Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

Álgebra

2013-01-30

Recuperação do 1º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração de 2h15m sem tolerância (em conjunto com a recuperação do 2º Mini-teste). A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular nem de microcomputadores.

Perguntas

1. Seja A uma matriz não singular. Mostre que o determinante da inversa é o inverso do determinante de A, ou seja, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

2. Recorrendo ao método de Gauss, estude a dependência do sistema de equações em relação aos parâmetros reais **a** e **b**,
$$\begin{cases} -x+3y-4z=-5 \\ 2x+4y+az=4 \\ x+7y+(a-4)z=b-5 \\ x+2y+z=b-2 \end{cases}$$

3. Para A e B duas matrizes quadradas de ordem n, mostre que se $tr(AB)=tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

4. Calcule pelo método de Cramer a solução do sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Considere o conjunto de vectores, $S=\{A,B,C,D\}, S \subset \Re^4$, onde A=(0,-1,2,1), B=(1,0,1,0), C=(2,0,2,3), e D=(1,1,-1,2)
   a) Verifique se o conjunto S é, ou não, linearmente independente
   b) Determine o subespaço L(S), gerado por S e conclua quanto à sua dimensão. Obtenha uma base para L(S)
   c) Obtenha uma base ortogonal de L(S)

6. Calcule a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Cotação prevista	[1, 4, 3, 4, 2,2,2, 2] valores

1) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Leftrightarrow |A^{-1}|\,|A| = 1$

$\Leftrightarrow |A^{-1} \cdot A| = 1$

$\Leftrightarrow |I| = 1$ o que é verdade

2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & a & 4 \\ 1 & 7 & a-4 & b-5 \\ 1 & 2 & 1 & b-2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & a-8 & -6 \\ 0 & 10 & a-8 & b-10 \\ 0 & 5 & -3 & b-7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & a-8 & -6 \\ 0 & -10 & 8-a & 10-b \\ 0 & -10 & 6 & 14-2b \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & a-8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4-b \\ 0 & 0 & a-2 & 8-2b \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & a-8 & -6 \\ 0 & 0 & a-2 & 8-2b \\ 0 & 0 & 0 & 4-b \end{array}\right]$$

- Se $4-b \neq 0$, sistema impossível $(b \neq 4)$

Se $b=4 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & a-8 & -6 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right]$ e se $a \neq 2$ possível e determ.

e se $a = 2$ possível e simp. indet.

3). Ver teorema 2.7, pag. 117 livro Professor Tiago Barbosa, "Noções sobre Matrizes e Sistemas de equações Lineares"

4) $AX = B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\,(6-12) = -12$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{2\,(6) + 5\,(8)}{-12} = \frac{12+40}{-12} =$$

$$\rightarrow a = -\frac{52}{12} = -\frac{26}{6} = -\frac{13}{3} = -4.3333\ldots$$

$$\rightarrow b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{2\,(6-12)}{-12} = 1$$

$$\rightarrow c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-10 + (-6)}{-12} = \frac{-16}{-12} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.3333\ldots$$

5) a)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} B & A & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 2 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 2 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 0
\end{array}\right]
\longrightarrow
$$

faz com que S seja dependente.

b)

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & 2 & 1 & a \\
-1 & 0 & 0 & 1 & b \\
2 & 1 & 2 & -1 & c \\
1 & 0 & 3 & 2 & d
\end{array}\right]
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 1 & b \\
0 & 1 & 2 & 1 & a \\
2 & 1 & 2 & -1 & c \\
1 & 0 & 3 & 2 & d
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 1 & b \\
0 & 1 & 2 & 1 & a \\
0 & 1 & 2 & 1 & c+2b \\
0 & 0 & 3 & 3 & b+d
\end{array}\right]
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 1 & b \\
0 & 1 & 2 & 1 & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & c+2b-a \\
0 & 0 & 3 & 3 & b+d
\end{array}\right]
$$

Trocar linhas

$c+2b-a = 0$

$a = c + 2b$

$L(S) = \{ (c+2b, b, c, d) \}$

$= \{ b(2,1,0,0) + c(1,0,1,0) + d(0,0,0,1) \}$

Base $L(S) = \{ (2,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \}$

$\dim L(S) = 3$

c) $U =$ base ortogonal de $L(S)$

$$U = \{ (c+2b,\ b,\ c,\ d),\ (1,0,1,0),\ (0,0,0,1) \}$$

$$\perp \qquad \perp$$

$$\begin{cases} c+2b+c=0 & \rightarrow \ c=-b \\ d=0 & \rightarrow \ d=0 \end{cases}$$

$$(b,\ b,\ -b,\ 0) \rightarrow (1,1,-1,0)$$

Logo

$$U = \{ (1,1,-1,0),\ (1,0,1,0),\ (0,0,0,1) \}$$

Base $\perp$ de $L(S)$

6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6.1 Pelo método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

6b) Pelo método da matriz adjunta

$$|A| = (1)(0) + 2(1) = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$, que verifica o método anterior.