Matriz em Escada de Linhas

Consideremos uma matriz ***A*** do tipo $m \times n$, num corpo Ω; diz-se que a matriz ***A*** se encontra sob a forma de ***escada de linhas***, se verificar as seguintes condições:

1. Todas as linhas não nulas da matriz ***A*** deverão situar-se acima (com um índice de linha inferior) de qualquer linha nula que eventualmente possa existir na matriz.

2. Se o primeiro elemento (com o índice de coluna mais baixo) não nulo de uma linha não nula da matriz ***A*** se situar na coluna de índice k, então deverão ser nulos todos os elementos dessa mesma coluna k situados nas linhas da matriz colocadas abaixo daquela.

3. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula da matriz ***A*** encontra-se sempre numa coluna à direita (com um índice de coluna superior) da coluna onde está posicionado o primeiro elemento não nulo de qualquer linha não nula situada acima daquela.

- A *matriz identidade* é uma matriz em escada de linhas.

- Qualquer *matriz escalar* que não seja nula é uma matriz em escada de linhas.

- As *matrizes diagonais* e as *matrizes triangulares superiores* poderão, ou não, ser matrizes em escada de linhas.

Exemplo 29:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz em escada de linhas.

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz em escada de linhas.

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas.

Nota: A matriz não verifica as condições 2 e 3.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas.

Nota: A matriz não verifica as condições 2 e 3.

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas:

Nota: A matriz não verifica a condição 1.

- ***Método da condensação da matriz***: consiste na transformação de uma qualquer matriz do tipo $m \times n$ numa matriz em escada de linhas, aplicando um conjunto de operações elementares às linhas e colunas da matriz.

- ***Operações de Jacobi***: as três operações elementares que servem de base a essa transformação são as seguintes:

  1. Troca de duas quaisquer filas paralelas (linhas/colunas) da matriz.

  2. Multiplicação de uma qualquer fila da matriz por um escalar não nulo.

  3. Adição a uma dada fila de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas.

- As três operações elementares atrás referidas são semelhantes às que são usadas no método de eliminação de Gauss para resolução de sistemas de equações lineares.

Método da condensação da matriz: seja a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usando as ***operações de Jacobi***, procede-se ao anulamento de todos os elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ situados abaixo da diagonal formada pelos elementos $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{mm})$, ***operação de condensação da parte inferior da matriz***, transformando-a numa nova matriz $\boldsymbol{A'}$ do tipo $m \times n$ que, genericamente, tomará a forma

$$\boldsymbol{A'} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \wedge \ a'_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

tendo-se admitido, como resultado da aplicação do método, a presença de k linhas não nulas (as k primeiras linhas, por exemplo) e de $m-k$ linhas nulas na matriz final $\boldsymbol{A'}$.

Exemplo 30:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ -2L_1 + L_2 \rightarrow \\ -L_1 + L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ 2L_2 + L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ -L_1 + L_2 \rightarrow \\ -2L_1 + L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ 3L_2 - 2L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ 2\,L_1 + L_2 \rightarrow \\ 3\,L_1 + L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} L_4 \rightarrow \\ \\ \\ L_1 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ -2L_1 + L_2 \rightarrow \\ -3L_1 + L_3 \rightarrow \\ -3L_1 + L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ -5L_2 + L_3 \rightarrow \\ -L_2 + L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ L_4 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Característica de uma Matriz

Definição: Característica de uma matriz do tipo $m \times n$
Designa-se por *característica de uma matriz* $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$, representando-se por $r(\boldsymbol{A})$, o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes que existem nessa matriz.

Teorema: Dada uma matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$, verifica-se que

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$$

- O processo de cálculo que será usado na obtenção da característica de uma matriz tem por base o ***método da condensação da matriz***, que permite, recorrendo às ***operações de Jacobi***, transformar uma qualquer matriz do tipo $m \times n$ numa *matriz em escada de linhas*.

- ***Operações de Jacobi***: são as três operações elementares seguintes:

  1. Troca de duas quaisquer filas paralelas (linhas/colunas) da matriz.

  2. Multiplicação de uma qualquer fila da matriz por um escalar não nulo.

  3. Adição a uma dada fila de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas.

Seja a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

da qual resulta, após a aplicação do ***método da condensação da matriz***, a ***matriz em escada de linhas***

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \wedge \ a'_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

Teorema: A característica de uma matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$ não se altera, executando sobre as linhas da matriz qualquer uma das operações de Jacobi.

Teorema: As operações de Jacobi quando executadas sobre as linhas de uma matriz não alteram a característica das suas colunas. Da mesma forma, as operações de Jacobi quando executadas sobre as colunas de uma matriz não alteram a característica das suas linhas.

- O ***método da condensação da matriz*** não altera o valor da característica da matriz inicial; então

$$r(\boldsymbol{A}') = r(\boldsymbol{A})$$

Teorema: A característica de uma matriz em escada de linhas é igual ao número de linhas não nulas existentes na matriz.

- Assim, conclui-se que $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}') = k < m$.

Seja a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Provemos que o número de colunas linearmente independentes na matriz $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de linhas linearmente independentes.

Sabemos que

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}') = k < m$$

em que

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \wedge \ a'_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

é a **matriz em escadas de linhas** que resultou de $\boldsymbol{A}$ através da aplicação do **método de condensação da matriz**.

- As k primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{A}'$ são linearmente independentes; podemos mostrar que as k matrizes-coluna do tipo $m\times 1$ que constituem as k primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{A}'$ geram de forma única a respectiva matriz nula.

$$\lambda_1 \boldsymbol{A}'^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{A}'^{(2)} + \lambda_3 \boldsymbol{A}'^{(3)} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{A}'^{(k)} = \boldsymbol{O}$$

resultando o sistema de k equações lineares homogéneo a k incógnitas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1k} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2k} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes do sistema são todos não nulos

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Então as k primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{A}'$ são linearmente independentes.

- Mostremos agora a não existência de mais de k colunas linearmente independentes na matriz $\boldsymbol{A}'$.

Aplicando as **operações de Jacobi** às colunas da matriz $\boldsymbol{A}'$ é possível anular-se completamente as colunas de índices $k+1, k+2, \ldots, n$, de onde resulta a matriz $\boldsymbol{A}''$ do tipo $m \times n$

$$\boldsymbol{A}'' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \wedge \ a'_{ii} \neq 0 \ \ (i=1,2,\ldots,k)$$

que possui exactamente k colunas linearmente independentes, ou seja, as mesmas k primeiras colunas da matriz $\boldsymbol{A}'$ (qualquer conjunto constituído por $k+1$ colunas da matriz $\boldsymbol{A}''$ é linearmente dependente).

- Assim, $r(\boldsymbol{A}') = r(\boldsymbol{A}'') = k < m$.

- Conclui-se que $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}') = r(\boldsymbol{A}'') = k < m$.

Teorema: Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n é uma matriz não singular ou regular, se e só se $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) de ordem n com todos os seus elementos principais não nulos, então $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) de ordem n em que, pelo menos, um dos elementos principais é nulo, então $r(\boldsymbol{A}) < n$.

Exemplo 31:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 6 & -11\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow r(\boldsymbol{A})=2$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é singular ($r(\boldsymbol{A})<3$).

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow r(\boldsymbol{B})=1$$

A matriz $\boldsymbol{B}$ é singular ($r(\boldsymbol{B})<3$).

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow r(\boldsymbol{D})=4$$

A matriz $\boldsymbol{D}$ é não singular ou regular.

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow r(\boldsymbol{C})=3$$

Exemplo 32: Pretende-se estudar a influência do parâmetro $a \in \mathbb{R}$ na característica da matriz do tipo 4×3

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ a+1 & a+5 & 4 \\ a-6 & 9 & 3 \\ a-3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Sabe-se que $1 \le r(\boldsymbol{H}) \le 3$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Aplicando o ***método da condensação da matriz***, transformemos a matriz ***H*** numa ***matriz em escada de linhas***

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ a+1 & a+5 & 4 \\ a-6 & 9 & 3 \\ a-3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & -4 & 3 \\ 4 & a+5 & a+1 \\ 3 & 9 & a-6 \\ 2 & 5 & a-3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\ C_3 & & C_1 \end{array} \end{array} \wedge \ r(H) \ge 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ 4L_1 + L_2 \rightarrow \\ 3L_1 + L_3 \rightarrow \\ 2L_1 + L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & a-11 & a+13 \\ 0 & -3 & a+3 \\ 0 & -3 & a+3 \end{bmatrix} \wedge \ r(H) \ge 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ L_4 \rightarrow \\ \\ L_2 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{-3} & a+3 \\ 0 & -3 & a+3 \\ 0 & a-11 & a+13 \end{bmatrix} \wedge \; r(H) \geq 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ -L_2 + L_3 \rightarrow \\ (a-11)L_2 + 3L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{-3} & a+3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-3) \end{bmatrix} \wedge \; r(H) \geq 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ L_4 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \boldsymbol{H'} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{-3} & a+3 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \; r(H) \geq 2$$

- A matriz $\boldsymbol{H'}$ é uma ***matriz em escada de linhas***.

- Os elementos $h'_{11} = -1$ e $h'_{22} = -3$ são não nulos, logo as duas primeiras linhas (colunas) da matriz são linearmente independentes:

$$r(\boldsymbol{H}) = r(\boldsymbol{H'}) \geq 2$$

- Além disso, $r(\boldsymbol{H}) = r(\boldsymbol{H'}) = 3$, se e só se $h'_{33} = (a-2)(a-3) \neq 0$.

- Concluindo:

$$r(\boldsymbol{H}) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 2 \; \wedge \; a \neq 3$$

$$r(\boldsymbol{H}) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \; \vee \; a = 3$$