TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Introdução

- *Transformações*, *aplicações* ou *operadores*, são funções cujos *domínio* e *contradomínio* são *espaços lineares* (ou *vectoriais*).

- Podem ser representadas através de *matrizes*. É possível relacionar a álgebra matricial com as operações algébricas que podem ser estabelecidas para este tipo de funções.

- Sejam V e W dois conjuntos; o símbolo $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ traduz a transformação (função) *T*, em que:

  i) V designa o **domínio** e W representa o **conjunto de chegada**;

  ii) Sendo $x \in \mathrm{V}$, o elemento $T(x) \in \mathrm{W}$ chama-se **imagem** de *x* através de *T*;

  iii) O conjunto que contém todas as imagens, através de *T*, dos elementos de V é um subconjunto de W e designa-se por **contradomínio**, ou **imagem**, de *T*

  $$T(\mathrm{V}) = \mathrm{Im}\, T = \{ y \in \mathrm{W} \;:\; y = T(x) \;,\; x \in \mathrm{V} \} \subseteq \mathrm{W}$$

  Diz-se que *T*(V) é a imagem, através de *T*, de V em W.

  iv) Se $T(\mathrm{V}) = \mathrm{W}$, a função *T* diz-se **sobrejectiva**; caso contrário, $T(\mathrm{V}) \subset \mathrm{W}$.

Definição de Transformação Linear

Sejam V e W dois *espaços lineares* sobre um corpo Ω e designe-se por 0_V e 0_W os elementos zero de V e W, respectivamente.

Definição: **Transformação linear**

A função $T : V \rightarrow W$ é uma *transformação linear* de V em W, se:

$$\text{i) } \forall x, y \in V \quad T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$\text{ii) } \forall x \in V \ \ \forall \alpha \in \Omega \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

ou, em alternativa,

$$\forall x, y \in V \ \ \forall \alpha, \beta \in \Omega \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

- Se T é *linear*, então $T(0_V) = 0_W$.

- Se $T(0_V) \neq 0_W$, então T *não* é *linear*.

- A transformação T é *linear*, se:

$$\forall u_1, u_2, \ldots, u_n \in V \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Omega \quad T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(u_j)$$

Exemplo 1: A *transformação identidade* $I_V : V \rightarrow V$ definida por

$$I_V(x) = x \quad , \quad x \in V$$

é uma *transformação linear*. Sejam $\alpha, \beta \in \Omega$ e $x, y \in V$:

$$I_V(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y$$

$$\alpha I_V(x) + \beta I_V(y) = \alpha x + \beta y$$

Conclui-se que $I_V(\alpha x + \beta y) = \alpha I_V(x) + \beta I_V(y)$.

Exemplo 2: A *transformação zero*, ou *nula*, $O : V \rightarrow W$ definida por

$$O(x) = 0_W \quad , \quad x \in V$$

é uma *transformação linear*.

Exemplo 3: A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, -y)$$

é designada por **simetria em torno do eixo dos *xx***.
A transformação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$R(x, y) = (-x, y)$$

é designada por **simetria em torno do eixo dos *yy***.
Ambas são *transformações lineares*.

Exemplo 4: A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y)=(x,0)$$

é designada por **projecção ortogonal sobre o eixo dos *xx***.
A transformação $R:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$R(x,y)=(0,y)$$

é designada por **projecção ortogonal sobre o eixo dos *yy***.
Ambas são *transformações lineares*.

Exemplo 5: Seja o vector não nulo $\vec{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y)=(x+u_1,y+u_2)$$

define a **translação de um ponto** no plano **descrita pelo vector** $\vec{u}$.
Esta transformação **não é** uma **transformação linear**.

Exemplo 6: Para um dado $0\le\alpha<2\pi$, a transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y)=(x\ \cos\alpha-y\ \mathrm{sen}\alpha, x\ \mathrm{sen}\alpha+y\ \cos\alpha)$$

é designada por **rotação de valor** α.
Trata-se de uma *transformação linear*.

Exemplo 7: Para um dado $0 \leq \alpha < 2\pi$, a *transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha, x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha, z)$$

designa a **rotação no espaço, de valor α, em torno do eixo dos *zz***.

Exemplo 8: Mostre que a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y)$$

é uma *transformação linear*.

Solução:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha\vec{g} + \beta\vec{h} = \alpha(g_1, g_2, g_3) + \beta(h_1, h_2, h_3) = (\alpha g_1 + \beta h_1, \alpha g_2 + \beta h_2, \alpha g_3 + \beta h_3)$$

$$T(\alpha\vec{g} + \beta\vec{h}) =$$

$$= (\alpha g_1 + \beta h_1 + \alpha g_3 + \beta h_3, \alpha g_2 + \beta h_2 + \alpha g_3 + \beta h_3, \alpha g_1 + \beta h_1 + \alpha g_2 + \beta h_2)$$

$$\alpha T(\vec{g}) + \beta T(\vec{h}) = \alpha T(g_1, g_2, g_3) + \beta T(h_1, h_2, h_3) =$$

$$= \alpha(g_1 + g_3, g_2 + g_3, g_1 + g_2) + \beta(h_1 + h_3, h_2 + h_3, h_1 + h_2) =$$

$$= (\alpha g_1 + \alpha g_3 + \beta h_1 + \beta h_3, \alpha g_2 + \alpha g_3 + \beta h_2 + \beta h_3, \alpha g_1 + \alpha g_2 + \beta h_1 + \beta h_2)$$

Conclui-se que $T(\alpha\vec{g} + \beta\vec{h}) = \alpha T(\vec{g}) + \beta T(\vec{h})$.

Exemplo 9: A *transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x,y,-z)$$

é designada por **simetria em relação ao plano coordenado *xOy***.
A *transformação linear* $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$R(x,y,z) = (-x,-y,z)$$

traduz a **simetria em em relação ao eixo dos *zz***.
A *transformação linear* $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$S(x,y,z) = (-x,-y,-z)$$

representa a **simetria em relação à origem** do referencial.

Exemplo 10: Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real deriváveis no intervalo (c,d). Mostre que o *operador derivação* $D : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$ definido por

$$D(f) = \frac{df}{dx} = f' \quad , \quad f \in \mathrm{V}$$

é uma *transformação linear*.

Solução:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathrm{V}$:

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

$$\alpha D(f) + \beta D(g) = \alpha f' + \beta g'$$

Conclui-se que $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$.

Exemplo 11: Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real contínuas no intervalo $[c,d]$. O *operador integração* $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$ tal que

$$T(f) = w = \int_c^x f(t)\,dt \quad , \quad f \in \mathrm{V} \quad \text{e} \quad c \leq x \leq d$$

é uma *transformação linear*.

Exemplo 12: Seja $\mathrm{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$ o espaço linear das matrizes reais $(\Omega = \mathbb{R})$ do tipo $m \times n$. Mostre que operador

$$T : \mathrm{M}_{(m,n)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{M}_{(n,m)}(\mathbb{R}) \text{ , tal que } T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$$

em que $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é a *matriz transposta* de $\boldsymbol{A}$, é uma *transformação linear*.

Solução:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$:

$$T(\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B}) = (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = (\alpha\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} + (\beta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha T(\boldsymbol{A}) + \beta T(\boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

Conclui-se que $T(\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B}) = \alpha T(\boldsymbol{A}) + \beta T(\boldsymbol{B})$.

Núcleo

Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma *transformação linear*.

Definição: **Núcleo de uma transformação linear**
Chama-se *núcleo* da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, representando-se por N(T), ao conjunto de todos os elementos do domínio que possuem como imagem, através de T, o elemento zero do conjunto de chegada, 0_{W}, isto é,

$$\mathrm{N}(T) = \{ x \in \mathrm{V} \ : \ T(x) = 0_{\mathrm{W}} \} \subseteq \mathrm{V}$$

Teorema: Se $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é uma transformação linear, então:

a) O elemento zero do domínio pertence a N(T)

$$0_{\mathrm{V}} \in \mathrm{N}(T)$$

ou seja, T aplica o elemento zero do domínio no elemento zero do conjunto de chegada.

b) N(T) é um *subespaço* de V (domínio).

Definição: **Nulidade de uma transformação linear**
Chama-se *nulidade* de uma transformação linear à dimensão do seu núcleo.

Exemplo 13: Em relação à *transformação linear identidade* $I_V : V \to V$

$$I_V(x) = x \quad , \quad x \in V$$

obtém-se

$$N(I_V) = \{0_V\}$$

Tem *nulidade* igual a *zero*, uma vez que $\dim N(I_V) = 0$.

Exemplo 14: Em relação à *transformação linear zero* (*nula*), $O : V \to W$

$$O(x) = 0_W \quad , \quad x \in V$$

obtém-se

$$N(O) = V$$

Se V for um espaço de dimensão finita, isto é, se $\dim V = n$, então a *nulidade* de O terá o valor n.

Exemplo 15: Em relação à *transformação linear* $D : V \to V$ (*operador derivação*), em que V é o espaço vectorial de todas as funções reais de variável real deriváveis no intervalo (c, d),

$$D(f) = f' \quad , \quad f \in V$$

obtém-se

$$N(D) = \{\text{funções reais de variável real constantes em } (c, d)\}$$

Tem *nulidade* igual a *um*, já que $\dim N(D) = 1$.

Contradomínio

Teorema: Se $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é uma transformação linear, então o seu contradomínio, *T*(V), é um *subespaço* do conjunto de chegada, W.

Definição: **Ordem de uma transformação linear**
Designa-se por *ordem* de uma transformação linear a dimensão do seu contradomínio.

- Determinação do **contradomínio** de $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$:

  i) Os elementos $y \in \mathrm{W}$ para os quais a **equação** $T(x) = y$, em que $x \in \mathrm{V}$, é **possível** pertencerão a $T(\mathrm{V})$, ou seja, $y \in T(\mathrm{V})$;

  ii) Os elementos $y \in \mathrm{W}$ para os quais a **equação** $T(x) = y$ é **impossível** não pertencerão a $T(\mathrm{V})$, ou seja, $y \notin T(\mathrm{V})$.

Teorema: **Teorema da dimensão**
Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma transformação linear. Se V é de **dimensão finita**, então *T*(V) é de *dimensão finita*, sendo verificada a relação

$$\dim \mathrm{V} = \dim T(\mathrm{V}) + \dim \mathrm{N}(T)$$

- Se V for um espaço de **dimensão infinita**, então, pelo menos, um dos subespaços *T*(V) ou N(*T*) deverá ser de *dimensão infinita*.

- Relativamente à transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, se $\dim \mathrm{V} = n$ e $\dim \mathrm{W} = m$, o **teorema da dimensão** permite observar o seguinte:

  i) Se $m > n$, *T nunca será sobrejectiva*, já que $\dim T(\mathrm{V}) \leq n < m$;

  ii) Se $m \leq n$, *T* só *será sobrejectiva*, se $\dim \mathrm{N}(T) = n - m$.

Exemplo 16: Em relação à *transformação linear identidade* $I_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$

$$I_{\mathrm{V}}(x) = x \quad , \quad x \in \mathrm{V}$$

obtém-se

$$I_{\mathrm{V}}(\mathrm{V}) = \{ y \in \mathrm{V} \ : \ y = I_{\mathrm{V}}(x) \ , \ x \in \mathrm{V} \} = \mathrm{V}$$

Trata-se de uma transformação **sobrejectiva**; se $\dim \mathrm{V} = n$, então

$$\dim I_{\mathrm{V}}(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{V} = n$$

Além disso

$$\mathrm{N}(I_{\mathrm{V}}) = \{ 0_{\mathrm{V}} \} \text{ e } \dim \mathrm{N}(T) = 0$$

Exemplo 17: Em relação à *transformação linear zero* (nula) $O : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$

$$O(x) = 0_{\mathrm{W}} \quad , \quad x \in \mathrm{V}$$

obtém-se

$$O(\mathrm{V}) = \{ y \in \mathrm{W} \ : \ y = O(x) \ , \ x \in \mathrm{V} \} = \{ 0_{\mathrm{W}} \} \subset \mathrm{W}$$

Verifica-se que $\dim O(\mathrm{V}) = 0$ e se $\dim \mathrm{V} = n$, então

$$\mathrm{N}(O) = \mathrm{V} \text{ e } \dim \mathrm{N}(O) = n$$

Exemplo 18: Relativamente à transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$$

determine o seu núcleo e o seu contradomínio.

Solução:

Núcleo:

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(\vec{x}) = (0,0,0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{S_N} = \mathrm{Base}\,\mathrm{N}(T) = \{\ \} \ \text{ e } \ \dim \mathrm{N}(T) = 0$$

Contradomínio – Processo I:

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{w} = T(\vec{x}) \ , \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y) = (w_1, w_2, w_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = w_1 \\ \phantom{x+{}} y + z = w_2 \\ x + y = w_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 1 & 1 & 0 & w_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & -1 & w_3 - w_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & -2 & w_3 - w_1 - w_2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(w_1 - w_2 + w_3) \\ y = \frac{1}{2}(-w_1 + w_2 + w_3) \\ z = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3) \end{cases}$$

- O sistema é **sempre possível** (e **determinado**); qualquer elemento do conjunto de chegada é imagem de um (e um só) elemento do domínio:

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \quad \Leftrightarrow \quad T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$$

A transformação linear T é **sobrejectiva** e

$$\mathrm{S_T} = \text{Base}\, T(\mathbb{R}^3) = \text{Base}\, \mathbb{R}^3 = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

$$\dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Contradomínio – Processo II:

- Recorrendo ao **teorema da dimensão**:

$$\dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{N}(T) = 3 - 0 = 3$$

$$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$$

Exemplo 19: Em relação à transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tal que

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+z, x-z, y+z)$$

determine o seu núcleo e o seu contradomínio.

Solução:

Aplicando o **teorema da dimensão**

$$\dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{N}(T) = 3 - \dim \mathrm{N}(T)$$

$$\dim T(\mathbb{R}^3) \leq 3 < \dim \mathbb{R}^4 \quad \Rightarrow \quad T(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^4$$

Conclui-se que a transformação linear **não é sobrejectiva**.

Núcleo:

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(\vec{x}) = (0,0,0,0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T(\vec{x}) = (0,0,0,0) \ \Leftrightarrow \ T(x,y,z) = (x+y+z, x+z, x-z, y+z) = (0,0,0,0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x \qquad + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3,\ \mathrm{S_N} = \mathrm{Base}\,\mathrm{N}(T) = \{\ \} \text{ e } \dim \mathrm{N}(T) = 0$$

$$\dim T(\mathbb{R}^3) = 3$$

Contradomínio:

$$T(\mathbb{R}^3)=\left\{\vec{w}\in\mathbb{R}^4 \;:\; \vec{w}=T(\vec{x}) \;,\; \vec{x}\in\mathbb{R}^3\right\}\subset\mathbb{R}^4$$

$$T(x,y,z)=(x+y+z,x+z,x-z,y+z)=(w_1,w_2,w_3,w_4) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = w_1 \\ x \quad\;\; +z = w_2 \\ x \quad\;\; -z = w_3 \\ \quad\;\; y+z = w_4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & w_2 \\ 1 & 0 & -1 & w_3 \\ 0 & 1 & 1 & w_4 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_1-w_2 \\ 0 & 0 & 1 & -w_1+w_2+w_4 \\ 0 & 0 & 0 & -2w_1+w_2+w_3+2w_4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=w_1-w_4 \\ y=w_1-w_2 \\ z=-w_1+w_2+w_4 \\ 0=-2w_1+w_2+w_3+2w_4 \end{cases}$$

- O sistema é **possível** (e **determinado**) e $\vec{w}\in T(\mathbb{R}^3)$, se

$$-2w_1+w_2+w_3+2w_4=0 \;\Leftrightarrow\; w_2=2w_1-w_3-2w_4$$

$$T(\mathbb{R}^3)=\left\{\vec{w}=(w_1,2w_1-w_3-2w_4,w_3,w_4)\in\mathbb{R}^4\right\}=$$

$$=\{\vec{w}=w_1(1,2,0,0)+w_3(0,-1,1,0)+w_4(0,-2,0,1) \;,\; w_1,w_3,w_4\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^4$$

$$S_T=\text{Base }T(\mathbb{R}^3)=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}=\{(1,2,0,0),(0,-1,1,0),(0,-2,0,1)\}$$

- Se $w_2\neq 2w_1-w_3-2w_4$ o **sistema** de equações é **impossível** e, portanto, $\vec{w}\notin T(\mathbb{R}^3)$.

Teorema: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, onde V é um espaço linear sobre um corpo Ω de dimensão igual a *n*. Seja

$$\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ uma } \textit{base} \text{ para V}$$

e $\mathrm{U'} = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ o conjunto formado pelas imagens, através de *T*, dos elementos da base U. Então o *contradomínio* de *T* coincide com o *subespaço gerado pelo conjunto* U', ou seja,

$$T(\mathrm{V}) = L(\mathrm{U'})$$

- Consequências do teorema anterior:

  1. Sendo $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base para V, então $\dim \mathrm{V} = n$.

  2. Se U' é *linearmente independente*, então é uma base para $T(\mathrm{V})$:

  $$\dim T(\mathrm{V}) = n \text{ e } \dim \mathrm{N}(T) = 0$$

  3. Se U' é *linearmente dependente* e admitindo que existe em U' um subconjunto com um número máximo de $p < n$ elementos linearmente independentes, então:

  $$\dim T(\mathrm{V}) = p \text{ e } \dim \mathrm{N}(T) = n - p$$

Exemplo 20: Para a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ do **exemplo 18**

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$$

tem-se

$$\text{Base do domínio: } \mathrm{S_D} = \mathrm{Base}\,\mathbb{R}^3 = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

Seja o conjunto formado pelas imagens dos elementos da base $\mathrm{S_D}$

$$\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{T(\vec{i}), T(\vec{j}), T(\vec{k})\right\} = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$$

$$T(\mathbb{R}^3) = L(\mathrm{U})$$

O conjunto U é *linearmente independente*:

$$|\,\boldsymbol{U}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Então

$$\mathrm{U} = \mathrm{Base}\, T(\mathbb{R}^3) \ \text{ e } \ \dim T(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$$

A transformação linear é **sobrejectiva** e

$$\dim \mathrm{N}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 3 - 3 = 0$$

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Exemplo 21: Em relação à transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ do **exemplo 19**

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+z, x-z, y+z)$$

tem-se

$$\text{Base do domínio: } S_D = \text{Base}\,\mathbb{R}^3 = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$$

Seja o conjunto formado pelas imagens dos elementos da base S_D

$$U = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\} = \{T(\vec{i}),T(\vec{j}),T(\vec{k})\} = \{(1,1,1,0),(1,0,0,1),(1,1,-1,1)\}$$

$$T(\mathbb{R}^3) = L(U)$$

O conjunto U é *linearmente independente*:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } r(\boldsymbol{U}) = 3$$

$$U = \text{Base}\,T(\mathbb{R}^3) \text{ e } \dim T(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$T(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^4$$

A transformação linear **não** é **sobrejectiva** e

$$\dim \mathrm{N}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 3 - 3 = 0$$

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$