MUDANÇAS DE BASE

Introdução

- Pretende-se tratar, através da *álgebra matricial*, os problemas seguintes:

  i) Mudança das *coordenadas de um elemento* de um espaço linear V de uma *base ordenada* para uma outra;

  ii) Mudança da *representação matricial* de uma transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, decorrente da alteração das *bases ordenadas* seleccionadas para o *domínio* (V) e para o *conjunto de chegada* (W).

Aplicação em espaços lineares

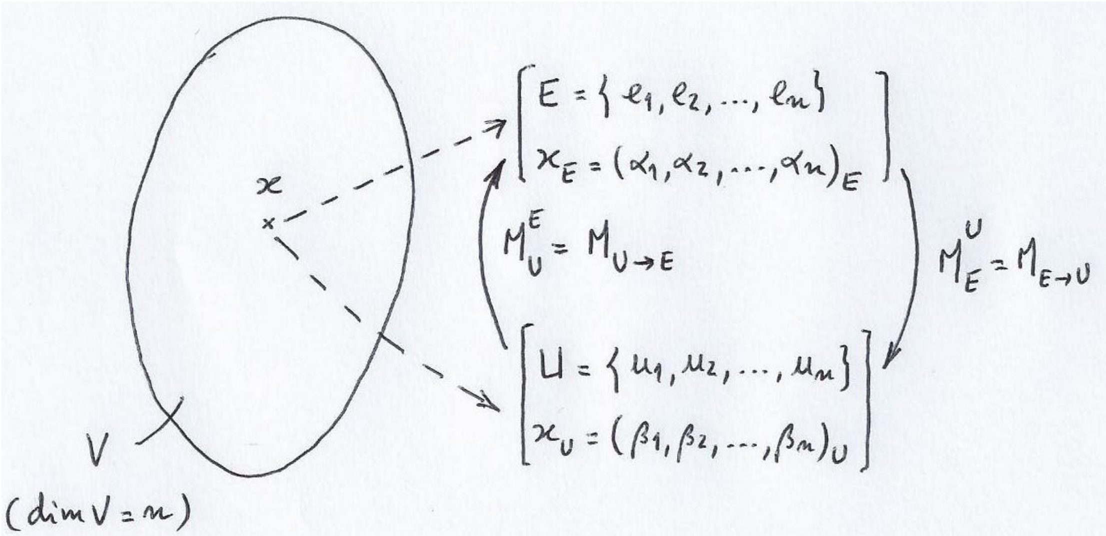
- Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$, para o qual são escolhidas as duas *bases ordenadas*

$$\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ e } \mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

Definição [4.1]: Matriz Mudança de Base (ou de Coordenadas)
Chama-se *matriz mudança de base*, ou *matriz mudança de coordenadas*, *da base ordenada* U *para a base ordenada* E, ou, simplesmente, *de* U *para* E, à matriz $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}$, ou $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$, que satisfaz a relação matricial

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$$

ou seja, é a matriz que permite transformar as coordenadas do elemento $x \in \mathrm{V}$ em relação à base ordenada U, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$, nas coordenadas desse mesmo elemento em relação à base ordenada E, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}}$.



- Relativamente ao elemento $x \in \mathrm{V}$, sejam $x_{\mathrm{E}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathrm{E}}$ as suas *coordenadas em relação à base* E e $x_{\mathrm{U}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{\mathrm{U}}$ as suas *coordenadas em relação à base* U.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

- Designando

$$e_j = (e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{nj}) \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_j = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}) \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n$$

resulta

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ e_1 & e_2 & & e_n \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathrm{E}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & u_2 & & u_n \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{\mathrm{U}}$$

ou, ainda, usando *notação matricial*

$$\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$$

- Dado que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{U}$ são matrizes *não singulares*, obtém-se

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}\to\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}$$

Conclui-se, ainda, que

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{-1}$$

já que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}$ e $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}$ são, também, matrizes *não singulares*

$$\left|\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\ \right| = \left|\ \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}\ \right| = \left|\ \boldsymbol{U}^{-1}\ \right|\left|\ \boldsymbol{E}\ \right| = \frac{|\ \boldsymbol{E}\ |}{|\ \boldsymbol{U}\ |} = \frac{1}{\left|\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\ \right|} \neq 0$$

- Se E e U são *bases ortonormais*, então $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{U}$ são matrizes *ortogonais*, isto é,

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$$

pelo que

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}\to\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{U}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 1 [4.1]: Relativamente aos espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, sejam $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ as respectivas *bases canónicas*. Considere ainda as bases para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^2$

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

Determine:

a) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, entre as bases E_3 e V.

b) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, entre as bases E_2 e W.

Solução:

a) Considerando a *base canónica* para o espaço linear $\mathbb{R}^3$, $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, sejam $\vec{x} = (x, y, z)$ as *coordenadas* do seu elemento genérico *em relação à base* E_3 e

$$\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } |\, \boldsymbol{E}_3 \,| = 1$$

a matriz que lhe está associada.
Por outro lado, relativamente à *base ordenada* $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}$, sejam $\vec{x}_V = (x_1, y_1, z_1)_V$ as *coordenadas* desse mesmo elemento e

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ com } |\, \boldsymbol{V} \,| = -2$$

a matriz associada à base em causa.

A *matriz mudança de base de* V *para* E_3 é

$$\boldsymbol{M}_{V}^{E_3} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\boldsymbol{X}_{E_3} = \boldsymbol{M}_{V}^{E_3}\ \boldsymbol{X}_V \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base ordenada* V *para a base canónica* E_3, são

$$\begin{cases} x = x_1 + z_1 \\ y = -x_1 + y_1 \\ z = y_1 - z_1 \end{cases} \quad (V \to E_3)$$

De modo análogo, sabendo que

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{V}\,|}\left[\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{V}\right]^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$\boldsymbol{M}_{E_3}^{V} = \boldsymbol{V}^{-1}\ \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{V}^{-1}\ \boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é a *matriz mudança de base de* E_3 *para* V e, portanto,

$$\boldsymbol{X}_V = \boldsymbol{M}_{E_3}^{V}\ \boldsymbol{X}_{E_3} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base canónica* E_3 *para a base ordenada* V, são

$$\begin{cases} x_1 = (x - y + z)/2 \\ y_1 = (x + y + z)/2 \quad (E_3 \to V) \\ z_1 = (x + y - z)/2 \end{cases}$$

b) Repita-se, neste caso, o processo atrás apresentado, considerando, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, as bases ordenadas $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ (*canónica*) e $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Designe-se por $\vec{x} = (x, y)$ as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^2$ *em relação à base* E_2 e por $\vec{x}_W = (x_1, y_1)_W$ as suas *coordenadas em relação à base ordenada* W.

Sabendo que

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } |\ \boldsymbol{E}_2\ | = 1$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ com } |\ \boldsymbol{W}\ | = -2$$

a *matriz mudança de base de* W *para* E_2 é

$$\boldsymbol{M}_W^{E_2} = \boldsymbol{E}_2^{-1}\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_2\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\boldsymbol{X}_{E_2} = \boldsymbol{M}_W^{E_2}\ \boldsymbol{X}_W \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}_W$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base ordenada* W *para a base canónica* E_2, são

$$\begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 - y_1 \end{cases} \quad (W \to E_2)$$

Atendendo a

$$\boldsymbol{W}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{W}\,|}\left[\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{W}\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_2}^{\mathrm{W}} = \boldsymbol{W}^{-1}\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{W}^{-1}\ \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{W}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de onde resulta

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{W}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_2}^{\mathrm{W}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}_2} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base canónica* E_2 *para a base ordenada* W, são

$$\begin{cases} x_1 = (x+y)/2 \\ y_1 = (x-y)/2 \end{cases} \quad (\mathrm{E}_2 \rightarrow \mathrm{W})$$