

## 题目描述

1. (本题30分) 贝尔态, 也称EPR态, 因其纠缠的特性在量子计算和量子通信中具有重要作用, 尝试使用pyqpanda解决下面问题:
- (1) 构造一个量子线路, 在输入比特为数学公式: 00, 01, 10, 11四种情况下分别得到四个不同的贝尔态 $|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ ,  $|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$ ,  $|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$ ,  $|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$  (9分)
- (2) 使用 (1) 中的线路, 增加线路实现量子隐形传态 (Quantum teleportation), 即, 将需要传递的第三个量子比特的信息赋予EPR对中的第一个量子比特上 (提示: 可能会用到Qif线路)。 (21分)
- 答题要求:**
- (1) 选手需在IDE中编写上述线路的python代码, 并提供一份该文件的说明文档;
- (2) 题目中的两问应当包含在同一份说明文档中;
- (3) 在第一问的程序中, 选手的函数应接受一个字符串 ('00', '01', '10', '11'之一) 作为输入;
- (4) 第二问的程序中, 第三个量子比特的初始信息由RY门构建, 选手应输入一个实数作为RY门参数, 输出第一个量子比特的振幅模方, 即概率值 (二维向量)。(注: 可以使用get\_qstate()方法获得量子态, 或使用runprob\_run\_list方法获得精确概率)

## 问题1

本题所使用的量子门有:  $X$  门、 $H$  门以及  $CNOT$  门, 具有以下性质:

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad X|1\rangle = |0\rangle$$

$$H|0\rangle = \frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{2} \quad H|1\rangle = \frac{(|0\rangle-|1\rangle)}{2}$$

$CNOT = C\_X$ , 当控制位为  $|1\rangle$  时对目标位进行翻转

## 线路实现

贝尔态作为最大纠缠态, 构造它的核心线路可通过一个  $H$  门与  $CNOT$  门来实现, 如下所示:

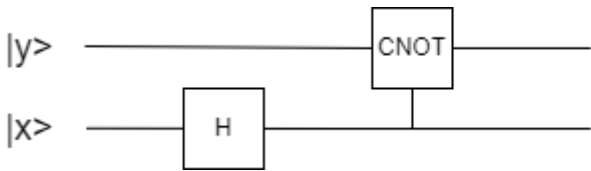


图1.构造贝尔态的核心线路

具体来说, 当输入  $|xy\rangle = |00\rangle$  时, 经过H门量子态变为  $(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle/\sqrt{2}$ , 再经过受控非门给出输出态  $(|00\rangle + |11\rangle)/2$ , 即贝尔态  $|\beta_{00}\rangle$ , 其余贝尔态的制备可通过改变输入量子态  $|xy\rangle$  来得到, 具体对应关系如下表所示:

表1.线路输入与输出量子态对应关系

输入 $ xy\rangle$	输出
$ 00\rangle$	$( 00\rangle +  11\rangle)/2 =  \beta_{00}\rangle$
$ 01\rangle$	$( 01\rangle +  10\rangle)/2 =  \beta_{01}\rangle$
$ 10\rangle$	$( 00\rangle -  11\rangle)/2 =  \beta_{10}\rangle$
$ 11\rangle$	$( 01\rangle -  10\rangle)/2 =  \beta_{11}\rangle$

而初始态中  $|1\rangle$  态的制备只需对  $|0\rangle$  态作用  $X$  门即可得到。

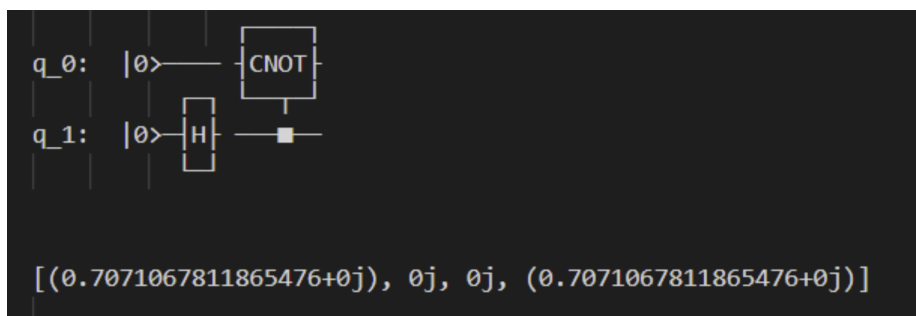
由于函数的输入参数 `input` 从左到右依次对应量子比特的高位到低位，因此 `input[0]` 决定  $|x\rangle$  的初态，而 `input[1]` 决定  $|y\rangle$  的初态，于是我们可以得到以下关系：

```
1 if input[0] == '1':
2     prog << X(qubits[1])
3 if input[1] == '1':
4     prog << X(qubits[0])
5 prog << H(qubits[1]) << CNOT(qubits[1],qubits[0])
```

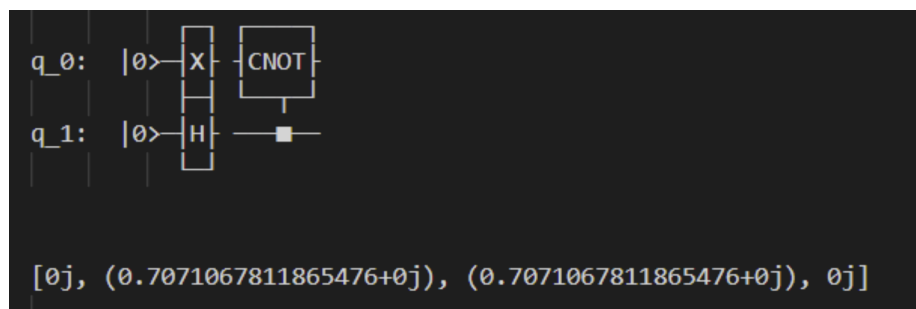
## 线路测试

运行完整线路，在不同输入参数下分别可得到如下四个不同的贝尔态：

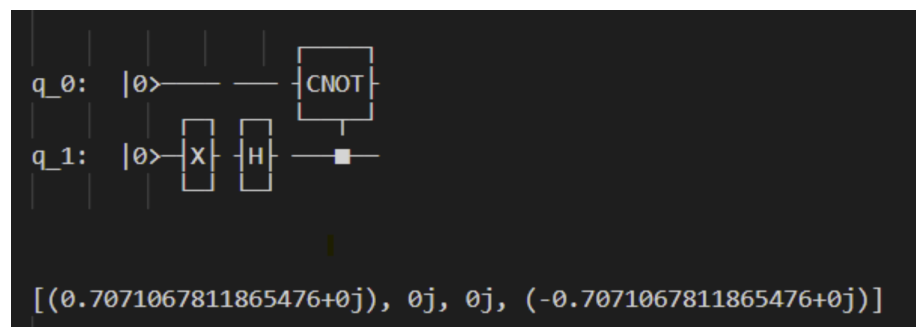
当输入字符串为“00”时，为  $|\beta_{00}\rangle$ ：



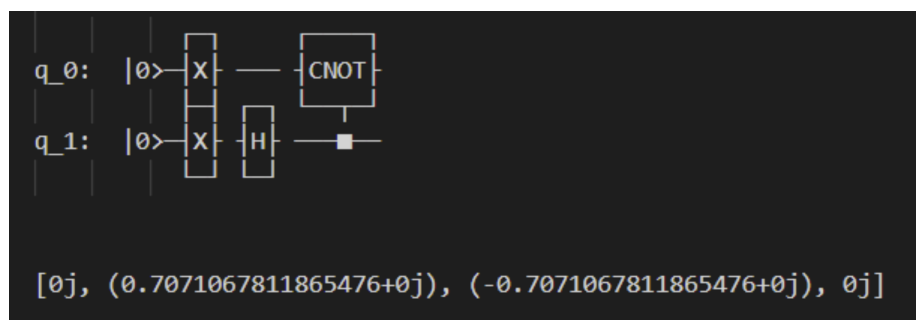
当输入字符串为“01”时，为  $|\beta_{01}\rangle$ ：



当输入字符串为“10”时，为  $|\beta_{10}\rangle$ ：



当输入字符串为“11”时，为  $|\beta_{11}\rangle$ ：



## 问题2

### 量子隐形传态

量子隐形传态是利用量子纠缠的性质，通过经典信道，实现远距离传输一个量子态的模型。具体来说，假设 *Alice* 与 *Bob* 提前分别持有贝尔态  $|\beta_{00}\rangle$  中的一个量子比特，分别记为 *A* 和 *B*，并共享一条经典信道来传输经典信息，现 *Alice* 需要向 *Bob* 传输一个未知的量子态  $|\psi\rangle$ ，其编码在粒子 *S* 上，则他们仅需按照以下步骤进行操作即可完成任务：

1. *Alice* 对她所持有的两个量子比特系统，以 *S* 为控制位，*A* 为目标位做 *CNOT* 操作，然后对量子比特 *S* 作 *H* 门操作，产生量子纠缠；
2. *Alice* 对其手中的两个量子比特 *S* 和 *A* 在计算基上测量得到经典信息比特  $M_1, M_2 \in \{0, 1\}$ ；
3. *Alice* 将测量所得经典信息  $M_1, M_2$  通过经典信道传输给 *Bob*；
4. 最后 *Bob* 按照接收到的通讯结果来对他持有的量子比特系统 *B* 进行量子门操作  $Z^{M_1}X^{M_2}$ ，即可还原出量子态  $|\psi\rangle$

具体线路图如图 2 所示，其中量子比特 *S* 和 *A* 属于 *Alice*，而 *B* 属于 *Bob*：

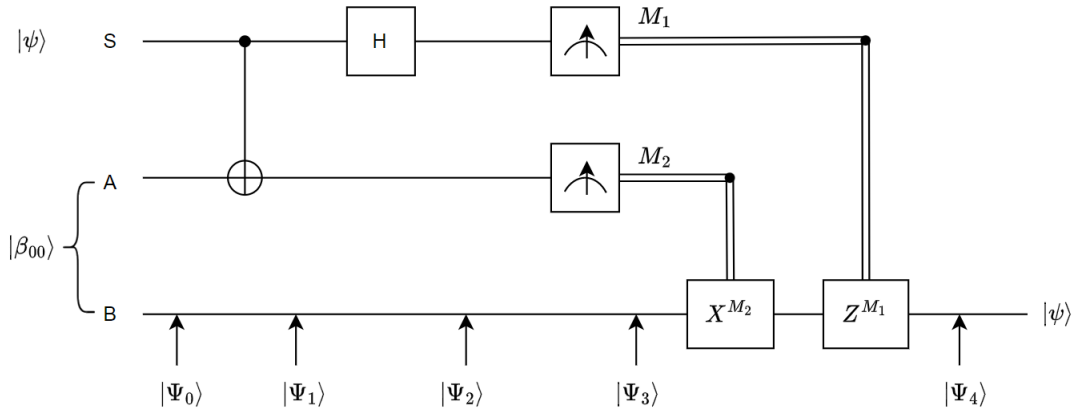


图2.基于  $|\beta_{00}\rangle$  的量子隐形传态线路

假设要传送的量子态  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，则图 2 中所示的各阶段量子态分别为：

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)]$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)]$$

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)] \end{aligned}$$

当 *Alice* 对前两个量子比特测量后，系统的量子态  $|\Psi_3\rangle$  分别以  $1/4$  的概率处于以下四个态之一：

$$\begin{aligned} &|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &|01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ &|10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \\ &|11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \end{aligned}$$

*Alice* 将手中粒子 *SA* 的测量结果编码为经典信息  $M_1M_2$ ，并发送给 *Bob*。根据收到的经典信息  $M_1M_2$ ，*Bob* 只需对其手中的粒子 *B* 施加相应的酉变换，即可将其恢复为 *Alice* 初始要发送的量子态  $|\psi\rangle$ ，它们之间的对应关系如表2所示。

表2.基于  $|\beta_{00}\rangle$  的量子隐形传态中测量结果与酉变换操作间的关系

Alice的测量结果 $M_1 M_2$	测量后 Bob 粒子 B 的量子态	Bob需要做的酉变换
00	$ \Psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle]$	$I$
01	$ \Psi_3(01)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle]$	$X$
10	$ \Psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle]$	$Z$
11	$ \Psi_3(11)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle]$	$Z, X$

附注：本案例中量子隐形传态所使用的Bell态为  $|\beta_{00}\rangle$ ，使用其它Bell态也可以完成任务。所搭建的线路相同，只是上表 Alice 的测量结果  $M_1 M_2$  与 Bob 所需做的酉变换之间的对应关系有所改变，分别如表3、表4、表5所示，其中  $\sigma_\Gamma = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

表3.基于  $|\beta_{01}\rangle$  的量子隐形传态中测量结果与酉变换操作间的关系

Alice的测量结果 $M_1 M_2$	测量后 Bob 粒子 B 的量子态	Bob需要做的酉变换
00	$ \Psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle]$	$X$
01	$ \Psi_3(01)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle]$	$I$
10	$ \Psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle]$	$Z, X$
11	$ \Psi_3(11)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle]$	$Z$

表4.基于  $|\beta_{10}\rangle$  的量子隐形传态中测量结果与酉变换操作间的关系

Alice的测量结果 $M_1 M_2$	测量后 Bob 粒子 B 的量子态	Bob需要做的酉变换
00	$ \Psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle]$	$Z$
01	$ \Psi_3(01)\rangle \equiv [-\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle]$	$Z, X, \sigma_\Gamma$
10	$ \Psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle]$	$I$
11	$ \Psi_3(11)\rangle \equiv [-\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle]$	$X, \sigma_\Gamma$

表5.基于  $|\beta_{11}\rangle$  的量子隐形传态中测量结果与酉变换操作间的关系

Alice的测量结果 $M_1 M_2$	测量后 Bob 粒子 B 的量子态	Bob需要做的酉变换
00	$ \Psi_3(00)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle]$	$Z, X$
01	$ \Psi_3(01)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle]$	$Z, \sigma_\Gamma$
10	$ \Psi_3(10)\rangle \equiv [\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle]$	$X$
11	$ \Psi_3(11)\rangle \equiv [\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle]$	$\sigma_\Gamma$

## 初态制备

$RY$ 门是一种单比特量子门，其效应为将量子比特的bloch向量绕 $y$ 轴逆时针旋转一定角度，常用于量子态的制备，其对应的矩阵如下：

$$RY(\theta) = e^{-i\theta\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

当其作用在  $|0\rangle$  态上，得到要传送的量子态  $|\psi\rangle$  为：

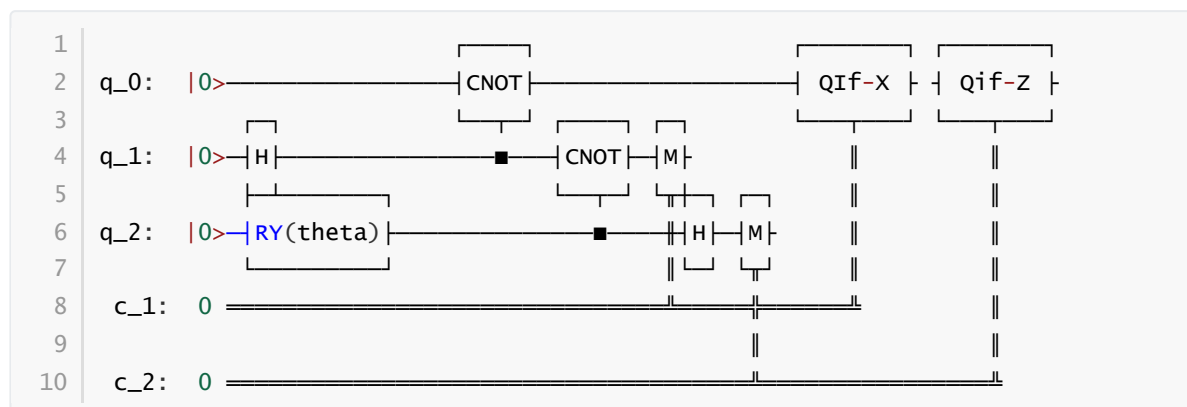
$$RY(\theta)|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

## 线路实现

量子隐形传态线路主要包含四个部分：

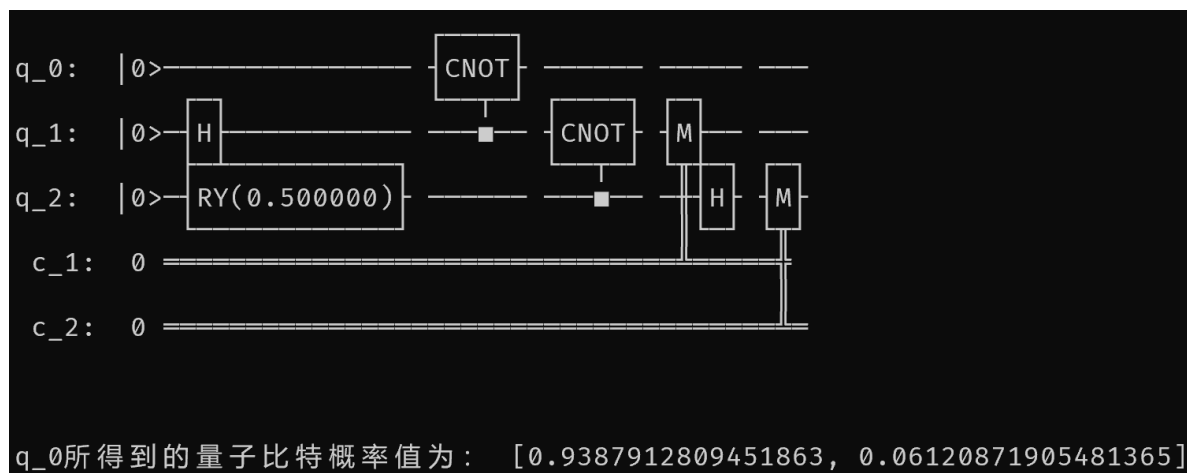
1. 贝尔态  $|\beta_{00}\rangle$  的制备
2. 建立贝尔态与信息比特的纠缠
3. 发送方测量持有的两个比特，并将获得的两比特信息通过经典信道发给接收方
4. 接收方根据经典信息对持有的比特进行酉变换

根据上述分析，量子隐形传态线路如下所示（应题目要求，此处 $q\_2$ 为 *Alice* 手中待传送的量子态， $q\_0$  和 $q\_1$ 为 *Alice* 和 *Bob* 共享的Bell态，其中 *Alice* 持有 $q\_1$ ，*Bob* 持有 $q\_0$ ）：



## 线路测试

当传入  $RY$  门旋转角度的参数  $\theta = 0.5$ ，即待传送的量子态  $|\psi\rangle = \cos(\frac{1}{4})|0\rangle + \sin(\frac{1}{4})|1\rangle$  时，有：



经验证： $\| |\psi\rangle \|^2 = [\cos(\frac{1}{4})^2, \sin(\frac{1}{4})^2] = [0.9387912809451863, 0.06120871905481365]$ ，即正确地将第三个量子比特信息赋予到了 *EPR* 对中的第一个量子比特上。

## 源码

```
1  from pyqpanda import *
2  import math
3  import numpy as np
4
5
6  def question1(input: str) -> list:
7      qvm = CPUQVM()
8      qvm.init_qvm()
9      qubits = qvm.qAlloc_many(2)
10     prog = QProg()
11
12     # 解析输入字符串，构造量子初态
13     if input[0] == '1':
14         prog << X(qubits[1])
15     if input[1] == '1':
16         prog << X(qubits[0])
17
18     # 搭建量子线路
19     prog << H(qubits[1]) << CNOT(qubits[1], qubits[0])
20
21     # 测量并获取最终量子态
22     qvm.prob_run_dict(prog, qubits, -1)
23     stat = qvm.get_qstate()
24     qvm.finalize()
25     return stat
26
27 def question2(theta: float) -> list:
28     qvm = CPUQVM()
29     qvm.init_qvm()
30     qubits = qvm.qAlloc_many(3)
31     cbits = qvm.cAlloc_many(3)
32     prog = QProg()
33
34     # Alice:
35     # 制备待传送的量子态
36     prog << RY(qubits[2], theta) \
37     # 贝尔态 beta_00 的制备
38     << H(qubits[1]) << CNOT(qubits[1], qubits[0]) \
39     # 建立贝尔态与信息比特的纠缠
40     << CNOT(qubits[2], qubits[1]) << H(qubits[2]) \
41     # 发送方测量持有的两个比特
42     << measure_all(qubits[1:3], cbits[1:3])
43
44     # Bob:
45     # 接收方根据经典信息对持有的比特进行酉变换
46     prog << create_if_prog(cbits[1], X(qubits[0])) \
47     << create_if_prog(cbits[2], Z(qubits[0]))
48
49     # 测量并返回量子态的概率值
50     result = qvm.prob_run_list(prog, qubits[0], -1)
51     qvm.finalize()
52     return result
```

```
51
52 if __name__ == "__main__":
53     # question1("00")
54     # question1("01")
55     # question1("10")
56     # question1("11")
57     prob = question2(0.5)
58     print(prob)
```

## 参考文献

---

张国帅,许道云.量子隐形传态的通用线路.软件学报,2019,30(12):3579–3589.