Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

(RESOLUÇÃO)

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

Algebra

2013-12-18

2º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (<u>nome completo</u>), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração de 2h00m. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS. JUSTIFIQUE DEVIDAMENTE

1. Seja o plano $M: x+y-z=0$, e a recta $r: X(t)=P+tA, t\in\Re, P=(1,1,1), A=(1,2,0)$. Obtenha:
   a. O ponto I de intersecção da recta r com o plano M.
   b. A equação vectorial da recta s, que é a recta de intersecção do plano M com o plano $M1$, plano que contém a recta r e que passa pelo ponto $Q=(1,2,2)$.
   c. Um plano $M2$, ortogonal à recta r e que passa num ponto desta recta à distância de $\sqrt{3}$ unidades do plano M.

2. Considere as rectas $r: X(t)=P+tA, t\in\Re, P=(3,1,0), A=(2,4,0)$ e $s: 2x+2y-4z=20y=20$.
   a. Classifique as rectas quanto à sua posição relativa. Justifique apresentando os cálculos efectuados.
   b. Calcule o plano M que contém a recta r e é paralelo a s.

3. Considere a transformação linear $T:\Re^2\to\Re^3, T(x,y)=(x,x+y,-x)$ e as bases $C=\{(0,0,-1),(0,1,-1),(1,1,2)\}$, $D=\{(2,-1),(-1,0)\}, E_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, E_2=\{(1,0),(0,1)\}$. Seja ainda a transformação linear $S:\Re^3\to\Re^3, S(x,y,z)=(2x-y,y+z,-x-z)$
   a. Calcule a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas.
   b. Obtenha o núcleo e o contradominio da transformação T; Identifique, para cada um dos subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.
   c. Mostre que T é injectiva e obtenha a lei da transformação inversa, T^{-1}.
   d. Calcule a matriz $m(T)_{D,E_3}$.
   e. Usando o cálculo matricial e a matriz encontrada na alínea anterior, encontre a matriz que representa a composição possível de S com T em relação às bases D e C.

Cotação prevista	1a) 1 valor ; 1b) 2 valores; 1c) 3 valores 2a) 2 valores, 2b) 2 valores, 3a) 1 valor; 3b) 2 valores; 3c) 2 valores 3d) 2 valores; 3e) 3 valores

1a) Ponto $I \in r \rightarrow (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,2,0)$

$$(x,y,z) = (1+t,\ 1+2t,\ 1)$$

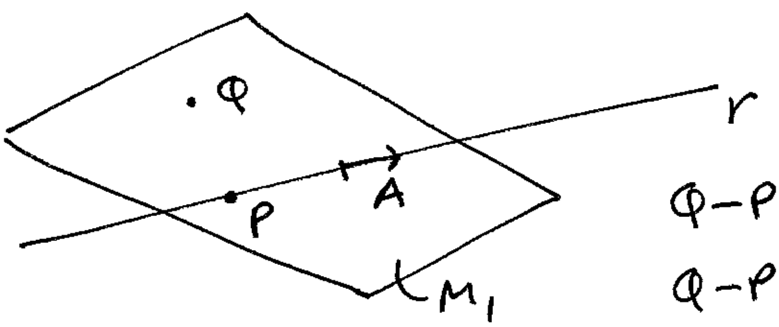
Ponto $I \in M \rightarrow x + y - z = 0$

$$1+t \quad + \quad 1+2t \quad - \quad 1 \quad = 0$$

$$3t = 1 \rightarrow t = 1/3$$

$$I: (x,y,z) = (1 + 1/3,\ 1 + 2/3,\ 1)$$
$$= (4/3,\ 5/3,\ 1)$$

1b) Plano M1:



$$Q - P = (1,2,2) - (1,1,1) =$$
$$Q - P = (0,1,1)$$

vector $\perp M_1$: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$

Plano M_1: $-2x + y - z = -2 + 1 - 1$

$$\boxed{-2x + y - z = -2}$$

intersecção de M com M_1

$M: \quad x+y-z=0 \rightarrow z = x+y$

$M_1: \quad 2x-y+z=2 \rightarrow 2x-y+x+y=2$

$$3x=2 \rightarrow x = 2/3$$
$$\rightarrow z = 2/3 + y$$

2 pontos de recta s : $P_1=(2/3, 0, 2/3)$

$P_2 = (2/3, 1, 5/3)$

vector $P_2 - P_1 = (0,1,1)$

recta s: $(x,y,t) = (2/3, 0, 2/3) + t\,(0,1,1)$

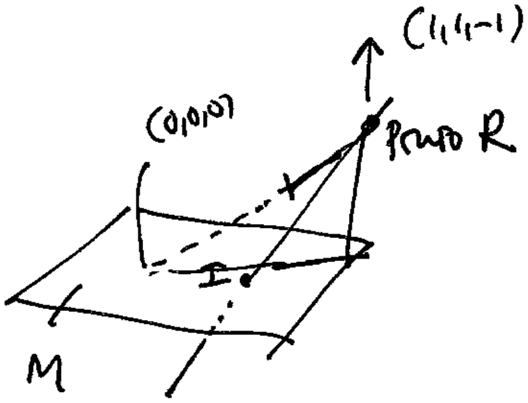
1c) Plano $M_2 \perp r \Rightarrow M_2: (x,y,z) =$ Ponto

$+\, t.$ vector1 $+$

$+\, u.$ vector2

vector $\perp M_2 = (1,2,0)$

logo $M_2: \quad x + 2y = d$



Ponto $R = (1+t,\ 1+2t,\ 1)$

$$R - O = (1+t,\ 1+2t,\ 1)$$

$$\frac{|1+t+1+2t-1|}{(1)\ \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$|3t+1| = 3$$

$3t+1 = 3 \rightarrow t = 2/3$

$3t+1 = -3 \rightarrow t = -4/3$

Ponto $R_1 = (5/3,\ 7/3,\ 1)$

Ponto $R_2 = (-1/3,\ -5/3,\ 1)$

Plano $M_2\ (1)$: $x + 2y = 19/3$

$M_2\ (2)$: $x + 2y = -11/3$

2a) recta r: $P = (3,1,0)$

$A = (2,4,0)$

recta s: $Q = (9,1,0)$] pontos

$Q_1 = (11,1,1)$

$2x + 2 - 4z = 20$

$2x - 4z = 18$

$x - 2z = 9$

$Q_1 - Q = (2,0,1)$ vector

$Q - P = (6,0,0)$

As rectas são enviezadas porque

$$(Q-P) \not\parallel \underbrace{A \times (Q_1 - Q)}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4,-2,-8)$$

ou $$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

2b) Plano M

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,2,0) + s\underbrace{(2,0,1)}_{\text{vector da recta } s}$$

3a) $\underset{E_2,E_3}{m(T)} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ -x \end{bmatrix}$

$$\underset{E_2E_3}{m(T)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3b) $N(T): \{ (x,y) : \underbrace{T(x,y) = (0,0,0)} \}$

$$\begin{matrix} x = 0 \\ x+y = 0 \\ -x = 0 \end{matrix} \rightarrow x = y = 0$$

$N(T) = \{(0,0)\}$; NÃO tem base

$\dim N(T) = 0 \Rightarrow \dim T(V) = 2$

T ñ é sobrejectiva

($\dim W = 3$)

$$T(V) = \{ (a,b,c) : \underbrace{T(x,y) = (a,b,c)} \}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c+a \end{array}\right]$$

o sistema é possível se $a = -c$

$$T(V) = \{ (-c, b, c) \}$$

$$= \{ c(-1,0,1) + b(0,1,0) \}$$

Base $T(V) = \{ (-1,0,1), (0,1,0) \}$

$\dim T(V) = 2$, confirma teorema da nulidade e da ordem.

7

3c) T é injectiva, porque dim $N(T)=0$

$T(x,y) = (a,b,c)$ $\qquad \begin{bmatrix} x = a \\ x+y = b \\ -x = c \end{bmatrix}$

$\underline{T^{-1}(a,b,c)} = (x,y) = \underline{(a, b-a)}$

3d) $\underset{D,E_3}{m(T)} = \underset{E_2,E_3}{m(T)} \cdot [D]$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{D,E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$$
$$x \mapsto T(x) \mapsto S(T(x))$$

ST é possível, mas TS não.

$$\underset{DC}{m}(ST) = C^{-1} \cdot \underset{E_3E_3}{m}(S) \cdot \underbrace{\underset{E_2E_3}{m}(T) \cdot D}_{\text{obtida na alínea anterior}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[C^{-1}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{E_3E_3}{m}(S) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo $\underset{DC}{m}(ST) = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{DC}$