Operações com Transformações Lineares

Definição: **Adição (soma) de funções**
Sejam $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ duas funções com o mesmo domínio, V, e o mesmo conjunto de chegada, W. Define-se a *adição*, ou *soma*, das funções *S* e *T* como sendo a função $S+T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, tal que

$$\forall x \in \mathrm{V} \;\; (S+T)(x) = S(x) + T(x)$$

Definição: **Multiplicação (produto) de uma função por um escalar**
Seja $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma função. Se *c* é um escalar de W, define-se a *multiplicação*, ou *produto*, de *T* pelo escalar *c* como sendo a função $cT : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, tal que

$$\forall x \in \mathrm{V} \;\; (cT)(x) = cT(x)$$

Teorema: Se V e W são espaços lineares sobre um corpo Ω e $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ são *transformações lineares*, então as funções $S+T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $cT : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ são, também, *transformações lineares*.

- Seja *L*(V,W) o conjunto de todas as transformações lineares de domínio V e conjunto de chegada W.

Teorema: O conjunto de todas as transformações lineares de domínio V e conjunto de chegada W, *L*(V,W), é um espaço linear (vectorial).

- Sejam as funções $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. A operação **subtracção de funções** pode ser entendida como um caso particular da adição. A função $S - T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$

$$\forall x \in \mathrm{V} \;\; (S - T)(x) = S(x) - T(x)$$

pode ser considerada como o resultado da adição a $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ da função $-T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, que é o elemento *simétrico* (ou *oposto*) de *T*.

Exemplo 22: Sejam as transformações lineares $R, U \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tais que

$$R(x, y, z) = (z, y, x) \;\text{ e }\; U(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

Determine as transformações lineares $R + U$ e $3R - 2U$.

Solução:

$$(R + U)(x, y, z) = R(x, y, z) + U(x, y, z) = (x + z, x + 2y, 2x + y + z)$$

$$(3R - 2U)(x, y, z) = 3R(x, y, z) - 2U(x, y, z) = (-2x + 3z, -2x + y, x - 2y - 2z)$$

Concluindo

$$R + U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; (R + U)(x, y, z) = (x + z, x + 2y, 2x + y + z)$$

$$3R - 2U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; (3R - 2U)(x, y, z) = (-2x + 3z, -2x + y, x - 2y - 2z)$$

Definição: **Composição de funções**

Sejam as funções $T : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ e $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que o conjunto de chegada de *T* é coincidente com o domínio de *S*. Define-se a *composição de S com T*, como sendo a *função composta ST* $: \mathrm{U} \to \mathrm{W}$, tal que

$$\forall x \in \mathrm{U} \quad (ST)(x) = S\big(T(x)\big)$$

- A *função composta ST* $: \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ é muitas vezes designada por "*S após T*" e representa-se por $S \circ T : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$.

Teorema: Sejam U, V e W espaços lineares sobre um corpo Ω. Se $T : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ e $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ são *transformações lineares*, então a função composta $ST : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ é uma *transformação linear*.

- A **composição** satisfaz a propriedade **associativa**.

Teorema: Sejam as transformações lineares $T : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $R : \mathrm{W} \to \mathrm{Q}$. Então existe a *função composta RST* $: \mathrm{U} \to \mathrm{Q}$, em que

$$RST = R(ST) = (RS)T$$

- A **composição não** satisfaz a propriedade **comutativa**. Duas transformações lineares $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ e $S : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ dizem-se *comutativas* (*comutam entre si*) ou *permutáveis* se $ST = TS$.

Teorema: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$. Tem-se, então, $TI = IT = T$, em que $I : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ é a *transformação identidade*.

Definição: **Potências inteiras positivas**
Seja $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ uma transformação linear que tem V como domínio e conjunto de chegada. Definem-se as *potências inteiras positivas* de T do seguinte modo

$$T^k = TT^{k-1} = T^{k-1}T \ , \ k \in \mathbb{Z}^+$$

e, por convenção,

$$T^0 = I$$

onde I é a transformação identidade. Além disso, a *lei associativa* para a *composição* permite ainda estabelecer a seguinte lei de expoentes

$$T^p T^q = T^{p+q} \ , \ p,q \in \mathbb{Z}_0^+$$

Teorema: Sejam U, V e W espaços lineares sobre um corpo Ω e as transformações lineares $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Então:

a) Para qualquer transformação linear $R : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ e $k \in \Omega$ tem-se

$$(S+T)R = (SR)+(TR) \quad \text{e} \quad (kT)R = T(kR) = k(TR)$$

em que $(S+T)R : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ e $(kT)R : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$.

b) Para qualquer transformação linear $R : \mathrm{W} \to \mathrm{U}$ e $k \in \Omega$ tem-se

$$R(S+T) = (RS)+(RT) \quad \text{e} \quad R(kT) = (kR)T = k(RT)$$

em que $R(S+T) : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ e $R(kT) : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$.

Exemplo 23: Sejam as transformações lineares $R, U \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, tais que

$$R(x,y,z) = (z,y,x) \qquad\qquad U(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$$

$$T(x,y) = (x-y, -x+y, x+y)$$

Determine as transformações lineares RU, UR, $RU-UR$, RUT, $(RU)^2$ e $(RU-UR)^2$.

Solução:

$RU : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $(RU)(x,y,z) = R\big(U(x,y,z)\big) = (x+y+z, x+y, x)$

$UR : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $(UR)(x,y,z) = U\big(R(x,y,z)\big) = (z, y+z, x+y+z)$

$RU-UR : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e

$(RU-UR)(x,y,z) = (RU)(x,y,z) - (UR)(x,y,z) = (x+y, x-z, -y-z)$

$RUT : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $(RUT)(x,y) = (RU)\big(T(x,y)\big) = (x+y, 0, x-y)$

$(RU)^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e

$(RU)^2(x,y,z) = (RU)\big((RU)(x,y,z)\big) = (3x+2y+z, 2x+2y+z, x+y+z)$

$(RU-UR)^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e

$(RU-UR)^2(x,y,z) = (RU-UR)\big((RU-UR)(x,y,z)\big) =$

$= (2x+y-z, x+2y+z, -x+y+2z)$