Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação

Álgebra

2017-12-07

2.º Mini-Teste

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- A prova tem a duração máxima de **1h30m.** A desistência só é possível 30m após o seu início.
- **Não é permitida a utilização de telemóvel, máquina de calcular gráfica ou computador.**

Perguntas

1. Considere o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^4$, $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, em que $\vec{a} = (1,1,3,1)$, $\vec{b} = (-1,2,2,1)$ e $\vec{c} = (1,1,2,0)$, e o subespaço H de $\mathbb{R}^4$ definido por $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t - x - y = 0\}$.
   1.1. Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, L(S). Indique uma base para o subespaço obtido e respetiva dimensão. Será S linearmente independente? Justifique.
   1.2. Verifique, justificando, se o conjunto $Q = \{(-1,2,1,1), (-1,2,0,1), (1,1,0,2)\}$ é uma base para o subespaço H.
   1.3.É possível escrever o vetor $\vec{v} = (-1,0,2\ ,3)$ como combinação linear dos elementos de Q? Justifique.
   1.4.Obtenha uma base ortogonal, B, para o espaço $\mathbb{R}^4$, a partir duma base ortogonal de L(S).
   1.5.A partir da base obtida na alínea anterior, determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

2. Discuta para que valores de $a \in \mathbb{R}$, $B = \{(2,0,2), (2,-3,a), (3,-a,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

3. Considere o ponto $Q = (1,0,-1)$, a reta $r: (x,y,z) = (0,1,1) + u(2,0,1), u \in \mathbb{R}$, e os planos M e M', definidos por
   $M : x + 3y - 2z = 1$
   $M': (x,y,z) = (2,-1,0) + u(-1,1,0) + t(1,1,-1), u,t \in \mathbb{R}$
   3.1. Calcule $d(Q,r)$, a distância entre Q e r.
   3.2. Calcule $d(Q,M)$, a distância entre Q e M.
   3.3. Determine a equação cartesiana de M'.
   3.4. Determine o ângulo formado pelos planos M e M'.
   3.5. Determine a equação da reta s, pertencente a M', concorrente e ortogonal com r.

Cotação prevista	**[5 x 1.5] [3.5] [4x1.5,3]**

Os docentes: *António Ferreira, Albertino Arteiro* e *Ana Neves*

1.1. $(x,y,z,t) = a(1,1,3,1) + b(-1,2,2,1) + c(1,1,2,0)$

$$\begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + 2b + c \\ z = 3a + 2b + 2c \\ t = a + b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & 2 & z \\ 1 & 1 & 0 & t \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 0 & y-x \\ 0 & 5 & -1 & z-3x \\ 0 & 2 & -1 & t-x \end{array}\right]$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 0 & y-x \\ 0 & 3 & 0 & z-2x-t \\ 0 & 2 & -1 & t-x \end{array}\right]$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -1 & t-x \\ 0 & 3 & 0 & z-2x-t \\ 0 & 3 & 0 & y-x \end{array}\right]$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -1 & t-x \\ 0 & 3 & 0 & z-2x-t \\ 0 & 0 & 0 & x+y-z+t \end{array}\right]$$

Sistema possível $\Leftrightarrow$ $x+y-z+t=0$

$L(S) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+t=0\}$

$(x,y,z,t) = (x, y, x+y+t, t)$

$= x(1,0,1,0) + y(0,1,1,0) + t(0,0,1,1)$

Base de $L(S) = \{(1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1)\}$

$\dim L(S) = 3$

S é linearmente independente pois tem 3 elementos e é de dimensão 3.

1.2. Calculemos o subespaço gerado por Q.

$(x,y,z,t) = a(-1,2,1,1) + b(-1,2,0,1) + c(1,1,0,2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 2 & t \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 3 & y+2x \\ 0 & -1 & 1 & z+x \\ 0 & 0 & 3 & t+x \end{array}\right]$$

Sistema possível $\Leftrightarrow y + 2x = t + x$

$\Leftrightarrow t - x - y = 0$

$L(Q) = H$

Falta verificar se Q é uma base

$(0,0,0,0) = a(-1,2,1,1) + b(-1,2,0,1) + c(1,1,0,2)$

$$\begin{cases} 0 = -a - b + c \\ 0 = 2a + 2b + c \\ 0 = a \\ 0 = a + b + 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = c \\ c = -2b \\ a = 0 \\ b = -2c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como os elementos de Q geram o vector nulo de forma única, são linearmente independentes, ou seja, Q é uma base.

Logo, Q é uma base de H.

1.3. Só é possível escrever como combinação linear de Q os elementos $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que $x + y - t = 0$.

Neste caso, $(x, y, z, t) = (-1, 0, 2, 3)$ não verifica essa condição $(-1 + 0 + 3 \neq 0)$, logo, não é possível escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos elementos de Q.

1.4. $\dim L(S) = 3$, ou seja, a base ortogonal de $L(S)$ tem dimensão 3.

Como tal, começamos por procurar 3 vectores (x, y, z, t) que sejam ortogonais entre si e que obedeçam à condição $x+y-z+t=0$

p. exmp. $(1,0,1,0) \in L(S)$ (encontramos na alínea 1.1)

$$\begin{cases} (1,0,1,0).(x,y,z,t)=0 \\ z=x+y+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+x+y+t=0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x-t \\ z=-x \end{cases}$$

Um segundo elemento pode ser, p. exmp, $(1,-2,-1,0)$.

Procuremos o 3.º elemento da base ortogonal de $L(S)$.

$$\begin{cases} (1,0,1,0).(x,y,z,t)=0 \\ (1,-2,-1,0).(x,y,z,t)=0 \\ z=x+y+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ z = x + y + t \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -x \\ x - 2y + x = 0 \\ -x = x + y + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ x = y \\ -x = x + x + t \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -x \\ y = x \\ -3x = t \end{cases}$$

Base ortogonal de $L(S)$

$$\{(1,0,1,0),\ (1,-2,-1,0),\ (1,1,-1,-3)\}$$

Para obtermos uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ precisamos de um 4.º elemento (x,y,z,t) ortogonal aos outros 3:

$$\begin{cases} (1,0,1,0).(x,y,z,t) = 0 \\ (1,-2,-1,0).(x,y,z,t) = 0 \\ (1,1,-1,-3).(x,y,z,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ x + y - z - 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z \\ x - 2y + x = 0 \\ x + y + x - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ x = y \\ x + x + x - 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z \\ x = y \\ x = t \end{cases}$$

$B = \{(1,0,1,0), (1,-2,-1,0), (1,1,-1,-3), (1,1,-1,1)\}$

1.5. Basta dividir cada elemento de B pela respectiva norma.

Base ortonormal de $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1,0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,-1,-3), \frac{1}{2}(1,1,-1,1)\right\}$$

2. Basta que os 3 elementos de B sejam linearmente independentes, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -a \\ 0 & a-2 & 1 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} -3 & -a \\ a-2 & 1 \end{vmatrix} =$$

D.L.

$$= 2\left(-3 + a(a-2)\right) = 2\left(-3 + a^2 - 2a\right)$$

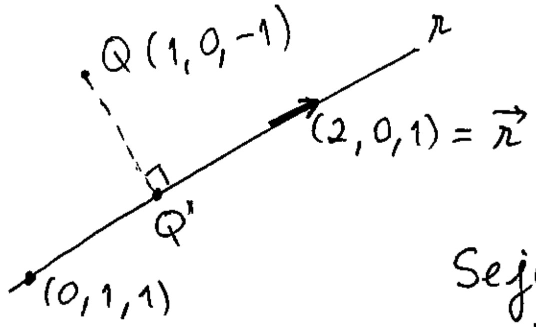
Queremos $\underline{a} \in \mathbb{R}$ tal que $-3 + a^2 - 2a \neq 0$,

ou seja, $a \neq \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 4.3}}{2} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{2 \pm 4}{2}$

Se $a=-1 \vee a=3$, B não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Se $a \neq -1 \wedge a \neq 3$, B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

3. 1.



Seja $Q' \in r$ tal que $\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{r}$. Nesse caso, $d(Q, r) = \|\overrightarrow{QQ'}\|$.

$Q' = (0, 1, 1) + \mu(2, 0, 1)$ pois pertence a r.

$Q' = (2\mu, 1, 1+\mu)$

$\overrightarrow{QQ'} = Q' - Q = (2\mu, 1, 1+\mu) - (1, 0, -1)$

$= (2\mu - 1, 1, \mu)$

$\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{r}$: $(2\mu - 1, 1, \mu) . (2, 0, 1) = 0$

$4\mu - 2 + \mu = 0$

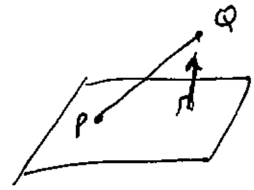
$5\mu = 2$

$\mu = \frac{2}{5}$

$\overrightarrow{QQ'} = \left(2 . \frac{2}{5} - 1, 1, \frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)$

$d(Q, r) = \|\overrightarrow{QQ'}\| = \left\|\frac{1}{5}(-1, 5, 2)\right\| = \frac{\sqrt{30}}{5}$

3.2) $d(Q, M) = \| proj_{\vec{n}} \vec{PQ} \| = \dfrac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ (8



$P = (0, 1, 1) \in M$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= Q - P \\ &= (1, 0, -1) - (0, 1, 1) \\ &= (1, -1, -2) \end{aligned}$$

$$d(Q, M) = \frac{|(1, -1, -2) \cdot (1, 3, -2)|}{\|(1, 3, -2)\|}$$

$$= \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

3.3) $\vec{n}_{M'} = (-1, 1, 0) \times (1, 1, -1)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2)$$

Podemos escolher $\vec{n}_{M'} = (1, 1, 2)$

$x + y + 2z = d$

ponto $(2, -1, 0) \in M'$

$2 - 1 + 0 = d$

$1 = d$

$M': x + y + 2z = 1$

3.4. seja $\theta = \measuredangle(M, M')$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_M \cdot \vec{n}_{M'}|}{\|\vec{n}_M\| \cdot \|\vec{n}_{M'}\|} = \frac{|(1,3,-2)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{|1+3-4|}{\sqrt{14\times 6}} = 0$$

$\cos\theta = 0$ logo $\theta = 90°$

ou seja, os planos são perpendiculares.

3.5. $\begin{cases} s \in M' \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n}_{M'} \\ s \perp r \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{r} \end{cases}$

$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,1,2) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(2,0,1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+2c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b-4a = 0 \\ c = -2a \end{cases}$

$\begin{cases} b = 3a \\ c = -2a \end{cases}$

p. exmp. $\vec{s} = (1,3,-2)$

O ponto da recta será $r \cap M'$

$\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 \\ z = 1+\mu \\ x+y+2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ — \\ — \\ 2\mu + 1 + 1 + \mu = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ — \\ \\ 3\mu = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = 1 \\ z = 2/3 \end{cases}$

$s: (x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) + K(1, 3, -2), \ K \in \mathbb{R}$

10