

# Produto Vectorial

- A operação *produto vectorial* encontra-se apenas definida entre vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição:** Sejam os vectores  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Define-se o *produto vectorial* de  $\vec{a}$  por  $\vec{b}$ , o vector de  $\mathbb{R}^3$ , representado por  $\vec{a} \times \vec{b}$ , definido da forma seguinte:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

**Propriedades:** Sejam os vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  de  $\mathbb{R}^3$  e o escalar  $k \in \mathbb{R}$ :

- a) Propriedade *antisimétrica*:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- b) Propriedade *distributiva*:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- c) Propriedade *homogénea*:  $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$
- d) *Ortogonalidade em relação ao vector  $\vec{a}$* :  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$
- e) *Ortogonalidade em relação ao vector  $\vec{b}$* :  $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$
- f) *Identidade de Lagrange*:  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

- Convém notar que a operação *produto vectorial* não satisfaz as *propriedades comutativa e associativa*, ou seja,

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

**Propriedade:** Sejam os vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Então:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$

- Interpretação *geométrica* para o vector não nulo  $\vec{a} \times \vec{b}$ :
  - a) O vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  tem a *directção ortogonal* às directções definidas pelos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ;
  - b) A *norma* do vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  é função das normas dos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e do ângulo  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  por estes formado;
  - c) O *sentido* do vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  está dependente do tipo de *referencial* Oxyz que for considerado:
    - i) *Referencial directo, positivo* ou '*dextrorsum*': o sentido de  $\vec{a} \times \vec{b}$  é definido pela *regra da mão direita*;
    - ii) *Referencial inverso, negativo* ou '*sinistrorsum*': o sentido de  $\vec{a} \times \vec{b}$  é definido pela *regra da mão esquerda*;
  - d) A *norma* do vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  tem exactamente o mesmo valor da *área do paralelogramo* determinado pelos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .
- A operação *produto vectorial* é frequentemente utilizada na determinação da *área de polígonos*.

**Exemplo 1:** Relativamente aos vectores coordenados unitários verifica-se:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} ; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} ; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

**Exemplo 2:** Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ , tais que  $\|\vec{b}\| = 1$ ,  $\|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{6} / 2$  e  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi / 4$ . Determine  $\|\vec{a}\|$ .

Solução:  $\|\vec{a}\| = \sqrt{2} / 6$ .

**Teorema:** Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Então o conjunto  $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$  é *linearmente dependente*, se e só se  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

**Teorema:** Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Se o conjunto  $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$  é *linearmente independente*, então:

- i)  $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$  é um conjunto *linearmente independente*;
- ii) Qualquer vector  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ , tal que  $\vec{n} \perp \vec{a}$  e  $\vec{n} \perp \vec{b}$  é um *vector múltiplo* de  $\vec{a} \times \vec{b}$ , isto é,

$$\vec{n} = k\vec{a} \times \vec{b}, \quad k \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 3:** Considere o conjunto ortogonal  $S = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ , com  $\|\vec{b}\| = 1$ ; seja o vector  $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b}$ , em que  $\vec{c} \in L(S)$ . Admitindo que  $\|\vec{d}\| = \sqrt{6}$  e que  $\theta = \angle(\vec{c}, \vec{d}) = \pi / 3$ , calcule  $\|\vec{a}\|$ .

Solução:  $\|\vec{a}\| = 3\sqrt{2} / 2$ .

- Existe uma *regra prática* para o cálculo do vector  $\vec{a} \times \vec{b}$ , que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).
- *Regra prática* para o cálculo do vector  $\vec{a} \times \vec{b}$ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Exemplo 4:** Determine a área do triângulo definido pelos vectores  $\vec{a} = (2, 1, -1)$  e  $\vec{b} = (1, 2, 2)$ .

Solução:  $A = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{1}{2} \|(4, -5, 3)\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

## Produto Misto

- A operação *produto misto* aglutina, numa única operação, as operações *produto escalar* e *produto vectorial*, encontrando-se apenas definida entre vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ .

- Sendo  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  e  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ , então

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (c_1, c_2, c_3) \cdot (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1$$

- Interpretação *geométrica* para o produto misto  $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ :
  - i) O *módulo* do *produto misto*,  $|\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|$ , tem exactamente o mesmo valor do *volume do prisma* determinado pelos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ ;
  - ii) A operação *produto misto* é frequentemente usada na determinação do *volume de poliedros*.
- Existe uma *regra prática* para o cálculo do *produto misto*  $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ , que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).

- *Regra prática para o cálculo do produto misto  $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ :*

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (c_1, c_2, c_3) \cdot (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Da aplicação da *Regra de Sarrus* para o cálculo de *determinantes de 3ª ordem* resulta:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & & \\ a_1 & a_2 & \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & c_3 & \\ & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_3 & a_1 \end{matrix}$$

**Exemplo 5:** Determine o volume do tetraedro definido pelos vectores  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, 2)$  e  $\vec{c} = (-2, 2, -2)$ .

Solução:  $V = \frac{1}{6} |\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}| = 4.$

**Teorema:** Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Então:

i)  $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a};$

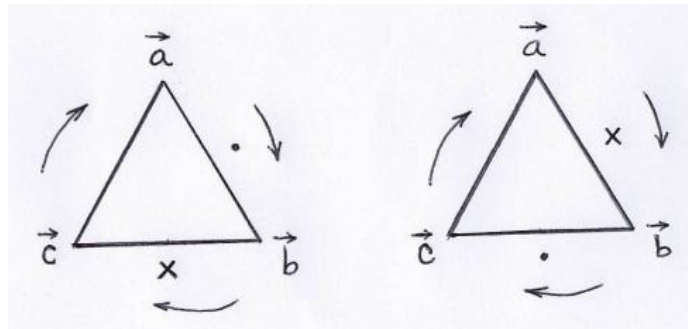
ii)  $\vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}.$

- As *propriedades* expostas no teorema anterior para o *produto misto* e a *propriedade comutativa* para o *produto escalar*, permitem escrever:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} &= \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Em resumo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$



**Teorema:** Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vectores do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Então o conjunto  $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$  é *linearmente dependente*, se e só se  $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ .