Aplicações Geométricas - $\mathbb{R}^3$

Definição de uma recta

- No espaço $\mathbb{R}^3$, a recta pode ser definida por:

  i) Um ponto e um vector direcção;

  ii) Dois pontos distintos;

  iii) Intersecção de dois planos.

Definição de um plano

- No espaço $\mathbb{R}^3$, o plano pode ser definido por:

  i) Um ponto e dois vectores geradores (linearmente independentes);

  ii) Três pontos distintos e não colineares;

  iii) Um ponto e um vector normal ao plano;

  iv) Uma recta e um ponto que não pertence à recta;

  v) Duas rectas concorrentes;

  vi) Duas rectas estritamente paralelas.

Posição relativa de dois planos

- Sejam os planos:

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \right\}$$

$$M_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q) \cdot \vec{n}_1 = 0 \right\}$$

Os planos podem ser classificados em:

a) *Paralelos*: $\vec{n} \parallel \vec{n}_1$

i) *Iguais ou coincidentes*: $M = M_1 \iff \vec{n} \parallel \vec{n}_1 \wedge Q \in M$

ii) *Estritamente paralelos*: $M \parallel M_1 \iff \vec{n} \parallel \vec{n}_1 \wedge Q \notin M$

b) *Concorrentes*: $M \cap M_1 = r \iff \vec{n} \nparallel \vec{n}_1$

i) *Oblíquos*: $\vec{n} \nparallel \vec{n}_1 \wedge \vec{n} \not\perp \vec{n}_1$

ii) *Perpendiculares*: $\vec{n} \perp \vec{n}_1$

- Resolvendo o problema relativo à intersecção $M \cap M_1$, o *sistema de equações lineares* resultante poderá ser:

a) *Impossível*: $M \cap M_1 = \varnothing \Rightarrow M \parallel M_1$

b) *Possível e Simplesmente Indeterminado*: $M \cap M_1 = r$

c) *Possível e Duplamente Indeterminado*: $M \cap M_1 = M = M_1$

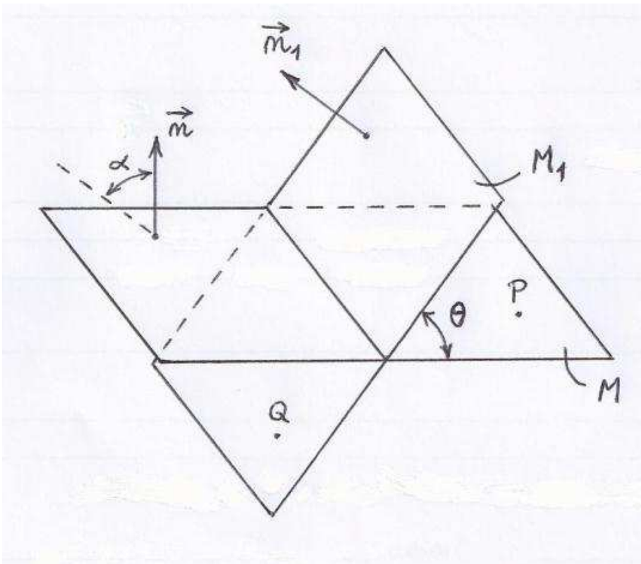
Ângulo entre dois planos

- Sejam os planos:

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X-P)\cdot\vec{n} = 0 \right\} \ \text{ e } \ M_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X-Q)\cdot\vec{n}_1 = 0 \right\}$$

Designando:

$$\theta = \measuredangle(M,M_1)\ ,\ 0 \le \theta \le \pi/2 \ \text{ e } \ \alpha = \measuredangle(\vec{n},\vec{n}_1)\ ,\ 0 \le \alpha \le \pi :$$



a) $0 \le \alpha \le \pi/2 \ \Rightarrow \ \theta = \alpha$

$$\cos\theta = \cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}_1}{\|\vec{n}\|\|\vec{n}_1\|}$$

b) $\pi/2 < \alpha \le \pi \ \Rightarrow \ \theta = \pi - \alpha$

$$\cos\theta = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}_1}{\|\vec{n}\|\|\vec{n}_1\|}$$

Concluindo:

$$\cos\theta = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{\|\vec{n}\|\|\vec{n}_1\|} \text{ , } 0 \le \theta \le \pi/2$$

- Casos particulares:

i) $\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = \pi \ \Rightarrow \ \theta = 0 \ \Rightarrow \ M = M_1 \ \vee \ M \parallel M_1$

ii) $\alpha = \pi/2 \ \Rightarrow \ \theta = \pi/2 \ \Rightarrow \ M \perp M_1$

Distância entre dois planos

- Sejam os planos:

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - P)\cdot\vec{n} = 0 \right\}$$

$$M_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q)\cdot\vec{n}_1 = 0 \right\}$$

Designando por d_{M,M_1} a distância entre os planos:

a) *Iguais ou coincidentes*: $M = M_1 \ \Rightarrow \ d_{M,M_1} = 0$

b) *Estritamente paralelos*: $M \parallel M_1 \ \Rightarrow \ d_{M,M_1} = d_{P,M_1} = d_{Q,M}$

c) *Concorrentes*: $M \cap M_1 = r \ \Rightarrow \ d_{M,M_1} = 0$

Posição relativa de uma recta em relação a um plano

- Considere a recta

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + t\vec{a} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

e o plano

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q) \cdot \vec{n} = 0 \right\}$$

A recta *r* pode ser classificada, em relação ao plano *M*, em:

a) *Paralela ao plano*: $\vec{a} \perp \vec{n}$

i) *Contida no plano*: $r \subset M \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \perp \vec{n} \ \wedge \ P \in M$

ii) *Estritamente paralela ao plano*: $r \parallel M \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \perp \vec{n} \ \wedge \ P \notin M$

b) *Secante ao plano*: $r \cap M = I \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \not\perp \vec{n}$

i) *Oblíqua ao plano*: $\vec{a} \not\perp \vec{n} \ \wedge \ \vec{a} \nparallel \vec{n}$

ii) *Perpendicular ao plano*: $\vec{a} \parallel \vec{n}$

- Resolvendo o problema relativo à intersecção $r \cap M$, o *sistema de equações lineares* resultante poderá ser:

a) *Impossível*: $r \cap M = \varnothing \ \Rightarrow \ r \parallel M$

b) *Possível e Determinado*: $r \cap M = I$

c) *Possível e Simplesmente Indeterminado*: $r \cap M = r \ \Rightarrow \ r \subset M$

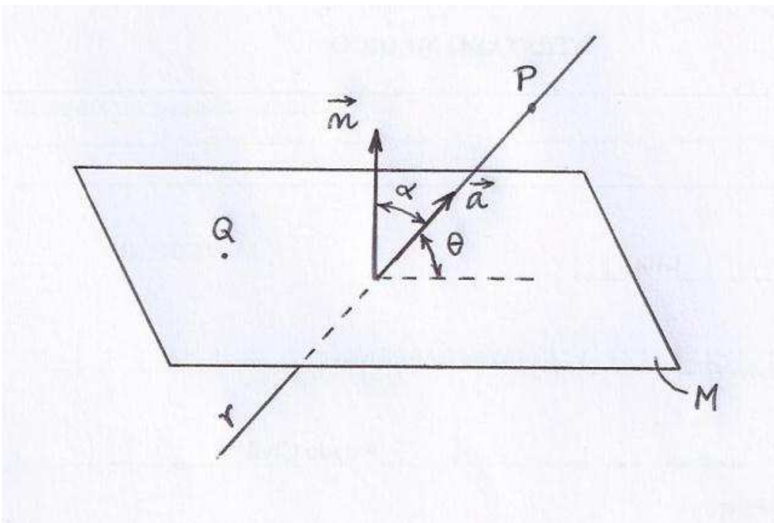
Ângulo entre uma recta e um plano

- Sejam a recta e o plano:

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + t\vec{a} \ , \ t \in \mathbb{R}\right\} \ \text{e} \ M = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q)\cdot\vec{n} = 0\right\}$$

Designando:

$$\theta = \measuredangle(r,M) \ , \ 0 \le \theta \le \pi/2 \ \ \text{e} \ \ \alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{n}) \ , \ 0 \le \alpha \le \pi :$$



a) $0 \le \alpha \le \pi/2 \ \Rightarrow \ \theta = \pi/2 - \alpha$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\|\vec{a}\|\|\vec{n}\|}$$

b) $\pi/2 < \alpha \le \pi \ \Rightarrow \ \theta = \alpha - \pi/2$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\alpha - \pi/2) = -\cos\alpha = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\|\vec{a}\|\|\vec{n}\|}$$

Concluindo:

$$\operatorname{sen}\theta = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{n}\|} \ , \ 0 \le \theta \le \pi/2$$

- Casos particulares:

i) $\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = \pi \ \Rightarrow \ \theta = \pi/2 \ \Rightarrow \ r \perp M$

ii) $\alpha = \pi/2 \ \Rightarrow \ \theta = 0 \ \Rightarrow \ r \parallel M \ \vee \ r \subset M$

Distância entre uma recta e um plano

- Considere a recta

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + t\vec{a} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

e o plano

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q)\cdot\vec{n} = 0 \right\}$$

Designando por $d_{r,M}$ a distância entre a recta e o plano:

a) *Recta contida no plano*: $r \subset M \ \Rightarrow \ d_{r,M} = 0$

b) *Recta estritamente paralela ao plano*: $r \parallel M \ \Rightarrow \ d_{r,M} = d_{P,M}$

c) *Recta secante ao plano*: $r \cap M = I \ \Rightarrow \ d_{r,M} = 0$

Exemplo 4: Considere a recta $r : X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,2,3)$ e $\vec{a} = (1,1,1)$, e os pontos $Q = (2,3,5)$ e $R = (4,1,1)$. Determine:

a) Uma *equação vectorial* para o plano, *M*, que passa no ponto *Q* e contém a recta *r*.

b) A *equação cartesiana* para o plano *M*.

c) A distância do ponto *R* ao plano *M*.

d) O ponto, R_1, do plano *M* mais próximo do ponto *R*.

Solução:

a) Equação vectorial do plano *M*:

$$X(u,v) = P + u\vec{a} + v\overrightarrow{PQ} \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x,y,z) = (1,2,3) + u(1,1,1) + v(1,1,2) \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

b) Seja o *vector perpendicular ao plano M*:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-1,0)$$

Um *vector normal ao plano M* será qualquer vector paralelo ao vector $\vec{a} \times \overrightarrow{PQ}$; seja, por exemplo,

$$\vec{n} = \vec{a} \times \overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$$

Equação cartesiana para o plano *M*:

$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0 \ \Leftrightarrow \ X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n} \ \Leftrightarrow \ x - y = -1$$

c) Distância do ponto *R* ao plano *M*:

$$d_{R,M} = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

d) A *equação vectorial* da recta, *h*, que passa no ponto *R* e é perpendicular ao plano *M* é

$$X(s) = R + s\vec{n} \ , \ s \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x,y,z) = (4,1,1) + s(1,-1,0) \ , \ s \in \mathbb{R}$$

Assim, o ponto R_1 é obtido a partir da intersecção da recta *h* com o plano *M*, isto é,

$$R_1 = h \cap M = \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -2 \\ R_1 = (2,3,1) \end{cases}$$

Exemplo 5: Considere os planos $M : x - y = -1$ e $M_1 : 2x + y + z = 1$. Sejam os pontos $Q = (0,2,1)$ e $S = (0,1,0) \in M$. Determine:

a) Uma *equação vectorial* para a recta $r = M \cap M_1$.

b) Uma *equação vectorial* para a recta *h* que passa em *Q* e é paralela aos planos *M* e M_1.

c) Uma *equação vectorial* para a recta *t* que passa em *S*, está contida em *M* e é de *máxima inclinação* em relação a M_1.

Solução:

a) Equação vectorial da recta *r*:

$$X(t) = P + t\vec{a} \ , \ t \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x,y,z) = (0,1,0) + t(1,1,-3) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

Convém notar que

$$P \in M \ \wedge \ P \in M_1 \ \wedge \ \vec{a} \parallel \vec{n} \times \vec{n}_1$$

sendo $\vec{n} = (1,-1,0)$ e $\vec{n}_1 = (2,1,1)$ os *vectores normais aos planos M* e M_1, respectivamente.

b) Equação vectorial da recta *h*:

$$X(u) = Q + t\vec{h} \ , \ u \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x,y,z) = (0,2,1) + u(1,1,-3) \ , \ u \in \mathbb{R}$$

Convém notar que

$$h \parallel M \ \wedge \ h \parallel M_1 \ \Rightarrow \ \vec{h} \parallel \vec{n} \times \vec{n}_1$$

c) Equação vectorial da recta *t*:

$$X(v) = S + v\vec{b} \ , \ v \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x,y,z) = (0,1,0) + v(3,3,2) \ , \ v \in \mathbb{R}$$

Convém notar que

$$t \subset M \ \wedge \ t \perp r \ \Rightarrow \ \vec{b} \parallel \vec{n} \times \vec{a}$$

Posição relativa entre duas rectas

- Sejam as rectas

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a} \ , \ s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_1 = L(Q;\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = Q + t\vec{b} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

As rectas podem ser classificadas em:

A) *Complanares*:

a) *Paralelas*: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

i) *Iguais ou coincidentes*: $r = r_1 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \wedge Q \in r$

ii) *Estritamente paralelas*: $r \parallel r_1 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \wedge Q \notin r$

b) *Concorrentes*: $r \cap r_1 = I \Leftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b} \wedge \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

i) *Oblíquas*: $\vec{a} \nparallel \vec{b} \wedge \vec{a} \not\perp \vec{b} \wedge \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

ii) *Perpendiculares*: $\vec{a} \perp \vec{b} \wedge \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

B) *Não Complanares* ou *enviesadas*: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$

- Resolvendo o problema relativo à intersecção $r \cap r_1$, o *sistema de equações lineares* resultante poderá ser:

a) *Impossível*: $r \cap r_1 = \emptyset \Rightarrow r \parallel M \vee r$ e r_1 são enviesadas

b) *Possível e Determinado*: $r \cap r_1 = I$

c) *Possível e Simplesmente Indeterminado*: $r \cap r_1 = r = r_1$

Ângulo entre duas rectas

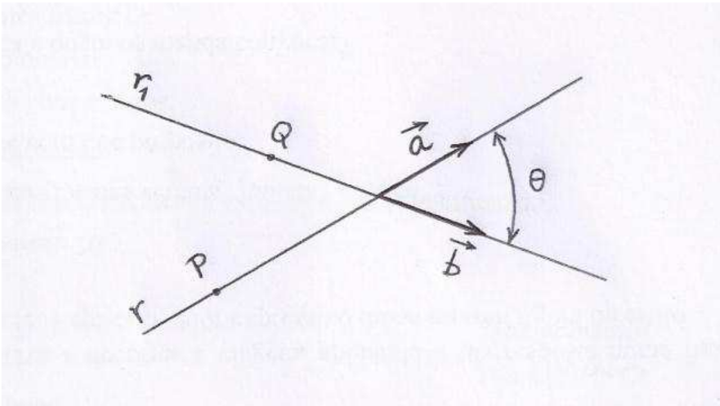
- Sejam as rectas:

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a} \text{ , } s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_1 = L(Q;\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = Q + t\vec{b} \text{ , } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Designando:

$$\theta = \measuredangle(r, r_1) \text{ , } 0 \le \theta \le \pi / 2 \quad \text{e} \quad \alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ , } 0 \le \alpha \le \pi :$$



a) $0 \le \alpha \le \pi / 2 \;\Rightarrow\; \theta = \alpha$

$$\cos\theta = \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

b) $\pi / 2 < \alpha \le \pi \;\Rightarrow\; \theta = \pi - \alpha$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

Concluindo:

$$\cos\theta = \left|\cos\alpha\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|} \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

- Casos particulares:

i) $\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = \pi \ \Rightarrow \ \theta = 0 \ \Rightarrow \ r \parallel r_1 \ \vee \ r = r_1$

ii) $\alpha = \pi/2 \ \Rightarrow \ \theta = \pi/2 \ \Rightarrow \ r \perp r_1$

Distância entre duas rectas

- Sejam as rectas

$$r = L(P;\vec{a}) = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a} \ , \ s \in \mathbb{R}\right\}$$

$$r_1 = L(Q;\vec{b}) = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = Q + t\vec{b} \ , \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Designando por d_{r,r_1} a distância entre as duas rectas:

A) *Complanares*:

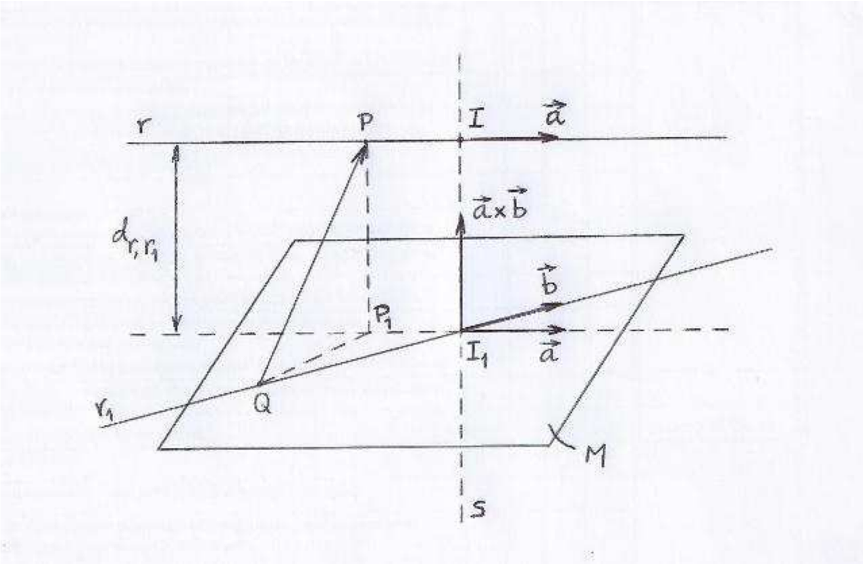
a) *Paralelas*:

i) *Iguais ou coincidentes*: $r = r_1 \ \Rightarrow \ d_{r,r_1} = 0$

ii) *Estritamente paralelas*: $r \parallel r_1 \ \Rightarrow \ d_{r,r_1} = d_{P,r_1} = d_{Q,r}$

b) *Concorrentes*: $r \cap r_1 = I \ \Rightarrow \ d_{r,r_1} = 0$

B) *Não complanares* ou *enviesadas*:



Processo I

$$d_{r,r_1} = \left\| \overrightarrow{I_1 I} \right\|$$

onde os pontos I_1 e I definem a *recta perpendicular comum* (recta s) às rectas r e r_1, isto é,

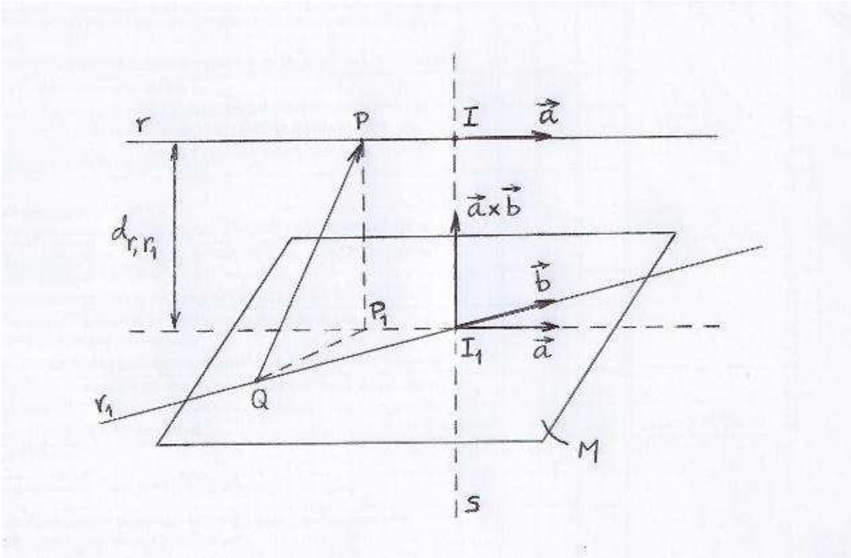
$$s = L(I;\vec{a}\times\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = I + u\vec{a}\times\vec{b} \ , \ u \in \mathbb{R} \right\}$$

Os pontos I_1 e I devem verificar as condições seguintes:

$$I \in r \ \wedge \ I_1 \in r_1 \ \wedge \ \overrightarrow{I_1 I} \parallel \vec{a}\times\vec{b}$$

ou

$$I \in r \ \wedge \ I_1 \in r_1 \ \wedge \ \overrightarrow{I_1 I} \times (\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$$



Processo II

Seja o plano auxiliar *M* tal que

$$r \parallel M \ \wedge\ r_1 \subset M$$

definido por

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - Q) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0 \right\}$$

Designando por P_1 o ponto que corresponde à *projecção ortogonal* do ponto P sobre o plano *M*, então

$$d_{r,r_1} = \left\| \overrightarrow{P_1P} \right\| = d_{P,M} = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \right|}{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|}$$

Exemplo 6: Considere as rectas

$$r\ : X(u) = P + u\vec{a}\ ,\ u \in \mathbb{R},\ \text{em que } P = (2,0,-1) \text{ e } \vec{a} = (1,1,1)$$

$$r_1 : X(t) = Q + t\vec{b}\ ,\ t \in \mathbb{R},\ \text{em que } Q = (1,1,-4) \text{ e } \vec{b} = (2,0,1)$$

a) Mostre que as *rectas* r e r_1 são *enviesadas* (*não complanares*).

b) Determine a distância entre as rectas r e r_1.

c) Uma *equação vectorial* para a *recta*, h, *perpendicular comum* às rectas r e r_1.

Solução:

a) As rectas r e r_1, não sendo paralelas (os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são paralelos), são rectas enviesadas já que

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

isto é, $\left\{\overrightarrow{PQ}, \vec{a}, \vec{b}\right\}$ é um conjunto *linearmente independente*.

b) A distância entre as rectas r e r_1 é:

$$d_{r,r_1} = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

em que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$$

c) Equação vectorial da recta, *h*, perpendicular comum às rectas *r* e r_1:

$$X(\alpha) = I + \alpha\vec{a} \times \vec{b} \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x, y, z) = (2,0,-1) + \alpha(1,1,-2) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

em que $I = P = (2,0,-1)$ é o ponto da recta *r* pertencente à recta *h*.

Exemplo 7: Considere o plano e $M : x + y - z = 3$, os pontos $P = (3,5,2)$ e $Q = (1,5,2)$ e a recta

$$r : X(t) = R_1 + t\vec{a} \ , \ t \in \mathbb{R} \text{, em que } R_1 = (1,2,3) \text{ e } \vec{a} = (2,1,0)$$

Determine:

a) Uma *equação vectorial* para a recta r_1 contida no plano *M*, que é concorrente e perpendicular à recta *r*.

b) Uma *equação vectorial* para a recta r_2 que passa no ponto *P*, é concorrente com a recta *r* e faz um ângulo de 60° com o plano *M*.

c) O ponto *R* pertencente à recta *r*, tal que *P*, *Q* e *R* são vértices de um triângulo com 1 unidade de área.

Solução:

a) Equação vectorial da recta r_1:

$$X(u) = I + u\vec{b} \ , \ u \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (x, y, z) = (3,3,3) + u(-1,2,1) \ , \ u \in \mathbb{R}$$

Convém notar que

$$I = r \cap M \ \text{ e } \ \vec{b} \perp \vec{a} \ \wedge \ \vec{b} \perp \vec{n} \ \Leftrightarrow \ \vec{b} \parallel \vec{a} \times \vec{n}$$

sendo $\vec{n} = (1,1,-1)$ o *vector normal ao plano M*.

b) Existem duas soluções possíveis para a recta r_2. A equação vectorial de uma dessas rectas é:

$$X(v) = P + v\vec{c} \ , \ v \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x,y,z) = (3,5,2) + v\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{6}, \frac{9+\sqrt{3}}{6}, \frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right) \ , \ v \in \mathbb{R}$$

Convém notar que

$$\measuredangle(r_2, M) = 60^\circ \ \Rightarrow \ \measuredangle(\vec{c}, \vec{n}) = 30^\circ$$

e

$$\vec{c} \perp \vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \overrightarrow{R_1P}$$

sendo $\vec{n}_\alpha = (-1,2,4)$ o *vector normal ao plano* α que passa no ponto *P* e contém a recta *r* (as rectas *r* e r_2 são complanares).

c) Notando que

$$R \in r \ \wedge \ \mathrm{A}_{[PQR]} = \frac{\left\|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}\right\|}{2} = 1$$

obtém-se $R = (7,5,3)$.