Prof. José A. Trigo Barbosa
Prof. José M. A. César de Sá
Prof. António M. Ferreira

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA I

Exercícios Práticos

Universidade
do Porto
Faculdade de
Engenharia
FEUP

Ano Lectivo 2004/05

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE MATRIZ
DETERMINANTES

Exercícios Propostos

160. Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Calcule $C = A + B$.

161. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Determine as matrizes $B + C$, AB, BA, AC, CA e $A(2B - 3C)$.

162. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine AB, $(AB)C$ e DC.

163. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine todas as matrixes B, 2×2, tais que:

a) $AB = O$. b) $BA = O$.

164. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $(AB)^T$.
b) Será $(AB)^T = A^T B^T$? Ou será $(AB)^T = B^T A^T$?

165. Dadas duas quaisquer matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$, mostre que se verificam as relações:
a) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
b) $(c\,A)^T = c\,A^T$, em que c é um escalar.

166. Em cada uma das alíneas seguintes calcule os valores de a , b , c e d que verificam as igualdades.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

167. Determine todas as matrizes A , 2×2 , tais que $A^2 = O$.

168. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$. Determine as matrizes C e D , 2×2 , tais que $AC = B$ e $DA = B$.

169. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule as matrizes A^3 e A^4 . Apresente uma representação matricial genérica para A^n e mostre-a por indução.

170. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^2 = 2A - I$ e $A^3 = 3A - 2I$. Apresente uma expressão que defina genericamente A^n e mostre-a por indução.

171. Encontre todas as matrizes B , 3×3 , que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

172. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calcule A^T e $2A - A^T$.

b) Verifique se a matriz é regular (ou não singular).

173. Seja A uma matriz quadrada qualquer. Mostre que se verifica a relação $A^m A^n = A^{m+n}$ para todos os inteiros $m \geq 0$ e $n \geq 0$.

174. Determine a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 9 & -9 \\ 2 & 6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

175. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) A característica da matriz A.
b) A matriz $C = (3\,B)^T + A/2$.

176. Mostre que as matrizes dadas têm inversa e calcule as respectivas inversas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

177. Considere as matrizes quadradas A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule, recorrendo à definição, $|A|$ e $|B|$.
b) Determine o valor de $|B^T|$.
c) Utilizando a regra de Sarrus, confirme o valor encontrado para $|B|$.

178. Mostre que se as matrizes regulares A e B comutam entre si, então o mesmo sucede com as matrizes A^{-1} e B.

179. Supondo que A e B são matrizes quadradas $(n \times n)$ e não singulares, mostre que se verifica a igualdade $(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

180. Demonstre que se A é uma matriz não singular, então a sua inversa é única.

181. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que o determinante dado é nulo; recorra apenas às propriedades dos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Nota: Some à 1ª linha a 2ª multiplicada por 2.

b) $\begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix}$.

Nota: Subtraia a 1ª linha à 4ª e a 3ª linha à 2ª.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -8 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

Nota: Some as 3 primeiras colunas à 4ª coluna.

182. Baseando-se exclusivamente nas propriedades dos determinantes, determine o valor de $Q = |A| / |B|$, sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

183. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

determine o valor de $S = |A| + |B|$, soma dos determinantes de A e B, recorrendo apenas às propriedades dos determinantes.

184. Calcule, recorrendo ao método da condensação e às propriedades dos determinantes, o valor de

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

185. Repita o exercício 182, considerando agora as matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & a & 0 & f \\ 2 & 6 & b & 0 & g \\ 3 & 7 & c & 2 & h \\ 4 & 8 & d & 3 & i \\ 5 & 9 & e & 1 & j \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ a & c & b & e & d \\ f & h & g & j & i \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & a & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

186. Calcule, aplicando o desenvolvimento laplaceano sobre a 3ª coluna, o valor do determinante da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

187. Empregando 3 vezes sucessivas o Teorema de Laplace, mostre que o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

é igual a 5 vezes o valor encontrado para $|C|$ no exercício anterior.

188. Considere as matrizes quadradas A e B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & k & k & k \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 1 & k & 2 \\ -1 & 3 & k & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine k de forma que $|A| + |B| = 1$.

189. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $|A| = 1$, determine o valor dos determinantes das seguintes matrizes:

a) $B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. b) $C = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}$.

c) $D = \begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

190. Considere f, g, p e q quatro funções reais de variável real deriváveis em $]a, b[$.

Seja $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ p(x) & q(x) \end{vmatrix}$ para todo x em $]a, b[$. Prove que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ p(x) & q(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ p'(x) & q'(x) \end{vmatrix}.$$

191. Utilizando, dentro do possível, as propriedades dos determinantes, mostre que:

a) $$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 7 & -5 & 3 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 10 & 14 & 6 & -7 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 18 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & b & c \\ -c & 0 & b & b \\ c & d & d & d \\ 0 & b & b & c \end{vmatrix} = -ad, \text{ sabendo que } \Delta = \begin{vmatrix} b & b \\ b & c \end{vmatrix} = 1.$$

c) $$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ 3 & a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix} = a, \text{ sabendo que } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

192. Mostre que, sendo a , b , c e d parâmetros reais não nulos, verifica-se a relação

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} =$$

$$= a\,b\,c\,d\,(1 + 1/a + 1/b + 1/c + 1/d)\,.$$

193. Mostre que, quaisquer que sejam os parâmetros reais a , b e c , subsiste a relação

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)\,(c - a)\,(c - b)\,.$$

194. Tendo em atenção a igualdade estabelecida no exercício anterior, mostre que se

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

e sendo x , y e z números distintos e não nulos, deverá verificar-se $1 + x\,y\,z = 0$.

195. Calcule o valor dos seguintes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -9 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 8 \\ -4 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}$. b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

c) $|C| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & d & 0 \\ a & c & 0 & a & a \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ a & a & c & a & 0 \end{vmatrix}$. d) $|D| = \begin{vmatrix} a & 0 & b & d & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & d & 0 \\ b & d & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$.

e) $|E| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

196. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $|A|$. Em que condições a matriz A é regular ou não singular?

b) Considere que $a = 3$ e $b = 2$. Sendo B e C duas matrizes reais do tipo 4×4 e sabendo que $(A^T)^{-1} = C^{-1} B C$, determine $|B|$.

197. Para cada um dos determinantes de ordem n abaixo apresentados, mostre que são verdadeiras as igualdades estabelecidas.

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_{n-1} \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_{n-1}.$$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} = (x + n a - a)(x - a)^{n-1}.$$

Nota: adicione à 1ª coluna todas as restantes.

c) $$|C| = \begin{vmatrix} 1+x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + x(1 - a_{12}).$$

198. Recorrendo à noção de determinante, determine as inversas das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

199. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) O produto $a_{23}\, a_{12}\, a_{31}\, a_{44}$ é um termo da matriz A ? Justifique. Qual é o seu sinal?

b) Dê um exemplo de um menor de ordem 2 da matriz A com sinal negativo e calcule o respectivo complemento algébrico.

c) Calcule $|A|$ utilizando o desenvolvimento laplaceano ao longo da 2ª linha.

d) Seja B uma matriz do tipo 4×4 com $|B| = 16$. Calcule, justificando, o determinante da matriz $(A\,B^{-1})^T$.

e) Sabendo que $C = (1/2)\,A$, determine $|C^{-1}|$, utilizando exclusivamente as propriedades dos determinantes.

200. Recorrendo à noção de determinante, determine a característica das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

201. Em cada uma das alíneas seguintes verifique se o conjunto dado é linearmente independente ou dependente e, neste caso, identifique um subconjunto S' que seja linearmente independente.

a) $S = \{ (1, -1, 0), (0, 1, -1), (2, 3, -1) \}$.

b) $S = \{ (1, -1, 0), (0, 1, -1), (2, -1, -1) \}$.

c) $S = \{ (1, -1, 2, 1), (-1, 2, -1, 0), (3, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \}$.

d) $S = \{ (1, -1, 2, 1), (0, 2, -1, 1), (2, -1, 1, -1), (3, 0, 2, 1) \}$.

e) $S = \{ (1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, -1), (3, -1, 1, 0), (5, -3, 5, 2) \}$.

202. Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Recorrendo à noção de determinante, mostre que A admite inversa.

b) Calcule a matriz A^{-1}.

c) Qual o valor de $|A\,A^{-1}|$? E de $|A^{-1}|$? Justifique.

203. Em cada uma das alíneas seguintes estude a variação da característica da matriz dada, em função dos respectivos parâmetros, recorrendo à noção de determinante.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) $B = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & a+b & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a^2 & a & a \\ a & -a & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

f) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ -a & 2 & 2 & 1 \\ a & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

g) $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

i) $D = \begin{bmatrix} b & 2 & 2 \\ 0 & b+1 & -b-1 \\ 2b & 3 & 1 \\ b & -b & b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

j) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & a \\ 1 & b & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

k) $D = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a(a+2) & a \\ 0 & a(a+2) & a(a+2) \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluções dos Exercícios

160. $C = A + B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$.

161. $B + C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{bmatrix}$;

$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$; $A(2B - 3C) = \begin{bmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{bmatrix}$.

162. $AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 & 14 \\ 11 & 0 & -5 & 11 \end{bmatrix}$, $(AB)C = \begin{bmatrix} 101 \\ 89 \end{bmatrix}$ e $DC = [19] = 19$.

163. a) $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$.

b) $B = \begin{bmatrix} -2\,b_{12} & b_{12} \\ -2\,b_{22} & b_{22} \end{bmatrix}$, $b_{12}, b_{22} \in \mathbb{R}$.

164. a) $(AB)^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$. b) É verdadeira : $(AB)^T = B^T A^T$.

165. a) - - - - - b) - - - - -

166. a) $a = 9 \wedge b = 6 \wedge c = 1 \wedge d = 5$. b) $a = 1 \wedge b = 6 \wedge c = 0 \wedge d = -2$.

167. $A = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix} \wedge d^2 = -bc \wedge b, c \in \mathbb{R}$.

168. $C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 16 & 14 \end{bmatrix}$ e $D = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 33 & 19 \\ 43 & 25 \end{bmatrix}$.

169. $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(n \geq 0)$.

170. $A^n = n\,A - (n-1)\,I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix} \quad (n \geq 0)$.

171. $B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & g \end{bmatrix} \ \wedge \ e = -3a + 3g \ \wedge \ f = -3b \ \wedge \ a,b,c,d,g \in \mathbb{R}$.

172. a) $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ e $2A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 7 & 2 & 14 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

b) A matriz quadrada A é não singular (ou regular), admitindo inversa.

173. -----

174. A característica de A tem o valor: $r(A) = 4$.

175. a) Tem o valor: $r(A) = 3$. b) $C = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & 7 & -5 \\ 9 & 20 & 20 \\ 4 & -3 & 16 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

176. a) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. b) $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & -1 \\ -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

177. a) $|A| = -1$ e $|B| = 30$. b) $|B^T| = |B| = 30$. c) -----

178. -----

179. -----

180. -----

181. a) ----- b) ----- c) -----

182. $Q = |A| / |B| = 2$.

183. $S = |A| + |B| = 0$.

184. $|A| = 7$.

185. a) $Q = |A| / |B| = -1$. b) $Q = |A| / |B| = 1$.

186. $|C| = 4\,(2-3) - 5\,(6-2) + 7\,(18-4) = 74$.

187. $|B| = 5\,|C|$.

188. $k = 1/7$.

189. a) $|B| = 1$. b) $|C| = 1$. c) $|D| = 1$.

190. - - - - -

191. a) - - - - - b) - - - - - c) - - - - -

192. - - - - -

193. - - - - -

194. - - - - -

195. a) $|A| = 4147$. b) $|B| = 306$. c) $|C| = a^2 c^2 d$.
d) $|D| = -a\,b^2 d^2$. e) $|E| = -3a + 12$.

196. a) $|A| = -(a-1)(b-1)$. A matriz A é regular se e só se $a \neq 1 \ \wedge \ b \neq 1$.
b) Para $a = 3 \ \wedge \ b = 2$ tem-se $|A| = -2$. Então $|B| = 1/|A| = -1/2$.

197. a) - - - - - b) - - - - - c) - - - - -

198. a) $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. b) $B^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $C^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} -9 & 7 & 10 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. d) $D^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

199. a) $a_{23}\,a_{12}\,a_{31}\,a_{44}$ é um termo da matriz A já que é o produto de 4 elementos de A, com um e um só factor em cada linha, e um e um só factor em cada coluna. O nº de inversões dos índices das linhas é 1 enquanto que o nº de inversões dos índices das colunas é 3; o sinal do termo tem então o valor $(-1)^{1+3} = +1$ (termo positivo).
b) Um menor de ordem 2 da matriz A é, por exemplo, o determinante

$$|A(1,3\,;\,1,4)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

com sinal $(-1)^{1+3+1+4} = -1$, isto é, negativo. O complemento algébrico (cofactor) é

$$A(2,4\,;\,2,3) = (-1)^{2+4+2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-18) = 18\,.$$

c) Utilizando o desenvolvimento laplaceano ao longo da 2ª linha obtém-se

$$|A| = 1\ (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\ (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 1\,(-72) + 1\,(40) = -32$.

d) $|(A\,B^{-1})^T| = |A| / |B| = -32/16 = -2$.

e) $|C| = (1/2)^4\,|A|$; assim $|C^{-1}| = 1/|C| = 2^4/(-32) = -1/2$.

200. a) $r(A) = 4$. b) $r(B) = 3$. c) $r(C) = 3$.
d) $r(D) = 3$.

201. a) S é independente.
b) S é dependente; $S' = \{ (1, -1, 0), (0, 1, -1) \}$, por exemplo.
c) S é independente.
d) S é dependente; $S' = \{ (1, -1, 2, 1), (0, 2, -1, 1), (2, -1, 1, -1) \}$, por exemplo.
e) S é dependente; $S' = \{ (1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, -1) \}$, por exemplo.

202. a) $r(A) = 3$, já que $|A| = -8 \neq 0$.

b) $$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $|A\,A^{-1}| = |I| = 1$; $|A^{-1}| = 1/|A| = -1/8$, já que $|A\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$.

203. a) $r(A) = 3:\ a \neq 13/12$; $r(A) = 2:\ a = 13/12$.
b) $r(A) = 0:\ a = b = c = 0$; $r(A) = 2:\ a \neq 0 \ \vee\ b \neq 0 \ \vee\ c \neq 0$.
c) $r(B) = 3:\ b \neq -2 \ \wedge\ a \neq -b$.
$r(B) = 2:\ (a = -b \ \wedge\ b \in \mathbb{R}) \ \vee\ (b = -2 \ \wedge\ a \in \mathbb{R})$.
d) $r(C) = 4:\ a \neq 1 \ \wedge\ b \in \mathbb{R}$; $r(C) = 3:\ a = 1 \ \wedge\ b \in \mathbb{R}$.
e) $r(A) = 3:\ a \neq -1 \ \wedge\ a \neq 0 \ \wedge\ a \neq 1$; $r(A) = 2:\ a = -1 \ \vee\ a = 0 \ \vee\ a = 1$.
f) $r(C) = 4:\ a \neq 5$; $r(C) = 3:\ a = 5$.
g) $r(B) = 4:\ a \neq -3 \ \wedge\ a \neq 1$; $r(B) = 3:\ a = -3$; $r(B) = 1:\ a = 1$.
h) $r(A) = 2:\ a = 8$; $r(A) = 3:\ a \neq 8$.
i) $r(D) = 2:\ b = -1 \ \vee\ b = 0$; $r(D) = 3:\ b \neq -1 \ \wedge\ b \neq 0$.
j) $r(A) = 2:\ b = -1 \ \wedge\ a = 2$.
$r(A) = 3:\ (b \neq -1 \ \wedge\ a \in \mathbb{R}) \ \vee\ (b = -1 \ \wedge\ a \neq 2)$.
k) $r(D) = 3:\ a \neq -2 \ \wedge\ a \neq -1 \ \wedge\ a \neq 0$; $r(D) = 2:\ a = -2 \ \vee\ a = -1$.
$r(D) = 0:\ a = 0$.