

# 1 Funktionen zum Testen

Sei  $F(x, y) := a \cdot \sin(c(\sin(x) - y))$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x, y) = 0 &\iff \sin(c(\sin(x) - y)) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : c(\sin(x) - y) = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \sin(x) - y = \frac{k}{c}\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{k}{c}\pi \end{aligned}$$

Also ist die Nullstellenmenge Kopien des Graphen von  $\sin(x)$  im Abstand von  $\frac{k}{c}\pi$  an der  $y$ -Achse.

Außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -c \cdot a \cdot \cos(c(\sin(x) - y))$$

und analog

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = c \cdot a \cdot \cos(c(\sin(x) - y)) \cos(x)$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi \vee y = \frac{2k+1}{2}\pi$$

---

Also sind die Voraussetzungen an die Ableitung leider nicht immer erfüllt

sei  $f(x)=\sin(x)-\sin(y)$  mit startwert 0 und schrittweite  $\pi/100$ . dann bleibt der algothmus beim 50. schritt stecken (anscheinend endlosschleife) und gibt auch keinen fehler aus. dort ist  $F_y=0$  und  $F_x=0$ . es scheint irgendwo eine sicherheitsabfrage zu fehlen, ich weiß noch nicht wo.

nimmt man eine schrittweite, die dafür sorgt, dass man  $\pi/2$  nie genau trifft läuft der algothmus durch liefert dort aber sinnlose ergebnisse. in wirklichkeit befinden sich dort 2 im rechten winkel schneidende geraden.

für  $x^2 + y^2 - 1$  funktioniert der algorithmus nicht, auch auf bereichen wo keine der beiden ableitungen verschwindet

## 2 Krümmung

**Satz:** Sei  $f \in C^2((a, b))$  und  $x \in (a, b)$ . Dann ist

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

**Beweis:** Es gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Da nach Voraussetzung alle diese Funktionsgrenzwerte existieren, ergibt Einsetzen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten Ableitung ist  $\lim_{h \rightarrow 0} f''(x-h) = f''(x)$ , womit die Aussage aus der obigen Gleichheit folgt. ■