



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

N U M E R I K P R O J E K T

Titel
ggf. mehrzeilig

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Name des Betreuers

durch

Markus Rinke

Matrikelnummer: 1402581

Stefan Schrott

Matrikelnummer: 1607388

Wien, am 18. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
2 Implementierung von Aufgabe a	2
2.1 Tests	2
3 Implementierung von Aufgabe b Version 1	2
3.1 Tests	2
4 Implementierung von Aufgabe b Version 2	2
4.1 Tests	2
5 Implementierung von adaptiver Schrittweite	2
5.1 Tests	2
6 Implementierung von Niveaulinien	2
6.1 Tests	2
7 Anhang: Code-Listings	2

1 Grundlagen

Die Grundlage für die folgenden Überlegung ist der Hauptsatz über implizite Funktionen im Spezialfall von Funktionen $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, wobei A und B der Einfachheit halber offene Intervalle seien.

Satz: Seien $a < b$ sowie $c < d \in \mathbb{R}$ und $F : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $x_0 \in (a, b)$ und $y_0 \in (c, d)$, sodass $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann existieren $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < a_0 < x_0 < b_0 < b$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : (a_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = y_0$, sodass

$$\forall x \in (a_0, b_0) : F(x, f(x)) = 0$$

und

$$\forall x \in (a_0, b_0) : f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \quad (1)$$

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist der Hauptsatz über implizite Funktionen anwendbar und liefert Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und eine Funktion $f : U \rightarrow V$ mit den geforderten Eigenschaften. Da x_0 ein innere Punkt von U ist, enthält U ein Intervall (a_0, b_0) mit den geforderten Eigenschaften.

Die Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}$ in der Zielmenge von f kann durch ganz \mathbb{R} ersetzt werden, da wir nur behauptet haben, dass $y = f(x)$ eine Lösung von $F(x, \cdot) = 0$ ist, allerdings nicht dass diese eindeutig ist. ■

Satz: Sei unter den Voraussetzungen des vorherigen Satz F zwei mal stetig differenzierbar.

Dann ist $f \in C^2((a_0, b_0))$ mit $f''(x) =$

$$\frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x, f(x)) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x, f(x)) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^3}.$$

Außerdem gilt:

$$\forall x \in (a_0, b_0) \exists \xi \in (x_0, x) \cup (x, x_0) : f(x) = y_0 + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Beweis: Aus $F \in C^2$ folgt mit der Kettenregel und Einsetzen der Darstellung (1) für f' :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \right) &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x, f(x)), \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x, f(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \end{aligned}$$

Für $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)$ erhält man analog eine ähnliche Darstellung. Damit kann man den Ausdruck (1) mithilfe der Quotientenregel differenzieren und erhält durch Erweitern mit $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$ obige Darstellung für f'' .

Die zweite Aussage folgt aus dem Satz von Taylor und der Tatsache, dass f'' als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. ■

2 Implementierung von Aufgabe a

2.1 Tests

3 Implementierung von Aufgabe b Version 1

3.1 Tests

4 Implementierung von Aufgabe b Version 2

4.1 Tests

5 Implementierung von adaptiver Schrittweite

5.1 Tests

6 Implementierung von Niveaulinien

6.1 Tests

7 Anhang: Code-Listings

```
1 % Anzahl der zu berechnenden Wertepaare
2 % Schrittweite an der x-Achse.
3
4 assert(isZero(F(x0, y0)));
5
6 x = x0 + stepWidth * (0:steps);
7 y = zeros(1, steps+1);
8 y(1) = y0;
9
10 for i = 2:steps+1
11     dy = dFy(x(i-1), y(i-1));
12     dx = dFx(x(i-1), y(i-1));
13     assert(dy ~= 0);
```

```
14     assert(abs(dx/dy) ~= Inf);
15
16     y(i) = y(i-1) - dx/dy * stepWidth;    %predictor
17     G = @(z)F(x(i), z);
18     g = @(z)dFy(x(i), z);
19     y(i) = Newton(G, g, y(i));            %corrector
20 end
21
22 end
```

Listing 1: Ich bin ein Beispiel-Listing