1 Funktionen zum Testen

Sei $F(x,y) := a \cdot \sin\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 &\iff \sin\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : c\big(\sin(x) - y\big) = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \sin(x) - y = \frac{k}{c}\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{k}{c}\pi \end{aligned}$$

Also ist die Nullstellenmenge Kopien des Graphen von $\sin(x)$ im Abstand von $\frac{k}{c}\pi$ an der y-Achse.

Außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -c \cdot a \cdot \cos\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)$$

und analog

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = c \cdot a \cdot \cos\Big(c\big(\sin(x) - y\big)\Big)\cos(x)$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = \sin(x) - \frac{2k+1}{2c}\pi \;\vee\; y = \frac{2k+1}{2}\pi$$

Also sind die Vorraussetzungen an die Ableitung leider nicht immer erfüllt

---

sei f(x)=sin(x)-sin(y) mit startwert 0 und schrittweite pi/100. dann bleibt der algrothimus beim 50. schritt stecken (anscheinend endlosschleife) und gibt auch keinen fehler aus. dort ist Fy=0 und Fx=0. es scheint irgendwo eine sicherheitsabfrage zu fehlen, ich weiß noch nicht wo.

nimmt man eine schrittweite, die dafür sorgt, dass man pi/2 nie genau trifft läuft der algroithmus durch liefert dort aber sinnlose ergebnisse. in wirklichkeit befinden sich dort 2 im rechten winkel schneidende geraden.

für $x^2 + y^2 - 1$ funktioniert der algorithmus nicht, auch auf bereichen wo keine der beiden ableitungen verschwindet

2 Krümmung

Satz: Sei $f \in C^2((a,b))$ und $x \in (a,b)$. Dann ist

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Beweis: Es gilt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Da nach Vorraussetzung alle diese Funktionsgrenzwerte existieren, ergibt Einsetzen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten Ableitung ist $\lim_{h\to 0} f''(x-h) = f''(x)$, womit die Aussage aus der obigen Gleichheit folgt. ■

Daraus ergibt sich, dass bei konstanter `stepWidth` folgender Ausdruck ein sinnvolle Abschätzung für die Krümmung ist: `(y(i-2)-2*y(i-1)+y(i))/stepWidth^2`

Ist die `stepWidth` nicht konstant macht dieser offensichtlich keinen Sinn, gerade dann ist aber der Krümmungsschätzer wichtig.

Heuristisch ist $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ eine bessere Schätzung für $f'((x_1+x_2)/2)$ als etwa für $f'(x_1)$ oder $f'(x_2)$.

Betrachtet man nämlich den Ausdruck. $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}$ als Näherung von $f'((x_1+x_2)/2)$ entspricht er genau eine Auswertung des zentralen Differenzeinquotienten, der quadratische Konvergenzordnung hat, mit $h := (x_1 - x_2)/2$. Als Näherung von $f'(x_1)$ entspricht der Ausdruck hingegen der Auswertung des einsteitigen Differenzenquotienten, der lediglich lineare Konvergenzordnung hat, mit einem doppelt so großen h.

Seien nun $x_1 < x_2 < x_3$ vorgegeben und wendet man vorherige Überlegung für die Annäherung der ersten Ableitungen für $x_1, x, 2$ sowie x_2, x_3 an und schreibt das Ergebnis in einen Differenzenquotienten erhält man folgende Näherung für die Krümmung:

$$k(x_1, x_2, x_3) := \frac{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}}{\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_2+x_3}{2}} = 2\frac{(f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_3) + (f(x_2) - f(x_3))(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung kann man auch leicht zeigen, dass es ein $\xi \in (x_1, x_3)$ gibt, sodass $f''(\xi) = k(x_1, x_2, x_3)$.