NUMERIKPROJEKT

Titel
ggf. mehrzeilig

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Name des Betreuers

durch

Markus Rinke
Matrikelnummer: 1402581
Stefan Schrott
Matrikelnummer: 1607388

Wien, am 19. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Die Grundlage für die folgenden Überlegung ist der Hauptsatz über implizite Funktionen im Spezialfall von Funktionen $F : A \times B \to \mathbb{R}$, wobei A und B der Einfachheit halber offene Intervalle seien.

Satz: Seien $a < b$ sowie $c < d \in \mathbb{R}$ und $F : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $x_0 \in (a,b)$ und $y_0 \in (c,d)$, sodass $F(x_0,y_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Dann existieren $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < a_0 < x_0 < b_0 < b$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : (a_0,b_0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = y_0$, sodass

$$\forall x \in (a_0,b_0) : F(x, f(x)) = 0$$

und

$$\forall x \in (a_0,b_0) : f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}. \tag{1}$$

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist der Hauptsatz über implizite Funktionen anwendbar und liefert Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und eine Funktion $f : U \to V$ mit den geforderten Eigenschaften. Da x_0 ein innere Punkt von U ist, enthält U ein Intervall (a_0,b_0) mit den geforderten Eigenschaften.

Die Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}$ in der Zielmenge von f kann durch ganz $\mathbb{R}$ ersetzt werden, da wir nur behauptet haben, dass $y = f(x)$ eine Lösung von $F(x, \cdot\,) = 0$ ist, allerdings nicht dass diese eindeutig ist. ■

Satz: Sei unter den Vorraussetzungen des vorherigen Satz F zwei mal stetig differenzierbar.

Dann ist $f \in C^2((a_0,b_0))$ mit $f''(x) =$

$$\frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x,f(x))\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,f(x))\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^3}.$$

Außerdem gilt:

$$\forall x \in (a_0,b_0) \exists \xi \in (x_0,x) \cup (x,x_0) : f(x) = y_0 + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

Beweis: Aus $F \in C^2$ folgt mit der Kettenregel und Einsetzen der Darstellung (1)für f':

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\right) &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x,f(x)), \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x,f(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x)) \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}. \end{aligned}$$

Für $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)$ erhält man analog eine ähnliche Darstellung. Damit kann man den Ausdruck (1) mithilfe der Quotientenregel differenzieren und erhält durch Erweitern mit $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$ obige Darstellung für f''.

Die zweite Aussage folgt aus dem Satz von Taylor und der Tatsache, dass f'' als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. ■

2 Implementierung von Aufgabe a

2.1 Tests

3 Implementierung von Aufgabe b Version 1

3.1 Tests

4 Implementierung von Aufgabe b Version 2

4.1 Tests

5 Implementierung von adaptiver Schrittweite

5.1 Tests

6 Implementierung von Niveaulinien

Die bisherigen Algorithmen finden Paare $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots N}$, sodass für $F(x_i, y_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, N$ und stellen damit die Nullstellenmenge von F (oder nur einen Teil davon) näherungsweise graphisch dar.

Im Folgenden sind $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gegeben und es sollen für $j = 1, \ldots, k$ die Teilmengen von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c_j\}$ graphisch dargestellt werden.

Grundsätzlich ist dieses Problem einfach auf die vorherigen Algorithmen zurückzuführen, indem man die Nullstellenmengen der Funktionen $F_j(x, y) := F(x, y) - c_j$ graphisch darstellt.

Bei den vorherigen Algorithmen musste ein Startwert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ übergeben werden, für den gilt $F(x_0, y_0) = 0$, also müsste in diesem Fall k Startwerte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ übergeben werden, sodass

$$F(x_j, y_j) = c_j \qquad j = 1, \ldots k.$$

Dies stellt sich in der Praxis als sehr benutzerunfreundlich heraus, da die Gleichungen $F(x_j, y_j) = c_j$ im Allgemeinen nicht einfach zu lösen sind.

Aus diesem Grund wurde ein Algorithmus implementiert, der in einem gegebenen Intervall $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ entsprechende (x_j, y_j) sucht und anschließend für $j = 1, \ldots, k$ einen der vorherigen Algorithmen mit der Funktion F_j und den Startwerten (x_j, y_j) aufruft.

Der wesentliche Schritt ist also, nach Möglichkeit Nullstellen von F_j in $[a, b] \times [c, d]$ zu finden. Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$ steht hier nicht zur Verfügung, da nur es für Funktionen $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ anwendbar ist. Wegen der Regularitätsforderung an die Jacobi-Matrix von G, ist es auch nicht möglich etwa $G(x, y) := \binom{F(x,y)}{0}$ oder $G(x, y) := \binom{F(x,y)}{F(x,y)}$ zu setzen und damit das Newton-Verfahren zu verwenden.

Es wird daher folgende Strategie verwendet, die in den unseren Tests auch immer die Nullstellen gefunden hat:

- Sei $m := \binom{m_x}{m_y} := \binom{(a+b)/2}{(c+d)/2}$. Berechne $F(m)$. Falls $F(m) = 0$ sind wir fertig, falls $F(m) < 0$ betrachte $-F$. Wir können also im folgenden annehmen $F(m) > 0$.
- Werte mithilfe geeigneter Schleifen F an verschiedenen $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ aus, bis (x, y) mit $F(x, y) \leq 0$ gefunden wird. Tritt dies nicht ein, bricht der Algorithmus an der Stelle ohne Ergebnis ab. Ist $F(x, y) = 0$ sind wir fertig. Wir können also im Folgenden annehmen, dass $F(x, y) < 0$ ist.
- Sei nun $\Psi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{m_x}{m_y} + t\binom{x-m_x}{y-m_y}$. Dann ist $G := \Psi \circ F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $G(0) > 0$ und $G(1) < 0$. Mithilfe des Bisektionsverfahrens kann man eine Nullstelle t_0 von G finden.
- Dann ist $\Psi(t_0) \in [a, b] \times [c, d]$ eine Nullstelle von F.

6.1 Tests

7 Anhang: Code-Listings

```
% Anzahl der zu berechnenten Wertepaare
% Schrittweite an der x-Achse.

assert(isZero(F(x0, y0)));

x = x0 + stepWidth * (0:steps);
y = zeros(1,steps+1);
y(1) = y0;

for i = 2:steps+1
    dy = dFy(x(i-1), y(i-1));
    dx = dFx(x(i-1), y(i-1));
    assert(dy ~= 0);
    assert(abs(dx/dy) ~= Inf);

    y(i) = y(i-1) - dx/dy * stepWidth;    %predictor
    G = @(z)F(x(i), z);
    g = @(z)dFy(x(i), z);
```

```
    y(i) = Newton(G, g, y(i));             %corrector
end

end
```

Listing 1: Ich bin ein Beispiel-Lisitng