

Modifikácia skreslení v kužel'ovom kartografickom zobrazení Slovenska pomocou Laplaceovej rovnice riešenej Metódou konečných prvkov

Andrea Ábrahámová, Margita Vajsáblová, Marek Macák

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta STU v Bratislave

Obsah príspevku

➤ Postup riešenia optimalizácie skreslení v konformnom kartografickom zobrazení:

- Formulácia Airyho-Kavrajského variačného kritéria
- Riešenie Laplaceovej rovnice
- Použitie Metódy konečných prvkov (MKP)

➤ Modifikované kartografické zobrazenia na území Slovenskej republiky:

- Lambertovo konformné zobrazenie SR (LCC_SR)
- Konformné kužeľové zobrazenie SR v normálnej polohe s minimalizáciou Strednej kvadratickej hodnoty (RMS) dĺžkového skreslenia
- Konformné kužeľové zobrazenie SR vo všeobecnej polohe
- Konformné kužeľové zobrazenie SR vo všeobecnej polohe s minimalizáciou Strednej kvadratickej hodnoty (RMS) dĺžkového skreslenia

Variačné kritérium na hodnotenie kartografických zobrazení

- V príspevku pracujeme s **konformnými kartografickými zobrazzeniami**.
- **Označenie sférických a elipsoidických súradníc**: šírka U a φ , dĺžka V a λ , izometrická šírka Q a q .
- **Modul dĺžkového skreslenia m** : pomer dĺžkového elementu dS v rovine zobrazenia k prislúchajúcemu elementu dĺžky ds na referenčnej ploche:

$$m = \frac{dS}{ds}$$

- **Airyho-Kavrajského variačné súčtové kritérium** hodnotí skreslenie na celej zobrazovanej ploche v konformnom zobrazení, a to pre n bodov vhodne rozmiestnených na území:

$$I^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - 1)^2, \quad \text{príp.} \quad I^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln^2 m_i.$$

Metóda konečných prvkov v matematickej kartografii

- Minimalizácia hodnoty Airyho-Kavrajského kritéria vedie k riešeniu Laplaceovej parciálnej diferenciálnej rovnice pre konformné zobrazenie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u, \text{ kde } \Delta u = 0 \text{ na doméne } \Omega,$$

kde u je funkcia modulu m dĺžkového skreslenia.

- **Na riešenie Laplaceovej rovnice sme aplikovali Metódu konečných prvkov (MKP):**
 1. Aproximácia domény Ω delením na nepravidelnú trojuholníkovú sieť, na základe toho dochádza k diskretizácii domény na množinu elementov Ω^E , $E = 1, \dots, N$.

Metóda konečných prvkov v matematickej kartografii

2. Prevod pôvodnej diferenciálnej formy („silná forma“) Laplaceovej rovnice na integrálnu formu („slabá forma“), a to vynásobením váhovou funkciou w :

$$(\Delta u)w = 0w,$$

integrujeme cez prvky Ω^E a dostaneme:

$$\int_{\Omega^E} (\Delta u)w \, d\Omega = \int_{\partial\Omega^E} 0 \, dw.$$

Použitím Greenovej formuly dostaneme:

$$\int_{\Omega^E} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega^E} w \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS = 0,$$

kde n_x a n_y sú komponenty jednotkového normálového vektora na hranici domény Ω^E .

Metóda konečných prvkov v matematickej kartografii

3. Konštrukcia aproximačných funkcií ψ_j^E na elementoch Ω^E v tvare úplného polynómu, pričom toto približné riešenie je diferencovateľné s nenulovými deriváciami v slabej formulácii.

Následne približné riešenie upravíme do tvaru lineárnej kombinácie funkcií, potom tzv. Galerkinov rozklad a má tvar:

$$u^E(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j^E \psi_j^E(x, y)$$

Po dosadení do Greenovej formuly dostaneme systém lineárnych rovníc zapísaných v maticovom tvare:

$$\mathbf{K}_{(nxn)}^E \mathbf{u}_{(nx1)}^E = \mathbf{f}_{(nx1)}^E,$$

kde:

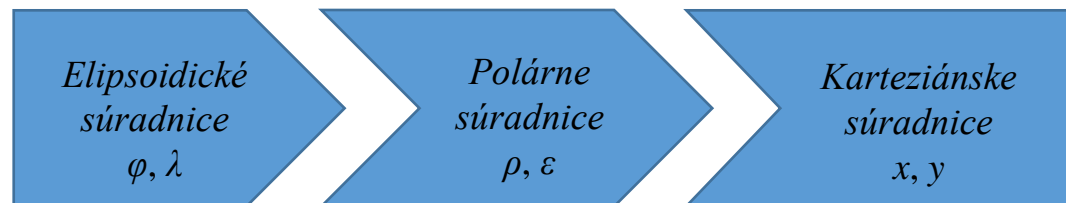
$$\mathbf{f}^E = f_j^E + Q_j^E.$$

\mathbf{K}^E sa nazýva matica tuhosti prvku, \mathbf{u}^E je vektor neznámych veličín, \mathbf{f}^E je pravá strana maticovej formy a Q_j^E je prúdenie cez hranicu prvku.

4. Posledným krokom algoritmu MKP je zostavenie a následné riešenie globálneho systému algebraických rovníc.

Lambertovo konformné kuželové zobrazenie Slovenskej republiky

- Návrh vytvorený na požiadanie Úradu geodézie kartografie a katastra SR v roku 2010 (autorka Vajsáblová).
- Lambertovo konformné kuželové zobrazenie v normálnej polohe s dvomi neskreslenými rovnobežkami a použitým elipsoidom GRS 80.
- Parametre vypočítané z podmienky na rovnakú absolútnu hodnotu dĺžkového skreslenia na severnej, južnej a základnej rovnobežke
- Postup transformácie:

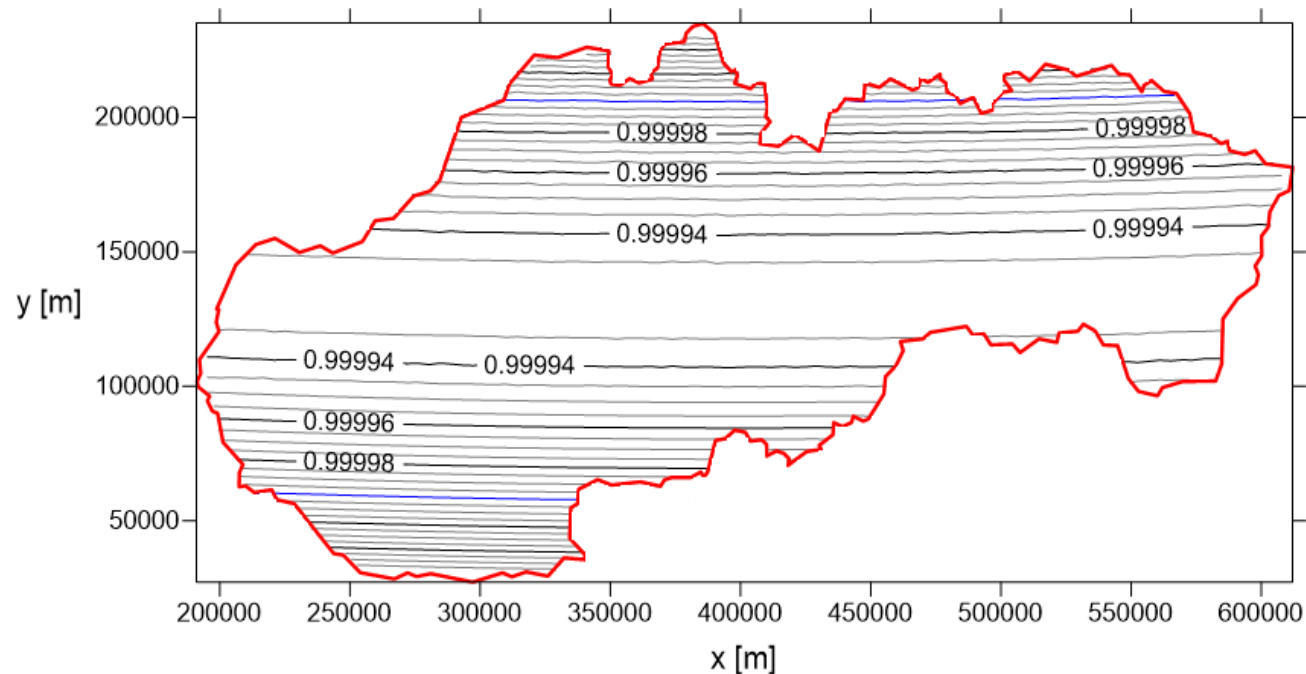


Neskreslené rovnobežky s elipsoidickými šírkami:

$$\varphi_1 = 48^\circ 0' 30'' \text{ a } \varphi_2 = 49^\circ 20' 30''$$

Parametre Lambertovho zobrazenia SR	
Elipsoidická dĺžka základného poludníka	$\lambda_0 = 19^\circ 40'$
Elipsoidická šírka základnej rovnobežky	$\varphi_0 = 48^\circ 40' 30''$
Multiplikatívna konštanta	$n = 0,750\,993\,227\,4123$
Polárny polomer základnej rovnobežky	$\rho_0 = 5\,618\,372,3190 \text{ m}$

Lambertovo konformné kuželové zobrazenie Slovenskej republiky



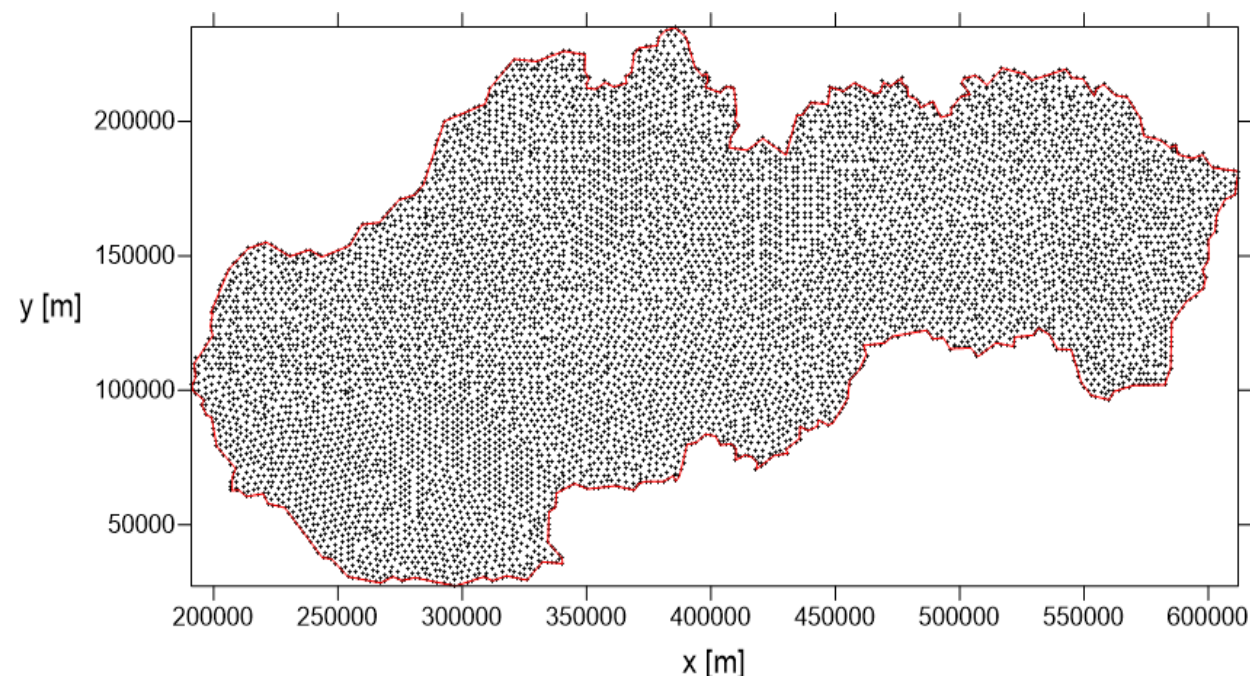
Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre Lambertovo konformné kuželové zobrazenie SR

- Zobrazenie hraníc Slovenska a modulov m dĺžkového skreslenia v karteziánskych súradniciach x a y v Lambertovom konformnom kuželovom zobrazení v normálnej polohe

Min dĺžkového skreslenia	Max dĺžkového skreslenia	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 6,7 cm/km	+ 6,7 cm/km	5,03 cm/km

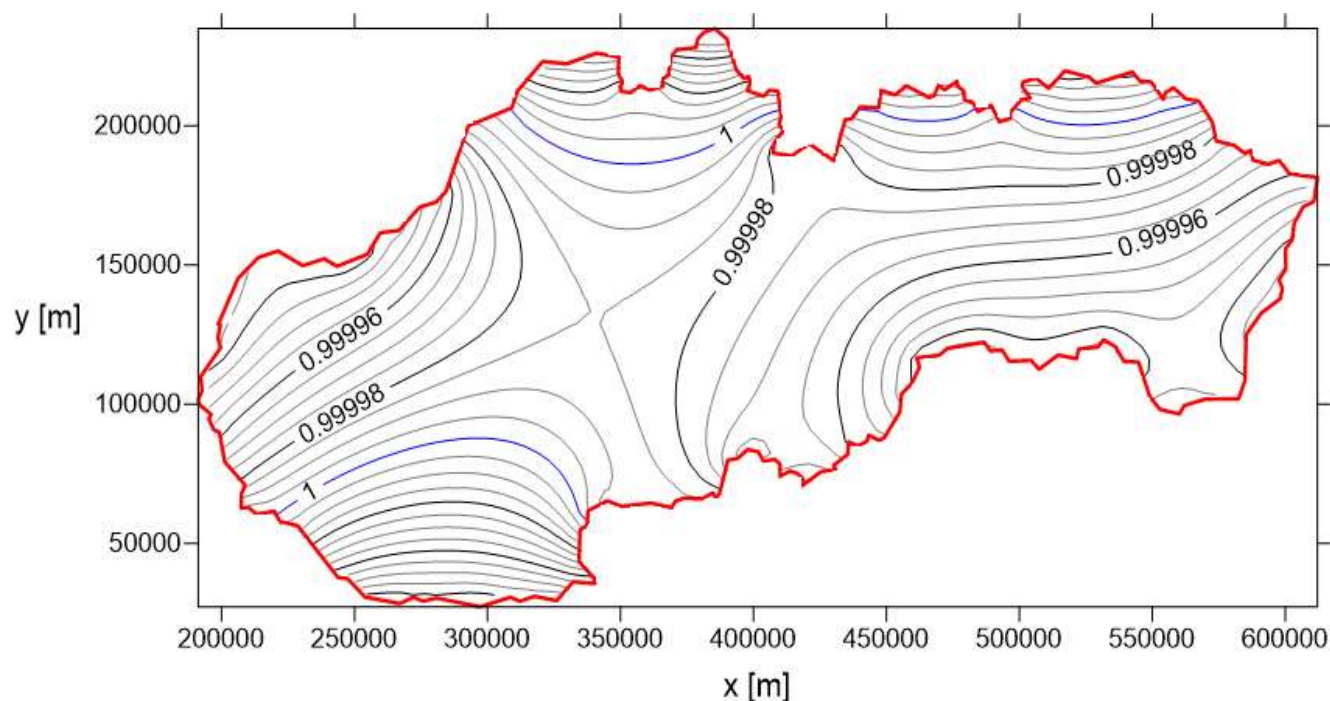
Modifikácia Lambertovho konformného kužeľového zobrazenia Slovenskej republiky riešením Laplaceovej rovnice použitím Metódy konečných prvkov

- **Okrajová podmienka** – hodnoty modulov m dĺžkového skreslenia na hranici Slovenska danej karteziánskymi súradnicami x a y v Lambertovom konformnom kužeľovom zobrazení SR.
- Z uvedených známych hodnôt na hranici sú metódou MKP určené hodnoty funkcie u a moduly m dĺžkového skreslenia v uzlových bodoch domény.
- Výpočty v softvérovom prostredí ANSYS 2019 R3.



Diskretizácia domény Ω v Lambertovom konformnom kužeľovom zobrazení

Modifikácia Lambertovho konformného kužeľového zobrazenia Slovenskej republiky riešením Laplaceovej rovnice použitím Metódy konečných prvkov



Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre modifikáciu Lambertovho konformného kužeľového zobrazenia SR riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

- Numerické riešenie je vektor, ktorý pozostáva z hodnôt funkcie u v bodoch s karteziánskymi súradnicami x a y .
- Výpočet dĺžkového skreslenia v cm/km.

Min dĺžkové skreslenia	Max dĺžkové skreslenia	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 6,7 cm/km	+ 6,8 cm/km	3,24 cm/km

Konformné kužeľové zobrazenie v normálnej polohe s minimalizáciou Strednej kvadratickej hodnoty (RMS) dĺžkového skreslenia na území SR

- Využitím Airy-Kavrajského kritéria minimalizujúceho RMS na území sú vypočítané parametre n a k konformného kužeľového zobrazenia, čím sa optimalizuje distribúcia skreslenia na ploche SR (Vajsáblová, 2015).
- Konformné kužeľové zobrazenie v normálnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia má dve neskreslené rovnobežky a použitý je elipsoid GRS 80.
- Postup transformácie:

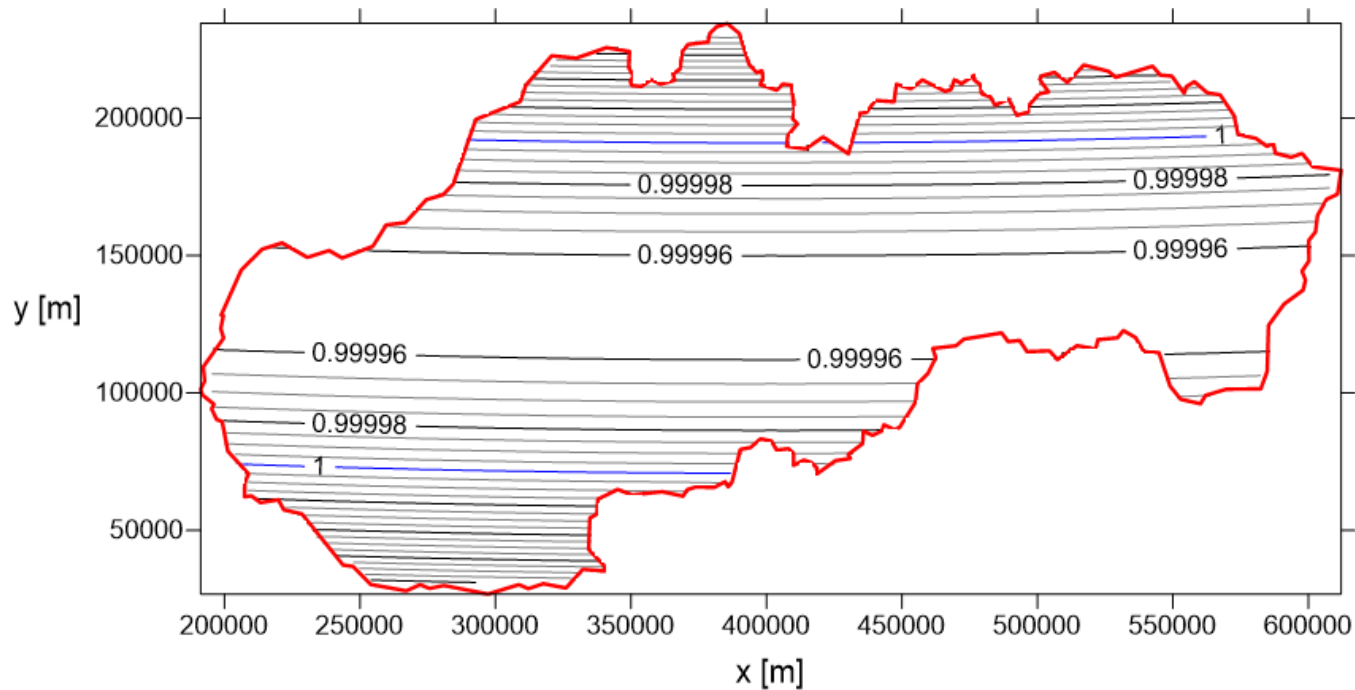


Neskreslené rovnobežky s elipsoidickými šírkami:

$$\varphi_1 = 48^\circ 07' 45,6717'' \text{ a } \varphi_2 = 49^\circ 12' 54,3553''$$

Parametre Lambertovho zobrazenie SR	
Počet rovnobežkových pásov	20
Multiplikatívna konštanta	$n = 0,750\,955\,513\,8$
Konštanta združujúca ρ_0 a U_0	$k = 11\,642\,467,97\text{ m}$

Konformné kuželové zobrazenie v normálnej polohe s minimalizáciou Strednej kvadratickej hodnoty (RMS) dĺžkového skreslenia na území SR

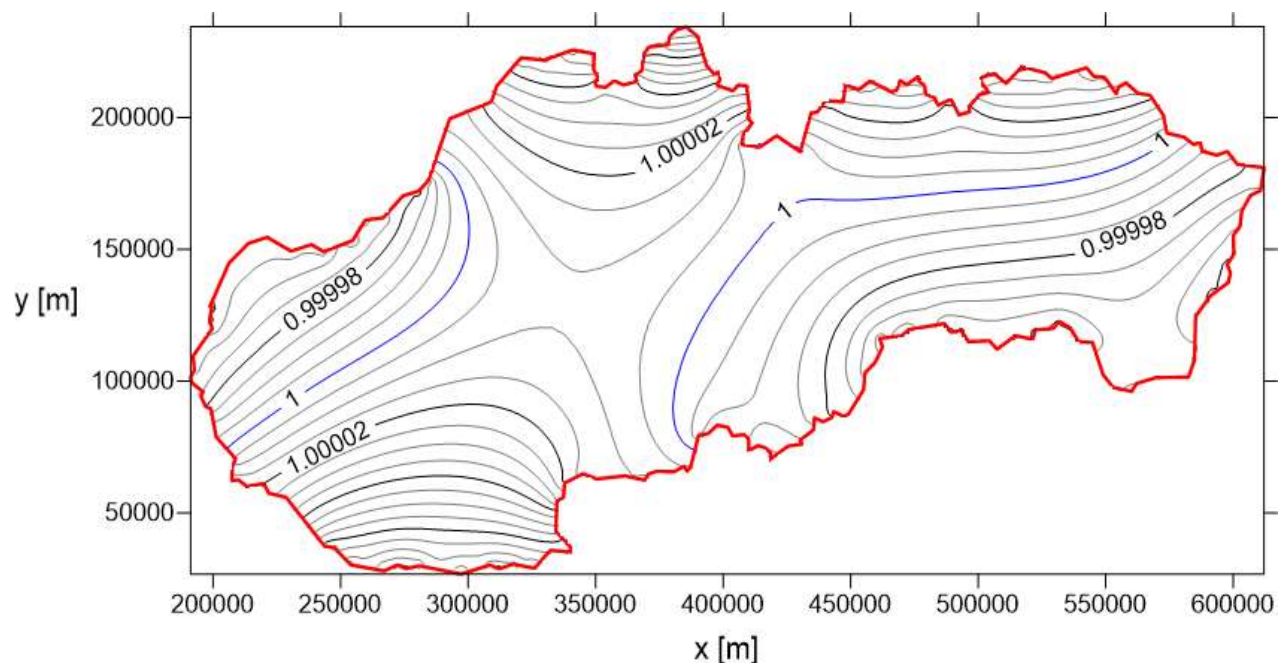


Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre konformné kuželové zobrazenie v normálnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR

- Zobrazenie hraníc Slovenska a modulov m dĺžkového skreslenia v karteziánskych súradniciach x a y v konformnom kuželovom zobrazení v normálnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR.

Min dĺžkové skreslenia	Max dĺžkové skreslenia	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 4,4 cm/km	+ 9,0 cm/km	3,4 cm/km

Modifikácia konformného kuželového zobrazenia s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR v normálnej polohe riešením Laplaceovej rovnice použitím Metódy konečných prvkov



Min dĺžkové skreslenia	Max dĺžkové skreslenia	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 4,4 cm/km	+ 9,0 cm/km	2,4 cm/km

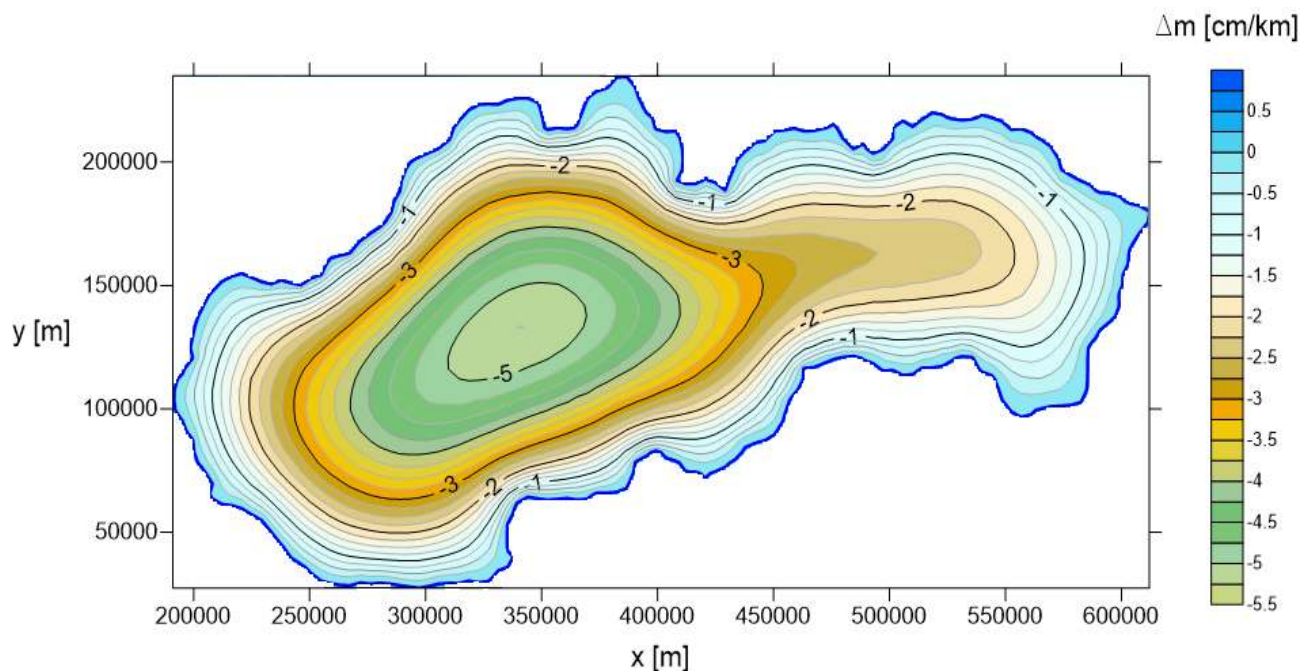
Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre konformné kuželové zobrazenie v normálnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

Porovnanie konformných kužeľových zobrazení v normálnej polohe a ich modifikácií pomocou MKP

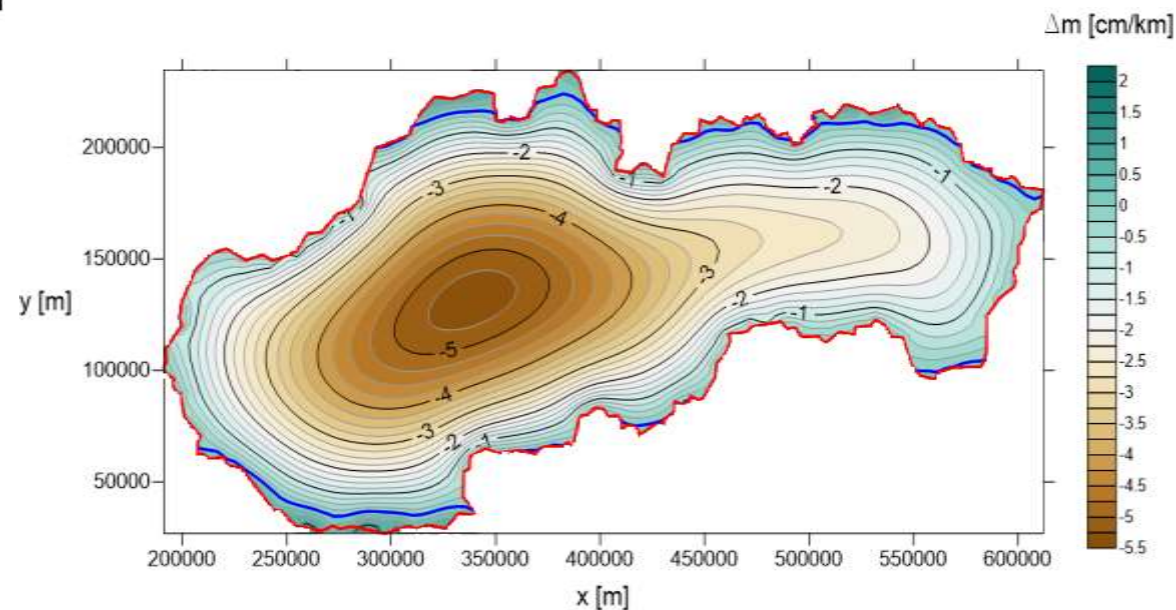
Kartografické zobrazenie	Hodnoty dĺžkového skreslenia		Airyho-Kavrajského variačné kritérium
	Od [cm/km]	Do [cm/km]	
Lambertovo konformné kužeľové zobrazenie	-6,7	6,7	5,0 cm/km
Modifikácia Lambertovho konformného kužeľového zobrazenia pomocou MKP	-6,7	6,8	3,2 cm/km
Konformné kužeľové zobrazenie s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR	-4,4	9,0	3,4 cm/km
Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR pomocou MKP	-4,4	9,0	2,4 cm/km

- Extrémne hodnoty dĺžkových skreslení sú v pôvodných zobrazeniach a ich modifikácii približne rovnaké.
- Podľa Airy-Kavrajského variačného kritéria je v modifikovaných zobrazeniach efektívnejšia distribúcia hodnôt dĺžkového skreslenia na území SR.
- Lambertovo konformné kužeľové zobrazenie s parametrami pre SR má najmenšie extrémne dĺžkové skreslenie.
- Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR pomocou MKP má výrazne najlepšiu distribúciu dĺžkového skreslenia.

Grafické vyjadrenie rozdielov dĺžkových skreslení medzi pôvodnými kužeľovými zobrazeniami v normálnej polohe a ich modifikáciou pomocou MKP



Rozdiely dĺžkových skreslení Lambertovho zobrazenia SR a jeho modifikáciou riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP



Rozdiely dĺžkových skreslení konformného kužeľového zobrazenia s minimalizáciou RMS na území SR a jeho modifikáciou riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

Konformné kuželové zobrazenie Slovenskej republiky vo všeobecnej polohe

- Návrh publikovaný vo (Vajsáblova, 2015).
- Konformné kuželové zobrazenie vo všeobecnej polohe s použitým elipsoidom GRS 80 s kartografickým pólom:

$$U_K = -5^\circ 53' 41,1964'' \text{ a } V_K = 32^\circ 08' 18,5219''$$

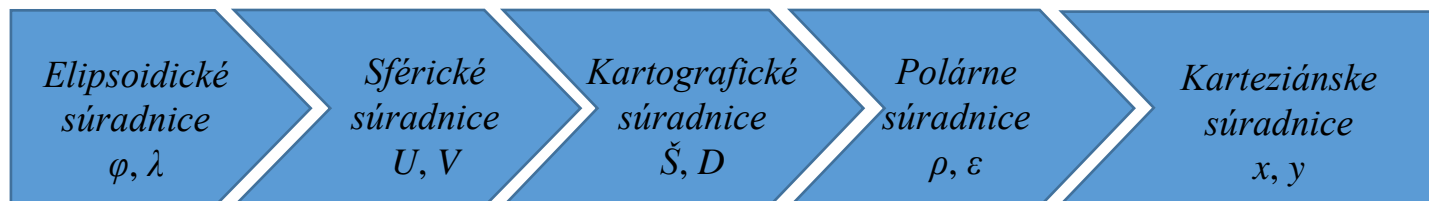
- Dve neskreslené kartografické rovnobežky a parametre vypočítané z podmienky na rovnakú absolútnu hodnotu dĺžkového skreslenia na severnej, južnej a základnej rovnobežke.
- Postup transformácie:

Neskreslené rovnobežky s kartografickými šírkami:

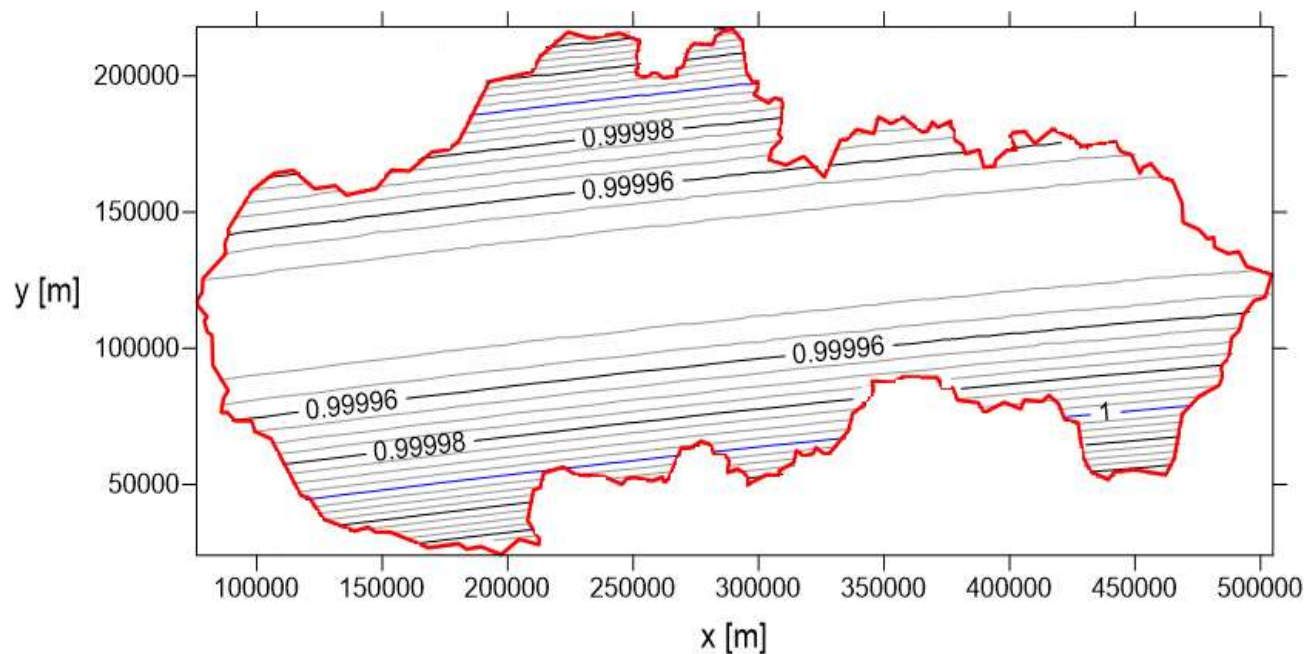
$$\check{S}_1 = 33^\circ 38' 35,54602'' \text{ a } \check{S}_2 = 34^\circ 50' 17,42458''$$

Parametre konformného kuželového zobrazenia SR vo všeobecnej polohe

Elipsoidická šírka základnej rovnobežky	$\check{S}_0 = 34^\circ 14' 29,02992''$
Multiplikatívna konštanta	$n = 0,562\,680\,811\,220\,5$
Polárny polomer základnej rovnobežky	$\rho_0 = 5\,618\,372,3190 \text{ m}$



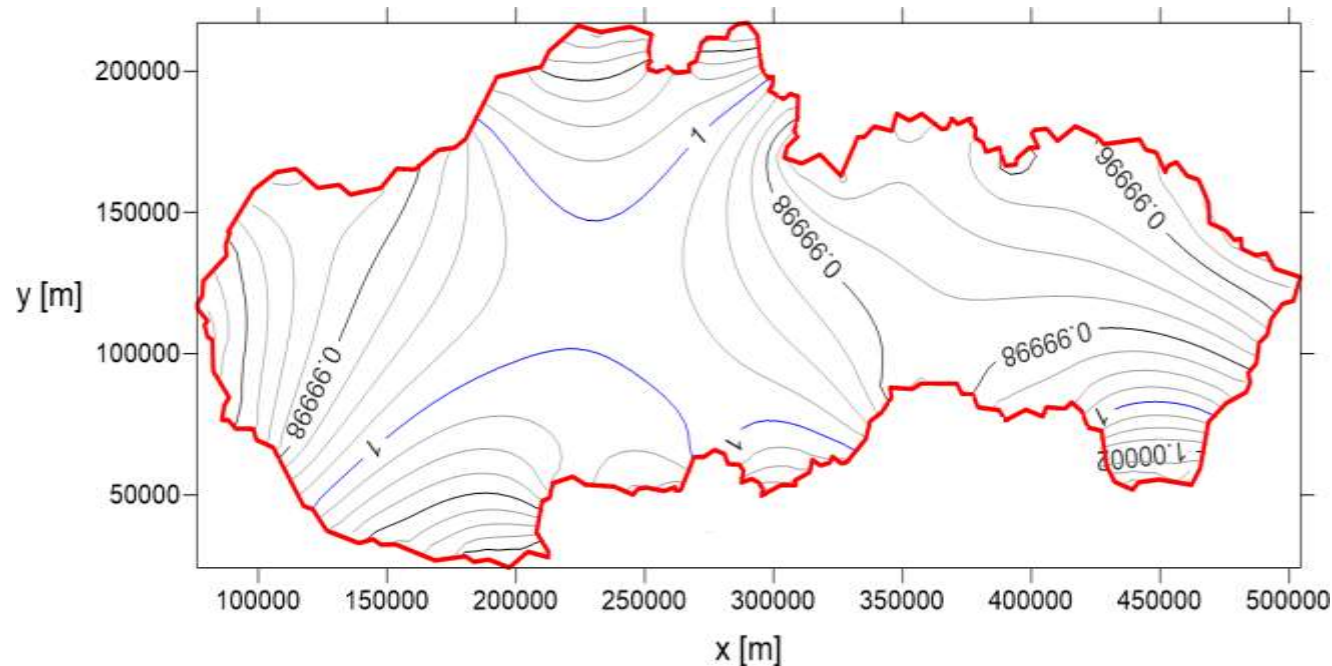
Konformné kuželové zobrazenie Slovenskej republiky vo všeobecnej polohe



Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre konformné kuželové zobrazenie vo všeobecnej polohe na území SR

Min dĺžkové skreslenie	Max dĺžkové skreslenie	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 5,4 cm/km	+ 5,4 cm/km	4,0 cm/km

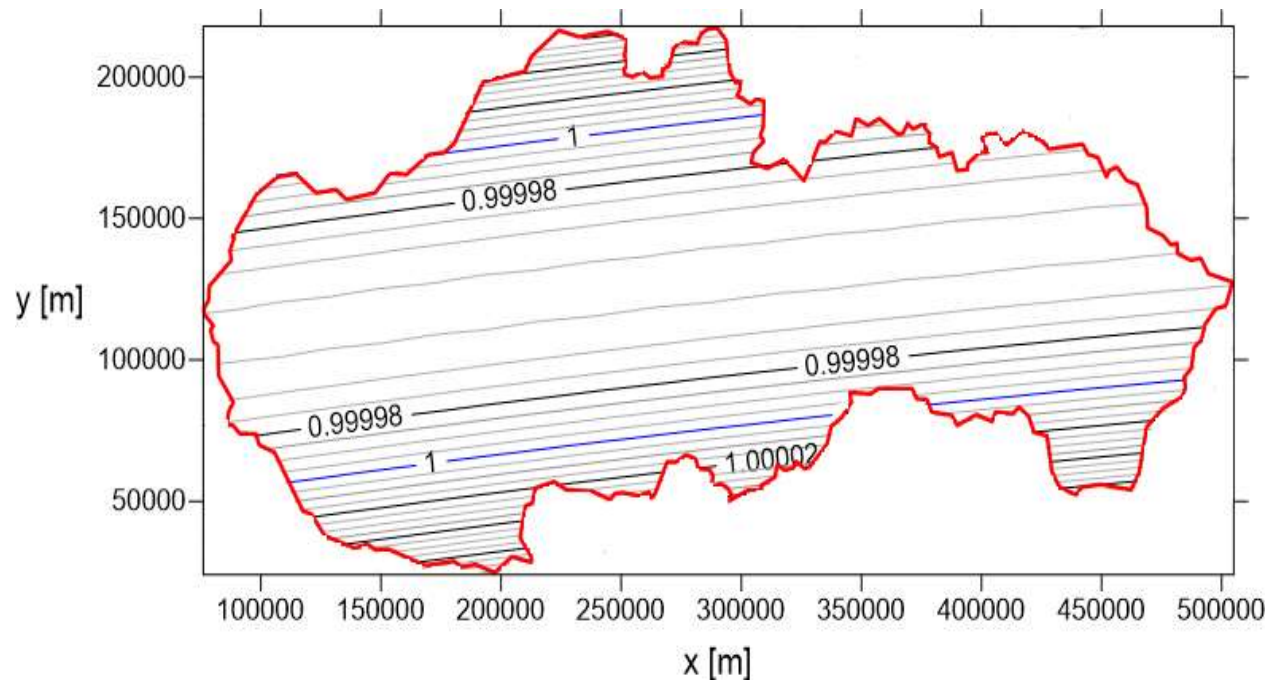
Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia Slovenskej republiky vo všeobecnej polohe riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP



Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre modifikáciu konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

Min dĺžkové skreslenie	Max dĺžkové skreslenie	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 5,4 cm/km	+ 5,8 cm/km	2,1 cm/km

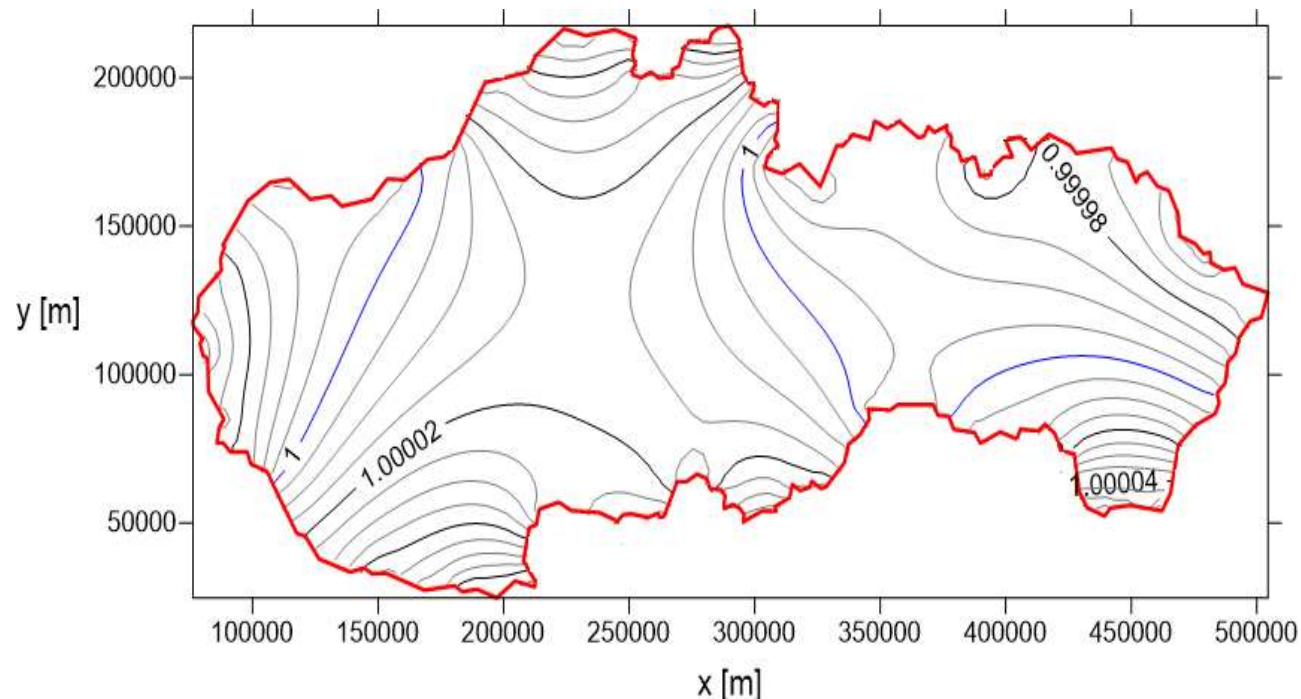
Konformné kuželové zobrazenie vo všeobecnej polohe s minimalizáciou Strednej kvadratickej hodnoty (RMS) dĺžkového skreslenia na území SR



Min dĺžkové skreslenie	Max dĺžkové skreslenie	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 3,6 cm/km	+ 7,6 cm/km	2,7 cm/km

Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre konformné kuželové zobrazenie vo všeobecnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR

Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR vo všeobecnej polohe riešením Laplaceovej rovnice použitím Metódy konečných prvkov



Min dĺžkové skreslenie	Max dĺžkové skreslenie	Airyho-Kavrajského variačné kritérium
- 4,0 cm/km	+ 8,0 cm/km	1,9 cm/km

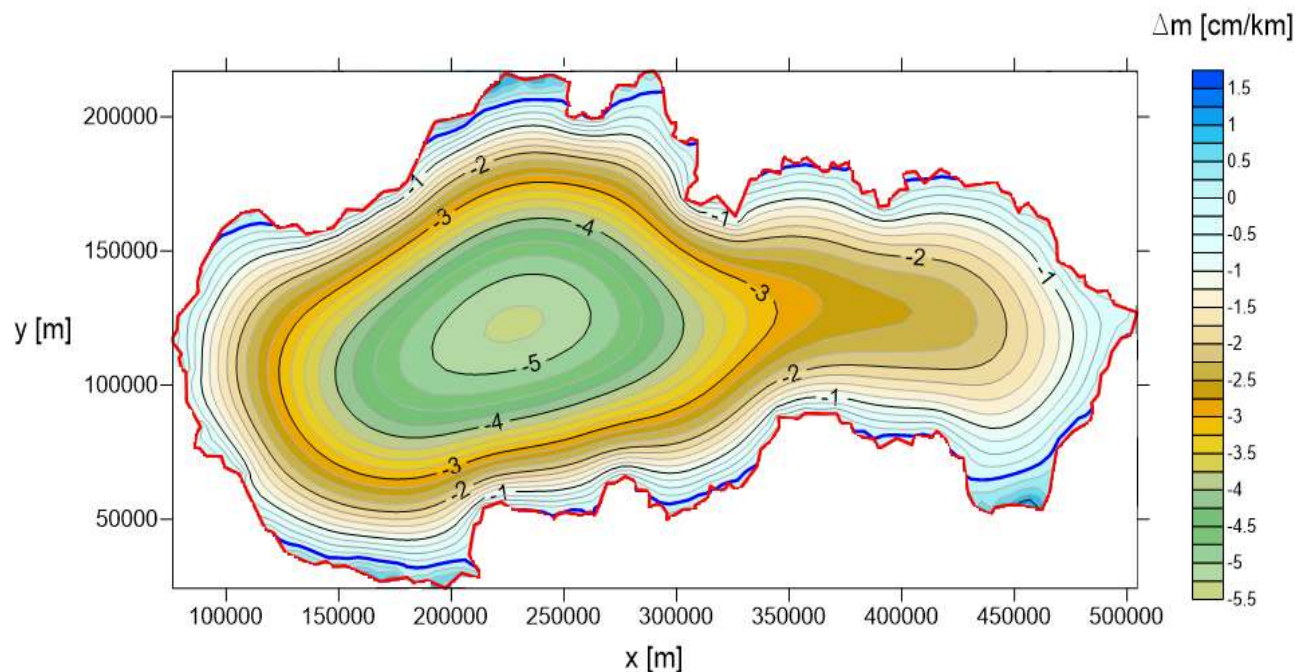
Izometrické čiary modulov m dĺžkového skreslenia pre modifikáciu konformného kužeľového zobrazenia s minimalizáciou RMS na území SR vo všeobecnej polohe riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

Porovnanie konformných kužeľových zobrazení vo všeobecnej polohe a ich modifikácií pomocou MKP

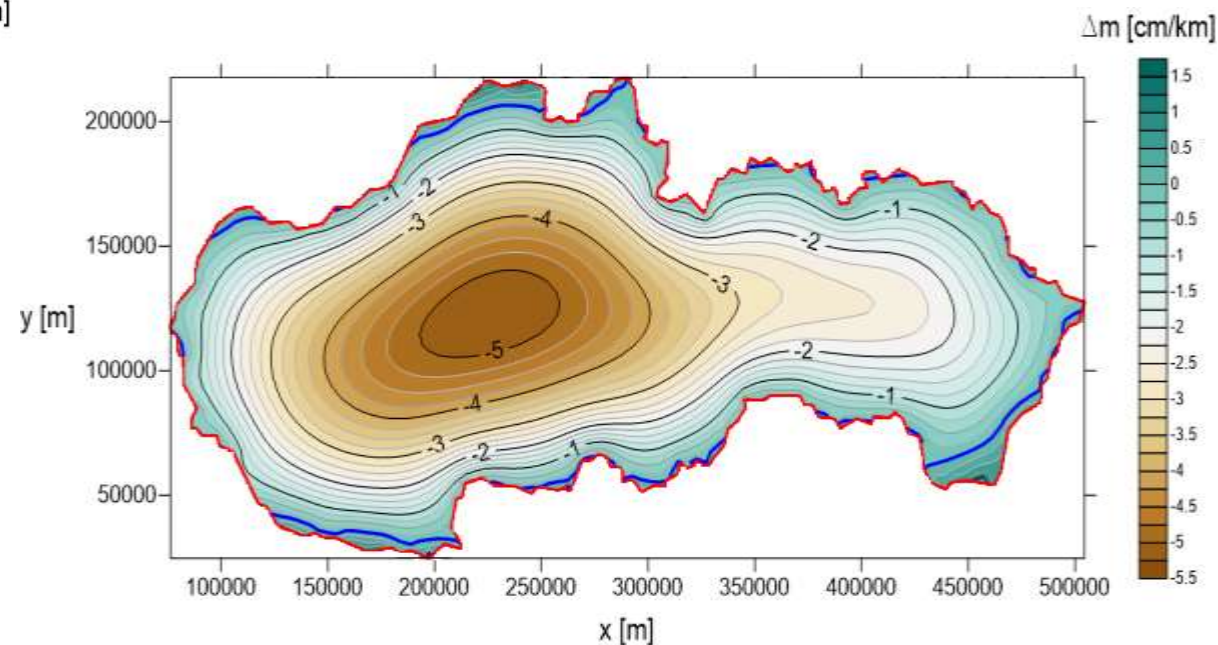
Kartografické zobrazenie	Hodnoty dĺžkového skreslenia		Airyho-Kavrajského variačné kritérium
	Od [cm/km]	Do [cm/km]	
Konformné kužeľové zobrazenie vo všeobecnej polohe	-5,4	5,4	4,0 cm/km
Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe pomocou MKP	-5,4	5,8	2,1 cm/km
Konformné kužeľové zobrazenie s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR vo všeobecnej polohe	-3,6	7,6	2,7 cm/km
Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území SR pomocou MKP	-4,0	8,0	1,9 cm/km

- Extrémne hodnoty dĺžkových skreslení sú najefektívnejšie v konformnom kužeľovom zobrazení vo všeobecnej polohe ($\pm 5,4$ cm/km).
- Podľa hodnoty Airy-Kavrajského variačného kritéria 1,9 cm/km je v **konformnom kužeľovom zobrazení s minimalizovanou RMS na území SR modifikovanom pomocou MKP** najefektívnejšia distribúcia hodnôt dĺžkového skreslenia na území SR.
- Všetky prezentované modifikácie zobrazení riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP majú lepšiu distribúciu skreslení na území SR, teda menšie skreslenie je na podstatne väčšom území ako v pôvodnom zobrazení.

Grafické vyjadrenie rozdielov dĺžkových skreslení medzi pôvodnými kužeľovými zobrazeniami vo všeobecnej polohe a ich modifikáciou pomocou MKP



Rozdiely dĺžkových skreslení konformného kužeľového zobrazenia SR vo všeobecnej polohe a jeho modifikáciou riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP



Rozdiely dĺžkových skreslení konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe s minimalizáciou RMS na území SR a jeho modifikáciou riešením Laplaceovej rovnice pomocou MKP

Závery

- Uvedené výpočty ukázali pozitívny efekt použitia riešenia Laplaceovej rovnice Metódou konečných prvkov na optimalizáciu skreslenia na zobrazovanom území SR.
- Konformné kužeľové zobrazenie vo všeobecnej polohe navrhnuté vo (Vajsáblova, 2015) sa ukázalo ako najefektívnejšie pre územie Slovenska.
- Modifikácia konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe s minimalizáciou RMS dĺžkového skreslenia na území Slovenska má najefektívnejšiu distribúciu skreslenia na zobrazenom území.
- Avšak z hľadiska počtu krokov transformácie a priameho zobrazenia referenčného elipsoidu GRS 80 bez použitia sféry sú výhodné v praxi kužeľové zobrazenia v normálnej polohe.
- Prezentované kartografické zobrazenia nadštandardne spĺňajú požiadavky Úradu geodézie, kartografie a katastra SR a sú podstatne efektívnejšie ako Křovákovo zobrazenie záväzne používané v rezorte.

ĎAKUJEME ZA POZORNOST