

INTEGRAIS DE LINHA

Trabalho de um campo de forças

- Seja S um subconjunto não vazio do plano xOy ou do espaço tridimensional. Chama-se *campo escalar* à função que associa um escalar a cada ponto de S (por exemplo, a função que define a temperatura ou a densidade de um material nesse ponto). Chama-se *campo vectorial* à função que associa um vector a cada ponto de S (por exemplo, o vector velocidade do vento, a aceleração da gravidade ou o gradiente de um campo escalar nesse ponto).
- O conceito de *integral de linha* está associado à noção de *trabalho*.
- Seja um *ponto material* que se desloca ao longo de uma trajectória rectilínea entre os pontos A e B , sujeito a um campo de forças constante \vec{f} . Designando por $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A$ o *vector deslocamento*, então o trabalho, W_{AB} , realizado pelo campo de forças entre os pontos A e B é dado por

$$W_{AB} = \|\vec{f}\| \|\Delta\vec{r}\| \cos \theta = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} \quad (1)$$

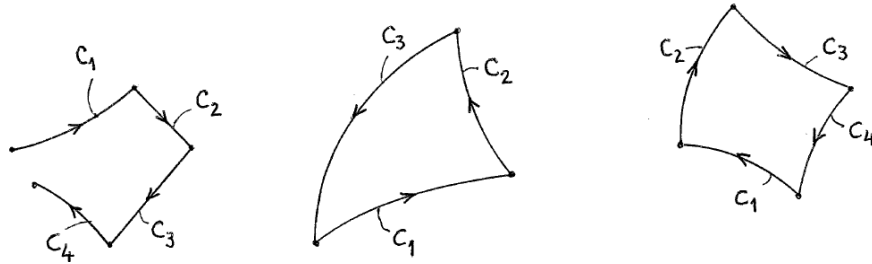
onde θ é o ângulo (constante) formado pelos vectores \vec{f} e $\Delta\vec{r}$.

No entanto, se a trajectória do ponto material não for rectilínea e/ou se o campo de forças aplicado variar ao longo da trajectória percorrida, a expressão (1) revela-se inadequada para o cálculo do trabalho, W_{AB} ; é o que acontece, por exemplo, quando o movimento se realiza num *campo gravítico* ou num *campo magnético*.

- Considere-se, então, que o ponto material se desloca ao longo de uma *curva orientada*, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

e admita-se que se trata de uma *curva suave*, isto é, uma curva em que a derivada $\vec{r}'(t)$ (vector tangente à curva) é uma função vectorial contínua e não nula em $]a, b[$.



Além disso, uma *curva* C diz-se *suave por secções*, se existe uma partição de subintervalos tal que a curva é suave em cada um desses subintervalos.

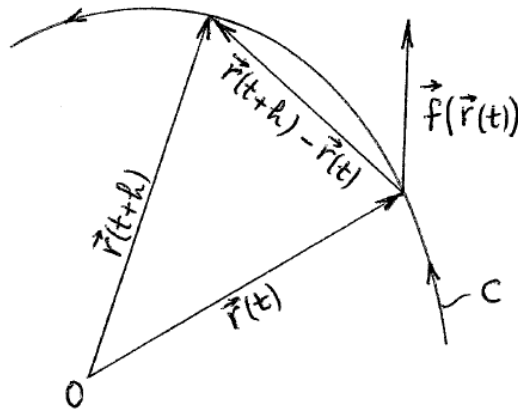
- Assim, pretende-se mostrar que se o campo de forças \vec{f} é contínuo (podendo variar, de ponto para ponto, em direcção e intensidade), então o trabalho, W_C , realizado ao longo de C é:

$$W_C = \int_a^b [\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)] dt \quad (2)$$

Seja, então, o intervalo paramétrico $[t, t+h]$, $h > 0$. Se h for suficientemente pequeno, atendendo a (1), uma estimativa do trabalho realizado neste intervalo é dada pelo produto escalar

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot [\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)]$$

em que $\vec{f}(\vec{r}(t))$ é o valor da força aplicada no ponto $\vec{r}(t)$ e o vector deslocamento $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ tem a direcção do segmento de recta que liga os pontos $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, que é uma aproximação ao arco de curva compreendido entre estes dois pontos.



Designando por $W(t)$ o trabalho realizado por $\vec{f}(t)$ entre $\vec{r}(a)$ (onde a curva tem o seu início) e $\vec{r}(t)$, e por $W(t+h)$ o trabalho realizado entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$, então o trabalho realizado entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ é dado por

$$W(t+h) - W(t)$$

que pode ser expresso, de um modo aproximado, através da expressão

$$W(t+h) - W(t) \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot [\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)]$$

ou seja, dividindo por h :

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{[\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)]}{h} \quad (3)$$

O valor do trabalho realizado entre os pontos $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ estará definido, se ambos os membros de (3) possuírem o mesmo limite quando $h \rightarrow 0$, isto é, desde que:

$$W'(t) = \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

Dado que $W(a) = 0$ e $W(b)$ é o valor do trabalho total realizado pelo campo de forças $\vec{f}(t)$ ao longo de toda a curva C , então

$$W(b) - W(a) = W(b) = \int_a^b W'(t) dt = \int_a^b [\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)] dt$$

o que confirma o resultado entretanto apresentado em (2).

Exemplo 1: Determine o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\vec{f}(x, y, z) = xy\vec{i} + 4x\vec{j} + 2z\vec{k}$$

ao longo da hélice circular:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Solução:

Notando que

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) = \cos(t)\sin(t)\vec{i} + 4\cos(t)\vec{j} + 2t\vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -\cos(t)\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 2t$$

obtém-se o seguinte valor para o trabalho:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 2t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin^2(t) + 2 + 2\cos(2t) + 2t) dt = \\ &= \left[-\frac{\sin^3(t)}{3} + 2t + \sin(2t) + t^2 \right]_0^{2\pi} = 4\pi(1 + \pi) \end{aligned}$$

Integral de linha

- O integral apresentado em (2) pode ser generalizado para um qualquer campo vectorial, $\vec{h}(x,y,z)$, contínuo ao longo da curva C , sendo designado genericamente por *integral de linha*.
- Seja o campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = h_1(x,y,z)\vec{i} + h_2(x,y,z)\vec{j} + h_3(x,y,z)\vec{k}$$

que é contínuo ao longo da curva suave:

$$C : \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} , u \in [a,b] \quad (4)$$

O *integral de linha* de \vec{h} ao longo da curva C , também designada por *caminho*, é definido por

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b [\vec{h}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u)] du \quad (5)$$

desde que o integral do segundo membro em (5) exista.

Se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ o *caminho* C diz-se *fechado*, sendo utilizado o símbolo

$$\oint_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

para o integral de linha definido em (5), que, neste caso, é designado por *circulação*.

Exemplo 2: Determine o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = xy\vec{i} + \frac{1}{2}xyz\vec{j} + yz\vec{k}$$

ao longo do caminho

$$C : \vec{r}(u) = u\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$$

entre os pontos $P = (-1, 1, -1)$ e $Q = (2, 4, 8)$.

Solução:

Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = \vec{i} + 2u\vec{j} + 3u^2\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(u)) = u^3\vec{i} + \frac{u^6}{2}\vec{j} + u^5\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = u^3 + u^7 + 3u^7 = u^3 + 4u^7$$

e notando que $P = (-1, 1, -1) = \vec{r}(-1)$ e $Q = (2, 4, 8) = \vec{r}(2)$, obtém-se para o integral de linha:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^2 (u^3 + 4u^7) du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{u^8}{2} \right]_{-1}^2 = 4 + 128 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{525}{4}$$

Propriedades do integral de linha

- Na definição do integral de linha apresentada em (5) pressupõe-se que a curva C possui a parametrização expressa em (4). No entanto, para que o integral de linha tenha sentido, ele deverá ser *invariante* face à parametrização admitida para definir a curva C , desde que seja preservada a direcção considerada para o percurso da curva; ou seja, na definição do integral de linha está envolvido o conceito de *curva orientada*.

Teorema 1: Seja \vec{h} um campo vectorial contínuo ao longo de uma curva (orientada) suave, C , parametrizada por $\vec{r}(u)$, $u \in [a, b]$. Então, o integral de linha

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b [\vec{h}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u)] du$$

é invariante face a qualquer mudança de parâmetro admitida na parametrização da curva, desde que se mantenha a direcção considerada para o seu percurso.

- Na propriedade seguinte mostra-se que o integral de linha é *linear*.

Teorema 2: Se \vec{g} e \vec{h} são campos vectoriais contínuos ao longo de uma curva suave, C , então:

$$\int_C (\alpha \vec{g}(\vec{r}) + \beta \vec{h}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- A propriedade imediata mostra que o integral de linha satisfaz a propriedade *aditiva* se for aplicado a uma curva suave por secções.

$$\int_C (\alpha \vec{f}(\vec{r}) + \beta \vec{g}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Teorema 3: Seja \vec{f} um campo vectorial contínuo ao longo de uma curva suave por secções, C , formada por um número finito de curvas suaves adjacentes C_1, C_2, \dots, C_n . Então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_n} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Exemplo 3: Calcule $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que $\vec{f}(x,y) = e^y \vec{i} - \sin(\pi x) \vec{j}$ e C é o caminho percorrido no *sentido directo* (positivo), correspondente ao triângulo com vértices nos pontos $A = (2,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (-2,0)$.

Solução:

A linha C , suave por secções, é formada pelos segmentos de recta orientados (o percurso é feito no *sentido directo*)

$$C_1 : \vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB} = (2-2t)\vec{i} + 2t\vec{j}, \quad t \in [0,1]$$

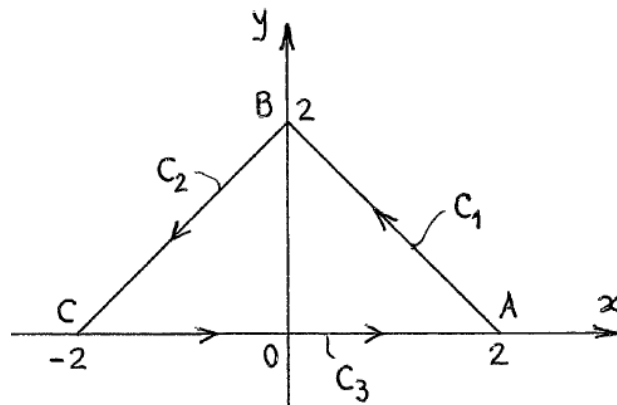
que liga o ponto A ao ponto B ,

$$C_2 : \vec{r}(u) = B + u\overrightarrow{BC} = -2u\vec{i} + (2-2u)\vec{j}, \quad u \in [0,1]$$

que liga o ponto B ao ponto C , e

$$C_3 : \vec{r}(w) = C + w\overrightarrow{CA} = (-2+4w)\vec{i} + 0\vec{j}, \quad w \in [0,1]$$

que liga o ponto C ao ponto A .



O integral de linha correspondente à secção C_1 (percorrida no sentido directo) é:

$$\vec{r}'(t) = -2\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{f}(\vec{r}(t)) = e^{2t}\vec{i} - \sin[\pi(2-2t)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -2e^{2t} - 2\sin[\pi(2-2t)] = -2e^{2t} + 2\sin[\pi(2t-2)]$$

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 [-2e^{2t} + 2\sin[\pi(2t-2)]] dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} [\pi e^{2t} + \cos[\pi(2t-2)]]_0^1 = 1 - e^2\end{aligned}$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 (percorrida no sentido directo) é:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(u) &= -2\vec{i} - 2\vec{j}, & \vec{f}(\vec{r}(u)) &= e^{2-2u}\vec{i} - \sin(\pi(-2u))\vec{j} \\ \vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) &= -2e^{2-2u} + 2\sin(\pi(-2u)) = -2e^{2-2u} - 2\sin(2\pi u) \\ \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 [-2e^{2-2u} - 2\sin(2\pi u)] du = \frac{1}{\pi} [\pi e^{2-2u} + \cos(2\pi u)]_0^1 = 1 - e^2\end{aligned}$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 (percorrida no sentido directo) é:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(w) &= 4\vec{i} + 0\vec{j}, & \vec{f}(\vec{r}(w)) &= \vec{i} - \sin[\pi(-2+4w)]\vec{j} \\ \vec{f}(\vec{r}(w)) \cdot \vec{r}'(w) &= 4 \\ \int_{C_3} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 4 dw = 4\end{aligned}$$

Finalmente, o integral de linha ao longo do caminho C (triângulo), *percorrido no sentido directo*, é dado pela soma dos três integrais de linha atrás obtidos:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 2(3 - e^2)$$

- Como foi salientado anteriormente, quando se integra ao longo de uma curva representada por uma dada parametrização, o processo de integração é realizado na direcção que está associada a esta parametrização.

Contudo, se se optar por uma nova parametrização que implique o percurso da curva na direcção oposta, o integral de linha daqui resultante é simétrico do anterior.

Teorema 4: Considere-se um campo vectorial, \vec{f} , contínuo ao longo de uma curva suave C e sejam

$$\vec{r}(u), u \in I \text{ e } \vec{q}(w), w \in I_1$$

duas parametrizações distintas para C . Se às duas parametrizações dadas corresponder o percurso de C em direcções opostas, então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q}$$

Exemplo 4: Determine o integral de linha do campo vectorial $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ ao longo da semicircunferência, C , parametrizada por:

a) $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$, $t \in [0, \pi]$ (percorrida no *sentido directo*).

b) $\vec{q}(u) = u\vec{i} + \sqrt{1-u^2}\vec{j}$, $u \in [-1, 1]$ (percorrida no *sentido retrógrado*, ou *negativo*).

Solução:

a) Sabendo que

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad \vec{f}(\vec{r}(t)) = \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -\sin^2(t) - \cos^2(t) = -1$$

obtém-se para o integral de linha:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_0^\pi dt = -\pi$$

b) Neste caso, sabendo que

$$\vec{q}'(u) = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \vec{j}, \quad \vec{f}(\vec{q}(u)) = \sqrt{1-u^2} \vec{i} - u \vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{q}(u)) \cdot \vec{q}'(u) = \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

resulta:

$$\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \quad (7)$$

Considerando, em (7),

$$u = \cos \theta \text{ e } du = -\sin(\theta) d\theta$$

obtém-se para o integral de linha:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q} &= -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} \frac{1}{\sin(\theta)} \sin(\theta) d\theta = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} d\theta = \\ &= \arccos(-1) - \arccos(1) = \pi - 0 = \pi \end{aligned}$$

Como era de prever

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q}$$

já que as parametrizações dadas para a semicircunferência correspondem ao seu percurso segundo direcções opostas.

- Pode-se, neste momento, exprimir o conceito de *trabalho* como um *integral de linha*. Se um ponto material percorre uma curva suave, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, sujeito a um campo de forças \vec{f} ao longo de C , então o trabalho realizado é dado por:

$$W = \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Teorema fundamental para o integral de linha

- Em geral, quando se integra um campo vectorial, $\vec{h}(x, y, z)$, entre um ponto P e um ponto Q , o valor do integral de linha *depende do caminho* escolhido para ligar esses pontos. Contudo, existe uma importante excepção: quando o *campo vectorial* $\vec{h}(x, y, z)$ é *gradiente*, isto é, se

$$\vec{h}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$$

em que $\phi(x, y, z)$ é um determinado campo escalar.

Neste caso, o *integral de linha é independente do caminho* que liga os pontos P e Q , dependendo apenas da localização de P e de Q no espaço. Esta situação encontra-se devidamente justificada no teorema seguinte, que é designado por *teorema fundamental para o integral de linha*.

Teorema 1: Seja $C : \vec{r}(u)$, $u \in [a, b]$ uma curva suave que se inicia no ponto $A = \vec{r}(a)$ e termina no ponto $B = \vec{r}(b)$. Se o campo escalar $\phi(x, y, z)$ é continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém C , então:

$$\int_C \nabla \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) \quad (7)$$

- Convém notar que a expressão (7) se reduz a

$$\int_C \nabla \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (8)$$

se o *caminho* C for *fechado* (ou seja, se $B = A$).

Exemplo 5: Sejam o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = y^2\vec{i} + (2xy - e^{2y})\vec{j}$ e os pontos $R = (1,0)$ e $S = (0,1)$.

- Verifique que $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.
- Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre R e S , recorrendo à definição de integral de linha.
- Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre R e S , recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

Solução:

- Seja $\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, com $P(x,y) = y^2$ e $Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$. Uma vez que P e Q são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano xOy e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.

- Dado que o *integral de linha é independente do caminho* que liga o ponto R ao ponto S (o *campo vectorial é gradiente*), podemos integrar, por exemplo, ao longo do segmento de recta, C , que liga R a S , isto é:

$$C : \vec{r}(u) = R + u\overrightarrow{RS} = (1-u)\vec{i} + u\vec{j}, \quad u \in [0,1]$$

Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{f}(\vec{r}(u)) = u^2\vec{i} + [2u(1-u) - e^{2u}]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) = -u^2 + 2u(1-u) - e^{2u} = 2u - 3u^2 - e^{2u}$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2u - 3u^2 - e^{2u}) du = \left[u^2 - u^3 - \frac{1}{2}e^{2u} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

c) Uma vez que o campo vectorial é gradiente, então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(0,1) - \phi(1,0)$$

Neste caso, é necessário obter o campo escalar $\phi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla \phi(x,y)$. Assim, notando que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\phi(x,y) = \int P(x,y)dx = xy^2 + \phi_1(y) + k_1 \quad (9)$$

$$\phi(x,y) = \int Q(x,y)dy = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + \phi_2(x) + k_2 \quad (10)$$

Compatibilizando (9) e (10), obtém-se:

$$\phi(x,y) = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + k$$

Independentemente do valor que se possa atribuir à constante k , o integral de linha toma o valor:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_C \nabla \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(0,1) - \phi(1,0) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}e^2 + k\right) - \left(-\frac{1}{2} + k\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \end{aligned}$$

Exemplo 6: Obtenha o valor de $\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que

$$\vec{g}(x, y) = (3x^2y + xy^2 - 1)\vec{i} + (x^3 + x^2y + 4y^3)\vec{j}$$

e C é o quadrado com vértices em $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,1)$, percorrido no sentido directo. Comece por verificar se o campo vectorial $\vec{g}(x, y)$ é gradiente.

Solução:

Verifique-se, então, se o campo vectorial é gradiente. Seja $\vec{g}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, tal que:

$$P(x, y) = 3x^2y + xy^2 - 1 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = x^3 + x^2y + 4y^3$$

Uma vez que P e Q são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano xOy e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{g}(x, y)$ é gradiente, ou seja, é possível encontrar um campo escalar $\varphi(x, y)$, tal que $\vec{g}(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$.

Nestas condições e tendo em atenção que o *caminho é fechado*, atendendo à propriedade (8) conclui-se que:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- O campo de forças que actua sobre um objecto em movimento diz-se *conservativo*, se for gradiente. Neste caso, o trabalho realizado entre dois pontos é independente do caminho, sendo nulo se o caminho for fechado.

- Quando um objecto passa num dado ponto com uma dada *energia cinética*, ele deverá retornar a esse ponto com exactamente a mesma energia cinética.

À medida que um objecto se desloca num campo de forças conservativo, \vec{f} , tanto a sua *energia cinética*, K_E , como a sua *energia potencial*, U , podem variar; no entanto, a soma dos seus valores mantém-se constante em cada ponto da sua trajectória, $C : \vec{r}(t)$ (sendo t o instante de tempo). Esta constante é designada por *energia mecânica total*, E , ou seja:

$$K_E + U = E$$

Sabe-se que a energia cinética do objecto é

$$K_E = \frac{1}{2} m[v(t)]^2$$

em que m é a sua massa e $v(t)$ é o módulo do seu vector velocidade em cada instante.

Por outro lado, tem-se

$$\nabla U = -\vec{f}$$

pelo que

$$U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = \int_C -\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

é o trabalho necessário para mover o objecto entre os pontos $\vec{r} = \vec{a}$ e $\vec{r} = \vec{b}$ da sua trajectória.

A expressão

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

traduz a chamada *lei de conservação da energia mecânica*.

Notação alternativa para o integral de linha

- Existe uma notação alternativa à apresentada em (6) para o integral de linha. Trata-se do integral de linha na *forma diferencial*. Tendo em atenção que

$$\vec{h}(x, y, z) = h_1(x, y, z)\vec{i} + h_2(x, y, z)\vec{j} + h_3(x, y, z)\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

então o integral de linha pode ser reescrito sob a *forma diferencial*:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C h_1 dx + h_2 dy + h_3 dz \quad (11)$$

Exemplo 7: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

ao longo da curva $C : y = x^2$ e $z = x^3$, entre os pontos $P = (-1, 1, -1)$ e $Q = (1, 1, 1)$.

Solução:

Trata-se do exercício analisado no exemplo 2, estando agora a curva definida através de equações cartesianas (intersecção de duas superfícies). Neste caso, o integral de linha pode ser resolvido recorrendo à forma diferencial (11). Designe-se:

$$h_1(x, y, z) = xy, \quad h_2(x, y, z) = yz, \quad h_3(x, y, z) = xz$$

Relativamente à curva C tem-se:

$$y = x^2 \text{ e } z = x^3, \quad x \in [-1, 1]$$

$$dy = 2x dx \text{ e } dz = 3x^2 dx$$

Notando que

$$\begin{aligned} h_1 dx + h_2 dy + h_3 dz &= (xy)dx + (yz)2xdx + (xz)3x^2 dx = \\ &= (xx^2)dx + (x^2 x^3)2xdx + (xx^3)3x^2 dx = (x^3 + 5x^6)dx \end{aligned}$$

obtem-se:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 (x^3 + 5x^6)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^7}{7} \right]_{-1}^1 = \frac{27}{28} - \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$$

Exemplo 8: Pretende-se, neste caso, resolver o exercício do exemplo 4 recorrendo à forma diferencial (11).

Solução:

Designa-se:

$$g_1(x, y) = e^y, \quad g_2(x, y) = -\text{sen}(\pi x)$$

A linha C é formada pelos três segmentos de recta

$$C_1 : y = -x + 1, \quad x \in [0, 1], \quad \text{em que } dy = -dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 1$ para $x = 0$), ligando o ponto A ao ponto B ,

$$C_2 : y = x + 1, \quad x \in [-1, 0], \quad \text{em que } dy = dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 0$ para $x = -1$), ligando o ponto B ao ponto C , e

$$C_3 : y = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad \text{em que } dy = 0dx$$

que liga o ponto C ao ponto A .

O integral de linha correspondente à secção C_1 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^{-x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)](-dx) = [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= -\int_0^1 [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx = \left[e^{-x+1} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} - e - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^{x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)]dx = [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= -\int_{-1}^0 [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx = \left[-e^{x+1} - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^0 = \\ &= -e - \frac{1}{\pi} + 1 - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^0)dx = dx$$

$$\int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 dx = 2$$

Então, o integral de linha ao longo da linha C (triângulo), *percorrida no sentido directo*, é a soma dos três integrais de linha anteriores:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 4 - 2e - \frac{4}{\pi}$$

O integral de linha em relação ao comprimento de arco

- Seja o $f(x, y, z)$ um campo escalar contínuo ao longo da curva suave:

$$C : \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}, \quad u \in [a, b] \quad (12)$$

Se $s(u)$ é o comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(u)$, então (tal como vimos no capítulo 1):

$$s'(u) = \|\vec{r}'(u)\| = \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}$$

O integral de linha de $f(x, y, z)$ ao longo de C em relação ao comprimento de arco s é definido por:

$$\int_C f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(u)) s'(u) du$$

- Admita-se agora que a curva C , apresentada em (12), representa um arame fino (*curva material*), cuja *densidade mássica* tem o valor $\lambda = \lambda(\vec{r})$ em cada ponto da curva (neste caso a densidade mássica define uma massa por unidade de comprimento).

O *comprimento* do arame, L , é dado por:

$$L = \int_C ds$$

A *massa* do arame, M , tem o valor:

$$M = \int_C \lambda(\vec{r}) ds$$

O centro de massa, \vec{r}_M , pode ser obtido através da equação vectorial:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{M} \int_C \vec{r} \lambda(\vec{r}) ds \quad (13)$$

Designando $\vec{r}_M = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$ a equação (13) conduz às seguintes equações escalares:

$$x_M = \frac{1}{M} \int_C x \lambda(\vec{r}) ds, \quad y_M = \frac{1}{M} \int_C y \lambda(\vec{r}) ds, \quad z_M = \frac{1}{M} \int_C z \lambda(\vec{r}) ds$$

Finalmente, o momento de inércia do arame, I , em relação a um eixo é dado por

$$I = \int_C \lambda(\vec{r}) [R(\vec{r})]^2 ds$$

em que $R(\vec{r})$ exprime a distância do ponto $\vec{r}(u)$ ao eixo em causa.

Exemplo 9: A densidade mássica de um arame semicircular de raio a é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao diâmetro que une as duas extremidades do arame. Determine:

- A massa do arame.
- As coordenadas do seu centro de massa.
- O seu momento de inércia em relação ao diâmetro referido.

Solução:

- O arame semicircular, apresentado na figura seguinte, pode ser parametrizado por

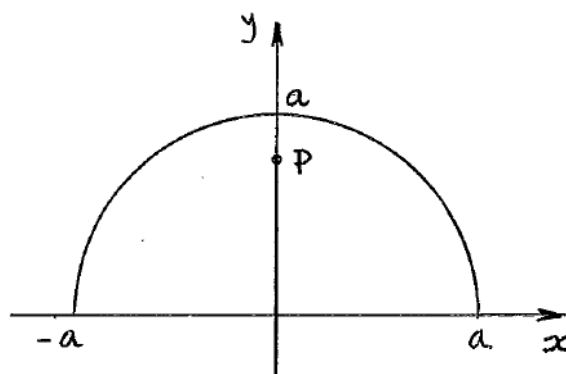
$$\vec{r}(u) = a \cos(u) \vec{i} + a \sin(u) \vec{j}, \quad u \in [0, \pi]$$

tendo-se admitido que o diâmetro do arame está situado no eixo dos xx do referencial.

Nestas condições, a função que define a densidade mássica em cada ponto do arame é

$$\lambda(x, y) = ky$$

em que k é uma constante positiva.



Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = -a\sin(u)\vec{i} + a\cos(u)\vec{j}$$

$$s'(u) = \|\vec{r}'(u)\| = \sqrt{[-a\sin(u)]^2 + [a\cos(u)]^2} = a$$

então:

$$\begin{aligned} M &= \int_C \lambda(\vec{r}) ds = \int_C ky ds = \int_0^\pi ky(u)s'(u) du = \\ &= k \int_0^\pi [a\sin(u)] a du = ka^2 \int_0^\pi \sin(u) du = 2ka^2 \end{aligned} \quad (14)$$

b) Por razões de simetria (geométrica e mássica) é evidente que a abcissa do centro de massa é $x_M = 0$.

Por outro lado, a ordenada do centro de massa é:

$$y_M = \frac{1}{M} \int_C y \lambda(\vec{r}) ds = \frac{1}{2ka^2} \int_C ky^2 ds = \frac{1}{2a^2} \int_C [y(u)]^2 s'(u) du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2a^2} \int_0^\pi [a \sin(u)]^2 a du = \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin^2(u) du = \\
 &= \frac{a}{4} \int_0^\pi (1 - \cos(2u)) du = \frac{a\pi}{4}
 \end{aligned}$$

O centro de massa, P , situa-se no eixo de simetria do arame (eixo dos yy), à distância $a\pi/4$ do diâmetro (ver figura anterior); neste caso, o centro de massa está situado num ponto exterior ao arame.

c) O momento de inércia do arame em relação ao diâmetro tem o valor

$$\begin{aligned}
 I &= \int_C \lambda(\vec{r}) [R(\vec{r})]^2 ds = \int_C (ky) y^2 ds = k \int_C [y(u)]^3 s'(u) du = \\
 &= k \int_0^\pi [a \sin(u)]^3 a du = ka^4 \int_0^\pi \sin^3(u) du = \\
 &= ka^4 \int_0^\pi \sin(u) (1 - \cos^2(u)) du = \\
 &= ka^4 \int_0^\pi \sin(u) du - ka^4 \int_0^\pi \sin(u) \cos^2(u) du = \\
 &= 2ka^4 + ka^4 \left[\frac{\cos^3(u)}{3} \right]_0^\pi = ka^4 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4ka^4}{3}
 \end{aligned}$$

ou seja, atendendo a (14):

$$I = \frac{2}{3} Ma^2$$