Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

Algebra

2014-10-31

1º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (<u>nome completo</u>), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração máxima de 1h30m. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Verifique se A^2 é não-singular. Em caso afirmativo, calcule a sua inversa pelo método da matriz adjunta (matriz que contêm os co-factores de A).

2. Considere o sistema de equações $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Resolva o sistema de equações pelo método de Cramer.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule, justificadamente, a característica da matriz, em função do parâmetro real a.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule, justificadamente, a inversa da matriz, usando o método de Gauss-Jordan.

Cotação prevista	5 valores para cada pergunta

1. A^2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2$$

$|A^2| \neq 0 = 1$ $\quad$ A^2 é não singular, admite inversa.

$$[A^2]^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left[Adj(A^2) \right]^T$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex: $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

2. $AX = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$X = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}$ e $B = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}$$

Pelo método de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2}$$ (duas colunas iguais)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2}$$

Solução do sistema

$X = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Condensando,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, se $a=1$, temos uma linha de zeros e a característica $r(A)=2$

Se $a \neq 1$ (ex. $a=0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar um determinante 3x3 não nulo,

por exemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ o que faz com que $r(A)=3$

4.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (3^{\underline{a}}L - 1^{\underline{a}}L)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad (3^{\underline{a}}L - 2^{\underline{a}}L)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad (-3)\times 3^{\underline{a}}L + 1^{\underline{a}}L$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{array}{ccc} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \quad (-2)\times 2^{\underline{a}}L + 1^{\underline{a}}L$$