Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação

Álgebra

2017-11-10

1.º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração máxima de 2h00m. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

1. Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, estude a dependência da solução do sistema de equações lineares em relação aos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - 3y + 7z = 1 \\ 5x + 5y + az = b \end{cases}$$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -9 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   2.1. Calcule $tr(A).B.B^T$, sendo $tr(A)$ o traço de A.

   2.2. Calcule o determinante de A e conclua sobre o valor de $r(A)$, a característica de A.

3. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$ e usando, sempre que possível, as propriedades dos determinantes,

   mostre que $\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 4 & 4a+4 & 4b+2 & 4c \\ 9 & 3a+3 & 3b+6 & 3c+3 \end{vmatrix} = 2a$.

4. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} y - z = 1 \\ 2x + 3y = -1 \\ ax + z = 2 \end{cases}$.

   4.1. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema seja de Cramer.

   4.2. Considerando $a = 0$ e utilizando a regra de Cramer, determine o valor da incógnita x.

5. Considere $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule M^{-1}, a inversa de M, pelo método da matriz adjunta.

6. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vectores de $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = \|\vec{d}\|$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ e $\measuredangle(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Calcule

6.1. $\|\vec{d}\|$

6.2. $\theta = \measuredangle(\vec{c},\vec{d})$

Cotação prevista	1) 3val; 2) 3val; 3) 4val; 4) 3val; 5) 3val; 6) 4val

Os docentes: *António Ferreira* e *Ana Neves*

FEUP - MiEiC - Álgebra

1.º MT 2017. nov. 10

1. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & a & b \end{array}\right] \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & a & b \end{array}\right]$$

$l_2 - 3l_1 \to l_2$
$l_3 - 5l_1 \to l_3$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & -1 \\ 0 & 20 & a-35 & b-5 \end{array}\right] \underset{l_3 - 2l_2 \to l_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & 1 \\ 0 & 0 & a+9 & b-3 \end{array}\right]$$

- se $a \neq -9$, $b \in \mathbb{R}$
  o sistema é possível e determinado

- se $a = -9 \wedge b \neq 3$
  o sistema é impossível

- se $a = -9 \wedge b = 3$
  o sistema é possível e simplesmente indeterminado

2.1 $tr(A) = -1 - 4 + 2 + 1 = -2$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|c} & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 2 & B^T \\ & & & & -1 & 2 & \\ \hline & 3 & 0 & -1 & 10 & 1 & \\ B & 1 & 2 & 2 & 1 & 9 & \end{array}$$

$$tr(A) \cdot B \cdot B^T = -2 \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -2 \\ -2 & -18 \end{bmatrix}$$

2.2. Fazendo o desenvolvimento de Laplace ao longo da 3.ª coluna

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -9 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{D.L.} \end{array} = 2 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-66) = -132 \neq 0$$

Como se trata de uma matriz 4×4 com determinante não nulo, $r(A) = 4$.

C.A.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 88 + 45) - (-36 + 8 + 55)$$

$$\begin{matrix} -1 & 5 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{matrix}$$

$$= -39 - (27) = -66$$

3. $$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 4 & 4a+4 & 4b+2 & 4c \\ 9 & 3a+3 & 3b+6 & 3c+3 \end{vmatrix} =$$

$l_3 - 4l_2 \to l_3$
$l_4 - 3l_2 \to l_4$

$$= \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$l_4/3 \to l_4$

$$= 3 \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$l_1 - l_4 \to l_1$

$$= 3 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Fazendo o desenvolvimento de Laplace ao longo da 1.ª linha

5

$$= 3 . a . (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$l_2/2 \rightarrow l_2$

$$= 3a \times 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 . a \times 2 \times \frac{1}{3} = 2a$$

4.1. Queremos $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \quad\quad\ \text{D.L.} \\ \quad\quad\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$l_2 - 3l_1 \rightarrow l_2$

$$= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -(2-3a)$$

Se $a \neq \frac{2}{3}$, o sistema é de Cramer

4.2. se $a = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 3 \times 0) = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5$$

C. A.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} = (3 + 0 + 0) - (-6 + 0 - 1)$$

$$= 3 + 7 = 10$$

8

5. $$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \left(Adj(M) \right)^T$$

Pela última questão, $|M| = -2$

$$Adj(M) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6.1 $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c}$

$$\|d\|^2 = \|\vec{a} \times \vec{b} - \vec{c}\|^2$$

$$= \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 - 2\vec{c} . \vec{a} \times \vec{b} + \|c\|^2$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 . \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$$

$$= 1 . 1 - (\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos \tfrac{\pi}{3})^2$$

$$= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - 2\vec{c} . \vec{a} \times \vec{b} + \|\vec{c}\|^2$$

$$= \frac{3}{4} - 2 . \|\vec{c}\| . \|\vec{a} \times \vec{b}\| . \cos \frac{\pi}{6} + \|\vec{c}\|^2$$

$$= \frac{3}{4} - 2\|\vec{c}\| . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \|\vec{c}\|^2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\|\vec{c}\| + \|\vec{c}\|^2$$

Como $\|\vec{c}\| = \|\vec{d}\|$

$$\cancel{\|\vec{d}\|^2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\|\vec{d}\| + \cancel{\|\vec{d}\|^2}$$

$$\frac{3}{2}\|\vec{d}\| = \frac{3}{4}$$

$$\|\vec{d}\| = \frac{1}{2}$$

6.2. $\cos\theta = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{d}\|}$

$$= \frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c})}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{d}\|}$$

$$= \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} - \|\vec{c}\|^2}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{d}\|}$$

$$= \frac{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \|c\|^2}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{d}\|}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, logo, $\theta = \measuredangle(\vec{c},\vec{d}) = \frac{\pi}{3}$