma\mu}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma dx^\mu dx^\nu$, 其中 $\sqrt{-g} = e^{\mu+\nu} r^2 \sin \theta$. 结果为

$$\begin{aligned} R_{00} &= -(\ddot{\mu} + \dot{\mu}(\dot{\mu} - \dot{v})) + e^{2(\nu-\mu)} (v'' + 2v'/r + v'(v' - \mu')), \\ R_{11} &= e^{2(\mu-\nu)} (\ddot{\mu} + \dot{\mu}(\dot{\mu} - \dot{v})) - v'' + 2\mu'/r - v'(v' - \mu'), \\ R_{22} &= e^{-2\mu} (e^{2\mu} - 1 + r(\mu' - v')), & R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta, & R_{01} &= 2\dot{\mu}/r. \end{aligned}$$

施以真空方程: $R_{01} = 0$ 给出 $\dot{\mu} = 0$, 从而 $v'' + 2v'/r + v'(v' - \mu') = 0$, $-v'' + 2\mu'/r - v'(v' - \mu') = 0$, $e^{2\mu} - 1 + r(\mu' - v') = 0$. 前两者相加得 $\mu' + v' = 0$, 代入后者有 $(re^{-2\mu(r)})' = 1$, 得

$$e^{-2\mu} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad e^{2\nu} = e^{f(\hat{t})} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

其中 M 是常数, $f(\hat{t})$ 关于 r 为常数. 只需取 $dt = e^{f(\hat{t})} d\hat{t}$ 即可有

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.3.54)$$

此即 **Schwarzschild 度规**. 上式采用的坐标系称为 **Schwarzschild 系**. 显然它的确渐近平直. 取 Newton 极限, 则引力势 $\phi = -\frac{1}{2}(1 + g_{00}) = -M/r$ 还原回 Newton 引力定律, 因而 Newton 极限下 M 解释为场源质量. 现列举分量如下以供查阅:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{01}^0, & \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right), & \Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{22}^1 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{2M}{r^3}, & R_{0202} &= \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), & R_{0303} &= R_{0202} \sin^2 \theta, \\ R_{1212} &= -\frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & R_{1313} &= R_{1212} \sin^2 \theta, & R_{2323} &= 2Mr \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

引力场恒稳, 即存在坐标系使 $g_{\mu\nu,0} = 0$ (时间平移不变性), 则称度规**稳态** (stationary), 相应系称**稳态系**; 存在坐标系使 $g_{\mu\nu,0} = 0$ 且 $g_{0i} = 0$ (时间反演不变性), 称度

规**静态** (static). 可见静态必稳态. Schwarzschild 最初除了真空、球对称假设外还引入了静态条件¹, 但上述讨论表明真空球对称解必是 Schwarzschild 解, 这也称为 **Birkhoff 定理**. Schwarzschild 解的静态写法还有很多. **各向同性坐标系**就是指度规在其中形如 $ds^2 = g_{00}dt^2 + K(g_{ij}dx^i dx^j)$, 则只需取 $r = \rho(1 + \frac{M}{2\rho})^2$ 有

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2\rho}{1 + M/2\rho}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (1.3.55)$$

也可将 $(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$ 写作 $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ 并取 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Schwarzschild 解一经提出, 人们立即发现其**奇异性**或**奇性** (singularity). 奇性通常指一些数值的发散, 比如度规分量, 包括度规逆矩阵分量的发散 (即度规行列式 g 为零). 该度规显然在 $r = 0, 2M$ 都存在奇性, 我们依次研究.

假设某静态观者 $r = r_0$. 其 4-速为 $U^\mu = (1 - 2M/r_0)^{-1/2} \delta_0^\mu$, 类时条件是 $r_0 > 2M$. 或者, 它也可视作等 r 面 $r = r_0$ 的其中一条母线, 法余矢²为 $n_\mu = \partial_\mu r = \delta_\mu^1$. 模方为 $n^\mu n_\mu = g^{11} = 1 - 2M/r_0$, 可见 $r_0 > 2M$ 时 n^μ 类空, $r = r_0$ 类时. 但 $r = 2M$ 类光. 这说明光只能在 $r > 2M$ 区域自由穿梭, 一旦进入 $r < 2M$ 便不能逃脱. 光至多只能沿 $r = 2M$ 传播. 观者只可静止于 $r > 2M$. 综上 $r = 2M$ 称为**静界** (static surface)、**事件视界** (event horizon) 或简称**视界**.

fig/chpt01/blackhole.jpg

图 1.16: 电影 *Interstellar* 中黑洞 Gargantua 设定为一颗古老的巨型旋转黑洞, 周围绕有的星尘称为**吸积盘** (accretion disk). 受引力作用, 其间有高温物化反应, 大量射线放出, 包括可见光. 观众看来, 视界遮挡了部分光源, 但光线仍可绕过视界, 故视觉上吸积盘仿佛包裹了视界.

¹1915 年 11 月 18 日, Schwarzschild 趁着假期出席了 Einstein 于普鲁士科学院所作关于场方程的首次演讲, 随后于一战德国战场上给出该解——这是场方程第一个引力解析解. 他于数月后病逝.

²设超曲面方程 $f(x^\mu) = C$ 或 $df = 0$. 考察切矢 T^μ , 即总可在曲面上找到曲线 $x^\mu(t)$ 使 $T^\mu = dx^\mu/dt$, 进而 $T^\mu \partial_\mu f = df/dt = 0$, 说明**法矢**正是梯度 $n^\mu = \partial^\mu f$. 其对偶称**法余矢**.

Wheeler 将视界半径超过其自身半径的星体称为**黑洞** (black hole). 目前已观测到这种星体. 视界所包围的时空区域称为**黑洞区域**, 视界又可称为黑洞表面. 若星体的斥力不能与引力抗衡, 则质量将无限坍缩至近乎一点 $r = 0$, 而视界内极为空旷. 计算可得如下的 **Kretschmann 标量**

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (1.3.56)$$

上式在 $r = 0$ 发散. 这问题其实很严重, 因为我们只是框定一堆物质, 便使得光滑的时空上戳出一个“洞”, 令人难以接受. $r = 0, 2M$ 两处的奇性在此体现出区别: 上式在 $r = 2M$ 有意义. 既然曲率在 $r = 2M$ 处并不奇异, 那就有可能找到一种坐标系使得度规分量不再发散, 见第 2 章. 该过程一般称为**消除度规奇性**, 因而将度规分量在视界处的奇性称为**坐标奇性**或**假奇性**. 相较而言, $r = 0$ 处的奇性就称为**时空奇性**或**真奇性**, 因为曲率发散的事实与坐标系无关. 此点称为**奇点**¹.

1.4 修改引力理论

1.4.1 宇宙学

观测结果建议, 宇宙在大尺度上**均匀** (homogeneous) 且**各向同性** (isotropic). 这使得不能用非零质量密度和常数场强求解 Poisson 方程, 因为在无限充斥的物质场中, 试图计算某点场强时要涉及全空间体积分, 而这种积分是反常的, 其结果结果取决于有限域趋于无穷的方式. 方式不同可得到“为零”或“发散”的结果. 因此 Newton 引力论很难发展出宇宙学.

但广义相对论允许我们研究均匀各向同性的解及其扰动. 宇宙学的早期发展毫无疑问是 Einstein 带头. 当时占统治地位的观点是静态宇宙. 这使得 Einstein 为强行凑出静态解而修改场方程. 注意除了选择 R , 还可注意 $\sqrt{-g} d^4x$ 本身就已广义不变, 故可考虑 $\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M$, 结果是

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.4.1)$$

其中 Λ 称为**宇宙学常数** (cosmological constant). 根据具体的宇宙模型以及观测结果, 可以确定其数值. 当然, 在假设静态的情况下也能强行计算其值. 但现代观点自 Hubble 开始普遍认为宇宙是**膨胀的** (expanding). 比如, **FLRW 解**就是膨胀宇宙的一阶近似. 在膨胀模型下可不引入 Λ , 故 Einstein 认为添加 Λ 是其一生中所犯的最大错误. 1967 年 Hawking 证明了膨胀宇宙在时间上回溯可到达奇点, 这被称为**宇宙大爆炸** (the big bang). 1990 年代的理论及观测显示, 只有将 Λ 重新写进来才能解释宇宙的**加速膨胀**, 其结果为 $\Lambda = 1.1056 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. 对通常的分析, 这个数值太小, 远不及 $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 项的贡献, 故

¹英文亦是 singularity. 为表述性质和地点两种概念, 中文语境里可区分使用. 但注意奇点不一定仅位于空间点.

会被忽略掉。目前这一项被解释为**暗能量** (dark energy) 的贡献。在量子场论中，能具备这一性质的概念只有真真空能，然而两套理论给出的 Λ 数值相差数量级很大。

还可考虑 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\sigma\kappa}R^{\mu\nu\sigma\kappa}$ 等 **Gauss-Bonnet** 项：

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} R + \alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \beta R^2 + \gamma R_{\mu\nu\sigma\kappa}R^{\mu\nu\sigma\kappa} + \dots, \quad (1.4.2)$$

甚至包括更高阶导数，其中耦合强度都是 \hbar 量级的极小值。一般在日常尺度下可不考虑量子效应。

1.4.2 Mach 原理及标量场

Newton 为了解释绝对空间的存在性，提出了所谓的**水桶实验**。将一盛有清水的桶静置，并用一根长绳悬吊（图中略去）使桶可以靠绳索的扭力而转动；随后，尽可能使桶很快地加速旋转至某一角速度并保持。起初，桶相对于我们旋转，但（大部分）水由于惯性仍将保持静止，并且液面是平坦的；待桶的运动通过摩擦力传导至水，使水开始渐渐地随桶旋转，液面逐渐凹陷。在某个时刻，水和桶都将以该角速度旋转，即相对静止，液面凹陷呈抛物面状；尽可能很快地停止旋转，这个时候水由于惯性仍然要旋转一会儿才会静止，液面仍然凹陷。虽说本质是思想实验，但其可行性还是挺大的：Newton 本人就声称“已经做过实验”，并对该结果表示肯定。什么原因使液面凹陷？从经验中

fig/chpt01/spinning bucket.pdf

图 1.17: 水桶实验

知道是水在相对于某个参考系旋转，进而产生了离心作用，但这个参考系是谁呢？起初水相对于环绕它的桶在旋转，随后水与桶一同旋转而相对静止的，但液面是凹陷的。因此，产生凹陷的旋转不是相对于水桶的旋转。Newton 认为这是相对于绝对空间的旋转。水面的凹陷是水的绝对运动的效果，通过凹陷程度可以测得其“绝对角速度”。Newton 认为如果水在其中旋转会凹陷，则这个参考系就是绝对空间。

19 世纪末，Mach 提出水并非相对于某种绝对介质旋转，而是相对于宇宙的全部物质组分，即星空背景。水凹陷是水的惯性效果，故 Mach 认为惯性需要在物质的相对运动中体现，或者物体惯性受到周围物质分布的影响。这称为 **Mach 原理**，尽管是一条模

糊的定性描述. 准确地说, Mach 将桶参考系中所出现的惯性力理解为一种星空背景对水的作用, 作用的强度体现为物体惯性, 其大小与周围星空背景的质量及相对加速有关. 比如, 若周围物质很稀疏, 就很难找到参照来判断一颗弹性球是否旋转, 那么即使其旋转起来也不会形变. 这似乎与引力很相似, 但在实验上很难验证. 因为反之需要加速周遭极大量的物质, 绕着水桶旋转并观察水是否凹陷, 尽管似乎直觉上应产生同样效果.

Einstein 也曾受到这一原理的启发, 而去寻找惯性和引力的关系, 最后抓住了等效原理. 但实际上, 等效原理给出的是新答案, 即水是相对于局域惯性系运动. 换言之, 广义相对论已通过等效原理回答了这一问题. Einstein 起初以为广义相对论符合 Mach 原理, 但现在看来显然不符合. 且当代观点更多认为 Mach 原理至少在现有实验条件下是错误的. 相反, 等效原理受到支持的验证就得多得多. 若非要认为惯性起源于相互作用的话, 由于局域惯性系是由外引力场决定的, 因此可认为凹陷现象是水和引力场之间的互动造就的. 目前用广义相对论回答“怎么办”是完全可行的, 而“为什么”则是留给科学哲学.

1960 年代, Brans 和 Dicke[2] 提出了一个接近 Mach 原理愿景的引力理论. 首先注意, 在地球的某个自由落体电梯中, 等效原理解释是电梯与乘客加速度一致, 而 Mach 原理解释是乘客的地球引力与星空背景的作用抵消. Newton 理论给出的地球引力为 $a = Gm/r^2$. 假设星空背景有某种宇观质量 M 和半径 R , 并施加相同 a , 根据量纲分析可知数量级上 $\frac{Gm}{r^2} \sim \frac{Rm}{Mr^2}$ (几何制), 因此 $\frac{1}{G} \sim \frac{M}{R}$. 一种理解是 $\frac{M}{R}$ 由理论给出, 而质量分布由广义相对论场方程的某个边界条件给出. 还有一种是局部观察的 G (或场源质量) 是随时空点变化的, 其值由附近的质量分布决定. 假设 G 是某个标量场的函数. 首先想到 Ricci 标量, 但它含有度规一阶导, 随着与场源距离 r 的增大, 它比 $1/r$ 减小得还快. 这种标量主要由附近质量分布决定, 而非远处物质. 因此, 我们需要一个独立于度规以外的新标量场 ϕ , 但二者都用于描述引力场. 假设理论是线性的, 则前文表明乘客的惯性力贡献应是引力常数的倒数, 即 $\phi \sim \frac{1}{G}$. 进而自由引力场加上标量场的部分为

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi} \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right), \quad (1.4.3)$$

其中 ω 是耦合参数, $\frac{\omega}{\phi}$ 是为了使 ω 无量纲, 并且还引入了 $\Lambda(\phi)$ 代表可变的宇宙学常数. 这就是**标量-张量理论**. 准确地说, 是 ϕ 的平均值 $\langle \phi \rangle$ 象征 $1/G$.

先对 $g^{\mu\nu}$ 变分, 则

$$\begin{aligned} 16\pi \delta(\mathcal{L}_G \sqrt{-g}) &= \phi (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + \Lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \\ &\quad - \frac{\omega}{\phi} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \end{aligned}$$

重点关注其中 $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]})$. 由于乘了 ϕ , 不能直接当做边界项丢掉, 而要进一步用 $\delta g^{\mu\nu}$ 表示克氏符变分. 直接用协变导数 $\partial_\mu g^{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g^{\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g^{\nu\sigma} = 0$ 计算出克

氏符. 变分有 $\nabla_\mu \delta g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + g^{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. 用 $g^{\kappa\mu}$ 升指标, 进行 κ, σ, λ 轮换后加减消项, 再缩并移项就有

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\frac{1}{2} (g_{\kappa\mu} \nabla_\nu \delta g^{\kappa\lambda} + g_{\kappa\nu} \nabla_\mu \delta g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\kappa} \nabla^\lambda \delta g^{\sigma\kappa}). \quad (1.4.4)$$

进而与 $g^{\mu\nu}$ 缩并再取反称有

$$2g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]} = g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta g^{\mu\lambda}, \quad (1.4.5)$$

将该结果用于分部积分:

$$\begin{aligned} 2 \int \phi \nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]}) D^4 x &\simeq -2 \int g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]} \nabla_\lambda \phi D^4 x \\ &= - \int (g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\lambda \phi - \nabla_\mu (\delta g^{\mu\lambda}) \nabla_\lambda \phi) D^4 x \\ &\simeq \int (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi - \delta g^{\mu\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda \phi) D^4 x \\ &= \int (g_{\mu\nu} \square_g \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} D^4 x. \end{aligned}$$

故引入物质场后的结果为

$$\phi G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) + \nabla_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square_g \phi, \quad (1.4.6)$$

并注意其迹为

$$-R + 4 \frac{\Lambda}{\phi} = \frac{8\pi}{\phi} T - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{3}{\phi} \square_g \phi. \quad (1.4.7)$$

再对 ϕ 变分:

$$16\pi \delta(\mathcal{L}_G \sqrt{-g}) = \left(\left(R - 2 \frac{d\Lambda}{d\phi} \right) \delta\phi - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{d\omega}{d\phi} \delta\phi - \omega \delta \left(\frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \right) \sqrt{-g},$$

其中

$$\begin{aligned} \int \delta \left(\frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) D^4 x &= \int \left(-\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta\phi + \frac{2}{\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \delta\phi \right) D^4 x \\ &\simeq \int \left(-\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta\phi - 2 \nabla_\mu \left(\partial^\mu \phi \frac{1}{\phi} \right) \delta\phi \right) D^4 x \\ &= \int \left(-\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta\phi - \frac{2}{\phi} \square_g \phi \delta\phi + \frac{2}{\phi^2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \delta\phi \right) D^4 x \\ &= \int \left(\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{2}{\phi} \square_g \phi \right) \delta\phi D^4 x. \end{aligned}$$

进而

$$R - 2 \frac{d\Lambda}{d\phi} - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{d\omega}{d\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square_g \phi = 0.$$

利用 (1.4.7) 式替换掉 R 可得

$$(3 + 2\omega)\square_g\phi + 4\Lambda - 2\phi\frac{d\Lambda}{d\phi} - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\frac{d\omega}{d\phi} = 8\pi T. \quad (1.4.8)$$

具体地, 考虑 $d\omega/d\phi = 0$ 和 $\Lambda = 0$, 则

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{16\pi}(\phi R - \omega\phi^{-1}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi), \quad (1.4.9)$$

进而

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\right) + \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\square_g\phi), \quad (1.4.10)$$

$$\square_g\phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega}T. \quad (1.4.11)$$

此即 **Brans-Dicke 理论**. 可见若 $\omega \rightarrow \infty$, 则 ϕ 没有贡献, 退回广义相对论. 根据论文 [1] 的结果, 从 Schwarzschild 解的角度来看, 对于非常大的 ω , 那么现有实验精度下, 广义相对论和 Brans-Dicke 理论就已不可分辨. 既然如此就选择广义相对论. 截止到 2003 年, 飞往土星的 Cassini 飞船的 Doppler 跟踪 (tracking)[5] 的测量结果为 $\omega > 40000$, 即目前观测还是更倾向于广义相对论.

一个涉及宇宙暴胀的理论是 $f(R)$ 理论, 其中自由引力场的拉氏密度为 $\mathcal{L}_G = f(R)$. 记标量场 $f_R := df(R)/dR$. 变分有

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int \left(f_R \delta R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) D^4x \\ &= \int \left(f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} D^4x + 2 \int f_R \nabla_\lambda (g^{\mu[\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda]}) D^4x \\ &\simeq \int \left(f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square_g f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R \right) \delta g^{\mu\nu} D^4x, \end{aligned}$$

加上物质场的贡献有

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square_g f_R - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.4.12)$$

可证 $f(R)$ 的作用实际上相当于引入额外标量场. 我们以后再谈细节.

1.4.3 Kaluza-Klein 理论

我们甚至不排除更高维时空的存在, 将四维时空中的相互作用视作更高维物理的结果. Kaluza 最先注意到电磁张量看起来像截断克氏符: 引入第五 (空间) 维度使得 $A_\mu = g_{\mu 4}$, 假定 $g_{\mu\nu,4} = 0$ 则

$$\Gamma_{\nu 4}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (2g_{4[\sigma, \nu]} + g_{\sigma\nu,4}) = -\frac{1}{2} F^\mu{}_\nu. \quad (1.4.13)$$

其中 μ, ν 只取 0, 1, 2, 3. 假设五维“度规”形如

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ab} dx^a dx^b = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dx^4 + \lambda A_\mu dx^\mu)^2, \quad (1.4.14)$$

其中 a, b 取 0, 1, 2, 3, 4. 也即 $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu$, $\hat{g}_{\mu 4} = \lambda A_\mu$, $\hat{g}_{44} = 1$. 这一“度规”显然对任意四维变换 $x'^\mu(x^\nu)$ 或平移 $x'^5 = x^5 + f(x^\nu)$ 不变, 但对任意五维变换可变, 故并非真正的五维流形上的度规. 后者的结果正是规范变换 $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$. 换言之, 我们将 U(1) 对称性的内部自由度 θ 解释到了第五维 x^4 . 依次计算克氏符、Ricci 张量和 Ricci 标量可得

$$\hat{R} = R - \frac{\lambda^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.4.15)$$

这意味着五维几何 $\hat{\mathcal{L}} = \hat{R}$ 可在四维时空下分化出引力和电磁作用, 称为 **Kaluza 奇迹**. 为求五维度规行列式, 只需先对角化. 考虑 $H^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$, $H^4{}_\nu = -\lambda A_\nu$, $H^\mu{}_4 = 0$, $H^4{}_4 = 1$, 则 $\hat{g}_{\mu a} H^a{}_\nu = g_{\mu\nu}$, $\hat{g}_{\mu a} H^a{}_4 = \lambda A_\mu$, $\hat{g}_{4a} H^a{}_\nu = 0$, $\hat{g}_{4a} H^a{}_4 = 1$. 因此 $\hat{g} = g$. 但我们需要使对 x^4 的积分收敛. 注意 U(1) 变换中 θ 是周期等效的, 因而第五维度对应于某个圆周. 因而 U(1) 等效为了 SO(2). 这便是**紧化** (compactification) 思想之源, 最先由 Oskar Klein 引进. $g_{\mu\nu,4} = 0$ 也称**圆柱条件** (cylindricity condition). 五维“时空”并非流形, 在数学上是**纤维丛** (fiber bundle), 四维时空作为其**底流形**而第五维圆圈作为其**纤维**. 假设半径 L , 则

$$\hat{S} = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int \hat{R} \sqrt{-\hat{g}} d^5x = \frac{L}{8\hat{G}} \int \hat{R} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.4.16)$$

Gauss 几何制下取 $\hat{G} = 2\pi L$, $\lambda = 2$ 即得真空 Einstein-Maxwell 作用量. 再考虑五维测地线方程 $\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$. 首先由圆柱条件知守恒量 $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^4 \propto \dot{x}^4 + A_\mu \dot{x}^\mu$. 剩余分量为

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{bc}^\lambda \dot{x}^b \dot{x}^c = \ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - F^\lambda{}_\mu \dot{x}^\mu (\dot{x}^4 + A_\nu \dot{x}^\nu) = 0, \quad (1.4.17)$$

若用荷质比来确定守恒量, 则这正是 Lorentz 力定律 $\dot{x}^4 + A_\nu \dot{x}^\nu = q/m$. 从而经典电磁力、经典引力得到统一. 带电粒子与中性粒子具有不同运动, 这并不违反等效原理, 而只是因为它们在 x^4 上有不同初速度.

这一理论当然差强人意. $\hat{R}_{ab} = 0$ 的真正结果为

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu} = 2F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma, \quad (1.4.18)$$

第三式只是真空 Einstein-Maxwell 方程 $R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ 在第一式成立的特例. 第一式源于 $\hat{R}_{44} = 0$. 这是因为变分原理并不能保证 $\hat{g}_{44} = 1$ 假设. 从而, 五维假设显得非常人为. 最重要的是, 我们始终在讨论经典理论, 并未真正考虑量子力学. 实际上, 强、弱相互作用的概念在 Einstein 逝世后才被彻底确立.

此外还必须解释为何从未发现第五维度. 置五维闵氏时空上的复标量场 $\hat{\phi}$. 方便起见考虑无质量, Klein-Gordon 方程为

$$\hat{\eta}^{ab} \partial_a \partial_b \hat{\phi} = 0, \quad \hat{\phi} = \sum_n \phi_n(x^\mu) e^{inx^4/L}, \quad (1.4.19)$$

其中由周期性 $x^4 \sim x^4 + 2\pi L$, 可对 $\hat{\phi}$ 作 Fourier 展开使其与 x^4 的依赖关系更明确. 代入展开式得到无穷多个解耦方程, 即对 $\hat{\phi}$ 的无穷多 Fourier 模 ϕ_n 均有

$$(\square - m_n^2)\phi_n^2 = 0, \quad m_n^2 = n^2/L^2. \quad (1.4.20)$$

其中质量项源于 ∂_{44} . 可见五维时空上的无质量标量场会产生 $n = 0$ 的四维无质量场¹、 $n \neq 0$ 的无穷多有质量场. 这种质量称为 Kaluza-Klein 模.

四维闵氏度规在五维上的拓展其实应为 $d\hat{s}^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (dx^4 + \lambda A_\mu dx^\mu)^2$, 则 $\hat{g} = g = -1$. 因此 $\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, $\hat{g}^{\mu 4} = -\lambda A^\mu$, $\hat{g}^{44} = 1 + \lambda^2 A^\mu A_\mu$. Klein-Gordon 方程变为

$$0 = \square_{\hat{g}} \hat{\phi} = \partial_a \left(\hat{g}^{ab} \partial_b \hat{\phi} \right) = \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu - \lambda A_\mu \partial_4) (\partial_\nu - \lambda A_\nu \partial_4) \hat{\phi} + \partial_4^2 \hat{\phi},$$

将 Fourier 分解代入, 则对任意 ϕ_n 有

$$\left(\eta^{\mu\nu} \left(\partial_\mu - i \frac{\lambda_n}{L} A_\mu \right) \left(\partial_\nu - i \frac{\lambda_n}{L} A_\nu \right) - m_n^2 \right) \phi_n = 0,$$

可见非零模不仅有质量, 且在规范场 A_μ 下带电. $\partial_\mu - \lambda m_n A_\mu$ 与规范协变导数 $\partial_\mu - ine A_\mu$ 对比得元电荷 $e = \lambda/L$. 还原国际单位有 $e = \hbar\lambda/L$, 以及 $\frac{c^4}{16\pi G} R - \frac{1}{4\mu_0}$.

$\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ 代替即可, 因而算子 \square 换为 \square_g .

时空各点的额外维蜷缩 (curled up), 从而只剩下我们经验中看到的时空本身.

尽管有诸多缺陷, Wheeler 仍表示“几何动力学”拓展到其它相互作用是有希望的. 20 世纪末, **弦论** (string theory) 继承了高维几何的衣钵, 利用极小对象“弦”部分地得到了广义相对论、量子场论的结果. 此外还有企图构建背景无关量子场论的**圈量子引力** (loop quantum gravity)、研究非交换几何的 **CLCB 理论**, 它们皆只部分地回答了量子引力的疑难. 目前前沿话题还包括引力同统计物理、信息论的联系, 诸如**熵力理论**、**黑洞信息学**, 以及受场论和凝聚态影响的**超对称理论**. 我们以后再详细学习.

引力是目前已知相互作用中最弱的. 两个质子之间的静电斥力比它们之间的引力大 1.2×10^{36} 倍. 这意味着即使各种量子引力理论层出不穷, 但以当代技术, 仍然很难直接做实验以获取有效数据. 目前多用宇宙学观测所得到早期宇宙的数据来筛选理论. “大一统理论”通常指沿标准模型的思路, 将强相互作用同电弱作用统一的尝试. 狭义上的量子引力理论只涉足引力量子化问题, 广义的量子引力理论或许是人们所希望的“万物理论”.

1.5 标架表述

还可考虑有挠时空, $g_{\mu\nu}, T^\lambda_{\mu\nu}$ 一齐作为引力场的基本物理量. 这种理论发展为**引力规范理论**, 典型地如 **Einstein-Cartan 理论**. 这些理论多采用了更为数学、但实质等价

¹但仍有 d'Alembert 方程, 故内部空间是谐振的或振动模固定.

于 $g_{\mu\nu}, T^\lambda_{\mu\nu}$ 形式的语言, 故暂时只扼要介绍. 其中 2 阶情形的最一般的规范理论作用量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G = & -\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + a_1 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + a_2 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ & + a_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\mu\beta\nu} + b_1 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + b_2 R_{\alpha\beta} R^{\beta\alpha} \\ & + c_1 T_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha\beta\gamma} + c_2 T_{\alpha\beta\gamma} T^{\beta\gamma\alpha} + c_3 T^\beta_{\alpha\beta} T^\gamma_{\gamma\alpha}.\end{aligned}\tag{1.5.1}$$

其中 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是一般的有挠 **Riemann 曲率**, 前一对指标与后一对指标没有对称性, 前一对指标也没有反称性. 但 Ricci 张量仍按 $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$ 定义. 其中的指标升降均在 $g_{\mu\nu}$ 下.

1.6 哈氏理论

1.6.1 3+1 分解

1.6.2 初值问题

1.7 场论 Noether 定理

参考文献

- [1] A. Bhabra and K. Sarkar. “On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory”. In: *General Relativity and Gravitation* 37 (2005), pp. 2189–2199 (cit. on p. 52).
- [2] C. H. Brans and R. H. Dicke. “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”. In: *Physical Review* 124 (1961), pp. 925–935 (cit. on p. 50).
- [3] Albert Einstein et al. *The Principle of Relativity*. New York: Dover, 1958 (cit. on p. 5).
- [4] Isaac Newton. *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*. Eng: *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (University of California Press, 1999). 1687 (cit. on p. 9).
- [5] C. M. Will. “The confrontation between general relativity and experiment”. In: *Living Reviews in Relativity* 17.4 (2014) (cit. on p. 52).