

Exemplo 3 [4.5]: Considere as transformações lineares $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que possuem as *representações matriciais*

$$\mathbf{R} = m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = m(S) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canônicas $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0), (0,1)\}$ para os espaços lineares \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Seja ainda a base ordenada para \mathbb{R}^3

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,2)\}$$

Determine as seguintes *representações matriciais*:

- $\mathbf{R}_{V,E_2} = m(R)_{V,E_2}$, que representa R em relação às bases ordenadas V e E_2 .
- $\mathbf{S}_{E_2,V} = m(S)_{E_2,V}$, que representa S em relação às bases ordenadas E_2 e V .
- $\mathbf{T}_{V,E_3} = m(T)_{V,E_3}$, que representa T em relação às bases ordenadas V e E_3 .
- $\mathbf{T}_{E_3,V} = m(T)_{E_3,V}$, que representa T em relação às bases ordenadas E_3 e V .
- $m(SR + T^2)_V$, que representa $SR + T^2$ em relação à base ordenada V e recorrendo às matrizes obtidas nas alíneas anteriores.
- $m(SR + T^2)_V$ a partir, neste caso, da sua representação matricial em relação à base canônica E_3 .

Solução:

a) A matriz $\mathbf{R}_{V,E_2} = m(R)_{V,E_2}$ é

$$\mathbf{R}_{V,E_2} = \mathbf{R} \mathbf{M}_V^{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{V,E_2}$$

onde $\mathbf{M}_V^{E_3}$ é a matriz *mudança de base de V para E₃*, definida por

$$\mathbf{M}_V^{E_3} = \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{I}_3 \mathbf{V} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) A matriz $\mathbf{S}_{E_2,V} = m(S)_{E_2,V}$ é

$$\mathbf{S}_{E_2,V} = \left(\mathbf{M}_V^{E_3} \right)^{-1} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{E_2,V}$$

em que

$$\left(\mathbf{M}_V^{E_3} \right)^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} [\mathbf{Cof} \mathbf{V}]^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A matriz $\mathbf{T}_{V,E_3} = m(T)_{V,E_3}$ é

$$\mathbf{T}_{V,E_3} = \mathbf{T} \mathbf{M}_V^{E_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{V,E_3}$$

d) A matriz $\mathbf{T}_{E_3, V} = m(T)_{E_3, V}$ é

$$\mathbf{T}_{E_3, V} = \left(\mathbf{M}_V^{E_3} \right)^{-1} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3, V}$$

e) A matriz $m(SR + T^2)_V$ é

$$m(SR + T^2)_V = m(SR)_V + m(T^2)_V = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_V$$

em que

$$m(SR)_V = \mathbf{S}_{E_2, V} \mathbf{R}_{V, E_2} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}_V$$

$$m(T^2)_V = \mathbf{T}_{E_3, V} \mathbf{T}_{V, E_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_V$$

f) A representação matricial de $SR + T^2$ em relação à *base canónica* E_3 é

$$m(SR + T^2) = m(SR) + m(T^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

em que

$$m(SR) = \mathbf{S} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(T^2) = \mathbf{T} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz $m(SR + T^2)_V$ é obtida, neste caso, a partir da relação matricial

$$m(SR + T^2)_V = \left(\mathbf{M}_V^{E_3} \right)^{-1} m(SR + T^2) \mathbf{M}_V^{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_V$$