U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1º Semestre | 2019/2020
2º Mini Teste | 20.01.2020 | Duração: 2h + 15m

## Proposta de resolução

---

1. Qual a transformada de Laplace da solução da equação diferencial ordinária $y'' + 2y' + 2y = \delta(t)$, onde $\delta(t)$ representa a função delta de Dirac, com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$?

(a) $\frac{1}{s^2+2s+1}$ (b) $\frac{e^s}{s^2+2s+2}$ (c) $\frac{s}{s^2+2s+2}$ (d) $\frac{1}{(s+1)^2+1}$

$$\mathcal{L}\{y''+2y'+2\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} \Leftrightarrow \bar{Y}s^2 + 2\bar{Y}s + 2\bar{Y} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{Y} = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$ (d)

---

2. Qual o valor da soma da série infinita $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\int_n^{n+2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)$?

(a) *divergente* (b) 5/6 (c) 3/2 (d) 2

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_n^{n+2} \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}_{\text{Telescópica}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}_{\text{Telescópica.}}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} \xrightarrow{} 0 + \frac{1}{3} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2} \xrightarrow{} 0 = 5/6$$ (b)

---

3. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$

(a) $y(x) = x^3$ (b) $y(x) = x^2$ (c) $y(x) = x^4$ (d) $y(x) = x^{-2}$

(a)
$y''=3,\ y'=3x$
$\Rightarrow 3x^2 - 6x3x + 10x^3 = \emptyset \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 15x^2 \neq 10x^3$
X

(b)
$y''=2,\ y'=2x$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x^2 + 10x^2 = \emptyset$
$\Leftrightarrow \emptyset = \emptyset$
✓ (b)

(c)
X

(d)
X

4. Qual o desenvolvimento em série de Maclaurin da função erro $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$?

(a) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{x}^{4n}}{(4n)!}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{x}^{n+1}}{(2n+1)n!}$

Nota: $f(-x) = f(x)$ par, e $f(-x) = -f(x)$ ímpar

$\rightarrow (-x)^2 = x^2 \longrightarrow e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} \longrightarrow \mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x) \rightarrow$ b

ou

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

logo

$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$

integrando

$\int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \frac{x^9}{4!\,9} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \rightarrow$ b

5. Qual o valor da soma da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$?

(a) 2 (b) *divergente* (c) 1/2 (d) 1

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}_{\text{telescópica}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2^n}}_{\text{Geométrica}} \right]$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \cancel{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}}^{0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1/2}{1 - 1/2} \right) = 1 \longrightarrow$ d

## GRUPO II

5. [2] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária, justificando todos os cálculos efectuados:

$$\frac{y'}{2} + xy = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} y^2$$

$\rightarrow y' + 2xy = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} y^2 \Leftrightarrow z' - 2xz = +\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$\rightarrow \frac{d}{dx}\left( z e^{-x^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z e^{-x^2} = \mathrm{erf}(x) + C = \frac{e^{-x^2}}{y}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{C e^{x^2} + \mathrm{erf}(x) e^{x^2}}$

Equação de Bernoulli

- $n = 2$, $z = y^{-1}$, $z' = (-1) y^{-2} y'$
- $\mu = e^{\int -2x\, dx} = e^{-x^2}$

6. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' + 2y' + 5y = f(t)$$

(a) [1] Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

$$y'' + 2y' + 5y = \emptyset \longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = \emptyset \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$

Solução Homogénea

$$y_H(t) = C_1 e^{-t}\cos(2t) + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

$$y_H(t) = C_1 e^{(-1+2i)t} + C_2 e^{(-1-2i)t}$$

(b) [2] Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária quando $f(t) = e^{-t}\sec(2t)$.

· Solução Geral: $\underline{\underline{y_G(t) = C_1(t)e^{-t}\cos(2t) + C_2(t)e^{-t}\operatorname{sen}(2t)}}$

· $C_1(t)$ e $C_2(t)$

$$\begin{bmatrix} \cancel{e^{-t}}\cos(2t) & \cancel{e^{-t}}\operatorname{sen}(2t) \\ \cancel{e^{-t}}(-\cos(2t)-2\operatorname{sen}(2t)) & \cancel{e^{-t}}(-\operatorname{sen}(2t)+2\cos(2t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \cancel{e^{-t}}\sec(2t) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \|W\| = -\cos(2t)\operatorname{sen}(2t) + 2\cos^2(2t) - \left(-\operatorname{sen}(2t)\cos(2t) - 2\operatorname{sen}^2(2t)\right) = 2$$

$$\cdot C_1'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \emptyset & \operatorname{sen}(2t) \\ \sec(2t) & (-\operatorname{sen}(2t)+2\cos(2t)) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2t) \Rightarrow C_1(t) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \overline{C_1}$$

$$\cdot C_2'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos(2t) & \emptyset \\ (-\cos(2t)-2\operatorname{sen}(2t)) & \sec(2t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2(t) = \frac{1}{2}t + \overline{C_2}$$

Logo:

$$y_G(t) = \underbrace{\overline{C_1}e^{-t}\cos(2t) + \overline{C_2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t)}_{y_H(t)\text{ - Solução Homogénea}} + \underbrace{\frac{1}{4}\ln|\cos(2t)|e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}te^{-t}\operatorname{sen}(2t)}_{y_p(t)\text{ - Solução particular}}$$

(c) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, com o termo não homogéneo $f(t) = \mathcal{U}(t-1)$. A função $\mathcal{U}(t)$ representa a função degrau unitário.

$$y'' + 2y' + 5y = \mu(t-1) \quad \text{com} \quad y(\emptyset) = 1 \text{ e } y'(\emptyset) = -1$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{\mu(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$(s^2 + 2s + 5)\,Y = s - 1 + 2 + \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{e^{-s}}{s\left((s+1)^2 + 2^2\right)}$$

$$Y = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \left(\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 2^2}\right) e^{-s}$$

$$Y = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \left(\frac{A}{s} + \frac{B(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{C-B}{(s+1)^2 + 2^2}\right) e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} e^{-t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ae^{-s}}{s}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-s}}{(s+1)^2 + 2^2}\right\} + (C-B)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2 + 2^2}\right\}$$

$$y(t) = \cos(2t)e^{-t} + \left(A + B\cos(2t)e^{-t} + (C-B)\sin(2t)e^{-t}\right)\Big|_{t \to t-1} \mu(t-1)$$

$$y(t) = \cos(2t)e^{-t} + \left(A + B\cos(2t-2)e^{-t+1} + (C-B)\sin(2t-2)e^{-t+1}\right)\mu(t-1)$$

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2t)e^{-t}, & \emptyset < t < 1 \\ A + \cos(2t)e^{-t} + B\cos(2t-2)e^{-t+1} + (C-B)\sin(2t-2)e^{-t+1}, & t > 1 \end{cases}$$

**Nota:**

$$\frac{1}{s\left((s+1)^2 + 2^2\right)} = \frac{As^2 + 2As + 5A + Bs^2 + Cs}{s\left((s+1)^2 + 2^2\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\begin{matrix} [\emptyset] \\ [1] \\ [2] \end{matrix} \begin{cases} A = 1/5 \\ 2A + C = \emptyset \\ A + B = \emptyset \end{cases} \iff \begin{cases} A = +1/5 \\ B = -1/5 \\ C = -2/5 \end{cases}$$

## GRUPO III

8. **[3]** Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)^n}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln(n)}$

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n!}{(n+3)^n}}_{a_n}$

1) Teste de divergência grosseira (C.N.C.):

$$\emptyset \leq \frac{n!}{(n+3)^n} = \frac{1}{(n+3)} \cdot \frac{2}{(n+3)} \cdot \frac{3}{(n+3)} \cdot \frac{4}{(n+3)} \cdots \frac{n}{(n+3)} \leq \frac{1 \cdot (n+3)(n+3) \cdots (n+3)}{(n+3)(n+3)(n+3) \cdots (n+3)} = \frac{1}{n+3}$$

se $n \to +\infty \Rightarrow \emptyset \leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \emptyset$.

2) Teste da comparação:

$$\emptyset \leq a_n \leq \frac{1}{(n+3)} \cdot \frac{2}{(n+3)} \cdot \frac{\cancel{(n+3)}}{\cancel{(n+3)}} \cdots \frac{\cancel{(n+3)}}{\cancel{(n+3)}} = \underbrace{\frac{2}{n^2+6n+9}}_{b_n} \sim \frac{2}{n^2}$$

como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

3) Teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+4)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+4}\right)}{\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+4}\right)}{\left[\left(\frac{n+3}{n+3} + \frac{1}{n+1}\right)^n\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+4}\right)}{\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+1/n}{1+4/n}}{\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{1+1/n}}} = \frac{1}{e} < 1, \text{ converge.}$$

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln(n)}$

Teste dos módulos

Se $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u}\,du = \ln[\ln x]\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ diverge.

$\begin{pmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{pmatrix}$

Logo, pelo teste do Integral: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx \longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge em absoluto

Teste de Leibniz

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \emptyset$ 2) $\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right) = \frac{-\ln n - 1}{n^2\ln(n)\ln(n)} < \emptyset$

$\Rightarrow$ converge condicionalmente!

9. **[3]** Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = \cos^2(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 0$. <u>Caso entenda necessário</u>, considere a seguinte série de Maclaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos^2(x)$ e $x_0 = 0$

• $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Sabendo que:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

derivando

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

logo

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

10. **[1]** Mostre, <u>sem usar a definição</u>, que a transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ é dada por:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},$$

para $s > a$. Justifique todos os cálculos efectuados.

Seja $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!} + \cdots$

(aplicar $\mathcal{L}$ a cada termo) • $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s} + \frac{a}{s^2} + \frac{a^2}{s^3} + \frac{a^3}{s^4} + \frac{a^4}{s^5} + \cdots$

$$= \frac{1}{a}\Big(\underbrace{\frac{a}{s} + \frac{a^2}{s^2} + \frac{a^3}{s^3} + \frac{a^4}{s^4} + \frac{a^5}{s^5} + \cdots}_{\text{série geométrica } r = \frac{a}{s}}\Big) \quad , \quad \left|\frac{a}{s}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{\cancel{a}}\left(\frac{\cancel{a}/s}{1 - a/s}\right) \quad , \quad s > a$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a$$

b.l.g.