Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
**FEUP**

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

# Álgebra

2012-11-20

**1º Mini-Teste**

---

- Identifique as folhas de capa (<u>nome completo</u>), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração de 1h30m mais 15 minutos de tolerância. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular nem de microcomputadores.

## Perguntas

1. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Calcule a inversa de **A, pelo método da matriz adjunta**

2. Considere o conjunto de vectores de $\Re^3$, S={A,B,C}, onde A=(1,0,1), B=(1,0,0) e C=(0,0,-1)

a) Verifique se S é um conjunto linearmente independente ou não

b) Calcule o subespaço de S, L(S), indique a sua dimensão e obtenha uma base desse subespaço

c) Recorrendo à base de L(S), da alínea b), encontre uma base de $\Re^3$

3. Seja o sistema de equações

$$\begin{cases} x-z=1 \\ x+y+2z=2 \\ 2z=3 \end{cases}$$

a) Mostre que se trata dum sistema de Cramer

b) Resolva o sistema pelo método de Cramer

4. Sejam os vectores A, B, C, e D de $\Re^3$, tais que $D=C+A\times B, C.A\times B=2, \|A\|=3, \|B\|=1, \|C\|=2$, $\underline{A \cdot B = 1}$ o ângulo entre C e B é 30 graus, e $\|A+C\|=1$. Determine:

a) O ângulo entre C e $A\times B$

b) O ângulo entre A e D

| Cotação prevista | [5,1,3,1,1,4,2.5,2.5] valores |
|---|---|

1) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left[ \operatorname{Adj} A \right]^T$$

$$|A| = (2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (desenvolvimento laplaceano 2º a linha 3)

$$|A| = 2$$

Cofactores: $$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

etc

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2a) Para S ser linearmente independente, tem de gerar o vector nulo de forma única, ou seja:

$$a(1,0,1)+b(1,0,0)+c(0,0,-1)=(0,0,0)$$

(gerar de forma única $\Rightarrow$ $a=b=c=0$ )

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 0=0 \\ a-c=0 \end{cases}$$

logo não é linearmente independente

2b) Cálculo do subespaço

$$a(1,0,1)+b(1,0,0)+c(0,0,-1)=(x,y,z) \quad \text{(A1)}$$

"Quais são os vectores $X=(x,y,z)$ que tornam o sistema (A1) possível"?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \boxed{y=0}$$

Logo $L(S) = \{(x,0,z)\}$

ou $L(S) = \{x(1,0,0) + z(0,0,1)\}$

Base de $L(S) = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$

$\dim L(S) = 2$

c) Base $\mathbb{R}^3 = \{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$

3

3a) Este é um sistema de Cramer, porque

$$AX = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matriz da pergunta 1, que tem $|A| = 2 \neq 0$

3b) Solução pelo sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-7}{2}$$

($2^a L - 1^a L$)

5

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

4)

4.1) $\theta = \measuredangle (C, A \times B)$

$$\cos\theta = \frac{C \cdot A \times B}{\|C\| \, \|A \times B\|} \qquad \left[ \ \|C\| = 2 \ \right]$$

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = (9)(1) - (1)^2$$
$$= 8$$

Assim

$$\cos\theta = \frac{C \cdot A \times B}{2 \times \sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

logo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

4.2

$\alpha = \measuredangle (A, D)$

$\cos \alpha = \dfrac{A \cdot D}{\|A\| \; \|D\|}$ , $\|A\| = 3$

$A \cdot D = A \cdot C + A \cdot A \times B = A \cdot C$

$\|A + C\|^2 = 1 \Leftrightarrow (A + C) \cdot (A + C) = 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{A \cdot A} + 2 A \cdot C + \underbrace{C \cdot C} = 1$

$9 + 2 A \cdot C + 4 = 1$

$2 A \cdot C = -12$ $\quad \underline{A \cdot C = -6}$

Assim $\underline{A \cdot D = -6}$

⊗ Falta a $\|D\|$

$\|D\|^2 = \|C + A \times B\|^2$

$= C \cdot C + 2 C \cdot A \times B + \|A \times B\|^2$

$= 4 + 2 \times 2 + 8 = 16 \rightarrow \|D\| = 4$

7

$$\cos\alpha = \frac{A \cdot D}{\|A\| \, \|D\|} = \frac{-6}{3 \times 4} = -1/2$$

$$\alpha = -60^\circ$$