Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

Algebra

2015-02-06

Recurso do **2º Mini-Teste**

- Identifique as folhas de capa (<u>nome completo</u>), bem como as folhas de continuação usadas.
- A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

1. Mostre que os vectores não nulos A e B de $\mathbb{R}^3$ são não paralelos, se e só se $A\times B \neq 0$
2. Considere o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$, $S = \{A, B, C, D\}$, onde $A = (0,2,2,6), B = (-1,1,1,2)$, $C = (1,1,0,2)$ e $D = (0,4,3,10)$. Calcule:
   $a)$ Calcule o subespaço gerado por $S, L(S)$. Indique uma base e a dimensão de $L(S)$. Indique, justificando, se S é, ou não, linearmente independente
   $b)$ Determine uma base H, de $\mathbb{R}^4$, contendo o maior número de elementos possíveis de S.
   $c)$ Obtenha as coordenadas do vector $P = (0,0,1,1)$ em relação à base H.
3. Sejam os vectores ortogonais A e B de $\mathbb{R}^3$, tais que $\|A\| = 2$ e $\|B\| = 1$. Sejam ainda os vectores C e D de $\mathbb{R}^3$, tais que $\|B\times C\| = \sqrt{5}$, $<(C,B) = 30\, graus$, $<(A\times B, B\times C) = 45\, graus$, $D = A\times B + B$ e $A.B\times C = 3$. Calcule:
   a) $\|D\|$ b) $\theta =< (D + A, B\times C)$
4. Sejam os planos $M{:}\,x + y + z = 1$ e $M'{:}\,x + y + 2z = 4$. Seja ainda a recta $r{:}\,X(t) = (1,1,1) + t(1,0,0), t \in \mathbb{R}$. Calcule: a) o ângulo entre os dois planos; b) o ponto de intersecção de r com M. ; c) a equação vectorial da recta s que contém o ponto $(1,1,0)$ e é perpendicular e concorrente com r.

Cotação prevista	1) 4 ; 2a) 2; 2b) 2; 2c) 1; 3a) 3; 3b) 3; 4a) 1; 4b) 1; 4c) 3 valores

FEUP - MiEiC - Álgebra

Recurso 2.º M.T. 2015.02.06

1. $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \neq \vec{0}$ $\quad \vec{0} \neq \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a}$ não paralelo a $\vec{b}$

$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) \neq K(b_1, b_2, b_3)$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Kb_1 & Kb_2 & Kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq (0,0,0)$

NOTA:

se $(a_1, a_2, a_3) = (Kb_1, Kb_2, Kb_3)$, então

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Kb_1 & Kb_2 & Kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

2. $A = (0, 2, 2, 6)$

$B = (-1, 1, 1, 2)$

$C = (1, 1, 0, 2)$

$D = (0, 4, 3, 10)$

a) $(x, y, z, t) = \alpha(0, 2, 2, 6) + \beta(-1, 1, 1, 2) + \gamma(1, 1, 0, 2) + \delta(0, 4, 3, 10)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & 4 & y \\ 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 6 & 2 & 2 & 10 & t \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-z \\ 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & -1 & -2 & t-3y \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & -2 & t-3y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-z \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t-3y-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-z \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t-3y-x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2y-2z \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t-3y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y-2z+t \end{array}\right]$$

O sistema só é possível se

$-x-y-2z+t=0 \Leftrightarrow t = x+y+2z$

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &= (x,y,z,x+y+2z) \\ &= (x,0,0,x)+(0,y,0,y)+(0,0,z,2z) \\ &= x(1,0,0,1)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,2)\end{aligned}$$

$L(S) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = x+y+2z\}$

Base $= \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,2)\}$

$\dim L(S) = 3$

S <u>não</u> é linearmente independente pois $\dim L(S) < 4 =$ n.º de elementos de S.

4A

2b) Como $\dim L(S) = 3$, podemos usar $\underline{3}$ elementos de S.

A, B, C serve? A, B, D?

A, B, C são linearmente independentes?

$$(0,0,0,0) = \alpha(0,2,2,6) + \beta(-1,1,1,2) + \gamma(1,1,0,2)$$

$$\begin{cases} 0 = -\beta + \gamma \\ 0 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ 0 = 2\alpha + \beta \\ 0 = 6\alpha + 2\beta + 2\gamma \end{cases} \quad (\ldots) \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ou seja, A, B e C são linearmente independentes. Basta acrescentar 1 elemento de $\mathbb{R}^4$ não contido em $L(S)$:

$$H = \{A, B, C, \underbrace{\quad}_{\text{elemento de } \mathbb{R}^4\ (x,y,z,t) \text{ com } t \neq x+y+2z}\}$$

por exemplo

$(1,1,1,1) \notin L(S)$

$\llcorner t \neq x+y+2z$

$H = \{(0,2,2,6), (-1,1,1,2), (1,1,0,2), (1,1,1,1)\}$

c) $(0,0,1,1) = \alpha(0,2,2,6) + \beta(-1,1,1,2) + \gamma(1,1,0,2) + \delta(1,1,1,1)$

$$\begin{cases} 0 = -\beta + \gamma + \delta \\ 0 = 2\alpha + \beta + \gamma + \delta \\ 1 = 2\alpha + \beta + \delta \\ 1 = 6\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \gamma + \delta \\ 0 = 2\alpha + \underbrace{\gamma + \delta} + \gamma + \delta \\ 1 = 2\alpha + \underbrace{\gamma + \delta} + \delta \\ 1 = 6\alpha + \underbrace{2\gamma + 2\delta} + 2\gamma + \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{} \\ 0 = \alpha + \gamma + \delta \\ 1 = 2\alpha + \gamma + 2\delta \\ 1 = 6\alpha + 4\gamma + 3\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{} \\ \alpha = -\gamma - \delta \\ 1 = -2\gamma - \cancel{2\delta} + \gamma \cancel{+ 2\delta} \\ 1 = -6\gamma - 6\delta + 4\gamma + 3\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{} \\ \overline{} \\ 1 = -\gamma \\ 1 = -2\gamma - 3\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 1 = 2 - 3\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \\ \delta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$(0,0,1,1)_E = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3}\right)_H$

NOTA: A resposta depende da alínea b), que tem várias soluções possíveis.

3 $A \perp B$, $A, B \in \mathbb{R}^3$

$\|A\| = 2$; $\|B\| = 1$

$\| B \times C \| = \sqrt{5}$

$\sphericalangle (C, B) = 30°$

$\sphericalangle (A \times B, B \times C) = 45°$

$D = A \times B + B$

$A \cdot B \times C = 3$

a) $\|\vec{d}\|^2 = \| A \times B + B \|^2 = (A \times B + B) \cdot (A \times B + B)$

$= \| A \times B \|^2 + \underbrace{B \cdot A \times B}_{=0} + \underbrace{B \cdot A \times B}_{=0} + \|B\|^2$

$= \| A \times B \|^2 + \|B\|^2$

$= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 - \underbrace{(A \cdot B)^2}_{=0 \text{ pois } A \perp B} + \|B\|^2$

$= 4 \times 1 + 1 = 5$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{5}$

b) $\theta = \measuredangle (D+A, B\times C)$

$$\cos\theta = \frac{(D+A).(B\times C)}{\|D+A\|.\|B\times C\|} = \frac{D.B\times C + A.B\times C}{\|D+A\|.\|B\times C\|}$$

$$= \frac{D.B\times C + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}} = \frac{(A\times B + B).B\times C + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(A\times B).(B\times C) + \underbrace{B.B\times C}_{=0} + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\|A\times B\|.\|B\times C\|.\cos 45^\circ + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\|A\times B\|.\sqrt{5}.\frac{\sqrt{2}}{2} + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$\|A\times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - \underbrace{(A.B)^2}_{=0}$$
$$= 4\times 1$$
$$\|A\times B\| = 2$$

$$= \frac{2.\sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2} + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{10} + 3}{\|D+A\|.\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{10} + 3}{3\sqrt{5}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}+3}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$\|A+D\|^2 = \|A + A\times B + B\|^2$$
$$= \|(A+B) + (A\times B)\|^2$$
$$= \|A+B\|^2 + \underbrace{2(A+B).(A\times B)}_{=0} + \|A\times B\|^2$$
$$= \|A\|^2 + 2A.B + \|B\|^2 + 4$$
$$= 4 + 0 + 1 + 4 = 9$$
$$\|A+D\| = \sqrt{9} = 3$$

4. $\pi: x + y + z = 1$

$\pi': x + y + 2z = 4$

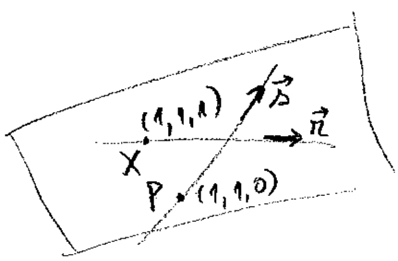
$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 0),\ t \in \mathbb{R}$

a) $\theta = \arccos\left(\dfrac{|(1,1,1).(1,1,2)|}{\|(1,1,1)\|.\|(1,1,2)\|}\right) = \dfrac{|1+1+2|}{\sqrt{3}\,.\sqrt{6}} = \dfrac{5}{3\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

b) $\pi: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 1 + t + 1 + 1 = 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} t = -2 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Ponto: $(-1, 1, 1)$

c)



$X - P = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)$
$= (0, 0, 1)$

$\vec{r} = (1, 0, 0)$

$\vec{s} = (a, b, c)$

$\begin{cases} (X - P).\ \vec{r} \times \vec{s} = 0 \\ \vec{r}.\vec{s} = 0 \end{cases}$

• $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$

• $(a, b, c).(1, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$\text{D.L.} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

ou

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{D.L.} \end{array} \end{array}$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -b\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow b = 0$$

$\uparrow$

D.L.

$s: (x, y, z) = (1, 1, 0) + K(0, 0, 1), \ K \in \mathbb{R}$

confirmação: $\vec{r} \perp \vec{s}$ pois $(0,0,1).(1,0,0) = 0$

intersectam-se em $(1,1,1)$