258.

Seja a transformação linear $T : R^3 \rightarrow R^2$, definida pelas imagens $T(\vec{i}) = (0\ ,\ 0)$, $T(\vec{j}) = (1\ ,\ 1)$ e $T(\vec{k}) = (1\ ,\ -1)$.

a) Obtenha uma representação matricial para T.

b) Calcule o valor de $T(4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$, bem como a nulidade e a ordem de T.

c) Determine a matriz que representa T relativamerite às bases $E_3 = \{\vec{i}\ , \vec{j}\ , \vec{k}\}$, base canónica de R^3, e $S' = \{S_1'\ , S_2'\} = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 2)\}$.

265.

Considere a curva a transformação linear $S : R^3 \rightarrow R^3$, definida por

$$S(x\ ,\ y\ ,\ z) = (x + 2y - z\ ,\ y\ ,\ x + 3y - z)$$

Determine a reprsentação matricial das transformações lineares S e S^2 em relação à base $B = \{B_1\ ,\ B_2\ ,\ B_3\} = \{(1\ ,\ 0\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 1\ ,\ 2)\}$.

286.

Considere as transformações lineares $S : R^2 \to R^3$ e $T : R^3 \to R^3$, definidas por

$$S(x\ ,\ y) = (x+y\ ,\ 2x\ ,\ x-y)$$

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1)\ ,\ T(1\ ,\ -1\ ,\ 0) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \text{ e } T(0\ ,\ 0\ ,\ 1) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1)\,.$$

a) Caracterize o núcleo e o contradomínio de S. Identifique, para cada um dos conjuntos, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

b) Mostre que S é injectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

c) Obtenha uma base U, para o domínio, e uma base U', para o conjunto de chegada, em relação às quais a matriz de S tenha uma forma diagonal.

d) Defina adequadamente a transformação composta possível de S com T, tendo como referência as bases canónicas. Obtenha a respectiva representação matricial.

e) Mostre que a transformação linear S é definida, em relação à base canónica de R^2, $E_2 = \{(1\ ,0)\ ,\ (0\ ,1)\}$, e à base

$$B = \{B_1\ ,\ B_2\ ,\ B_3\} = \{(1\ ,\ 1\ ,0)\ ,\ (0\ ,\ 0\ ,1)\ ,\ (1\ ,\ -1\ ,\ 0)\}$$

de R^3, através da relação

$$S(x\ ,\ y) = \frac{1}{2}(3x+y\ ,\ 2x-2y\ ,\ -x+y)_B$$

288.

Considere a transformação linear $T : R^3 \rightarrow R^2$, com

$$T(x , y , z) = (y+z , y-z)$$

Sejam as bases $U = \{U_1 , U_2 , U_3\} = \{(0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1) , (1 , 0 , 0)\}$ para o espaço R^3, e $U' = \{U_1' , U_2'\} = \{(-1 , 1) , (1 , 1)\}$ para o espaço R^2. Determine:

a) A matriz de T em relação às bases canónicas de R^3, $E_3 = \{\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\}$, e de R^2, $E_2 = \{(1 , 0) , (0 , 1)\}$.

b) A matriz, B, de mudança de base de U para E_3.

c) A matriz, C, de mudança de base de U' para E_2.

d) As coordenadas dos vectores $X_1 = (1 , 1 , 2)$ e $X_2 = (1 , 5)$, em relação às bases U e U', respectivamente.

e) A matriz $T_{E_3,U'}$, que representa a transformação T em relação às bases E_3 e U'.

f) A matriz T_{U,E_2}, que representa a transformação T em relação às bases U e E_2.

g) A matriz $T_{U,U'}$, que representa a transformação T em relação às bases U e U'.

h) A imagem, através de T, do vector $X_1 = (1 , 1 , 2)$, expressa nas bases E_2 e U'.

Exrc: Sejam as transformações lineares $S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$S(1,1,0) = (4,1,-1)$, $S(0,2,-1) = (6,-3,-3)$ e

$S(1,0,2) = (1,1,2)$

$T(x,y,z) = (x+y+3z,\ 2x+2y,\ x+y+z)$

em relação à base canónica $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A nulidade e a ordem de T.

b) A matriz que representa S em relação à base canónica, usando a matriz mudança de base adequada. Confirme usando as propriedades da transformação linear.

c) A matriz $m(TS)$, que representa a transformação composta TS em relação à base canónica.