MATRIZES

Introdução

A aplicação do cálculo matricial encontra-se disseminada por diversas áreas da ciência, podendo referir-se a título de exemplo:

- *Matemática*: na análise e resolução de sistemas de equações lineares, na transformação das coordenadas de vectores entre sistemas de eixos coordenados distintos, na representação de funções particulares, estudadas na *álgebra linear*, designadas por transformações, ou aplicações, lineares, etc.

- *Mecânica dos Sólidos*: na representação matemática dos estados de deformação e de tensão existentes num determinado ponto de um corpo sujeito a acções exteriores, na representação matemática das propriedades que caracterizam a inércia de um corpo material, etc.

- *Mecânica das Estruturas*: na obtenção de uma solução aproximada para a deformação sofrida por uma estrutura sujeita a carregamento exterior, bem como na determinação das respectivas frequências e modos de vibração no caso das cargas aplicadas possuírem características dinâmicas, etc.

Definição de Matriz

Definição: Matriz do tipo $m\times n$, num corpo Ω

A matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ (i=1,2,…,m ; j=1,2,…,n), ou $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, do tipo $m\times n$ (m por n), num corpo Ω, é um quadro rectangular com m linhas e n colunas em que os seus elementos a_{ij} são escalares de Ω, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Cada elemento a_{ij} da matriz $\boldsymbol{A}$ é identificado por dois índices; o índice i indica a *linha* (i=1,2,…,m), enquanto que o índice j designa a *coluna* (j=1,2,…,n) onde esse elemento se situa na matriz.

- Se m=n, a matriz $\boldsymbol{A}$ diz-se uma *matriz quadrada do tipo $n\times n$* ou *de ordem n*. Se $m\neq n$ ela é denominada por *matriz rectangular*.

- Designa-se por *fila da matriz **A*** uma qualquer linha ou coluna da matriz. Uma *fila* (linha ou coluna) da matriz diz-se *nula* se todos os seus elementos forem nulos. Uma *fila* dir-se-á *não nula* se, pelo menos, um dos seus elementos for diferente de zero.

- Se todos os elementos da matriz forem constantes, então a matriz denomina-se *matriz constante*.

- Se $\Omega = \mathbb{R}$ a matriz será designada por *matriz real*.

- Se $\Omega = \mathbb{C}$ a matriz é chamada de *matriz complexa*.

- Se $m = 1$, a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $1 \times n$ é denominada por *matriz-linha*.

- Se $n = 1$, a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times 1$ é designada por *matriz-coluna*.

- Chama-se *matriz nula* ou *matriz zero*, a matriz $\boldsymbol{O} = (o_{ij})$ cujos elementos são todos iguais a zero; se $\boldsymbol{O}$ for do tipo $m \times n$, verifica-se
$$o_{ij} = 0 \quad (i=1,2,\ldots,m \,;\, j=1,2,\ldots,n)$$

- Chama-se *matriz simétrica* de $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, sendo representada por $-\boldsymbol{A}$, a matriz cujos elementos são simétricos dos elementos de $\boldsymbol{A}$; se $\boldsymbol{A}$ for do tipo $m \times n$, então
$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m \,;\, j=1,2,\ldots,n)$$

- Se eliminarmos, na matriz $\boldsymbol{A}$, m-k linhas ($k<m$) e n-p colunas ($p<n$), obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{A}'$, do tipo $k\times p$, que é designada por *submatriz de* $\boldsymbol{A}$. Às linhas (colunas) da submatriz $\boldsymbol{A}'$ chamam-se *sublinhas* (*subcolunas*) de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo 1: Seja a matriz do tipo 3×5

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz do tipo 2×3

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

é uma submatriz de $\boldsymbol{A}$, já que resultou de $\boldsymbol{A}$ a partir da eliminação das respectivas 2ª linha e 2ª e 4ª colunas.
As linhas da submatriz $\boldsymbol{A}'$ são sublinhas das 1ª e 3ª linhas completas da matriz $\boldsymbol{A}$, enquanto as colunas de $\boldsymbol{A}'$ são subcolunas das 1ª, 3ª e 5ª colunas completas de $\boldsymbol{A}$.

Transposta de uma Matriz

Seja a matriz $\boldsymbol{A}$, do tipo $m\times n$, num corpo Ω.

Definição: Matriz transposta
Chama-se *matriz transposta* de $\boldsymbol{A}$, designando-se por $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, à matriz do tipo $n\times m$, no corpo Ω, que resulta da matriz $\boldsymbol{A}$ mudando, ordenadamente, as linhas para colunas e, portanto, as colunas para linhas.

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz, num corpo Ω, do tipo $m\times n$. Então

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$$

Exemplo 2: Dada a matriz, do tipo 2×3,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a matriz transposta de $\boldsymbol{A}$ é a matriz, do tipo 3×2,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Sejam as matrizes $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, do tipo $m \times n$, num corpo Ω.

Definição: Elementos homólogos
Chamam-se *elementos homólogos* nas matrizes ***A*** e ***B*** aos elementos que se encontram situados na mesma linha e na mesma coluna, ou seja, que possuem índices iguais. Por exemplo, os elementos a_{23} e b_{23} das matrizes são elementos homólogos ($m \geq 2$ e $n \geq 3$).

Definição: Igualdade de matrizes
As matrizes $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ são iguais, ou seja, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, se e só se:

i) São matrizes do mesmo tipo $m \times n$;
ii) Os seus elementos homólogos são iguais entre si, isto é,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m \; ; \; j=1,2,\ldots,n)$$

Adição de matrizes

Definição: Adição de matrizes
Sendo $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ e $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, define-se a *matriz soma* de $\boldsymbol{A}$ com $\boldsymbol{B}$ como sendo a matriz $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ tal que

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são iguais à soma dos elementos homólogos das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

- A adição de duas matrizes só é possível se as matrizes possuirem o mesmo número de linhas e de colunas.

Exemplo 3: Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sendo $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, verifica-se:

a) *Propriedade comutativa*: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

b) *Propriedade associativa*: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

c) *Elemento neutro*: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

d) *Elemento simétrico*: $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

Definição: Subtracção de matrizes

Sendo $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ e $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ duas matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, define-se a *matriz subtracção* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ da seguinte forma

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são obtidos a partir da subtracção dos elementos homólogos das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

Exemplo 4: Considerando as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes, num corpo Ω, do tipo $m \times n$. Então

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 5: Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Por outro lado

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição: Multiplicação de uma matriz por um escalar
Se $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ é uma matriz do tipo $m \times n$, num corpo Ω, e $k \in \Omega$, define-se a *matriz produto* $k\boldsymbol{A}$ como

$$k\boldsymbol{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são iguais ao produto dos elementos de $\boldsymbol{A}$ pelo escalar k.

Exemplo 6: Considerando a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- O conjunto, $\mathrm{M}_{(m,n)}$, das matrizes do tipo $m \times n$ é um *espaço linear* (*vectorial*); real se $\Omega = \mathbb{R}$, e complexo se $\Omega = \mathbb{C}$.

Teorema: Sendo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, e $x, y \in \Omega$, então:

a) *Propriedade associativa*: $x(y\boldsymbol{A}) = (xy)\boldsymbol{A} = y(x\boldsymbol{A})$.

b) *Propriedade distributiva em relação à adição de matrizes*:

$$x(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = x\boldsymbol{A} + x\boldsymbol{B}$$

c) *Propriedade distributiva em relação à adição de escalares*:

$$(x+y)\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{A}$$

d) *Elemento neutro*: $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

- *Subtracção de matrizes*: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}$.

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz, num corpo Ω, do tipo $m \times n$ e $k \in \Omega$. Então

$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 7: Em relação às matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(2\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Definição: Multiplicação de matrizes

Sejam $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ uma matriz do tipo $m \times p$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ uma matriz do tipo $p \times n$, ambas num mesmo corpo Ω, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,p} \text{ e } \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{p,n}$$

Então, o *produto da matriz* ***A*** *pela matriz* ***B*** é definido pela matriz ***AB*** do tipo $m \times n$, no corpo Ω, tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad (i=1,2,\ldots,m \,;\, j=1,2,\ldots,n)$$

- O produto de matrizes ***AB*** só será possível, se

  nº colunas (p) de ***A*** = nº linhas (p) de ***B***

- nº linhas (m) de ***AB*** = nº linhas (m) de ***A***.

- nº colunas (n) de ***AB*** = nº colunas (n) de ***B***.

- As três condições anteriores são traduzidas pela mnemónica

$$\begin{array}{lccccccc}
\boldsymbol{AB} : & (\,m \times & p\,) & (\,p & \times\, n\,) & \to & (\,m & \times\, n\,) \\
 & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & \multicolumn{2}{c}{=} & & & & \\
 & \text{(ii)} & \multicolumn{2}{c}{\text{(i)}} & \text{(iii)} & & \text{(ii)} & \text{(iii)}
\end{array}$$

- O produto de duas matrizes *não é*, em geral, *comutativo*; a existência do produto $\boldsymbol{AB}$ não implica a existência do produto $\boldsymbol{BA}$.

A lei anterior é conhecida por ***multiplicação de linhas por colunas***:

$$\boldsymbol{A}_{(i)} = (a_i) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix}$$

matriz-linha, do tipo $1 \times p$, que contém os elementos da linha i de $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{B}^{(j)} = (b^j) = \begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \dots & b_{pj} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

matriz-coluna, do tipo $p \times 1$, que contém os elementos da coluna j de $\boldsymbol{B}$.
O elemento genérico c_{ij} da matriz produto $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ é dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{ip}\, b_{pj} = (a_i)\ (b^j) = \boldsymbol{A}_{(i)}\ \boldsymbol{B}^{(j)}$$

Generalizando a todos os elementos da matriz

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n} = \left((a_i)\ (b^j)\right)_{i,j=1}^{m,n} = \left(\boldsymbol{A}_{(i)}\ \boldsymbol{B}^{(j)}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

Exemplo 8: Sejam as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

A matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ é uma matriz quadrada de ordem 2 definida por

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, por exemplo,

$$c_{12} = \boldsymbol{A}_{(1)} \, \boldsymbol{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

A matriz produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BA}$ é uma matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, por exemplo,

$$d_{23} = \boldsymbol{B}_{(2)} \, \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Note que $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ (não é válida a comutatividade no produto matricial).
A matriz produto $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{DX}$ é uma matriz-coluna do tipo 3×1

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{DX} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ três matrizes, num corpo Ω, e $k \in \Omega$; admitindo que são possíveis todas as operações matriciais abaixo indicadas, então:

a) *Propriedade associativa*: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

b) *Propriedade distributiva à direita em relação à adição*:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$$

c) *Propriedade distributiva à esquerda em relação à adição*:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$$

d) *Propriedade homogénea*: $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

- Notar que: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ é **falso**:
  i) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ é **verdadeiro**;
  ii) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ é **falso**.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$ duas matrizes, num corpo Ω, tais que $\boldsymbol{A}$ é do tipo $m\times n$ e $\boldsymbol{C}$ é do tipo $n\times p$. Então

$$(\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{, sendo a matriz resultante do tipo } p\times m$$

Exemplo 9:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: Matrizes comutativas ou permutáveis

Duas matrizes ***A*** e ***B***, num corpo Ω, dizem-se *comutativas* (comutam entre si) ou *permutáveis*, se for possível definir os produtos matriciais ***AB*** e ***BA*** e se for verdadeira a relação

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$$

- Para que a igualdade $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ seja possível, as matrizes ***A*** e ***B*** deverão ser matrizes quadradas e da mesma ordem.

Exemplo 10: Seja a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine todas as matrizes ***B*** de ordem 2, tais que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Solução:

Sendo

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & -c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c = a+b \\ b-d = -a+b \\ a+c = c+d \\ b+d = -c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Conjugada de uma Matriz

Seja a matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$.

Definição: Matriz conjugada
Chama-se *matriz conjugada* de $\boldsymbol{A}$, representando-se por $\overline{\boldsymbol{A}}$, à matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são iguais aos complexos conjugados dos elementos da matriz $\boldsymbol{A}$, ou seja,

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{a}_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m \; ; \; j=1,2,\ldots,n)$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ três matrizes, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, tais que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são do tipo $m \times n$ e $\boldsymbol{C}$ é do tipo $n \times p$. Então:

- **a**) $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$.
- **b**) $\boldsymbol{A}$ é uma matriz real, se e só se $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$.
- **c**) $\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{A}}$ é uma matriz real.
- **d**) $\overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$, a matriz conjugada da soma de duas matrizes é igual à soma das matrizes conjugadas de cada uma delas.
- **e**) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{C}}$, a matriz conjugada do produto de duas matrizes é igual ao produto das matrizes conjugadas de cada uma delas.

Transconjugada de uma Matriz

Seja a matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ do tipo *m*×*n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$.

Definição: Matriz transconjugada
Chama-se *matriz transconjugada*, ou *transposta hermitiana*, de ***A***, representando-se por $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, à matriz do tipo *n*×*m* que é igual à transposta da matriz conjugada de ***A***, ou seja,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}$$

Teorema: Sejam ***A***, ***B*** e ***C*** três matrizes, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, tais que ***A*** e ***B*** são do tipo *m*×*n* e ***C*** é do tipo *n*×*p*. Então:

- **a**) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$.
- **b**) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$.
- **c**) $(\boldsymbol{AC})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.
- **d**) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, se e só se ***A*** é uma matriz real.

Exemplo 11: Relativamente às matrizes ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** e ***E*** obtém-se

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -1 & 2i & 2+i \\ 1-i & 0 & -3i \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -2i & 2-i \\ 1+i & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -1 & -2i & 2-i \\ 1+i & 0 & 3i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ -2i & 0 \\ 2-i & 3i \end{bmatrix}$$