Teorema de Gauss (da divergência)

- Seja Ω uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*, e sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω.
  Como se viu anteriormente, o teorema de Green permite exprimir o integral de linha de um campo vectorial ao longo da curva *C*, através de um integral duplo sobre a região Ω, isto é,

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (24)$$

  onde o integral à direita é o integral de linha ao longo de *C*, percorrida no sentido directo.

- É possível mostrar que a expressão (24) pode ser reescrita, em termos vectoriais, sob a forma

$$\iint_{\Omega}(\nabla\cdot\vec{v})\ dxdy=\oint_C(\vec{v}\cdot\vec{n})ds \qquad (25)$$

  onde o integral à direita está definido em relação ao comprimento de arco, sendo $\vec{n}$ o versor normal à tangente em cada ponto da curva *C*, dirigido para o exterior da região Ω.
  Admita-se que a curva C é parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\ ,\ t\in I$$

  e seja o campo vectorial:

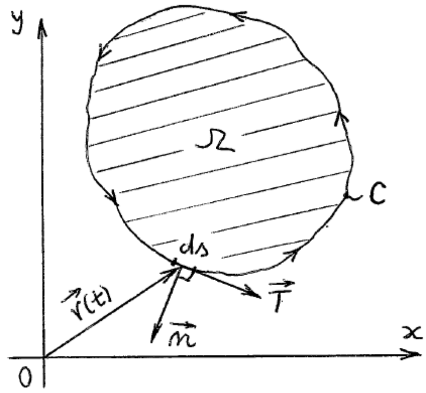
$$\vec{v}(x,y)=Q(x,y)\vec{i}-P(x,y)\vec{j}$$

Tem-se, então,

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot \vec{v})dxdy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy$$

restando, agora, mostrar que:

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n})ds = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$



Dado que a curva C é percorrida no sentido directo, então

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$$

em que $\vec{T}(t)$ é o versor da tangente à curva em cada um dos seus pontos.
Recorrendo às propriedades do produto vectorial e do produto misto, verifica-se:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{T} \times \vec{k}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \times \vec{T}) = \vec{T} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}) = -\vec{T} \cdot (\vec{v} \times \vec{k}) = (-\vec{v} \times \vec{k}) \cdot \vec{T}$$

Notando, ainda, que

$$-\vec{v} \times \vec{k} = (-Q\vec{i} + P\vec{j}) \times \vec{k} = -Q(\vec{i} \times \vec{k}) + P(\vec{j} \times \vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

resulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \vec{T}$$

Finalmente, tendo em conta que

$$d\vec{r} = \vec{T}ds = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j}$$

obtém-se:

$$\oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot\vec{T}ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy$$

- É, ainda, possível relacionar o teorema de Green com o conceito de fluxo de um campo vectorial, quando aplicado ao espaço bidimensional.
  Assim, considere-se, neste caso, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} \tag{26}$$

tal que:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

Atendendo a (24), obtém-se

$$\iint_\Omega (\nabla\cdot\vec{v})dxdy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right]dxdy =$$

$$= \oint_C -Q(x,y)dx + P(x,y)dy = \oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})ds = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} \tag{27}$$

já que:

$$d\vec{s} = \vec{n}ds = (dy)\vec{i} - (dx)\vec{j}$$

A expressão (27) traduz o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y)$, definido em (26), *através da curva C na direcção de* $\vec{n}$.

- O teorema seguinte, designado por *teorema de Gauss*, ou *teorema da divergência*, constitui uma generalização do teorema de Green, referido em (25), para o espaço tridimensional.

Teorema 7: Seja T um sólido limitado por uma superfície, S, *fechada e orientada* e seja $\vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície, dirigido para o exterior de S. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial com derivadas parciais contínuas em S, então:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \qquad (28)$$

- A expressão (28) estabelece que o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y,z)$ *através da superfície* (fechada e orientada) S, *dirigido para o exterior de* S, tem o valor do integral triplo da função escalar definida pela *divergência de* $\vec{v}(x,y,z)$ sobre o sólido, T, limitado por S.

Exemplo 25: Resolva o problema do exemplo 4 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso a superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ \ (a > 0)$$

é uma superfície fechada e orientada que limita o sólido (esfera):

$$T = \left\{(x,y,z) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\right\}$$

Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

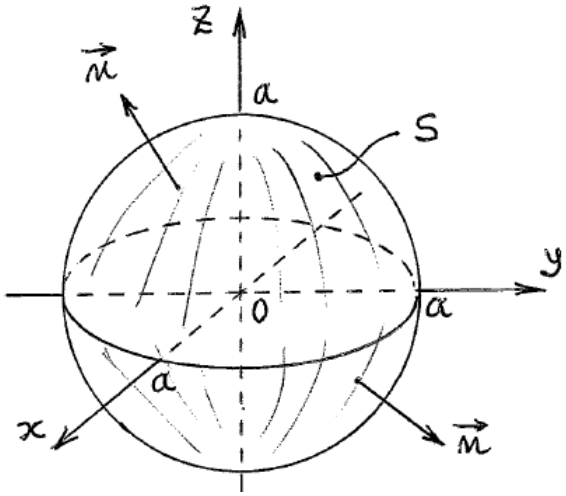
$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$$

através da superfície S, dirigido para o exterior de S, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})dxdydz$$

em que:

$$\nabla\cdot\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} = 2 + x$$



Obtém-se, então,

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = 2\iiint_T dxdydz + \iiint_T (x)dxdydz = 2V(T) + \bar{x}V(T) = \frac{8}{3}\pi a^3$$

onde $\bar{x} = 0$ é a abcissa do centroide do sólido (esfera) T e

$$V(T) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

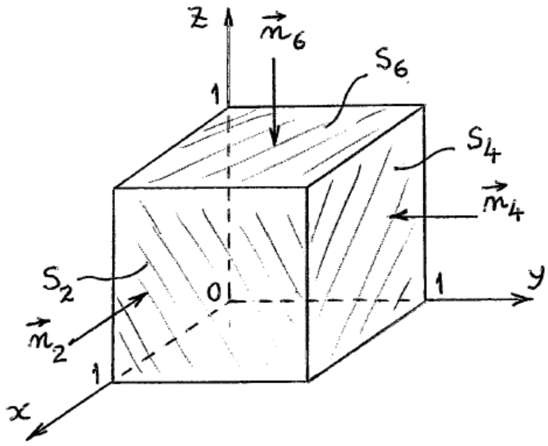
é o seu volume.

Exemplo 26: Resolva o problema do exemplo 6 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso, a superfície (fechada e orientada) *S* corresponde à superfície que limita o sólido *T* (cubo):

$$T = \{(x,y,z) \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1\}$$



Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície *S*, dirigido para o interior de *S*, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = -\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz$$

em que:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(2yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 2y + 2z^2$$

Assim, obtém-se

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -2\iiint_T (y)dxdydz - 2\iiint_T (z^2)dxdydz =$$

$$= -2\bar{y}V(T) - 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (z^2)dxdydz = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

onde $\bar{y} = 1/2$ é a ordenada do centroide do sólido (cubo) T e $V(T) = 1$ é o seu volume.

Exemplo 27: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$$

dirigido *de fora para dentro* da superfície fechada, *S*, definida por: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

a) Recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

b) Considerando a definição de integral de fluxo.

Solução:

a) A superfície fechada, *S*, constitui a superfície que limita o sólido *T* (cilindro):

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$$

Tendo em atenção que

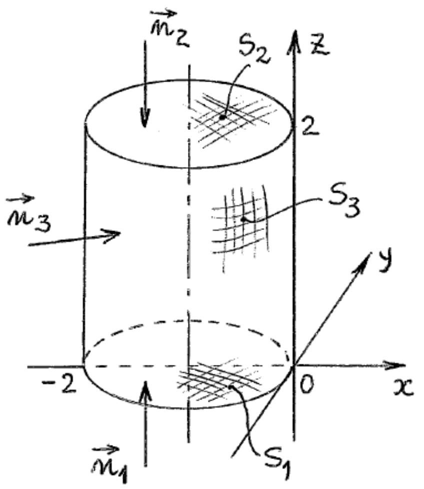
$$\nabla\cdot\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + x^2 + y^2$$

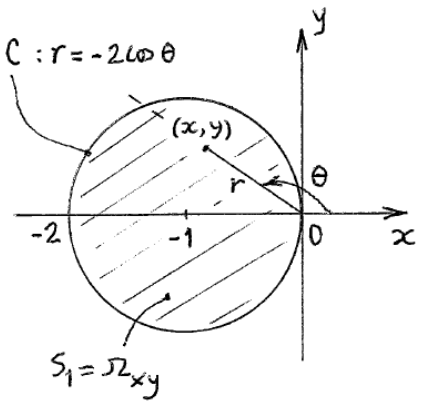
e dado que o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ é dirigido para o interior de *S*, da aplicação do teorema de Gauss resulta

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -\iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})dxdydz = -\iiint_T (1+x^2+y^2)dxdydz =$$

$$= -V(T) - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = -2\pi - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz \qquad (29)$$

onde $V(T) = 2\pi$ é o volume do sólido *T* e o restante integral triplo deverá ser calculado recorrendo a coordenadas cilíndricas.





Nesse sentido, a projecção de *T* sobre o plano *xOy* é a região circular, Ω_{xy}, definida por

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1\right\}$$

e pode ser reescrita, no referencial $rO\theta$ (*coordenadas polares*), como:

$$\Gamma = \left\{(r,\theta)\ :\ \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le r \le -2\cos(\theta)\right\}$$

Assim, o sólido *T* pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{(r,\theta,z)\ :\ \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le r \le -2\cos(\theta)\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$$

O integral de fluxo apresentado em (29) toma, então, a forma:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -2\pi - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = -2\pi - \iiint_\Pi (r^3)drd\theta dz =$$

$$= -2\pi - \int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{-2\cos(\theta)} (r^3)drd\theta dz =$$

$$= -2\pi - \frac{1}{4}\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[r^4 \right]_0^{-2\cos(\theta)} d\theta dz =$$

$$= -2\pi - 4\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta dz \qquad (30)$$

Particularizando, aplicando um processo de integração por partes, resulta:

$$4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta = 4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta)\cos^3(\theta)d\theta =$$

$$= \left[\operatorname{sen}(\theta)\cos^3(\theta) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + 3\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta = \frac{3}{4}\left[2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} \qquad (31)$$

Finalmente, substituindo (31) em (30), obtém-se:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -2\pi - \frac{3\pi}{2}\int_0^2 dz = -5\pi$$

b) O cálculo do fluxo através da definição exige, neste caso, o cálculo do fluxo através de cada uma das três superfícies elementares que limitam o sólido T (ver figura da página 7.43), nomeadamente, as duas regiões circulares, S_1 e S_2, que correspondem às bases do cilindro e a região cilíndrica, S_3, que constitui a superfície lateral de T.

Em relação à secção S_1 verifica-se:

$$\vec{v}(x,y,0) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}\,, \qquad \vec{n}_1 = \vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v}\cdot\vec{n}_1)dS = 0 \tag{32}$$

Em relação à secção S_2 tem-se

$$\vec{v}(x,y,2) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + 2\vec{k}\,, \qquad \vec{n}_2 = -\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{n}_2 = -2$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v}\cdot\vec{n}_2)dS = -2\iint_{S_2} dS = -2A(S_2) = -2\pi \tag{33}$$

onde $A(S_2) = \pi$ é a área da região circular S_2.
A região cilíndrica S_3 pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(\theta,z) = -2\cos^2(\theta)\vec{i} - 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}\ ,\ (\theta,z)\in R$$

em que:

$$R = \{(\theta,z) : \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le z \le 2\}$$

O produto vectorial fundamental é

$$\vec{N}(\theta,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) & \mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta)\right)\vec{i} - 4\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\vec{j}$$

e está orientado no sentido *de dentro para fora* da superfície S_3, isto é, tem o sentido oposto ao que é considerado para o versor normal à superfície, $\vec{n}_3$; note-se que, por exemplo, se $\pi/2 < \theta < \pi$, então $-4\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) > 0$.

Nestas condições, uma vez que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right] = -8\cos^4(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta)\vec{i} - 8\cos^5(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z) = -16\cos^4(\theta)\mathrm{sen}^4(\theta) + 48\cos^6(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta) =$$

$$= -16\cos^4(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2 + 48\cos^6(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right) =$$

$$= -16\cos^4(\theta) + 80\cos^6(\theta) - 64\cos^8(\theta)$$

resulta:

$$\iint_{S_3}(\vec{v}\cdot\vec{n}_3)dS = -\iint_R \vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z)d\theta dz =$$

$$= 16\int_0^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\cos^4(\theta) - 5\cos^6(\theta) + 4\cos^8(\theta)\right)d\theta dz \qquad (34)$$

Aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (31), tem-se:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^6(\theta)d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\cos^5(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\mathrm{sen}(\theta)\cos^5(\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{5}{6}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4(\theta)d\theta = \frac{5\pi}{16} \qquad (35)$$

Por outro lado, aplicando novamente um processo de integração por partes e atendendo a (35), obtém-se:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^8(\theta)d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\cos^7(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\mathrm{sen}(\theta)\cos^7(\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{7}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^6(\theta)d\theta = \frac{35\pi}{128} \qquad (36)$$

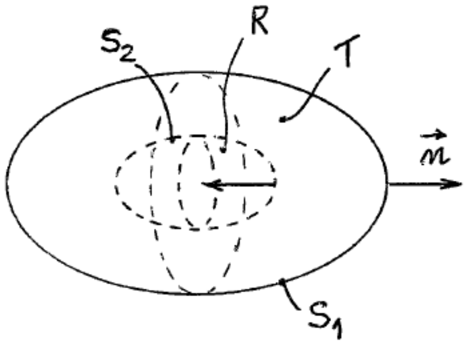
Substituindo em (34) os valores obtidos em (31), (35) e (36), conclui-se que o fluxo através da superfície S_3 é:

$$\iint_{S_3} (\vec{v}\cdot\vec{n}_3)dS = 16\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{25\pi}{16}+\frac{35\pi}{32}\right)\int_0^2 dz = -3\pi \tag{37}$$

Finalmente, tendo em atenção (32), (33) e (37), o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$, dirigido *de fora para dentro* da superfície fechada S, tem o valor:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \sum_{i=1}^{3}\iint_{S_i}(\vec{v}\cdot\vec{n}_i)dS = 0-2\pi-3\pi = -5\pi$$

- O teorema da divergência apresentado em (28), definido para sólidos limitados por uma única superfície fechada e orientada, pode ser generalizado a sólidos limitados por várias superfícies fechadas e orientadas.



Considere-se, por exemplo, um sólido limitado por uma *superfície fechada e orientada* S_1 e extraia-se do seu interior um sólido, R, limitado por uma *superfície fechada e orientada* S_2.

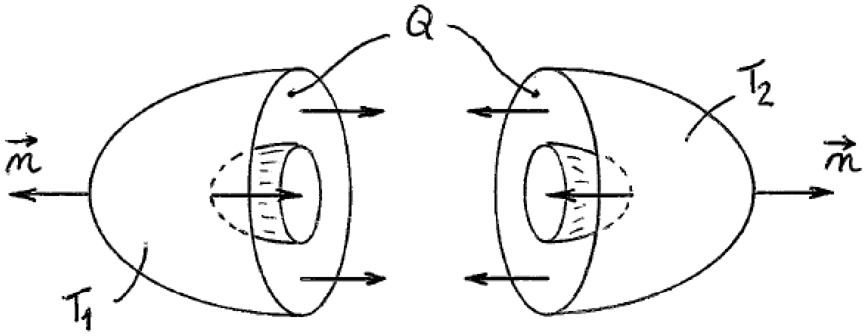
A fronteira, S, do sólido restante, T, é formada por duas regiões, nomeadamente, a região exterior S_1 e a região interior S_2.

O teorema da divergência pode ser estabelecido para o sólido T, dividindo-o em duas partes, T_1 e T_2, e aplicando o teorema da divergência a cada uma delas, isto é,

$$\iiint_{T_1} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oint\!\!\oint_{S_{T1}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS \qquad (38)$$

$$\iiint_{T_2} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oint\!\!\oint_{S_{T2}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS \qquad (39)$$

onde S_{T1} e S_{T2} designam, respectivamente, as fronteiras de T_1 e T_2.



Adicionando os dois integrais triplos nos primeiros membros de (38) e (39), obtém-se, tendo em atenção a aditividade do integral triplo, o integral triplo sobre o sólido T, ou seja:

$$\iiint_{T} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \sum_{j=1}^{2} \iiint_{T_j} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz$$

Contudo, quando se somam os dois integrais de superfície, nos segundos membros dessas mesmas equações, as contribuições da secção, Q, que é comum às partes T_1 e T_2 anulam-se (os versores normais apontam em sentidos opostos), restando, portanto, as contribuições relativas aos integrais de superfície sobre as regiões S_1 e S_2.

Assim, uma vez que $S = S_1 \cup S_2$, resulta

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = \iint_{S_1} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS + \iint_{S_2} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS =$$

$$= \oiint_{S_{T1}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS + \oiint_{S_{T2}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS$$

podendo concluir-se que o teorema da divergência se mantém válido para o sólido *T*, pelo que:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS$$