Prova sem consulta. Duração: 3h. Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**2,5**] Sejam o ponto $Q=(1,0,1)$ e a curva, *C*, parametrizada por:

$$\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+e^t\mathrm{sen}(t)\vec{j}+e^t\cos(t)\vec{k}\ ,\ t\geq 0.$$

a) Determine os versores da tangente e da binormal no ponto *Q*.

b) Calcule o comprimento da curva compreendida entre *Q* e o ponto $\vec{r}(\pi/2)$.

2. [**2,5**] Considere a função escalar $f(x,y,z)=ye^x-z$ e o ponto $P=(0,2,1)$.

a) Calcule a derivada direcional de *f* no ponto *P*, na direção definida pelo vetor $\vec{v}=(-2,-1,1)$.

b) Em que direção *f* tem a máxima taxa de variação no ponto *P*? Qual o valor dessa taxa máxima? Justifique.

3. [**2,5**] Sabendo que a equação $y+xe^{xz}+z^2=3$ define, de modo implícito, $z=z(x,y)$ como função de *x* e de *y* na vizinhança do ponto $R=(0,2,1)$, obtenha as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ em *R*.

4. [**2,5**] Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (2x^3-y^2)dx+(x^2+3y^2)dy$, sendo *C* a fronteira do losango, Ω, com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $A=(2,2)$, $B=(0,4)$ e $C=(-2,2)$, percorrida no sentido retrógrado.

...*continua no verso*

GRUPO II

5. [**2,5**] Seja a curva, *C*, de interseção das superfícies $x+z=1$ e $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva *C*.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x)dx+(y)dy+(xy)dz$.

6. [**2,5**] Seja a superfície, *S*, definida por $z=2-x^2-y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

a) Esboce a superfície *S* e parametrize-a.

b) Calcule a sua área.

7. [**3,0**] Seja o integral triplo em coordenadas cartesianas:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ dzdydx$$

a) Esboce o domínio de integração, *V*.

b) Reescreva-o em coordenadas cilíndricas, identificando analiticamente o domínio de integração, e calcule o seu valor.

c) Reescreva-o em coordenadas cartesianas começando o processo de integração na variável *x*; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

8. [**2,0**] Seja *C* uma curva suave do espaço que liga o ponto *P* ao ponto *Q*.

a) Enuncie o teorema fundamental para o integral de linha.

b) Admitindo que *f* e *g* são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém *C*, mostre que $\int_C (f\nabla g+g\nabla f)\cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.