Proposta de resolução

---

1. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x\to 81} \dfrac{x-81}{\sqrt{x}-9}$

(a) 18 (b) ∞ (c) 81 (d) 0

$$\lim_{x\to 81} \frac{x-81}{\sqrt{x}-9} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 81} \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 81} 2\sqrt{x} = 18$$

↳ L'Hôpital

---

2. O valor da soma da série infínita $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots$ é

(a) *divergente* (b) 1 (c) 3/4 (d) $\frac{e}{\pi}$

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\dots+\frac{1}{n(n+2)}+\dots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+n-n}{(n+2)(n)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

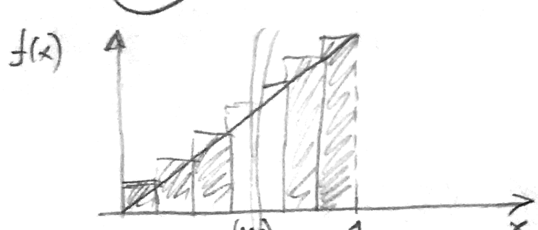
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n-1})}_{\text{S. Telescópica}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n-c_{n+1})}_{\text{S. Telescópica}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\cancel{\frac{1}{n+1}}^{0}+\frac{1}{1+1}-\lim_{n\to+\infty}\cancel{\frac{1}{n+2}}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

---

3. Considere a função $f(x)=x$ no intervalo $x\in[0,1]$. Qual o número de partições equidistantes, N, necessárias para que o módulo do valor da diferença entre o valor do integral definido de $f(x)$ e o valor da aproximação obtida pela soma de Riemann superior seja inferior a $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\Delta x_n\right| \le 0.1$?

(a) 5 (b) 3 (c) 6 (d) 2



$N = 1 \quad 2 \quad 3 \,(\dots)\, N-1 \quad N$

$\Delta x_i = 1/N \quad 1/N \quad 1/N \cdots \frac{1}{N} \quad 1/N$

$f(x_i) = 1/N \quad 2/N \quad 3/N \cdots \frac{N-1}{N} \quad N/N$

$f(x_i)\Delta x_i = 1/N^2 \quad 2/N^2 \quad 3/N^2 \dots \frac{N-1}{N^2} \quad N/N^2$

$$\sum f(x_i)\Delta x_i = \frac{1}{N^2}+\frac{2}{N^2}+\frac{3}{N^2}+\dots+\frac{N-1}{N^2}+\frac{N}{N^2} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i\right| =$$

$N=2 \longrightarrow \left|\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right| = 0{,}25$

$N=3 \longrightarrow \left|\frac{1}{2}-\frac{6}{9}\right| = 0{,}1(6)$

$N=5 \longrightarrow \left|\frac{1}{2}-\frac{15}{25}\right| = 0{,}1$

4. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$?

(a) $f(t) = t\cos(\omega_0 t)$ (b) $f(t) = t\sin(\omega_0 t)$ (c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)e^t$ (d) $f(t) = \sin(\omega_0 t)e^t$

a) $\mathcal{L}\{t\cos(w_0 t)\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+w_0^2}\right) = -\dfrac{s^2+w_0^2-2s^2}{(s^2+w_0^2)^2} = \dfrac{s^2-w_0^2}{(s^2+w_0^2)^2}$ ⊗

b) $\mathcal{L}\{t\sin(w_0 t)\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{w_0}{s^2+w_0^2}\right) = -\dfrac{\cancel{0}-2sw_0}{(s^2+w_0^2)^2} = \dfrac{2sw_0}{(s^2+w_0^2)^2}$ ✓

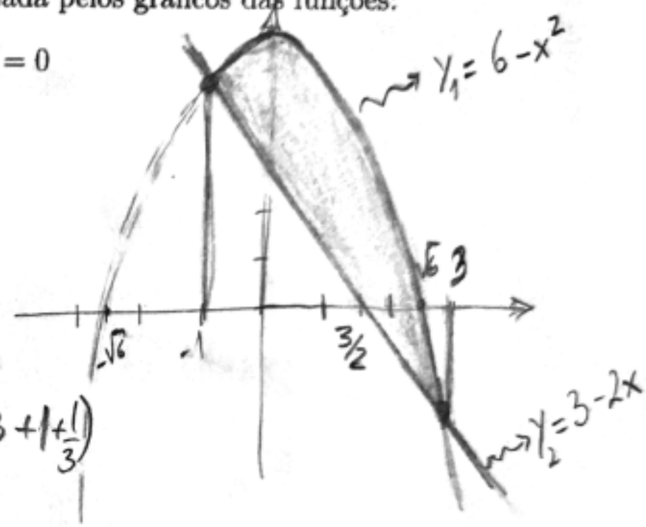
c) ⊗

d) ⊗

GRUPO II

5. [2.5 Esboce e determine a área da região Q do plano limitada pelos gráficos das funções:

$$y + x^2 = 6 \quad e \quad y + 2x - 3 = 0$$



- $Y_1 = 6 - x^2 \Rightarrow$ zeros $x = \pm\sqrt{6}$
- $Y_2 = 3 - 2x \Rightarrow$ zero $x = 3/2$
- $Y_1 = Y_2$ em $x = -1$ e $x = 3$
- Área $= \displaystyle\int_{-1}^{3} Y_1 - Y_2\, dx = \int_{-1}^{3} 6 - x^2 - 3 + 2x\, dx$

$= \left[3x + x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = (9 + \cancel{9} - \cancel{9}) - \left(-3 + 1 + \dfrac{1}{3}\right)$

$= \dfrac{32}{3}$ u.a.

6. [2] Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(a) $\displaystyle\int x^3\sqrt{3^2+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)\,dx$

a) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int x^2\sqrt{3^2+x^2}\,2x\,dx = \dfrac{1}{2}\int (u-3^2)\sqrt{u}\,du = \dfrac{1}{2}\int u^{3/2} - 3^2\sqrt{u}\,du$

se $\boxed{\begin{array}{l} u = 3^2+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$

$= \dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{5}u^{5/2} - \dfrac{3^2}{\cancel{2}}\dfrac{\cancel{2}}{3}u^{3/2} + C = \dfrac{(3^2+x^2)^{5/2}}{5} - \dfrac{(3^2+x^2)^{3/2}}{3^{-1}} + C$

b) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int 2x\ln(x^2+1)\,dx = \dfrac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \dfrac{1}{2}\left(u\ln(u) - \int \dfrac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\,du\right)$

se $\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$

integrar por partes $\boxed{\begin{array}{l} U = \ln(u) \\ dU = \dfrac{1}{u}\,du \\ \hline dV = du \\ V = u \end{array}}$

$= \dfrac{1}{2}\left(u\ln(u) - u\right) + C$

$= \dfrac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right) + C$

7. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' + 16y = f(t)$$

(a) [**2.5**] Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária quando $f(t) = \cos(4t)$.

• Solução Homogénea:

$$y'' + 16y = 0 \longrightarrow \overbrace{\lambda^2 + 16 = 0}^{\text{eq. característica}} \Leftrightarrow \lambda = \pm 4i$$

logo

$$y_H(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$$

• Solução Geral:

$$\boxed{y_G(t) = C_1(t)\cos(4t) + C_2(t)\sin(4t)} \quad (1)$$

• $C_1(t)$ e $C_2(t) = ?$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) \\ -4\sin(4t) & 4\cos(4t) \end{bmatrix}}_{\text{WRONSKIANO}} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(4t) \end{bmatrix}$$

com

$$\|W\| = 4\cos^2(4t) + 4\sin^2(4t) = 4$$

assim

• $$C_1'(t) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & \sin(4t) \\ \cos(4t) & 4\cos(4t) \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\sin(4t)\cos(4t)$$

e $$C_1(t) = \int -\frac{1}{4}\sin(4t)\cos(4t)\,dt = \frac{1}{32}\cos^2(4t) + \overline{C_1}$$

• $$C_2'(t) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \cos(4t) & 0 \\ -4\sin(4t) & \cos(4t) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cos^2(4t)$$

e $$C_2(t) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8t)\,dt = \frac{1}{8}t + \frac{\sin(8t)}{64} + \overline{C_2}$$

A solução geral (1) fica:

$$y_G(t) = \underbrace{\overline{C_1}\cos(4t) + \overline{C_2}\sin(4t)}_{\text{Solução Homogénea}} + \underbrace{\frac{\cos^3(4t)}{32} + \frac{\sin(4t)\sin(8t)}{64} + \frac{1}{8}t\sin(4t)}_{\text{Solução particular}}$$

ressonância!!!

$$y_G(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

(b) **[2.5]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, com o termo não homogéneo $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Escolha o valor de $\omega_0 \neq 0$ que lhe seja mais conveniente e comente essa escolha. *Dica:* observe as perguntas de escolha múltipla.

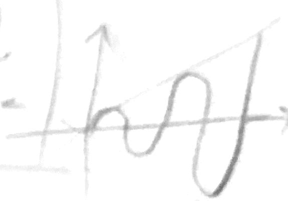
$$\mathcal{L}\{y'' + 16y\} = \mathcal{L}\{\cos(w_0 t)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2+4^2)Y = \frac{s}{s^2+w_0^2} \Leftrightarrow Y = \frac{s}{(s^2+4^2)(s^2+w_0^2)}$$

- Se $w_0 = 4$

$$Y = \frac{s}{(s^2+4^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2s4}{(s^2+4^2)^2} \quad \text{(ver Ex. 4)}$$

e $$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\cdot\frac{8s}{(s^2+4^2)^2}\right\} = \frac{1}{8}\underbrace{t\sin(4t)}_{\text{ressonância}}}$$



- Se $w_0 \neq 4 \neq 0$

$$Y = \frac{s}{(s^2+4^2)(s^2+w_0^2)} = \frac{As+B}{s^2+4^2} + \frac{Cs+D}{s^2+w_0^2}$$

e $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As}{s^2+4^2} + \frac{B}{s^2+4^2} + \frac{Cs}{s^2+w_0^2} + \frac{D}{s^2+w_0^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = A\cos(4t) + \frac{B}{4}\sin(4t) + C\cos(w_0 t) + \frac{D}{w_0}\sin(w_0 t)}$$

com A, B, C e D:

$$\frac{s}{(s^2+4^2)(s^2+w_0^2)} = \frac{As^3 + Asw_0^2 + Bs^2 + Bw_0^2 + Cs^3 + 4^2Cs + Ds^2 + 4^2D}{(s^2+4^2)(s^2+w_0^2)}$$

$$\begin{array}{l} [3] \\ [2] \\ [1] \\ [0] \end{array}\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ Aw_0^2 + 4^2C = 1 \\ Bw_0^2 + D4^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C \\ B = -D \\ C = 1/(4^2 - w_0^2) \\ +Dw_0^2 = D4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{w_0^2 - 4^2} \\ C = \frac{1}{4^2 - w_0^2} \\ D = B = 0 \end{cases}$$

GRUPO III

8. **[2.5]** Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2n+4}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)^{2n}}{n^n}$

a) 1) CNC $\to \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^3+2n+4}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1/n}{1+2/n^2+4/n^3}} = \emptyset$

2) Critério de comparação; escolha de b_n:

quando $n \to +\infty \Rightarrow a_n \sim \dfrac{n}{\sqrt{n^3}} \sim \dfrac{1}{n^{1/2}}$

logo usar $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge porque é série p com $p<1$???

então

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^3+2n+4}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+2n+4}} = 1 = L$$

como $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$, a_n e b_n têm a mesma natureza. Assim a série é divergente pelo critério de passagem ao limite.

b) CNC $\to \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left[\frac{\ln^2(n)}{n}\right]\right) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} n \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{\ln^2(n)}{n}\right]\right)$

$$= \exp\left(+\infty \ln\left[\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n \ln(n)}{n}}_{\text{L'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}}\right]\right) = \exp\left(+\infty \ln\left[\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{n}}_{\text{L'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}}\right]\right) = \exp(+\infty \ln(\emptyset)) = \emptyset$$

- Teste dos módulos à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln(n)^{2n}}{n^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)^n$$, usar teste da raiz

- Teste da raiz (critério de Cauchy):

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln^2(n)}{n}}_{\text{L'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{2\ln(n)}{n}}_{\text{L'Hôpital}}$$

$= \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \emptyset < 1$, logo a série alternada converge em absoluto. (não é necessário fazer Leibniz)

9. [2] Considere a seguinte função $f(x) = \ln(x+1)$. Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 0$. <u>Caso entenda necessário</u>, considere a seguinte relação (válida para $|x| < 1$):

$$\text{Se} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\text{então} \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \text{e } |x| < 1$$

e

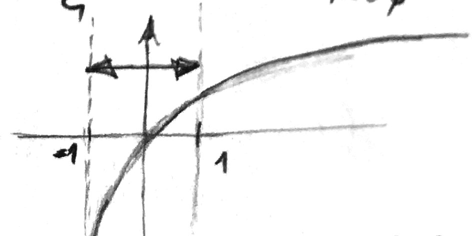
$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \text{e } |x| < 1$$

Para obter C, usar $x = 0$, assim

$$\ln(1) = 0 = C$$

Finalmente

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{e } |x| < 1$$



10. [2] Usando os conceitos do <u>Teorema Fundamental do Cálculo</u> e da <u>derivada da função composta</u>, determine o valor de β que verifica a seguinte igualdade quando $f(9) = \frac{1}{6}$:

$$\int_0^{\ln x} e^{3t}\,dt = x^3 - \beta \int_1^{x^2} t\,f(t)\,dt \qquad (1)$$

onde a função $f(x)$ é definida em R^+, contínua e derivável. Justifique todos os cálculos efectuados.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln(x)} e^{3t}dt = 3x^2 - \beta \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} t f(t)\,dt \iff \left\{ \text{derivar} \right.$$

$$\iff \frac{d}{du}\int_0^{u} e^{3t}dt \cdot \frac{du}{dx} = 3x^2 - \beta \frac{d}{dx}\int_1^{v} t f(t)\,dt \cdot \frac{dv}{dx} \iff \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \\ v = x^2 \end{array} \right.$$

$$\iff e^{3\ln x} \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 - \beta\, x^2 f(x^2) \cdot 2x \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{T.F.C} \\ + \\ \text{D.F.C} \end{array} \right.$$

$$\iff \cancel{x^2} - 3x^2 = -\beta \cancel{x^2} f(x^2)\, 2x \iff \left\{ \begin{array}{l} \div x^2 \\ \times(-1) \\ \div(2) \end{array} \right.$$

$$\iff \beta = \frac{1}{x f(x^2)}, \quad \text{usando } x = 3 \text{ e } f(x^2) = \frac{1}{6}$$

$$\iff \beta = \frac{1}{3\,\frac{1}{6}} = 2$$