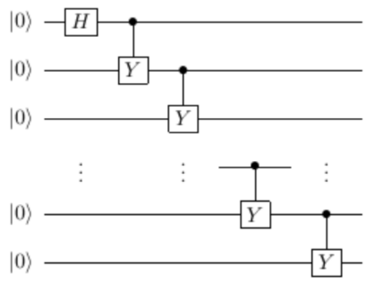
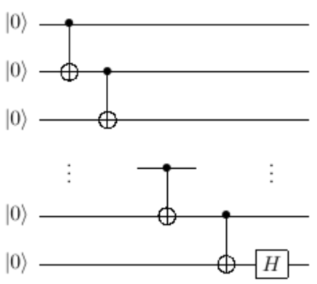
问题1

1. 【单选】Greenberger-Horne-Zeilinger态是一种重要的纠缠态，它具有形式$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\cdots0\rangle + |11\cdots1\rangle)$，下面四个线路图中能够制备一个GHZ态的量子线路是?

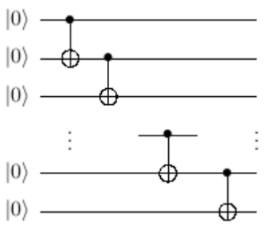
A.



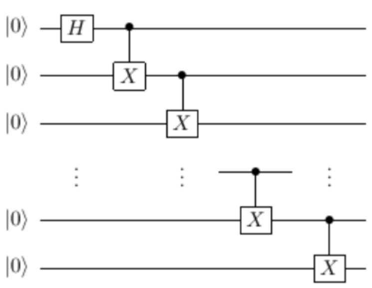
B.



C.



D.



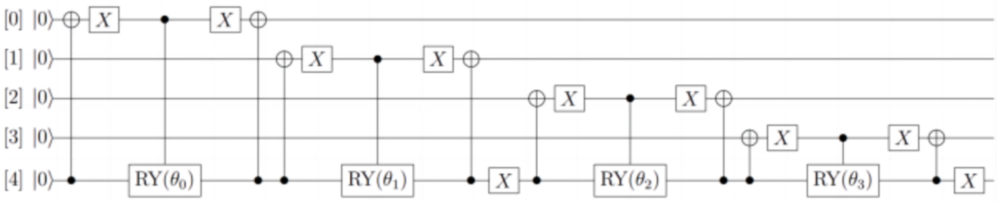
该GHZ态经过单次测量后会有两种结果，$00\ldots0$或$11\ldots1$，概率均为1/2。因此需要先通过H门制备叠加态。

可以知道，当第一个量子比特的值确定后，其余的值均会确定下来，由此可知是使用连续的CNOT门。

因此选D

问题2

2.【单选】分子对接作为直接设计药物的方法在计算机辅助药物设计方法中应用比较成熟,其目的是研究分子间的相互作用，寻找小分子（或配体）与已知结构的大分子（或受体）活性位点的低能结合模式的过程。在考虑使用量子算法解决分子对接问题时，所求的是药效团结合的方式，即各个结点配对的方式。如$(A1-a1, B1-b1)$表示一种对接方式。现受体蛋白靶点药效团有$(A1, B1)$,配体小分子的药效团（$a1, b1)$,药效团之间只能两两配对一次，W state可以恰当地描述与靶标药效团同一部位结合的配体分子数目限制，因此需要在不同比特间构造W state，线路从第0号位开始，$q4$为辅助比特，其中含参量子线路模块$U(\theta)$对应的量子线路如下：



参数值满足$sin\theta_j = 1/\sqrt{d-j}$，$j$表示模块当前所作用的比特编号,$d$个用于问题编码的比特。 $sin\theta_2$的值为？

- A. 1
- B. 0
- C. $1/\sqrt{2}$
- D. $1/\sqrt{3}$

整个题目中所涉及的作用比特数为d=4（不包含辅助比特）,求解比特编号为j=2

可以由最后一句话可知$sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{d-j}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

因此选C

背景补充

问题3

3. 【单选】当流行的量子算法，如变分量子算法，在模拟物理或化学体系时，常常要求制备初态，一个合适的初态对准确快速得到系统的特征解十分有利。在没有先验知识的情况下，构造纠缠态是实现初态的一个不错方式。实验上，常用的Bell纠缠态，就是一个H门作用到一个qubit上，然后通过一个CNOT门将它与另一个qubit联系起来来得到。那么，对于一个一般的双比特量子态而言，比如如下形式：$|\Psi\rangle = a(|0\rangle + b_1 e^{i\phi_1}|1\rangle)_1 \otimes (|0\rangle + b_0 e^{i\phi_0}|1\rangle)_2$，其中$a$是归一化系数，为使$\mathrm{CNOT}_{12}|\Psi\rangle$（$\mathrm{CNOT}_{12}$为第一个量子比特为控制比特，第二个比特为被控制比特的CNOT门）为纠缠态，实数b_0、b_1，ϕ_0和ϕ_1应满足什么条件?

- A. $b_0 \neq 1, \phi_0 \neq 0$
- B. $b_1 \neq 1, \phi_1 \neq 0$
- C. $b_1 \neq 1, \phi_0 \neq 0$
- D. $b_0 \neq 1, \phi_1 \neq 0$

CNOT门作用在$|\Psi\rangle$上，会根据第一个比特的状态决定是否改变第二个比特的状态。

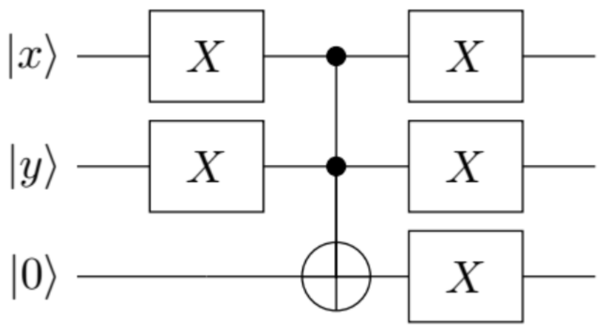
因此，可以得到如果当第一个比特状态无论是怎样的，第二个比特的状态都不会受影响，此时可以一直分解直积，即为非纠缠态。当$b_0 = 1, \quad \phi_2 = 0$时第二个比特为$|+\rangle$，满足上述要求。

因而相反则为纠缠态。

`因此选A`

问题4

4. 【单选】请问当观察最下面的量子比特时，如下的量子线路能够实现对量子态$|x\rangle, |y\rangle$的什么操作?



- A. 实现加法操作，得到$|x + y\rangle$
- B. 实现减法操作，得到$|x - y\rangle$
- C. 实现逻辑或操作，得到$|x \vee y\rangle$
- D. 实现逻辑与操作，得到$|x \wedge y\rangle$

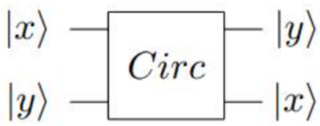
将0,1分别带入x,y中可以得到，只有$x = 0, \quad y = 0$时，第三比特位输出为0，其余时候输出均为1，由此可知该线路执行的是逻辑或操作

因此选C

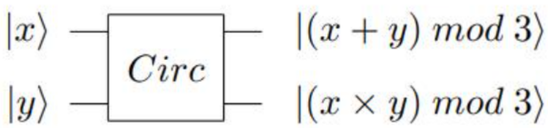
问题5

5.【多选】线路的可逆性是量子线路的一个重要特征，考虑变量$x, y \in \{0,1,2\}$，则下面4个给定线路中（没有辅助比特）不可逆的线路是?

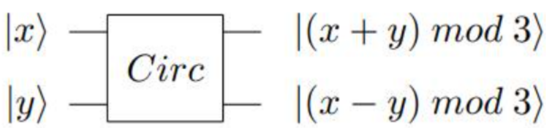
A.



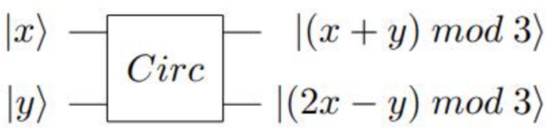
B.



C.



D.



遍历各种取值，对结果进行比较，确认是否输入输出具有一一对应的关系，若是存在一一对应的关系，则线路可逆。

做出四个选项的结果图

选项A

	x	y	out1	out2
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0
2	0	2	2	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	1
5	1	2	2	1
6	2	0	0	2
7	2	1	1	2
8	2	2	2	2

选项B

	x	y	out1	out2
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0
2	0	2	2	0
3	1	0	1	0
4	1	1	2	1
5	1	2	0	2
6	2	0	2	0
7	2	1	0	2
8	2	2	1	1

可以看到输出结果中

10两次，20两次，02两次

选项C

	x	y	out1	out2
0	0	0	0	0
1	0	1	1	2
2	0	2	2	1
3	1	0	1	1
4	1	1	2	0
5	1	2	0	2
6	2	0	2	2
7	2	1	0	1
8	2	2	1	0

选项D

	x	y	out1	out2
0	0	0	0	0
1	0	1	1	2
2	0	2	2	1
3	1	0	1	2
4	1	1	2	1
5	1	2	0	0
6	2	0	2	1
7	2	1	0	0
8	2	2	1	2

可以看到输出结果中

00三次，12三次，21三次

`因此选BD`

问题6

6.【单选】设我们的量子计算机只能测量量子比特处于0或者1的概率，但通过对末态施加一段额外的量子线路再测量，就可以得到原末态在任意泡利算符本征态下的概率和算符期望。请问施加以下哪个额外线路可得到Y的本征概率和期望?

A. 先作用H门，随后测量

B. 先作用S门，随后测量

C. 先作用S门，随后作用H门，最后测量

D. 先作用T门，随后作用H门，最后测量

求Y的本征概率与期望，则可以转变为对Z求解期望值，对于一般可观测量O，只需要找到旋转门W满足$\langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi|W^\dagger ZW|\psi\rangle = \langle\psi'|Z|\psi'\rangle$ 对于本题$Y = W^\dagger ZW$,可以验证，当$W = HS^\dagger$时，即可满足上式

```
OptionA:
 [[0. 1.]
 [1. 0.]]
================================================================================
OptionB:
 [[ 1.+0.j  0.+0.j]
 [ 0.+0.j -1.+0.j]]
================================================================================
OptionC:
 [[0.+0.j 0.-1.j]
 [0.+1.j 0.+0.j]]
================================================================================
OptionD:
 [[0.    +0.j     0.7071+0.7071j]
 [0.7071-0.7071j 0.    +0.j    ]]
================================================================================
```

因此选C

问题7

7.【单选】傅里叶变换是量子计算的一个重要工具，它可以被视作希尔伯特空间上的一个线性变换。n个比特的量子傅里叶变换的定义如下：$|y_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N}|x_j\rangle\, e^{2\pi ijk/N}$，下面哪一个矩阵可以刻画一个二量子比特系统的量子傅里叶变换？

A. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -1 \\ 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$

C. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$

D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & -1 & i & i \end{pmatrix}$

直接搭建一个两比特的量子线路，然后提取矩阵，得到结果

```
                                               ┌─┐
q_0:  |0>───────  ───────────────────■───────────  ┤ H ├ X
                                     │             └───┘  │
            ┌───┐  ┌─────────────────┴─────────┐
q_1:  |0>───┤ H ├ ─┤ CR(1.570796) ├ ──────── X
            └───┘  └───────────────────────────┘


[[ 1.0000e+00+0.j   1.0000e+00+0.j   1.0000e+00+0.j   1.0000e+00+0.j]
 [ 1.0000e+00+0.j   6.1232e-17+1.j  -1.0000e+00+0.j  -6.1232e-17-1.j]
 [ 1.0000e+00+0.j  -1.0000e+00+0.j   1.0000e+00+0.j  -1.0000e+00+0.j]
 [ 1.0000e+00+0.j  -6.1232e-17-1.j  -1.0000e+00+0.j   6.1232e-17+1.j]]
```

因此选C

问题8

问题8

8. 【单选】纠错子空间：设有一台两比特量子计算机受到一种噪声的干扰，该噪声有50%概率翻转比特1的相位，否则就翻转比特2的相位。所谓翻转相位，指的是当量子比特为$\alpha\left|0\right\rangle+\beta\left|1\right\rangle,\forall\alpha,\beta$时将其变为$\alpha\left|0\right\rangle-\beta\left|1\right\rangle$,请问在以下哪组基张成的子空间中该噪声只会导致该空间内的量子态发生酉演化?

A. $\{\left|00\right\rangle,\left|11\right\rangle\}$

B. $\{\left|00\right\rangle,\left|10\right\rangle\}$

C. $\{\left|01\right\rangle,\left|11\right\rangle\}$

D. $\{\left|01\right\rangle,\left|10\right\rangle\}$

$$U=\frac{1}{2}(I\otimes Z+Z\otimes I)$$

$$\psi=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$U\psi=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\-d\end{pmatrix}$$

因此只会保留a,d位置，即这两个基为$|00\rangle$与$|11\rangle$

`因此选A`

问题9

9. 【单选】【高难度】量子近似优化算法（QAOA）可以解决许多组合优化问题，其中很重要的一步是将二值的目标函数转化为对应的哈密顿量。这一步可以通过将对应的二值变量x替换为$\frac{I-Z}{2}$完成。那么，$x_1\vee x_2$对应的泡利算符应该为?

A. $\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}Z_1Z_2$

B. $\frac{1}{4}I-\frac{1}{4}(Z_1+Z_2-Z_1Z_2)$

C. $\frac{3}{4}I+\frac{1}{4}(Z_1+Z_2-Z_1Z_2)$

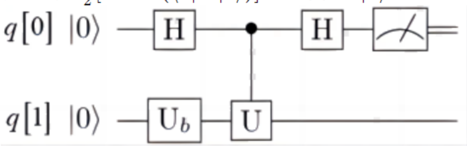
D. $\frac{3}{4}I-\frac{1}{4}(Z_1+Z_2+Z_1Z_2)$

$$\begin{aligned}&x_1\vee x_2\\&=x_1+x_2-x_1x_2\\&=\frac{I-Z_1}{2}\otimes I+I\otimes\frac{I-Z_2}{2}-\frac{I-Z_1}{2}\otimes\frac{I-Z_2}{2}\\&=\frac{3}{4}I-\frac{1}{4}(Z_1+Z_2+Z_1Z_2)\end{aligned}$$

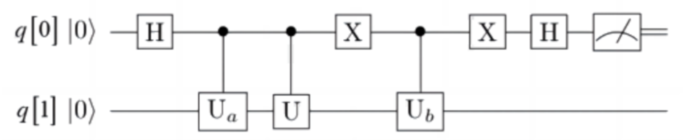
`因此选D`

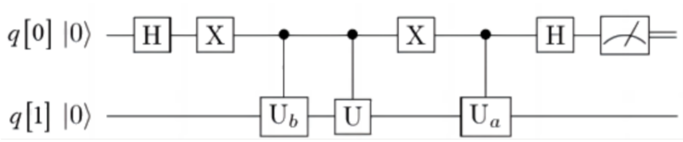
问题10

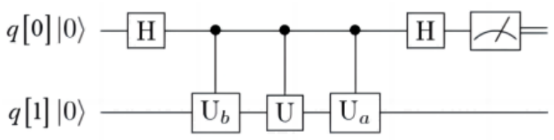
10.【单选】【高难度】Hadamard测试是一种常用的量子线路组件，用于计算酉算子U与量子态$|b\rangle$的期望投影$\langle b|U|b\rangle$。下图是一个标准的Hadamard线路，其中寄存器数学公式: $q[0]$是辅助量子比特，寄存器$q[1]$用于编码量子态$|b\rangle$。此时对辅助比特进行测量会有$\frac{1}{2}[1+R(\langle b|U|b\rangle)]$的概率得到$|0\rangle$。

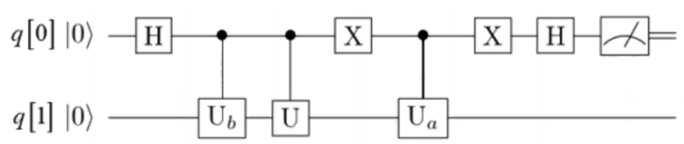


实践中有时需要计算$\langle b|U|a\rangle$的实部，其中$|a\rangle = U_a|0\rangle, |b\rangle = U_b|0\rangle$。能够完成该操作的量子线路是?

A.


B.


C.


D.


观察链接中测量步骤，可以知道，要想将U_b, U_a分别作用在两个分量上，就必须进行两次非门操作，用于转变控制比特的比特数，因此首先排除C

（一种想法：从量子线路搭建角度，作用顺序为先构造量子态$|a\rangle$，然后将U门作用在其上，之后再将$|b\rangle$作用上去，由此可以由电路图得到，选A）

整体推导过程

$$H|0\rangle \otimes |\psi\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle U_a|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle UU_a|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|\psi\rangle + |0\rangle UU_a|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle U_b|\psi\rangle + |0\rangle UU_a|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle U_b|\psi\rangle + |1\rangle UU_a|\psi\rangle\right)$$

$$|\psi_7\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{2} U_b|\psi\rangle + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{2} UU_a|\psi\rangle)$$

$$= \frac{|0\rangle}{2}\left(|b\rangle + U|a\rangle\right) + \frac{|1\rangle}{2}\left(|b\rangle - U|a\rangle\right)$$

$$\cancel{= \frac{|0\rangle}{2}\left(1+|1\rangle\right)|}$$

$$\left|\frac{|b\rangle + U|a\rangle}{2}\right|^2 = \frac{1+\mathrm{Re}}{2}$$

```
实部： 0.5153852995279127
{'00': 517, '01': 483}
```

`因此选A`