Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação

Álgebra

2019-11-15

1.º Mini-Teste

Identifique as folhas de capa (<u>nome completo</u>), bem como as folhas de continuação usadas.
Não é permitida a utilização de máquina de calcular nem telemóveis.
Justifique devidamente todas as respostas.
DURAÇÃO Prevista: 1h30

Perguntas

1. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.1 [2 val.] Verifique se o sistema é de Cramer, e caso seja, calcule o valor da incógnita y pelo método de Cramer

1.2 [2 val.] Calcule a inversa da matriz A, usando a matriz dos cofatores. Apresente os cálculos de pelo menos 3 cofatores.

2. [3 val.] Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Para que valores de a e b reais o sistema é possível e determinado?

3. [5 val.] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k+5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 0 \\ k & 2 & k & 2k \end{bmatrix}$. Calcule a característica da matriz A, em função do parâmetro k.

4. Seja A uma matriz regular, de ordem 4, tal que $|A| = 3$.

4.1.[1 val.] Determine $|D|$ sendo $D = A^2 . A^T . A^{-1}$.

4.2. [1 val.] Determine $|B|$ sabendo que $|2 . A^{-1} . B| = 3$.

4.3. [2 val.] Copie para a folha de respostas e complete a afirmação seguinte, de modo a ser verdadeira.
Se o cofator A_{12} de A é 5, então, a entrada na linha ___ e na coluna ___ de A^{-1} é ____.

5. Sejam A, B, C e D vectores de $\mathbb{R}^3$, tais que $A + B = C \times D$, $\|C\| = \|D\| = 1$, $\|A\| = \|B\|$, $\measuredangle(C, D) = 60°$ e $\measuredangle(A, C \times D) = 30°$. Calcule

5.1. [2 val.] $\|B\|$

5.2. [2 val.] $\theta = \measuredangle(A, B)$

António Ferreira, Ana Neves

Álgebra - FEUP - MIEIC 1.º M.T. 2019/2020

2019. nov. 15

1.1 $|A| \neq 0 \iff$ sistema é de Cramer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} \underset{l_2 - l_1 \to l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{D.L.}}{=} -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4+3) = 1 \neq 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$$

1.2. $A^{-1} = \frac{1}{A} \left(\operatorname{cof}(A)\right)^T$

$$= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 1 & 3 & 3 & a \end{array}\right] \underset{l_3 - l_1 \to l_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right]$ $l_3 - l_2 \to l_3$

$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & -b & a-2 \end{array}\right]$

Sistema possível e determinado

$\Leftrightarrow b \neq 0 \ (\wedge\ a \in \mathbb{R})$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & K+5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & K+1 & 1 & 0 \\ K & 2 & K & 2K \end{vmatrix} \underset{C_3 + C_1 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & K+5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & K+1 & 0 & 0 \\ K & 2 & 2K & 2K \end{vmatrix} =$ $C_4 - C_3 \Rightarrow C_4$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & K+3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & K+1 & 0 & 0 \\ K & 2 & 2K & 0 \end{vmatrix} = (K+3)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & K+1 & 0 \\ K & 2 & 2K \end{vmatrix}$

D.L.

$l_1 + l_2 \to l_2$
$l_3 - K l_1 \to l_3$

$= -(K+3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & K & 1 \\ 0 & K+2 & K \end{vmatrix}$

D.L.

$$= -(K+3) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} K & 1 \\ K+2 & K \end{vmatrix}$$

$$= -(K+3)(K^2 - K - 2)$$

$$= -(K+3)(K+1)(K-2)$$

- se $K \neq -3 \wedge K \neq -1 \wedge K \neq 2$, $|A| \neq 0$, ou seja, $r(A) = 4$

- se $K = -3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{l_3 - l_1 \to l_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{D.L.}}{=} 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Existe submatriz de A, 3x3, com determinante não nulo, logo, $r(A) = 3$

• se $K = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{l_3 - l_1 \to l_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\uparrow$ D.L.

$r(A) = 3$ pois existe submatriz de A de dimensões 3×3 com determinante $\neq 0$.

• se $K = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$l_2 - l_1 \to l_2$
$l_3 + l_1 \to l_3$
$l_4 - 2l_1 \to l_4$

$l_3 + 2l_2 \to l_3$

$$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$l_4 - 2l_3 \to l_4$

$r(A) = 3$ pois o número de linhas não nulas, após condensar, é 3.

4.1. $|D| = |A^2 . A^T . A^{-1}|$

$= |A^2| . |A^T| . |A^{-1}|$

$= |A^2| . |A| . |A|^{-1}$

$= |A|^2 . |A| . |A|^{-1}$

$= 3^2 . 3 . \frac{1}{3} = 3^2 = 9$

4.2. $|2 A^{-1} B| = 3 \Leftrightarrow 2^4 . |A|^{-1} . |B| = 3$

$\Leftrightarrow |B| = \dfrac{3}{2^4 . |A|^{-1}} = \dfrac{3}{2^4 . \frac{1}{3}} = \dfrac{9}{16}$

4.3.

$$cof(A) = \begin{pmatrix} \cdot & 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5/3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

"(...) a entrada na linha <u>2</u> e na coluna <u>1</u> de A^{-1} é $\frac{5}{3}$."

5.1 $A + B = C \times D$

$B = C \times D - A$

$\|B\|^2 = \|C \times D - A\|^2$

$\|B\|^2 = \|C \times D\|^2 - 2A \cdot C \times D + \|A\|^2$

c.a. Identidade de Lagrange

$\|C \times D\|^2 = \|C\|^2 \cdot \|D\|^2 - (C \cdot D)^2$

$\|C \times D\|^2 = 1^2 \cdot 1^2 - (\|C\| \cdot \|D\| \cdot \cos 60°)^2$

$\|C \times D\|^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\|C \times D\|^2 = \frac{3}{4}$

$\|C \times D\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c.a.

$A \cdot C \times D = \|A\| \cdot \|C \times D\| \cdot \cos 30°$

$= \|A\| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \|A\| \cdot \frac{3}{4}$

$\cancel{\|B\|^2} = \frac{3}{4} - 2\|A\| \cdot \frac{3}{4} + \cancel{\|B\|^2}$

$2\|A\| \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$2\|A\| = 1$

$\|A\| = \frac{1}{2}$

$\|B\| = \frac{1}{2}$

5.2. $\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{\|A\| . \|B\|} = \dfrac{A . (C \times D - A)}{1/2 \times 1/2} = \dfrac{A . C \times D - \|A\|^2}{1/4}$

$$= 4 \left(A . C \times D - \|A\|^2\right) = 4\left(\|A\| . \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$