Inversão de matrizes quadradas

Definição: Inversa de uma matriz quadrada
Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz inversa* de $\boldsymbol{A}$, à matriz quadrada, de ordem n, $\boldsymbol{A}^{-1}$, tal que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}$$

- É condição necessária, mas não suficiente, para que a matriz $\boldsymbol{A}$ seja *invertível*, ou tenha inversa, que seja uma *matriz quadrada*.

- Se existir matriz inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$, ela deverá ser única.

- À matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ que possui inversa chama-se *matriz não singular* ou *regular*; caso contrário, a matriz $\boldsymbol{A}$ designa-se por *matriz singular* ou *não regular*.

- As matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}^{-1}$, caso esta exista, são *matrizes comutativas*.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas de ordem n, num corpo Ω, e não singulares. Então:

a) $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$.

b) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

c) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

d) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Exemplo 20: Usando a definição, calcule-se a matriz inversa de

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Designando

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{I} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2a-2c & 2b-2d \\ -a+3c & -b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a-2c=1 \\ -a+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3/4 \\ c=1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b-2d=0 \\ -b+3d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ d=1/2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Verificação do resultado obtido

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O processo adoptado no cálculo da matriz inversa no exemplo anterior não é adequado, em especial quando a ordem da matriz a inverter é elevada. Pretende-se apresentar um processo alternativo, fácil de programar e para ser usado em computadores.

Cálculo da matriz inversa de uma matriz quadrada

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada, de ordem n e não singular.

- A determinação da matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ é equivalente a resolver n sistemas, não homogéneos, de n equações lineares a n incógnitas cada um; o número total de incógnitas envolvido será igual a n^2, tantas quanto o número de elementos que constituem a matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$.

- Será usado o *método de eliminação de Gauss-Jordan*.

Consideremos o caso particular $n = 3$; admitamos que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem 3 e não singular

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pretende-se obter uma matriz quadrada de ordem 3, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A equação matricial anterior conduz a um conjunto de 3 sistemas de equações lineares não homogéneos, sendo cada um deles constituído por 3 equações a 3 incógnitas.

- Determinação da 1ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array}\right]$$

- Determinação da 2ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \\ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array}\right]$$

- Determinação da 3ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0 \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array}\right]$$

- Os 3 sistemas de equações lineares possuem a mesma matriz de coeficientes das incógnitas (a matriz $\boldsymbol{A}$).

- A sua resolução pode ser feita, em simultâneo, utilizando três colunas distintas de termos independentes, que constituem os segundos membros de cada um dos 3 sistemas.

- Considerando a matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

aplicando o *método de eliminação de Gauss-Jordan* aos três sistemas de equações lineares

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

em que

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

Exemplo 21: Pretende-se obter, se tal for possível, a matriz inversa de

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Solução:

Aplicando o *método de eliminação de Gauss-Jordan*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r}\\ -2L_1+L_2\rightarrow\\ -3L_1+L_3\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r}4L_1+L_3\rightarrow\\ -2L_2+L_3\rightarrow\\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r}L_1/4\rightarrow\\ L_2/2\rightarrow\\ L_3/4\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & 1/4\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 0 & 1/4\\ 1/2 & -1 & 1/2\\ -3/4 & 0 & 1/4\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Verificação do resultado obtido

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Exemplo 22: Pretende-se encontrar, se tal for possível, a matriz inversa de

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução:

Aplicando o *método de eliminação de Gauss-Jordan*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ -2L_1 + L_2 \rightarrow \\ -L_1 + L_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2L_2 + L_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

- Verifica-se o anulamento da terceira linha da matriz dos coeficientes dos sistemas.

- Os 3 sistemas de equações lineares são *impossíveis* (os respectivos termos independentes são todos não nulos).

- Podemos concluir que ***G*** não admite matriz inversa, sendo, portanto, uma matriz singular.

Lei das potências inteiras

Definição: Potências inteiras positivas
Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, define-se as *potências inteiras positivas de* $\boldsymbol{A}$ do seguinte modo

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1} = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A} \quad \text{com} \quad k \geq 1$$

Por convenção, considera-se

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$$

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, então

$$\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^k \quad \text{com} \quad k \geq 1$$

Definição: Matriz periódica
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, diz-se uma *matriz periódica*, se $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}$, sendo $p \geq 2$. Se p é o menor valor inteiro positivo tal que $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}$, então diz-se que o *período* de $\boldsymbol{A}$ é $p-1$.

Definição: Matriz idempotente
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, diz-se *idempotente*, se $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

- Uma matriz idempotente é uma matriz periódica de período igual a 1.

Exemplo 23: A matriz quadrada de ordem 2

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

é uma matriz idempotente

$$\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}$$

Definição: Matriz nilpotente

Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, designa-se *nilpotente*, se existir um número inteiro positivo p tal que $\boldsymbol{A}^p=\boldsymbol{O}$. Se p é o menor valor inteiro positivo tal que $\boldsymbol{A}^p=\boldsymbol{O}$, então diz-se que $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz nilpotente de índice p*.

Exemplo 24: As matrizes $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{G}$ (quadradas de ordem 3) são matrizes nilpotentes

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^2=\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O} \quad (p=2)$$

$$\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}^3=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O} \quad (p=3)$$

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e não singular, então:

a) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{0} = \boldsymbol{I}$.

b) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k} = \left(\boldsymbol{A}^{k}\right)^{-1}$ com $k \geq 1$.

Definição: Potências inteiras negativas
Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e não singular, define-se as *potências inteiras negativas de* $\boldsymbol{A}$ do seguinte modo

$$\boldsymbol{A}^{-k} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k} \quad \text{com} \quad k \geq 1$$

Exemplo 25: Sabendo que

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\boldsymbol{F}^{-2} = \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{2} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -12 & 16 & -4 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz unitária

Definição: Matriz unitária
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, e não singular diz-se uma *matriz unitária*, se a sua matriz inversa for igual à sua matriz transconjugada, isto é, se

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, e unitária. Verifica-se então:

i) A soma dos produtos dos elementos de qualquer fila da matriz pelos respectivos conjugados é igual a 1;

ii) A soma dos produtos dos elementos de uma dada fila da matriz pelos conjugados dos elementos correspondentes de qualquer fila paralela é igual a 0.

Exemplo 26: A matriz quadrada (complexa) de ordem 2

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

é uma matriz unitária

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

Exemplo 27: Relativamente à matriz unitária

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

obtém-se

L1 ; conjugado L1 $$\sum_{k=1}^{2} a_{1k}\overline{a}_{1k} = \frac{1}{2}\left[(i)(-i) + (1)(1)\right] = 1$$

L2 ; conjugado L2 $$\sum_{k=1}^{2} a_{2k}\overline{a}_{2k} = \frac{1}{2}\left[(1)(1) + (i)(-i)\right] = 1$$

L1 ; conjugado L2 $$\sum_{k=1}^{2} a_{1k}\overline{a}_{2k} = \frac{1}{2}\left[(i)(1) + (1)(-i)\right] = 0$$

L2 ; conjugado L1 $$\sum_{k=1}^{2} a_{2k}\overline{a}_{1k} = \frac{1}{2}\left[(1)(-i) + (i)(1)\right] = 0$$

Teorema: Sejam ***A*** e ***B*** duas matrizes unitárias de ordem *n*. São verdadeiras as seguintes proposições:

a) A matriz ***A*** é uma matriz normal.

b) A matriz produto ***AB*** é uma matriz unitária de ordem *n*.

Matriz ortogonal

Definição: Matriz ortogonal
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, no corpo $\Omega = \mathbb{R}$ e não singular é uma *matriz ortogonal*, se a sua matriz inversa for igual à sua matriz transposta, isto é, se

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Teorema: O produto de duas matrizes ortogonais de ordem n é ainda uma matriz ortogonal de ordem n.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz ortogonal de ordem n, então:

i) O produto de qualquer matriz-linha (coluna) de $\boldsymbol{A}$ pela respectiva matriz transposta é igual a 1;

ii) O produto de qualquer matriz-linha (coluna) de $\boldsymbol{A}$ pela transposta de qualquer outra matriz-linha (coluna) é igual a 0.

Exemplo 28: As matrizes $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes ortogonais

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}_{(1)}(\boldsymbol{B}_{(1)})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{B}_{(2)}(\boldsymbol{B}_{(2)})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad \boldsymbol{B}_{(1)}(\boldsymbol{B}_{(2)})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}_{(1)}(\boldsymbol{C}_{(1)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\mathrm{sen}\theta \end{bmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{C}_{(2)}(\boldsymbol{C}_{(2)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{C}_{(3)}(\boldsymbol{C}_{(3)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{C}_{(1)}(\boldsymbol{C}_{(2)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\;\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{C}_{(2)}(\boldsymbol{C}_{(3)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{C}_{(1)}(\boldsymbol{C}_{(3)})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 0$$