Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Eng Informática e Computação

Algebra

2016-01-21

3º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração máxima de 1h15m. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

1. Considere a transformação linear T, definida por $T(x,y) = (x, x+y, x-y)$ e a transformação linear S, definida por $S(1,1,1) = (3,2,1), S(1,0,1) = (2,1,1), S(0,0,1) = (1,1,0)$. Considere ainda duas bases, $V = \{(1,1),(-1,1)\}$ e $U = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$.
   a. Calcule o núcleo e o contradomínio de T, bases e dimensões respectivas.
   b. Se possível , calcule a transformação inversa de T
   c. Calcule a matriz da transformação composta ST, nas bases V do domínio e U do conjunto de chegada $m(ST)_{(VU)}$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, que representa a transformação linear T, nas bases canónicas do domínio e conjunto de chegada
   a) Calcule os valores e vetores próprios de A
   b) Calcule, se possível, a matriz diagonal, semelhante a A, relativamente a bases de vetores próprios de A, no domínio e conjunto de chegada. Indique a base de vetores próprios e a matriz diagonalizadora.

Cotação prevista	1a) 3 valores ; 1b) 3 valores; 1c) 4 valores 2a) 6 valores, 2b) 4 valores

1\. a) Núcleo de T: $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0,0)\}$

$T(x,y) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x, x+y, x-y) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$N(T) = \{(0,0)\}$

Base de $N(T) = \{\ \}$

$\dim N(T) = 0$ ($\Rightarrow$ T é injectiva

$\Rightarrow$ existe T^{-1})

Contradomínio:

$T(x,y) = (a,b,c)$

$\Leftrightarrow (x, x+y, x-y) = (a,b,c)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x+y = b \\ x-y = c \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right]$$

o sistema só é possível se

$c + b - a = 0$

$\Leftrightarrow c = a - b$

contradomínio de T: $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a - b\}$

$$(a,b,c) = (a, b, a-b)$$
$$= (a, 0, a) + (0, b, -b)$$
$$= a(1,0,1) + b(0,1,-1)$$

Base de $T(\mathbb{R}^2) = \{(1,0,1), (0,1,-1)\}$

dimensão de $T(\mathbb{R}^2) = 2$

1.b) De acordo com os cálculos da alínea anterior

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ \ldots & & \ldots \end{array}\right]$$

$$T^{-1} : T(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$$
$$T^{-1}(a, b, a-b) = (a, b-a)$$

1. c)

$$m(ST)_{E_2E_3} = m(S)_{E_3E_3}\, m(T)_{E_2E_3}$$

$$m(ST)_{VU} = U^{-1}\, m(ST)_{EE}\, V$$

com $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$U^{-1} = \frac{1}{|U|}\left(Adj(U)\right)^T$$

$$|U| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$\uparrow$
D.L.

$$U^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m(ST)_{VU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} m(S)_{EE} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$m(S)_{EE} = ?$

$$\begin{cases} S(1,0,0) = ? \\ S(0,1,0) = ? \\ S(0,0,1) = (1,1,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(1,1,1) = (3,2,1) \\ S(1,0,1) = (2,1,1) \\ S(0,0,1) = (1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{i}) + S(\vec{j}) + S(\vec{k}) = (3,2,1) \\ S(\vec{i}) + S(\vec{k}) = (2,1,1) \\ S(\vec{k}) = (1,1,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{j}) = (3,2,1) - S(\vec{k}) - S(\vec{i}) = (3,2,1) - (1,1,0) - (1,0,1) \\ S(\vec{i}) = (2,1,1) - (1,1,0) = (1,0,1) \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{j}) = (1,1,0) \\ S(\vec{i}) = (1,0,1) \\ S(\vec{k}) = (1,1,0) \end{cases}$$

$$m(S)_{EE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m(ST)_{VU} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. a)

$$\text{D.L.} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 (2-\lambda-1) + (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -1(1-\lambda) + (1-\lambda)\left[(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)-1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(-1+(2-3\lambda+\lambda^2)-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \quad \vee \quad \cancel{2} - 3\lambda + \lambda^2 - \cancel{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda(-3+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 3$$

• $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}(0) = (x, -x, 0), \quad x \neq 0$$

• $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}(1) = (0, z, -z), \quad z \neq 0$$

$\cdot\ \lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y + y + z = 0 \\ x = 2y \\ 2y + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3y \\ x = 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}(3) = (2y, y, 3y), \quad y \neq 0$$

2.b) matriz diagonal semelhante a A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matriz diagonalizadora $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

base $= \{(1,-1,0), (0,1,-1), (2,1,3)\}$

vetores
próprios