

ÁLGEBRA VECTORIAL

Introdução

- Estudo das operações (definição, propriedades e aplicações) que podem ser realizadas com os vectores.
- A noção de *vector* pode ser encontrada em diversas áreas da ciência:
 - i) **Geometria**: recta, plano, curva, superfície, etc;
 - ii) **Análise**: sistemas de equações lineares, gradiente, derivada direccional, etc;
 - iii) **Física**: força, deslocamento, velocidade, aceleração, etc;
 - iv) **Mecânica**: estática, cinemática, dinâmica, cálculo estrutural, etc.

Estudo dos vectores

- **Geométrico**:
 - i) Vectores – *segmentos orientados* definidos pelo *ponto de aplicação*, *direcção*, *sentido* e *norma* (*comprimento*);
 - ii) Operações – definidas e estudadas usando métodos geométricos (*regra do paralelogramo*, ou *do triângulo*, por exemplo).
- **Analítico**:
 - i) Vectores – representados a partir das suas *coordenadas* (escalares reais);
 - ii) Operações – definidas a partir das coordenadas dos vectores e estudadas recorrendo às propriedades dos escalares reais.

- **Axiomático:**
 - i) Vectores e operações – conceitos abstractos que devem satisfazer um certo conjunto de axiomas pré-definidos (noção de *Espaço Linear ou Vectorial*);
 - ii) Propriedades das operações – derivadas a partir dos axiomas referidos.

Representação matemática (coordenadas)

- Espaço unidimensional, \mathbb{R}

$$\vec{a} = \mathbf{a} = (a)$$

Vector posição do ponto A: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a)$

- Espaço bidimensional, \mathbb{R}^2

Referencial *ortonormal* (*ortogonal e monométrico*) *Oxy*

$$\vec{a} = \mathbf{a} = (a_1, a_2)$$

a_1 : *abcissa*

a_2 : *ordenada*

Vector posição do ponto A: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$

- Espaço tridimensional, \mathbb{R}^3

Referencial *ortonormal* (*ortogonal* e *monométrico*) e *directo* (ou *positivo*) *Oxyz*

$$\vec{a} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

a_1 : *abscissa*

a_2 : *ordenada*

a_3 : *cota*

Vector posição do ponto A : $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

- Espaço n -dimensional, \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Vector posição do ponto A : $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

Igualdade de vectores

Definição: Os vectores de \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

são *iguais*, se e só se possuírem as mesmas coordenadas, isto é,

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

ou

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Adição de vectores

Definição: Sejam os vectores de \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

O *vector adição* de \vec{a} com \vec{b} é o vector $\vec{a} + \vec{b}$, cujas coordenadas são dadas por

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$$

- A definição apresentada satisfaz a *regra do paralelogramo*, ou *do triângulo*, para a adição de vectores em \mathbb{R}^2 .

Propriedades: Sejam os vectores \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} de \mathbb{R}^n

a) Propriedade *comutativa*: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

b) Propriedade *associativa*: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

c) Existência de *elemento zero*: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

d) Existência de *elemento simétrico*, ou *oposto*: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

- Em \mathbb{R}^n , o *elemento zero* é o *vector nulo*:

$$\vec{0} = \mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

- Em \mathbb{R}^n , o *vector simétrico*, ou *oposto*, de \vec{x} é o vector:

$$-\vec{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$$

- A *subtração* de vectores pode ser encarada como um caso particular da adição; sendo \vec{x} e \vec{y} vectores de \mathbb{R}^n , o *vector subtração* $\vec{x} - \vec{y}$ é o resultado da adição do vector \vec{x} com o *vector simétrico*, ou *oposto*, de \vec{y} , ou seja,

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n)$$

Multiplicação por escalar

Definição: Seja o vector de \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

O *vector multiplicação* de \vec{a} pelo escalar $k \in \mathbb{R}$ é o vector $k\vec{a}$, cujas coordenadas são dadas por

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3, \dots, ka_n)$$

dizendo-se, neste caso, que \vec{a} e $k\vec{a}$ são *vectores múltiplos*.

- Em \mathbb{R}^n , o *vector simétrico*, ou *oposto*, de \vec{x} pode ser expresso sob a forma:

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$$

Propriedades: Sejam os vectores \vec{x} e \vec{y} de \mathbb{R}^n e os escalares $k, h \in \mathbb{R}$:

a) Propriedade *associativa*: $k(h\vec{x}) = (kh)\vec{x} = h(k\vec{x})$

b) Propriedade *distributiva em relação à adição de vectores*:

$$k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y}$$

c) Propriedade *distributiva em relação à adição de escalares*:

$$(k + h)\vec{x} = k\vec{x} + h\vec{x}$$

d) Existência de *elemento unidade*: $1\vec{x} = \vec{x}$

Definição: Paralelismo ou colinearidade entre vectores

Dois vectores \vec{x} e \vec{y} de \mathbb{R}^n dizem-se *paralelos*, ou *colineares*, sendo usada a notação $\vec{x} \parallel \vec{y}$ para exprimir tal condição, se e só se existir um escalar não nulo k , tal que $\vec{y} = k\vec{x}$, isto é,

$$\vec{x} \parallel \vec{y} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{y} = k\vec{x}$$

Se $k > 0$ os vectores \vec{x} e \vec{y} têm o mesmo sentido, se $k < 0$ possuem sentidos opostos.

Vectores coordenados unitários – \mathbb{R}^2

- São os vectores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$:
 - i) O vector $\vec{i} = (1,0)$ define o eixo dos xx ;
 - ii) O vector $\vec{j} = (0,1)$ define o eixo dos yy ;
 - iii) Definem o *referencial ortonormal* Oxy ou (O, \vec{i}, \vec{j}) ;
 - iv) Possuem *norma (comprimento) unitária* (são *versores*);
 - v) São *vectores ortogonais*;
 - vi) São *vectores ortonormados*.
- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ de \mathbb{R}^2 :
 - i) Pode escrever-se como *combinação linear* dos versores \vec{i} e \vec{j}
$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$
 - ii) Os *escalares* a_1 e a_2 da combinação linear *são únicos*;
 - iii) O vector \vec{a} é *gerado de forma única* pelos versores \vec{i} e \vec{j} ;
 - iv) Os versores \vec{i} e \vec{j} *geram de forma única* qualquer vector de \mathbb{R}^2 ;
 - v) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é uma *base* para os vectores de \mathbb{R}^2 ;
 - vi) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é uma *base ortonormal* para \mathbb{R}^2 ;
 - vii) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para \mathbb{R}^2 .

- Relativamente ao vector de \mathbb{R}^2

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

- i) O vector $a_1\vec{i}$ é a 1ª componente (na direcção de \vec{i} ou na direcção do eixo dos xx) do vector \vec{a} ;
- ii) O vector $a_2\vec{j}$ é a 2ª componente (na direcção de \vec{j} ou na direcção do eixo dos yy) do vector \vec{a} ;
- iii) Os escalares a_1 e a_2 da combinação linear são as coordenadas do vector \vec{a} em relação à base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ou em relação ao referencial ortonormal Oxy ou (O, \vec{i}, \vec{j}) ;
- iv) Os escalares a_1 e a_2 são as coordenadas naturais de \vec{a} .

Vectores coordenados unitários – \mathbb{R}^3

- São os vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$:
 - i) O vector $\vec{i} = (1,0,0)$ define o eixo dos xx ;
 - ii) O vector $\vec{j} = (0,1,0)$ define o eixo dos yy ;
 - iii) O vector $\vec{k} = (0,0,1)$ define o eixo dos zz ;
 - iv) Definem o *referencial ortonormal* $Oxyz$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
 - iv) Possuem *norma (comprimento) unitária* (são *versores*);
 - v) São *vectores ortogonais*;
 - vi) São *vectores ortonormados*.
- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ de \mathbb{R}^3 :
 - i) Pode escrever-se como *combinação linear* dos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k}
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
 - ii) Os *escalares* a_1 , a_2 e a_3 da combinação linear *são únicos*;
 - iii) O vector \vec{a} é *gerado de forma única* pelos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} ;
 - iv) Os versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} *geram de forma única* qualquer vector de \mathbb{R}^3 ;
 - v) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma *base* para os vectores de \mathbb{R}^3 ;
 - vi) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma *base ortonormal* para \mathbb{R}^3 ;
 - vii) O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para \mathbb{R}^3 .

- Relativamente ao vector de \mathbb{R}^3

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

- i) O vector $a_1\vec{i}$ é a 1ª componente (na direcção de \vec{i} ou na direcção do eixo dos xx) do vector \vec{a} ;
- ii) O vector $a_2\vec{j}$ é a 2ª componente (na direcção de \vec{j} ou na direcção do eixo dos yy) do vector \vec{a} ;
- iii) O vector $a_3\vec{k}$ é a 3ª componente (na direcção de \vec{k} ou na direcção do eixo dos zz) do vector \vec{a} ;
- iv) Os escalares a_1 , a_2 e a_3 da combinação linear são as coordenadas do vector \vec{a} em relação à base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ou em relação ao referencial ortonormal $Oxyz$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- v) Os escalares a_1 , a_2 e a_3 são as coordenadas naturais de \vec{a} .

Vectores coordenados unitários – \mathbb{R}^n

- São os vectores

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

- i) Possuem *norma (comprimento) unitária* (são *versores*);
- ii) São *vectores ortogonais*;
- iii) São *vectores ortonormados*.

- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n :

- i) Pode ser escrito como *combinação linear* dos vectores coordenados unitários

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

- ii) Os *escalares* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ da combinação linear *são únicos*;
- iii) O vector \vec{a} é *gerado de forma única* pelos vectores coordenados unitários;
- iv) Os vectores coordenados unitários *geram de forma única* qualquer vector *de* \mathbb{R}^n ;
- v) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ é uma *base* para os vectores *de* \mathbb{R}^n ;
- vi) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ é uma *base ortonormal* para \mathbb{R}^n ;
- vii) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para \mathbb{R}^n .

- Relativamente ao vector de \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

- i) O vector $a_1 \vec{e}_1$ é a *componente na direcção* de \vec{e}_1 do vector \vec{a} ;
- ii) O vector $a_2 \vec{e}_2$ é a *componente na direcção* de \vec{e}_2 do vector \vec{a} ;
- iii) O vector $a_3 \vec{e}_3$ é a *componente na direcção* de \vec{e}_3 do vector \vec{a} ;
- iv) O vector $a_n \vec{e}_n$ é a *componente na direcção* de \vec{e}_n do vector \vec{a} ;
- v) Os escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ da *combinação linear* são as *coordenadas* do vector \vec{a} em relação à *base canónica* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$;
- vi) Os escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são as *coordenadas naturais* de \vec{a} .