FEUP - Álgebra - MIEIC

Ana Neves

Semana 28Set - 2Out 2015

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

1.

a) $\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{-}(2\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{-}2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{-}2\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{G}=2\boldsymbol{C}\text{-}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}^2\text{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}/2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & 10 \\ 22 & 10 & 50 \\ 49 & 26 & 91 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $tr\,(\boldsymbol{C})=8$ $\qquad$ $tr\,(\boldsymbol{G})=17$

$tr\,(\boldsymbol{H})=113/2$ $\qquad$ $tr\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=-1$

$tr\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})=1$ $\qquad$ $tr\,(\boldsymbol{C}^{-1})=4$

2. $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=2\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^2\right)=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=3\boldsymbol{A}\text{-}2\boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{A}^n=n\boldsymbol{A}\text{-}(n\text{-}1)\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ n\in\mathbb{N}$

3.

a) Não é possível calcular a matriz $\boldsymbol{E}$, uma vez que o produto matricial $\boldsymbol{AB}$ não está definido (o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ não coincide com o número de linhas de $\boldsymbol{B}$).

Não é possível calcular a matriz $\boldsymbol{G}$, uma vez que o produto matricial $\boldsymbol{BA}$ não está definido (o número de colunas de $\boldsymbol{B}$ não coincide com o número de linhas de $\boldsymbol{A}$).

$$F = AB^{T}C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 11 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 27 & 35 & 30 \end{bmatrix}$$

$$H = C^{T}BA^{T} = C^{T}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 35 \\ 30 \end{bmatrix}$$

ou ainda, recorrendo às propriedades da transposta de uma matriz,

$$H = C^{T}BA^{T} = C^{T}(AB^{T})^{T} = (AB^{T}C)^{T} = F^{T} = \begin{bmatrix} 27 \\ 35 \\ 30 \end{bmatrix}$$

b) $$C^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C^{-1}C = CC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{D}$ não tem matriz inversa; trata-se de uma matriz singular (não regular).