FEUP – MIEIC – Álgebra 7-11 nov. 2016

EXRC. 1: Obtenha o subespaço de $\mathbb{R}^3$, formado por todos os vetores que são combinações lineares dos elementos do conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1)\}$.

EXRC. 2:

a) Mostre que $S_1 = \{(1,1,1),(1,-3,-1)\}$ e $S_2 = \{(2,0,1),(0,2,1)\}$ são bases distintas para o mesmo subespaço.

b) Averigue se $(2,-1,1) \in L(S_1)$. O que pode concluir acerca de $S_8 = \{(1,1,1),(1,-3,-1),(2,-1,1)\}$ e $S_9 = \{(2,0,1),(0,2,1),(2,-1,1)\}$?

EXRC. 3: Seja o conjunto de vetores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, $T = \{(2,-1,6),(0,2,-1)\}$; considere os vetores $\vec{u} = (-4,-4,-9)$ e $\vec{v} = (10,7,25)$.

a) Mostre, recorrendo à noção de combinação linear, que apenas um dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertence ao subespaço gerado por T.

b) Calcule o subespaço gerado por T e confirme o resultado encontrado na alínea anterior.

c) Justifique que T é um conjunto linearmente independente.

d) Obtenha uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^3$ que seja uma extensão de T.

EXRC. 4: Seja o conjunto de vetores $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 + 2x_3 \ \wedge \ x_4 = 2x_2 - x_3\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

b) Identifique uma base, U, para S e indique a dimensão do subespaço.

c) Obtenha uma base ordenada V para o espaço linear $\mathbb{R}^4$ que seja uma extensão de U.

d) Exprima o vetor $(1,-1,2,-3) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos elementos da base ordenada V.

Exrc. 5: Considere o subespaço $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$.

a) Determine uma base ortogonal, U, para o subespaço M que inclua o vetor $\vec{u}_1=(1,0,0,1)\in M$.

b) Obtenha uma base ortonormal para M.

c) Construa, a partir da base U, uma base ortogonal, V, e uma base ortonormal, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

d) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{a}=(1,1,-2,2)$ em relação às bases ordenadas V e W.

Exrc 6: Seja $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ um conjunto de vetores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{u}_1=(1,1,0,0)$, $\vec{u}_2=(2,1,1,0)$, $\vec{u}_3=(0,0,1,1)$ e $\vec{u}_4=(1,1,-1,-1)$. Considere, ainda, o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$F=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : 2x+z-w=0 \wedge 2y-z+w=0\}$$

a) Verifique que o conjunto U é linearmente dependente. Justifique.

b) Calcule o subespaço $L(U)$ gerado por U e conclua em relação à sua dimensão.

c) Determine uma base ortogonal, V, para o subespaço $L(U)$ que contenha o maior número possível de elementos de U.

d) Obtenha $L(U)\cap F$ e indique, para este subespaço, uma base e a dimensão.