Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação

Álgebra

2015-10-27

1. Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração de 1h30m. A desistência só é possível 30m após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráfica nem de microcomputadores.

Perguntas

1. [3 valores] Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e calcule, se possível,
$M_1 = 3(B)^T - 2I + C$
$M_2 = 2AB^T + 3I - C$
$M_3 = AC^T + 3I + 2B$

em que I representa a matriz identidade de ordem 2.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

a) [1 valor] Calcule, pelo método da condensação, o valor do determinante de A.
b) [1 valor] Diga, justificando, qual o valor da característica de A.
c) [3 valores] Verifique se o sistema $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 2 \\ 2x + 4z + 5y = 0 \end{cases}$ é um sistema de Cramer e, em caso afirmativo, resolva-o por esse método.

3. [4 valores] Para cada uma das matrizes seguintes, diga, justificando, se existe a matriz inversa. Em caso afirmativo, calcule-a. Nesta questão, numa das matrizes terá de utilizar obrigatoriamente o cálculo da inversa com o método da matriz adjunta e, noutra matriz, o método de Gauss-Jordan.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\ M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.\ M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.\ M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. [4 valores] Utilizando, dentro do possível, as propriedades dos determinantes, mostre que

$$\begin{vmatrix} a+3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2a+2 & a+1 \\ 2 & b & 2b+1 & b+2 \\ 1 & c & 2c & c+1 \end{vmatrix} = a, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

5. [4 valores] Verifique para que valores de a e b matriz A é singular

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1)

1. $M_1 = 3\underbrace{B^T}_{3\times 2} - 2\underbrace{I}_{2\times 2} + C$

Impossível calcular X

$M_2 = 2AB^T + 3I - C$

$$= 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

possível → Resultado é 2x2

$$= 2\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

				3	1
				1	0
				-1	1
A	1	2	-1	6	0
	0	1	2	-1	2

B^T

$A \times B^T$

$$M_3 = AC^T + \underbrace{3I + 2B}$$

Impossível calcular pois o número de colunas é diferente

2. a) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -7 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

2. b) $r(A) = 3$ porque é uma matriz quadrada de ordem 3 e $|A| = 1 \neq 0$

2c) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2 + 5y + 4z = 0 \\ x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$ logo, o sistema é de Cramer

2.a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\begin{array}{c} \downarrow \text{D.L.} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -11 & -8 \end{vmatrix} \end{array}}{1} = 1.($$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -11 & -8 \end{vmatrix} = -40 + 44 = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \begin{array}{ccc} \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$= (0 + 12 + 4) - (0 + 8 - 4) = 16 - 4 = 12$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Solução: $(x, y, z) = (4, 12, -17)$

3. $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\uparrow$

D.L.

$= -(1+3) = -4 \neq 0$ Logo, existe M_1^{-1}

Calculemos M_1^{-1} pelo método da matriz adjunta

$$\operatorname{Adj}(M_1) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \frac{1}{|M_1|}\left[Adj\,(M_1)\right]^T = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$|M_2| = 6 - 6 = 0$

Não existe M_2^{-1}

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ D. L.

$$= 1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 20 + 20 = 0$$

$|M_3| = 0 \Rightarrow$ Não existe M_3^{-1}

$$|M_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ D.L.

$$= 1\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-8-2) = 10$$

$|M_4| \neq 0$ logo, existe inversa de M_4

Calcular M_4^{-1} pelo método de Gauss - Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

8

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/10 & 1+1/10 & 4/10 \\ 0 & 1 & 0 & -2/10 & 1-2/10 & 1-8/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/10 & 11/10 & 4/10 \\ 0 & 1 & 0 & -2/10 & 8/10 & 2/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (1+4)/10 & \frac{11-16}{10} & \frac{4-4}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -2/10 & 8/10 & 2/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \end{array}\right]$$

$$M_4^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(10)

4. $$\begin{vmatrix} a+3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2a+2 & a+1 \\ 2 & b & 2b+1 & b+2 \\ 1 & c & 2c & c+1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 2a+2 & a+1 \\ b & 2b+1 & b+2 \\ c & 2c & c+1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 + 2(-1)^{1+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a+1 \\ 2 & b & b+2 \\ 1 & c & c+1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$(C_3 = C_1 + C_2)$

$$+ 3(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & a & 2a+2 \\ 2 & b & 2b+1 \\ 1 & c & 2c \end{vmatrix}$$

$C_3 = C_3 - C_1$

$$= (a+3) \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det = 1$$

$C_2 = C_2 - 2C_1$

$$+ 0$$

$$- 3 \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}$$

$C_3 = C_3 - 2C_1$

$$= (a+3) \times 1 \quad + 3 \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3) \quad - 3 \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + 3 - 3 = a$$

$\det = 1$

5. Matriz Diagonal por Blocos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-2a)(b+14).(6-10)$$

$\underline{A}$ é regular $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

$\Leftrightarrow (-3-2a)(b+14).(-4) = 0$

$\Leftrightarrow -3-2a = 0 \quad \vee \quad b+14 = 0$

$\Leftrightarrow a = -3/2 \quad \vee \quad b = -14$