**Importante**: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

**Nome COMPLETO**: ______________________________

# GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valor por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta **1/3** valores na cotação deste Grupo.)

**RESPOSTAS**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. Qual a transformada de Laplace da solução da equação diferencial ordinária $y''+2y'+2y=\delta(t)$, onde $\delta(t)$ representa a função delta de Dirac, com $y(0)=0$ e $y'(0)=0$?

   (a) $\dfrac{1}{s^2+2s+1}$ (b) $\dfrac{e^s}{s^2+2s+2}$ (c) $\dfrac{s}{s^2+2s+2}$ (d) $\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

2. Qual o valor da soma da série infínita $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\int_n^{n+2}\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)$?

   (a) *divergente* (b) $5/6$ (c) $3/2$ (d) $2$

3. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $x^2y''-6xy'+10y=0$

   (a) $y(x)=x^3$ (b) $y(x)=x^2$ (c) $y(x)=x^4$ (d) $y(x)=x^{-2}$

4. Qual o desenvolvimento em série de Maclaurin da função erro $\operatorname{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^{4n}}{(4n)!}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ (c) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^{n+1}}{(2n+1)n!}$

5. Qual o valor da soma da série infínita $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$?

   (a) 2 (b) *divergente* (c) $1/2$ (d) 1

# GRUPO II

5. **[2]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária, justificando todos os cálculos efectuados:

$$\frac{y'}{2}+xy=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}y^2$$

6. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' + 2y' + 5y = f(t)$$

(a) [**1**] Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

(b) [**2**] Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária quando $f(t) = e^{-t}\sec(2t)$.

(c) [**3**] Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, com o termo não homogéneo $f(t) = \mathcal{U}(t-1)$. A função $\mathcal{U}(t)$ representa a função degrau unitário.

## GRUPO III

8. [**3**] Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+3)^n}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n\ln(n)}$

9. [**3**] Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = \cos^2(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 0$. <u>Caso entenda necessário</u>, considere a seguinte série de Maclaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

10. [**1**] Mostre, <u>sem usar a definição</u>, que a transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ é dada por:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a},$$

para $s > a$. Justifique todos os cálculos efectuados.

---

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[a] = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}[te^{at}] = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\sinh kt] = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[\cosh kt] = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

$\mathcal{L}[e^{at}\sin kt] = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at}\cos kt] = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as}F(s)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

---