1 Funktionen zum Testen

Sei $F(x,y) := a \cdot \sin\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 &\iff \sin\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : c\big(\sin(x) - y\big) = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \sin(x) - y = \frac{k}{c}\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{k}{c}\pi \end{aligned}$$

Also ist die Nullstellenmenge Kopien des Graphen von $\sin(x)$ im Abstand von $\frac{k}{c}\pi$ an der y-Achse.

Außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -c \cdot a \cdot \cos\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)$$

und analog

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = c \cdot a \cdot \cos\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)\cos(x)$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi \;\vee\; y = \frac{2k+1}{2}\pi$$

Also sind die Vorraussetzungen an die Ableitung leider nicht immer erfüllt

---

sei f(x)=sin(x)-sin(y) mit startwert 0 und schrittweite pi/100. dann bleibt der algrothimus beim 50. schritt stecken (anscheinend endlosschleife) und gibt auch keinen fehler aus. dort ist Fy=0 und Fx=0. es scheint irgendwo eine sicherheitsabfrage zu fehlen, ich weiß noch nicht wo.

nimmt man eine schrittweite, die dafür sorgt, dass man pi/2 nie genau trifft läuft der algroithmus durch liefert dort aber sinnlose ergebnisse. in wirklichkeit befinden sich dort 2 im rechten winkel schneidende geraden.

für $x^2 + y^2 - 1$ funktioniert der algorithmus nicht, auch auf bereichen wo keine der beiden ableitungen verschwindet

2 Krümmung

Satz: Sei $f \in C^2((a,b))$ und $x \in (a,b)$. Dann ist

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Beweis: Es gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Da nach Vorraussetzung alle diese Funktionsgrenzwerte existieren, ergibt Einsetzen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten Ableitung ist $\lim_{h \to 0} f''(x-h) = f''(x)$, womit die Aussage aus der obigen Gleichheit folgt. ■