Inversão de Transformações Lineares

- Sendo $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma função, o problema da inversão de T é o seguinte: pretende-se obter, se tal for possível, uma função S, que sendo *composta com T* tenha como resultado a *função identidade I*.

- Dado que a **composição não** é **comutativa**, é possível distinguir as situações seguintes:

$$ST = I$$

dizendo-se, neste caso, que S é *inversa à esquerda* de T, e

$$TS = I$$

em que S é *inversa à direita* de T.

Definição: **Inversa de uma função**

Seja a função $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$.

a) A função $S : T(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é *inversa à esquerda* de T, se

$$ST = I_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \text{ em que } (ST)(x) = S\big(T(x)\big) = x \ , \ \forall x \in \mathrm{V}$$

sendo I_{V} a *função identidade aplicada ao domínio* de T.

b) A função $R : T(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é *inversa à direita* de T, se

$$TR = I_{T(\mathrm{V})} : T(\mathrm{V}) \to T(\mathrm{V}) \text{ e } (TR)(y) = T\big(R(y)\big) = y \ , \ \forall y \in T(\mathrm{V})$$

sendo $I_{T(\mathrm{V})}$ a *função identidade aplicada ao contradomínio* de T.

- Toda a função *tem*, pelo menos, uma *função inversa à direita*.

Teorema: A função *inversa à esquerda* da função $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, se existir, *é única*. Além disso, se S é a função inversa à esquerda de T, então ela será, também, função inversa à direita de T.

Teorema: Uma função $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ admite função *inversa à esquerda*, se e só se T for **injectiva**, isto é, se e só se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{V} \quad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; T(x_1) \neq T(x_2)$$

ou

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{V} \quad T(x_1) = T(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

Definição: **Função inversa de uma função**
Seja $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma *função injectiva* em V. A única função inversa à esquerda de T, que também é inversa à direita, é a função

$$T^{-1} : T(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$$

sendo designada por *função inversa* de T. Diz-se, neste caso, que T é uma *função invertível*.

- A transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ designa-se **bijectiva**, se for **injectiva** e **sobrejectiva**; neste caso

$$T^{-1} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}\text{, já que } T(\mathrm{V}) = \mathrm{W}$$

Exemplo 24: Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y)$$

é **injectiva**, isto é, é uma função **invertível**.

Solução:

Sejam $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \;\Rightarrow\; (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2) = (y_1 + y_3, y_2 + y_3, y_1 + y_2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 + y_3 \\ x_2 + x_3 = y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em ordem, por exemplo, às incógnitas x_1, x_2 e x_3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 + y_3 \\ 1 & 1 & 0 & y_1 + y_2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 + y_3 \\ 0 & 1 & -1 & y_2 - y_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & -2 & -2y_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{y}$$

Transformações Lineares Injectivas

Teorema: Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω. Se $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ é uma *transformação linear injectiva*, então *T é invertível* e a sua função inversa $T^{-1} : T(\mathrm{V}) \rightarrow \mathrm{V}$ é *linear*.

Teorema: A transformação linear $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ é *injectiva*, se e só se o *núcleo* de *T* possuir apenas o *elemento zero* de V, isto é, se e só se $\mathrm{N}(T) = \{0_{\mathrm{V}}\}$. Além disso, verifica-se a relação

$$\dim T(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{V}$$

se V for um espaço linear de **dimensão finita**.

- A obtenção da **função inversa** de uma transformação linear **injectiva** $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ tem por base o processo que é aplicado na determinação do seu *contradomínio*.

Exemplo 25: Em relação à transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos **exemplos 18** e **24**

$$T(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y)$$

mostre que é *injectiva* e obtenha a sua *função inversa*.

Solução:

Recorrendo ao *núcleo* da transformação linear

$$\mathrm{N}(T)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;:\; T(\vec{x})=(0,0,0)\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$T(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y)=(0,0,0) \;\Leftrightarrow\; x=y=z=0$$

$$\mathrm{N}(T)=\left\{(0,0,0)\right\}\subset\mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; T \text{ é } \textbf{injectiva}$$

Recorrendo ao *contradomínio* da transformação linear

$$T(\mathbb{R}^3)=\left\{\vec{w}\in\mathbb{R}^3 \;:\; \vec{w}=T(\vec{x})\ ,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$T(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y)=(w_1,w_2,w_3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=(w_1-w_2+w_3)/2 \\ y=(-w_1+w_2+w_3)/2 \\ z=(w_1+w_2-w_3)/2 \end{cases}$$

$$T(\mathbb{R}^3)=\left\{\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; T \text{ é } \textbf{sobrejectiva}$$

Concluindo

$$T \text{ é } \textbf{injectiva} \text{ e } \textbf{sobrejectiva} \;\Rightarrow\; T \text{ é } \textbf{bijectiva}$$

$$T^{-1}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$T^{-1}(w_1,w_2,w_3)=\frac{1}{2}(w_1-w_2+w_3,-w_1+w_2+w_3,w_1+w_2-w_3)$$

Exemplo 26: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ do **exemplo 19**

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + z, x - z, y + z)$$

Mostre que é *injectiva* e obtenha a sua *função inversa*.

Solução:

Recorrendo ao *núcleo* da transformação linear

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(\vec{x}) = (0,0,0,0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + z, x - z, y + z) = (0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ (0,0,0) \right\} \subset \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow \ T \text{ é } \textbf{injectiva}$$

Recorrendo ao *contradomínio* da transformação linear

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \vec{w} = T(\vec{x}) \ , \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + z, x - z, y + z) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & -w_1 + w_2 + w_4 \\ 0 & 0 & 0 & -2w_1 + w_2 + w_3 + 2w_4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = w_1 - w_4 \\ y = w_1 - w_2 \\ z = -w_1 + w_2 + w_4 \\ 0 = -2w_1 + w_2 + w_3 + 2w_4 \end{cases}$$

$$\vec{w} \in T(\mathbb{R}^3) \ \text{ se } \ w_2 = 2w_1 - w_3 - 2w_4$$

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{ \vec{w} = (w_1, 2w_1 - w_3 - 2w_4, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4 \right\} \ \Rightarrow \ T \ \textbf{não} \text{ é } \textbf{sobrejectiva}$$

Concluindo

$$T^{-1} : T(\mathbb{R}^3) \ \to \ \mathbb{R}^3$$

$$T^{-1}(w_1, 2w_1 - w_3 - 2w_4, w_3, w_4) = (w_1 - w_4, -w_1 + w_3 + 2w_4, w_1 - w_3 - w_4)$$

Teorema: Considere a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que V é um espaço linear de dimensão finita, isto é, $\dim \mathrm{V} = n$. Então são equivalentes as seguintes proposições:

a) T é uma transformação linear *injectiva*.

b) Se o conjunto $\mathrm{U}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\} \subset \mathrm{V}$ é *linearmente independente*, então o conjunto $\mathrm{U}_1^* = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_r)\} \subset T(\mathrm{V})$ é, também, *linearmente independente*.

c) Se o conjunto $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathrm{V}$ é uma *base para* V, então o conjunto $\mathrm{U}^* = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\} \subset T(\mathrm{V})$ é *uma base para* $T(\mathrm{V})$.

Teorema: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que V e W são espaços lineares com a mesma dimensão, isto é, $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W}$. Então T é *injectiva*, se e só se transformar qualquer *base para o domínio*, V, numa *base para o conjunto de chegada*, W.