# MATRIZES QUADRADAS

Seja $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ ($i$=1,2,…,$n$ ; $j$=1,2,…,$n$) a *matriz quadrada do tipo $n\times n$*, ou *de ordem $n$*, num corpo $\Omega$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Os elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ que possuem os dois índices iguais, isto é, os elementos $a_{ii}$ ($i$=1,2,…,$n$) são designados por *elementos principais*.

- A diagonal $(a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn})$ chama-se *diagonal principal*.

- A diagonal $(a_{12},a_{23},a_{34},\ldots,a_{n-1,n})$, situada acima da diagonal principal, chama-se *diagonal superior*.

- A diagonal $(a_{21},a_{32},a_{43},\ldots,a_{n,n-1})$, situada abaixo da diagonal principal, chama-se *diagonal inferior*.

- A diagonal $(a_{1n},a_{2,n-1},a_{3,n-2},\ldots,a_{n1})$ chama-se *diagonal secundária*.

- Os elementos $a_{ij}$ e $a_{ji}$, com $i \neq j$, ocupando posições simétricas em relação à diagonal principal, chamam-se *elementos opostos*.

## Traço de uma matriz quadrada

**Definição: Traço de uma matriz quadrada**
Chama-se *traço* de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, designando-se por $tr(\boldsymbol{A})$, à soma dos seus elementos principais, isto é,

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Teorema**: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas, num corpo $\Omega$, de ordem $n$ e $k \in \Omega$. Então:

**a**) $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$.

**b**) $tr(k\boldsymbol{A}) = k\ tr(\boldsymbol{A})$.

**c**) $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

**d**) $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

**Teorema**: Seja $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \ldots, \boldsymbol{A}_{p-1}, \boldsymbol{A}_p\}$ um conjunto constituído por $p$ matrizes quadradas de ordem $n$, num corpo $\Omega$. Então

$$tr(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p) = tr(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1) = \ldots = tr(\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_{p-1})$$

**Exemplo 1**: Relativamente às matrizes quadradas de ordem 3

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A})=2+1+1=4 \qquad tr(\boldsymbol{B})=-1+1-2=-2$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad 2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 6 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 8\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}10 & 1 & 5\\ 7 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=1+2-1=tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B})=4-2=2$$

$$tr(2\boldsymbol{A})=4+2+2=2tr(\boldsymbol{A})=8$$

$$tr(\boldsymbol{AB})=-1+7+4=tr(\boldsymbol{BA})=10+2-2=10$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=2+1+1=tr(\boldsymbol{A})=4$$

## Matriz identidade

**Definição: Matriz identidade**
Designa-se por *matriz identidade* de ordem *n*, representando-se por $\boldsymbol{I}_n$, ou simplesmente por $\boldsymbol{I}$, a matriz quadrada em que os elementos principais tomam o valor 1, sendo nulos todos os seus restantes elementos, isto é,

$$\boldsymbol{I} = (i_{ij}) \;:\; i_{ij} = 1 \;,\; i = j \;\wedge\; i_{ij} = 0 \;,\; i \neq j$$

**Exemplo 2**: A matriz identidade de ordem 3 é

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A matriz $\boldsymbol{I}$ pode ser considerada o *elemento neutro* do produto de matrizes quadradas da mesma ordem; se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, obtém-se

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

- A matriz $\boldsymbol{I}$ é uma *matriz comutativa* (*permutável*) com qualquer outra matriz quadrada da mesma ordem *n*.

## Matriz escalar

**Definição: Matriz escalar**
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, chama-se *matriz escalar*, se todos os elementos principais forem iguais, sendo nulos todos os seus restantes elementos. Se $k \in \Omega$, então

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \;:\; a_{ij} = k \;,\; i = j \;\wedge\; a_{ij} = 0 \;,\; i \neq j \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$$

**Exemplo 3**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{I} \quad (k = -2)$$

- A matriz identidade, $\boldsymbol{I}$, é uma matriz escalar $(k = 1)$.

- A matriz escalar $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$ é comutativa (permutável) com qualquer matriz quadrada $\boldsymbol{B}$ da mesma ordem

$$\boldsymbol{AB} = (k\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{IB}) = k(\boldsymbol{BI}) = \boldsymbol{B}(k\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{BA} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = k\boldsymbol{B}$$

## Matriz diagonal

**Definição: Matriz diagonal**
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, chama-se *matriz diagonal*, se forem nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

**Exemplo 4**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2, 0, 5)$$

- Qualquer matriz escalar é um caso particular de uma matriz diagonal, onde os elementos principais são todos idênticos entre si

**Exemplo 5**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(-2, -2, -2)$$

- A matriz identidade, $\boldsymbol{I}$, de ordem $n$ é uma matriz diagonal

$$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}\ (1,1,1,\ldots,1)$$

## Matriz triangular superior

**Definição: Matriz triangular superior**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, chama-se *matriz triangular superior*, se forem nulos todos os elementos situados abaixo da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i > j$$

**Exemplo 6**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz diagonal e toda a matriz escalar, podem ser encaradas como casos particulares de uma matriz triangular superior.

**Exemplo 7**:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2,1,3) \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{I}$$

## Matriz triangular inferior

**Definição: Matriz triangular inferior**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, chama-se *matriz triangular inferior*, se forem nulos todos os elementos situados acima da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i < j$$

**Exemplo 8**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz diagonal e toda a matriz escalar, podem ser encaradas como casos particulares de uma matriz triangular inferior.

**Exemplo 9**:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2,1,3) \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{I}$$

## Decomposição triangular de matrizes quadradas

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem *n*. Pretende-se resolver o problema de factorização

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$$

- $\boldsymbol{L}$ uma *matriz triangular inferior* de ordem *n*.

- $\boldsymbol{U}$ uma *matriz triangular superior* de ordem *n*.

- A factorização nem sempre é possível; se existir, ela será única, se todos os elementos principais de $\boldsymbol{U}$ forem iguais a 1.

- A *decomposição triangular* de uma matriz quadrada pode ser aplicada na resolução de um sistema com *n* equações lineares a *n* incógnitas e possível e determinado (*sistema de Cramer*).

**Exemplo 10**: Aplicar a decomposição triangular à matriz quadrada

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{11}u_{12} = 2 \\ l_{11}u_{13} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} l_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ u_{13} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{21}u_{12} + l_{22} = 1 \\ l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} l_{21} = 2 \\ 2l_{21} + l_{22} = 1 \\ -l_{21} + l_{22}u_{23} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{22} = -3 \\ u_{23} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{31} = -2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = -3 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} l_{31} = -2 \\ 2l_{31} + l_{32} = -3 \\ -l_{31} - 2\ l_{32} + l_{33} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} l_{31} = -2 \\ l_{32} = 1 \\ l_{33} = -1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz simétrica

**Definição: Matriz simétrica**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, é uma *matriz simétrica*, se for igual à sua matriz transposta, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

**Exemplo 11**: A matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}$$

**Teorema**: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n$, num corpo $\Omega$. A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica, se e só se os seus elementos opostos são iguais, isto é,

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad i \neq j$$

**Teorema**: Sejam as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, num corpo $\Omega$, tais que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem $n$ e $\boldsymbol{B}$ é uma matriz do tipo $m \times n$. Então:

- **a**) A matriz soma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é uma matriz simétrica de ordem $n$.
- **b**) As matrizes produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ são matrizes simétricas de ordem $n$.
- **c**) As matrizes produto $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ são matrizes simétricas; a matriz $\boldsymbol{F}$ é de ordem $m$, enquanto que a matriz $\boldsymbol{G}$ é de ordem $n$.

**Exemplo 12**: Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

São matrizes simétricas

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 2)}$$

## Matriz hemi-simétrica

**Definição: Matriz hemi-simétrica**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, num corpo $\Omega$, constitui uma *matriz hemi-simétrica*, se for igual à simétrica da sua matriz transposta, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

**Exemplo 13**: A matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz hemi-simétrica

$$-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}$$

**Teorema**: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n$, num corpo $\Omega$. A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hemi-simétrica, se e só se os seus elementos opostos são simétricos e todos os elementos principais são nulos, isto é,

$$a_{ij} = -a_{ji} \;\; , \;\; i \neq j \;\; \wedge \;\; a_{ij} = 0 \;\; , \;\; i = j$$

**Teorema 2.10** : Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n$, num corpo $\Omega$. Então:

**a**) A matriz subtracção $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é uma matriz hemi-simétrica de ordem $n$.

**b**) A matriz $\boldsymbol{A}$ pode ser escrita como o resultado da soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi-simétrica, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{hemi-simétrica}}}$$

**Exemplo 14**: Relativamente à matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{hemi-simétrica}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

## Matriz normal

**Definição: Matriz normal**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, diz-se uma *matriz normal*, se

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$$

**Exemplo 15**: As matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ são matrizes normais.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}$$

## Matriz hermitiana

**Definição: Matriz hermitiana**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $n$, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, é uma *matriz hermitiana*, ou *de Hermite*, se for igual à sua matriz transconjugada, ou seja, se

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

**Exemplo 16**: São matrizes hermitianas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

**Teorema**: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes hermitianas de ordem $n$. Então:

**a**) A matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ é uma matriz hermitiana de ordem $n$.

**b**) Se $k \in \mathbb{R}$, a matriz $\boldsymbol{D} = k\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermitiana de ordem $n$.

**c**) Se $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, a matriz $\boldsymbol{AB}$ é uma matriz hermitiana de ordem $n$.

**Teorema**: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n$, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$. São verdadeiras as seguintes proposições:

**a**) A matriz soma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ é uma matriz hermitiana de ordem $n$.

**b**) As matrizes produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ e $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ são matrizes hermitianas de ordem $n$.

**c**) A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermitiana, se e só se os seus elementos opostos são conjugados e todos os elementos principais são reais, ou seja,

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad , \quad i \neq j \quad \wedge \quad \forall a_{ii} \in \mathbb{R}$$

**d**) Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica com todos os seus elementos reais, então $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermitiana.

**e**) Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermitiana, então será ainda uma matriz normal.

**Exemplo 17**: São matrizes hermitianas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix}$$

## Matriz hemi-hermitiana

**Definição: Matriz hemi-hermitiana**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, será uma *matriz hemi-hermitiana*, se for igual à simétrica da sua matriz transconjugada, ou seja, se

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

**Exemplo 18**: É uma matriz hemi-hermitiana

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}$$

**Teorema**: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$. Verifica-se:

**a**) A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hemi-hermitiana, se e só se os seus elementos opostos são simétrico-conjugados e os elementos principais são nulos ou imaginários puros, isto é,

$$a_{ij} = -\bar{a}_{ji} \ , \ i \neq j \ \wedge \ (a_{ij} = 0 \vee a_{ij} = b\,i \ , \ b \neq 0) \ , \ i = j$$

**b**) A matriz subtracção $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ é uma matriz hemi-hermitiana de ordem *n*.

**c**) Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hemi-simétrica com todos os seus elementos reais, então $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hemi-hermitiana.

**d**) Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermi-hermitiana, então também será uma matriz normal.

**Teorema**: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, então $\boldsymbol{A}$ pode ser escrita como o resultado da soma de uma matriz hermitiana com uma matriz hemi-hermitiana, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hermitiana}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hemi-hermitiana}}}$$

**Exemplo 19**: Em relação à matriz $\boldsymbol{A}$ (quadrada de ordem 3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3+2i & 4-2i \\ 3-2i & 0 & 3-i \\ 4+2i & 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4+2i \\ 1 & 2i & -1-i \\ 4+2i & 1-i & 2i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hermitiana}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hemi-hermitiana}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3+2i & 4-2i \\ 3-2i & 0 & 3-i \\ 4+2i & 3+i & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4+2i \\ 1 & 2i & -1-i \\ 4+2i & 1-i & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix}$$