题意

令 $f(i)$ 为 i 的正因子个数，求 $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ 的值

$n \le 10^12$

部分分解法

- ## 暴力

  枚举 $[1, n]$ 内所有数的因数，

```
long long ans=0;
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int j=1;j*j<=i;j++){
        if(i%j==0){
            ans++;
        }
    }
}
```

复杂度$O(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i})$,二阶近似为 $O(\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{n})$
如果利用以下性质 $O(n)$ 线性筛预处理质数还可以更快一丢丢

$$x = \prod_{i=1}^{c} p_i^{a_i}$$
$$\forall i : p_i \in \mathbb{P}, a_i \in \mathbb{N}$$
$$f(x) = \prod_{i=1}^{c} (1 + a_i)$$

```
long long ans=1;
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int j:prime){
        if(j>i){
            break
        }
        if(i%j==0){
            int cnt=1;
            while(i%j==0&&i>0){
                i/=j;
                cnt++;
            }
            ans*=cnt;
        }
    }
 }
```

由于 $[1,n]$ 内质数的个数约 $\frac{n}{\ln n}$ 所以复杂度为 $O(\frac{n^2}{\ln n})$

- ## $O(n)$ 暴力

考虑 k 对答案的贡献,易得

$$ans=\sum_{i=1}^{n}f(i)=\sum_{k=1}^{n}\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$$

```
long long ans=0;
for(int k=1;k<=n;k++){
    ans+=(n/k);
 }
```

正解

当 $n=10$ 时

观察并列出$O(n)$ 暴力中每个 k 的贡献:

$$10 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

发现：有大段重复数据

因此我们只需要计算某段贡献的长度与贡献就可以减少大量计算

令 l,r 为贡献相同的区间的左右端点

易得 $r=\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor} \rfloor$ 而下一个区间的右端点则为 $r+1$

```
for(int l=1,r;l<=n;l=r+1){
    r=n/(n/l);
    ans+=(r-l+1)*(n/l);
}
```

估测循环次数小于 $2\sqrt{n}$,复杂度 $O(\sqrt{n})$

2026.2.17