A JM Ferreira

Mestrado em Engenharia Informática

Álgebra

2013-2014

Solução de alguns exercícios propostos na sebenta.

MÓDULO 1

Sistemas de equações

Método de GAUSS

(ver enunciado no final).

1.
a)
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8 \\ 4x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = -12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{AX = B}$$

Matriz de Gauss ~~ex~~ estendida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{c} 2L1 \\ \\ 2L3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 16 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 6 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L2-L1 \\ L3-L1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 0 & -40 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{troca } L2 \text{ e } L3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$-4z = -12 \quad (\underline{\underline{z = 3}})$

2ª linha $\quad 8y = -40 \rightarrow \underline{\underline{y = -5}}$

Substituindo z e y na 1ª linha,

$4x + 2(-5) + 6(3) = 16$

$4x = 16 - 18 + 10 \iff 4x = 8 \iff \underline{\underline{x = 2}}$

Quando temos uma matriz de Gauss na forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

onde este valor é $\neq 0$,

todas as equações são principais e
todas as variáveis são principais.
Temos uma solução única.
Sistema possível e determinado.

1c)

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ -4x - y = 6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} 2L1 \\ 4L2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & -4 \\ 4 & 12 & -4 & -8 \\ -4 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L2-L1 \\ L3+L1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 14 & -8 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ 3L2 \\ 7L3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 21 & -12 & -6 \\ 0 & -21 & 28 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 21 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{array}\right]$$

$\underline{z = 1/2}$

$0x + 7y - 4z = -2$

$7y - 2 = -2 \rightarrow \underline{y = 0}$

$2x - 1(0) + 2(1/2) = -2 \rightarrow \underline{x = -3/2}$

1b)

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Para começar, trocar L2 e L1 (ñ pode haver pivots nulos)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L3-L1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x+2(1)-2=1 \\ y+(2)=3 \\ z=2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}$$

3a) $\begin{cases} 2x - 3y - z = -4 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

temos 3 incógnitas e apenas 2 equações.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \to -y + z = -2$$

$$\boxed{z = y - 2}$$

$$2x - 3y - (y-2) = -4$$

$$2x - 4y = -2 \quad \to \quad 2x = 4y - 2$$

$$\boxed{x = 2y - 1}$$

Sistema possível e simplesmente indeterminado

2 incógnitas (x e z) dependem de 1 outra incógnita (y).

(equivalente à equação duma recta)

$$(x, y, z) = (2y-1, y, y-2) = (-1, 0, -2) + y(2, 1, 1)$$

3b) $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 24 & 6 \\ 6 & -3 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 24 & 6 \\ 0 & 3 & -30 & -6 \\ 0 & 2 & -20 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 24 & 6 \\ 0 & 6 & -60 & -12 \\ 0 & 6 & -60 & -12 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow$$ Sistema possível, simplesmente indeterminado (recta em 3D).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Equações principais

$\underline{y = z - 2}$

$x + (z - 2) + 4z = 1$

$\underline{x = -5z + 3}$

7

3c)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$$

4 equações
2 incógnitas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & -5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L1/2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -12 & -36 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -13 & -39 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5L1+L2 \\ -3L1+L3 \\ -4L1+L4 \end{array}$$

NOTA: as 2ª, 3ª e 4ª equações são todas iguais $0x + y = 3$, ou seja,

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L2/(-12) \\ L3/(-5) \\ L4/(-13) \end{array}$$

podemos agora simplificar a 3ª e 4ª linha →

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Equações principais} \\ 3^a L - 2^a L \longrightarrow \text{Equações não} \\ 4^a L - 2^a L \longrightarrow \text{principais} \end{array}$$

$\underline{y = 3}$

$x + 2(3) = 8 \qquad \underline{x = 2}$

$$\left\{\begin{array}{l} (x, y) = (2, 3) \\ 1 \text{ ponto.} \end{array}\right.$$

x e y incógnitas principais.

Sistema possível e determinado

Solução única.

2. Determine o valor do escalar real $\underline{\alpha}$, tal que o sistema de equações seja possível e determinado

$$\begin{cases} 5x + 3z + 2 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \\ \alpha x + 6y + \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ \alpha & 6 & 0 & -\alpha \end{array}\right] -\frac{\alpha}{5}L1 + L3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -\frac{3\alpha}{5} & \frac{2\alpha}{5} - \alpha \end{array}\right] -3L2 + L3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{3\alpha}{5} & \underbrace{3 - \alpha + \frac{2\alpha}{5}}_{3 - \frac{3\alpha}{5}} \end{array}\right]$$

Na última linha da matriz (correspondente à 3ª equação do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3-\frac{3\alpha}{5} & 3-\frac{3\alpha}{5} \end{array}\right]$$

temos várias hipóteses para o valor de $\underline{\alpha}$

1. se $3-\frac{3\alpha}{5} \neq 0$, o sistema tem

solução única, qualquer que seja o valor do 2º membro (neste caso dá-se a coincidência de igualdade).

ou seja, se $15 \neq 3\alpha$ ou $\underline{\alpha \neq 5}$,
<u>sistema possível e determinado</u>

2. se $\alpha = 5$, temos $\left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

<u>Sistema possível e simplesmente indeterminado</u>

$\underline{2y = z-1} \rightarrow \underline{5x = -2-3z}$

$$(x,y,t) = \left(\frac{-2-3z}{5}, \frac{z-1}{2}, z\right)$$

3. Nota: o sistema nunca é impossível neste caso

5. Estude a influência do real β na solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \beta z + 6w = 0 \\ y + 7z + 8w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5z + 6w = 0 \end{cases}$$

vou colocar esta em 1º L

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Já só falta estudar as 2 últimas linhas.

$$-\beta/5\, L3 + L4 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{6-\frac{6\beta}{5}} & 0 \end{array}\right]$$

Analisando esta parte

a) $6-\frac{6\beta}{5}=0 \Leftrightarrow \beta=5$

ficamos com $0=0$ possível e simplesmente indeterminado

b) $\beta \neq 5$ solução única

soluções para a) $\beta = 5$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{redundante}$$

3^{a} L $\quad 5z + 6w = 0 \rightarrow \underline{z = -\frac{6w}{5}}$

2^{a} L $\quad y + 7\left(-\frac{6w}{5}\right) + 8w = 1$

$$5y - 42w + 40w = 5$$

$$\underline{y = 1 + 2w/5}$$

1^{a} L $\quad x + 2\left(1 + \frac{2w}{5}\right) + 3\left(-\frac{6w}{5}\right) + 4w = 0$

$$x + 2 + \frac{4w}{5} - \frac{18w}{5} + 4w = 0$$

$$5x + 10 + 6w = 0, \quad \underline{x = -\frac{6w}{5} - 2}$$

b) Solução para $\beta \neq 5$, p.ex $\beta = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow z = 0 \\ \rightarrow w = 0 \end{array}$$

$\rightarrow y + 7(0) + 8(0) = 1 \rightarrow \underline{y = 1}$

$\rightarrow x + 2(1) + 3(0) + 4(0) = 0 \rightarrow \underline{x = -2}$

9 a)

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - ay + 2z = b \\ 2x + az = 3 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ -1 & -a & 2 & b \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & b+2 \\ 0 & -2a & a-2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -2a & a-2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & b+2 \end{array}\right]$$

Estudando a influência do parâmetro <u>a</u>

Se $a=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & b+2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 2b+4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 3L2 \\ 2L3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2b+1 \end{array}\right]$$

Conclusão: Com $a=0 \wedge 2b+1=0$ possível e simplesmente indeterminado

Com $a=0 \wedge 2b+1 \neq 0$ impossível

Se $\underline{a=2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & b+2 \end{array}\right] \longrightarrow$$ qualquer que seja o valor de b, a solução é sempre única, portanto temos um sistema possível e determinado.

Mais ainda, para $a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$, o sistema é sempre possível e determinado.

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Exercícios Propostos

1. Resolva, recorrendo ao método de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8 \\ 4x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = -12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ -4x - y = 6 \end{cases}$$

2. Determine o valor do parâmetro real α de modo a que o sistema de equações dado seja possível e determinado.

$$\begin{cases} 5x + 3z + 2 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \\ \alpha x + 6y + \alpha = 0 \end{cases}$$

3. Classifique, utilizando o método de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -4 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$$

4. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 6 \\ -x - 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

5. Aplique o método de Gauss para estudar a influência do parâmetro real β na solução do sistema de equações dado; apresente as várias soluções possíveis.

$$\begin{cases} \beta z + 6w = 0 \\ y + 7z + 8w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5z + 6w = 0 \end{cases}$$

6. Encontre uma solução geral e uma solução particular para o seguinte sistema de três equações lineares a cinco incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y - z + u = 0 \\ 3t - 2u = 0 \\ -x - 2y + z + 3t - 3u = 0 \end{cases}$$

7. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema de equações lineares dado:
a) Não admita solução além da nula.
b) Seja possível e simplesmente indeterminado; apresente, neste caso, a sua solução.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + \alpha y + 2z + 3t = 0 \\ x + y + \alpha z + 4t = 0 \\ x + y + z + \alpha t = 0 \end{cases}$$

8. Determine os valores dos parâmetros reais a e b , de forma a que o sistema dado seja possível e duplamente indeterminado e, neste caso, obtenha a sua solução.

$$\begin{cases} x - y + 2z + 2t = b \\ x - y + at = 5 \\ x - y + 3z - t = -1 \end{cases} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

9. Estude a dependência da solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em relação aos respectivos parâmetros, recorrendo ao método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + a\,y + z = 2 \\ -x - a\,y + 2\,z = b \\ 2x + a\,z = 3 \end{cases} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2y + z = 0 \\ 4x + a\,y + 2\,z = 2 \\ 6x - 3y + 3\,z = b \end{cases} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y + a\,z = 1 \\ a\,x + y = a - 1 \\ -2x + 2\,a\,z = 2 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

d)
$$\begin{cases} x + a\,y + 2\,z = 0 \\ -x + 2y + z = b \\ y + a\,z = 1 \end{cases} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

e)
$$\begin{cases} x + a^2\,y + a\,z = a\,b \\ x + y + z = b \\ x + a^2\,y + a^2\,z = a\,b \end{cases} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

Soluções dos Exercícios

1. a) $(x, y, z) = (2, -5, 3)$. b) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
c) $(x, y, z) = (-3/2, 0, 1/2)$.

2. $\alpha \in \mathbb{R} / \{5\}$.

3. a) Possível e simplesmente indeterminado.
   b) Possível e simplesmente indeterminado.
   c) Possível e determinado.

4. a) Sistema impossível (sem solução).
   b) Sistema impossível (sem solução).

5. Se $\beta \neq 5$ o sistema é possível e determinado, tendo como solução:
   $$(x, y, z, w) = (-2, 1, 0, 0).$$
   Se $\beta = 5$ o sistema é possível e simplesmente indeterminado, tendo como solução:
   $$(x, y, z, w) = (-2 - 6a/5, 1 + 2a/5, -6a/5, a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

6. Solução geral: $(x, y, z, t, u) = (-2a + b - c, a, b, 2c/3, c)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.
   Uma solução particular: $(x, y, z, t, u) = (-2, 1, 0, 0, 0)$.

7. a) $\alpha \neq 1$.
   b) $\alpha = 1$, tendo como solução $(x, y, z, t) = (-a, a, 0, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

8. $a = 8 \wedge b = 1$. Solução geral: $(x, y, z, t) = (5 + c - 8d, c, -2 + 3d, d)$, $c,d \in \mathbb{R}$.

9. a) Sistema possível e determinado: $a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$.
   Sistema possível e simplesmente indeterminado: $a = 0 \wedge b = -1/2$.
   Sistema impossível: $a = 0 \wedge b \neq -1/2$.
   b) Sistema possível e determinado: $a \neq -2 \wedge b = 3$.
   Sistema possível e simplesmente indeterminado: $a = -2 \wedge b = 3$.
   Sistema impossível: $a \in \mathbb{R} \wedge b \neq 3$.
   c) Sistema possível e determinado: $a = 1$.
   Sistema impossível: $a \neq 1$.
   d) Sistema possível e determinado: $a \neq -3 \wedge a \neq 1 \wedge b \in \mathbb{R}$.
   Sistema possível e simplesmente indeterminado: $(a = -3 \wedge b = -1) \vee$
   $(a = 1 \wedge b = 3)$.
   Sistema impossível: $(a = -3 \wedge b \neq -1) \vee (a = 1 \wedge b \neq 3)$.
   e) Sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} / \{-1, 0, 1\} \wedge b \in \mathbb{R}$.
   Sistema possível e simplesmente indeterminado: $(a = -1 \wedge b = 0) \vee$
   $(a = 0 \wedge b \in \mathbb{R})$.
   Sistema possível e duplamente indeterminado: $a = 1 \wedge b \in \mathbb{R}$.
   Sistema impossível: $a = -1 \wedge b \neq 0$.