COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 2

FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS; GRADIENTES

1) Determine a função de campo escalar $f(x,y,z)$, tal que o seu valor no ponto (x,y,z) é:

a) A área da superfície da caixa, sem a sua tampa superior, cujos lados são definidos pelos vectores $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.

b) O valor do ângulo formado pelos vectores $\vec{i}+\vec{j}$ e $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

c) O volume do prisma definido pelos vectores $\vec{i}$, $\vec{i}+\vec{j}$ e $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

2) Considere a equação $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=z$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Que superfície é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.

b) O que acontece a esta superfície quando $b\to\infty$.

c) Qual a secção resultante da intersecção da superfície dada com a superfície $z=1$.

d) O que acontece a esta secção quando $b\to\infty$.

3) Identifique as superfícies definidas pelas equações:

a) $g(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2}$.

b) $\rho(\theta,\varphi)=\sin\varphi\cos\theta$.

4) Obtenha o limite da função $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de:

a) Eixo dos *xx*.

b) Eixo dos *yy*.

c) Recta $y=mx$, $m\neq 0$.

d) Espiral $r=\theta$, $\theta>0$.

e) Arco $r=\sin(3\theta)$, $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

f) Curva descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{j}$, $t > 0$.

5) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções de campo escalares:

a) $\rho(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)$.

b) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

c) $h(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(2x + y)$.

d) $u(x,y,z) = \dfrac{e^z}{xy^2}$.

e) $\omega(x,y,z) = \ln(zx + 3y)$.

f) $v(x,y,z) = x^{y^z}$.

g) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^3 + y^2}\right)$.

6) Calcule o gradiente das seguintes funções de campo escalar:

a) $f(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(z + x)$.

b) $g(x,y,z) = (-x + 2y)^5 + \dfrac{2}{z}$.

7) Seja a função de campo escalar $f(x,y) = x(4 - y^2)$ e a função vectorial $\vec{\alpha}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\operatorname{sen}(t)\vec{j}$. Obtenha a derivada da função composta das funções dadas:

a) Sem efectuar a composição das funções.

b) Determinando a função composta.

8) Determine a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = z\ln\dfrac{x}{y}$ no ponto $P = (1,2,-2)$, na direcção do ponto $Q = (2,2,1)$.

9) Calcule a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = xe^{y^2 - z^2}$ em $P = (1,2,-2)$, na direcção do percurso descrito pela função vetorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2\cos(t-1)\vec{j} - 2e^{t-1}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

10) Obtenha a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = \left(x + y^2 + z^3\right)^2$ no ponto $P = (1,-1,1)$, na direcção definida pelo vetor $\vec{i} + \vec{j}$.

11) Determine a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y)=y^2e^{2x}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P=(0,1)$.

12) Obtenha a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P=(1,-2,1)$.

13) Calcule a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ no ponto $(x,y)\neq(0,0)$, na direcção da origem.

14) Calcule a derivada direccional de:

a) $f(x,y,z)=x^2+xy+yz$ em $P=(1,0,2)$, segundo a normal à superfície $z=3-x^2-y^2+6y$.

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ em $Q=(3,4,5)$, segundo o vector tangente à curva de intersecção das superfícies $2x^2+2y^2-z^2=25$ e $z^2=x^2+y^2$ nesse ponto.

15) Seja f uma função de campo escalar contínua e diferenciável em todos os pontos do segmento de recta $[AB]$, com $f(A)=f(B)$. Mostre que existe um ponto, C, situado entre A e B, tal que $\nabla f(C)\cdot(B-A)=0$.

16) Considere a função de campo escalar $f(x,y,z)=4xz-y^2+z^2$, diferenciável em $\mathbb{R}$, e os pontos $A=(0,1,1)$ e $B=(1,3,2)$. Determine o ponto C situado no segmento de reta $[AB]$, tal que $f(B)-f(A)=\nabla f(C)\cdot(B-A)$.

17) Obtenha um vector que seja normal e um vector que seja tangente à curva de equação cartesiana $x^3+y^2+2x=6$ no ponto $P=(-1,3)$.

18) A temperatura, T, na vizinhança do ponto $P=(\pi/4,0)$ é dada pela função de campo escalar $T(x,y)=\sqrt{2}e^{-y}\cos x$. Uma partícula desloca-se nessa vizinhança seguindo uma trajectória que passa em P e que, em cada ponto, segue uma direcção que corresponde à máxima taxa de variação de temperatura. Determine essa trajetória.

19) Determine os pontos das superfícies $z - xy = 0$ e $4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z = 0$, onde o plano tangente é horizontal.

20) Calcule o vector normal e o plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ no ponto $P = (1,1,1)$.

21) Obtenha o plano tangente e a recta normal à superfície $xy + yz + xz = 11$ no ponto $P = (1,2,3)$.

22) Mostre que a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ é tangente ao elipsoide de equação $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ no ponto $P = (2,1,1)$.

23) A curva do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 3t^{-1}\vec{j} - 2t^2\vec{k}$, $t > 0$, e o elipsoide de equação $x^2 + y^2 + 3z^2 = 25$ intersectam-se no ponto $P = (2,3,-2)$. Determine o valor do ângulo, α, de intersecção.

24) Sejam as superfícies de equações $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\omega}$, $\omega > 0$. Mostre que a soma das coordenadas dos pontos de intersecção de todos os planos tangentes às superfícies com os eixos coordenados é igual a ω.

25) Supondo que a equação $x\cos(xy) + y\cos(x) = 2$ define y implicitamente em função de x, $y = f(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

26) Admitindo que a equação $x^2 + z^4 + z^3 + y^2 + xy = 2$ define z implicitamente em função de x e y, $z = f(x,y)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

27) Seja a função de campo escalar $\omega = \omega(x,y,z)$, em que $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ e $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$. Desenhe a árvore diagrama para o cálculo das derivadas parciais $\dfrac{\partial \omega}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$, e calcule-as.

28) A equação $x+z+(y+z)^2=6$ define z implicitamente em função de x e y, $z=f(x,y)$. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, em função de x, y e z.

29) Considere a função de campo escalar $z=f(x,y)$, definida implicitamente pela equação $e^{\cos(z)}\ln(z+1)=\operatorname{arctg}(2x+y)$. Determine o valor das derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $P=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$.

30) A equação $x\ln(y)+y^2z+z^2=6$ define z implicitamente em função de x e y, $z=f(x,y)$, na vizinhança de $P=(1,1,2)$. Obtenha as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ em P.

31) Considerando $z(r,s,v)=\frac{r+s}{v}$, $r(x,y)=x\cos(y)$, $s(x,y)=y\operatorname{sen}(x)$ e $v(x,y)=2x-y$, calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

32) Seja a superfície definida implicitamente pela equação $\sqrt{x}\cos(-2y+z)=1$. Calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x=2$ e $y=0$.

33) Considere a superfície definida implicitamente pela equação $xz^2-yz^2+xy^2z-5=0$. Determine as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x=3$ e $y=1$.

34) Considere a função de campo escalar $z=f(y,x,v,u)=x+\ln(u)+(y+v)^2$, em que $x(u,v)=2u+3v$ e $y(u,v)=\cos(u)+\operatorname{sen}(v)$. Utilize a regra de derivação em cadeia para obter as derivadas $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$.

35) Seja a função de campo escalar $w = f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$, em que $x = \mathrm{tg}(u-1) - e^{v}$, $y = u^2 - v^2$ e $z = \cos(u^2 v)$. Usando a regra de derivação em cadeia, obtenha as derivadas parciais $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

36) Seja a função diferenciável $u = f(x,y)$. Considerando $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\mathrm{sen}(\theta)$, obtenha:

a) As derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ em função das derivadas parciais, de 1ª e 2ª ordens, de *f* em relação a *x* e *y*.

37) Verifique que as derivadas, de 2ª ordem, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ são iguais, se $z = e^{x}\left(\cos(y) + x\mathrm{sen}(y)\right)$.

38) Classifique os pontos críticos das seguintes funções e, se possível, determine os seus máximos/mínimos locais:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$.

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

e) $f(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$.

f) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$.

g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 2$.

h) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 4x + 2y$.

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

j) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$.

k) $f(x,y) = e^{x}\cos(y)$.

l) $f(x,y) = x\mathrm{sen}(y)$.

m) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$.

n) $f(x,y) = xy + x^{-1} + 8y^{-1}$.

o) $f(x,y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$.

p) $f(x,y) = x^2 y + x^2 - 4y$.

39) Seja um paralelepípedo situado no 1º octante, com um dos seus vértices na origem do referencial e duas das suas arestas situadas nos eixos dos *xx* e dos *yy*. Determine o valor máximo para o seu volume, se o vértice oposto à origem estiver situado no plano $x + y + z = 1$.

40) Calcule a distância entre as rectas com equações cartesianas $6x = 3y = 2z$ e $x = y - 2 = z$.

41) Pretende-se construir uma embalagem com a forma de um paralelepípedo, aberta no seu topo e com volume $96\ \text{m}^3$. Sabendo que o custo da produção da sua base é de $0{,}30€/\text{m}^2$, enquanto o das suas faces é de $0{,}10€/\text{m}^2$, calcule as dimensões da embalagem de modo a minimizar o custo da sua produção.

Soluções:

1) **a)** $f(x,y,z)=|xy|+2|xz|+2|zy|$, $D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0\ \wedge\ z\neq 0\right\}$.

b) $f(x,y,z)=\arccos\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}\right)$, $D_f=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

c) $f(x,y,z)=|z|$, $D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ z\neq 0\right\}$.

2) **a)** É um paraboloide elíptico.

b) A superfície inicial transforma-se num cilindro parabólico.

c) Trata-se de uma elipse situada no plano $z=1$.

d) A secção anterior transforma-se nas duas rectas paralelas $x=\pm 1$, situadas no plano $z=1$.

3) **a)** É um cone elíptico de uma folha.

b) Superfície esférica de raio $\dfrac{1}{2}$ e com centro em $C=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$.

4) **a)** 0. **b)** 0. **c)** $\dfrac{m}{1+m^2}$.

d) 0. **e)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **f)** Não existe.

5) **a)** $\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}=-\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta)$ e $\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\cos(\varphi)\cos(\theta)$. **b)** $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$.

c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$. **d)** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{e^z}{x^2y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2e^z}{xy^3}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial z}=u$.

e) $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\dfrac{z}{xz+3y}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{3}{xz+3y}$ e $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=\dfrac{x}{xz+3y}$.

f) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=z\ln(x)y^{z-1}x^{y^z}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial z}=\ln(x)\ln(y)y^z x^{y^z}$.

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{4x\sqrt{x^3+y^2}+3x^2}{2\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$.

6) a) $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=e^y\left(\mathrm{sen}(x+z)+x\cos(x+z)\right)\vec{i}+e^y x\,\mathrm{sen}(x+z)\vec{j}+e^y x\cos(x+z)\vec{k}$.

b) $\nabla g=\dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k}=-5(-x+2y)^4\vec{i}+10(-x+2y)^4\vec{j}-\dfrac{2}{z^2}\vec{k}$.

7) $\dfrac{df}{dt}=f'(t)=-24\mathrm{sen}(t)\cos^2(t)$.

8) Designando $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}$, tem-se $f'(P,\vec{u})=\nabla f(P)\cdot\vec{u}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}-3\dfrac{\sqrt{10}}{10}\ln(2)$.

9) Designando $\vec{u}=\vec{T}(1)=\dfrac{\vec{r}'(1)}{\left\|\vec{r}'(1)\right\|}$, tem-se $f'(P,\vec{u})=\nabla f(P)\cdot\vec{u}=-\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

10) $-3\sqrt{2}$.

11) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.

12) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$.

13) $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14) a) $\pm\dfrac{14}{\sqrt{41}}$. **b)** 0.

15) - - - -

16) $C=\left(\dfrac{1}{2},2,\dfrac{3}{2}\right)$.

17) Vector normal: $5\vec{i}+6\vec{j}$; vector tangente: $6\vec{i}-5\vec{j}$.

18) $y=\ln\left(\sqrt{2}\left|\mathrm{sen}(x)\right|\right)$.

19) No caso da superfície $z-xy=0$ é o ponto $O=(0,0,0)$; para a restante é o ponto $P=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{28}{3}\right)$.

20) Vector normal: $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; plano tangente: $x+y+z=3$.

21) Plano tangente: $5x+4y+3z=22$; recta normal: $X(t)=(1,2,3)+t(5,4,3)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

22) - - - -

23) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{19\sqrt{29}}{203}$.

24) - - - -

25) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy\operatorname{sen}(xy)+y\operatorname{sen}(x)-\cos(xy)}{\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(xy)}$.

26) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x+y}{(4z+3)z^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x+2y}{(4z+3)z^2}$.

27) $$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right);$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

28) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{1+2y+2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\dfrac{y+z}{1+2y+2z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2}{(1+2y+2z)^3}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{2}{(1+2y+2z)^3}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

29) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)=\dfrac{2}{e}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)=\dfrac{1}{e}$.

30) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1,2)=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1,2)=-1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,2)=-\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1,2)=-\dfrac{1}{5}$.

31) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos(y)+y\cos(x)}{2x-y}-2\dfrac{x\cos(y)+y\operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-x\operatorname{sen}(y)+\operatorname{sen}(x)}{2x-y}+\dfrac{x\cos(y)+y\operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$.

32) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(2,0,\arccos(1/\sqrt{2})\right)=\pm\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(2,0,\arccos(1/\sqrt{2})\right)=2$.

33) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,1,1)=-\dfrac{2}{7}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3,1,1)=-\dfrac{5}{7}$ ou $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(3,1,-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{15}{28}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(3,1,-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{85}{28}$.

34) $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}=-2\operatorname{sen}(u)\big(\cos(u)+\operatorname{sen}(v)+v\big)+2+\frac{1}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}=2\big(1+\cos(v)\big)\big(\cos(u)+\operatorname{sen}(v)+v\big)+3.$$

35) $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{u^2-v^2}{\cos(u^2v)\cos^2(u-1)}+\frac{2u\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos(u^2v)}+\frac{2uv\operatorname{sen}(u^2v)(u^2-v^2)\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos^2(u^2v)};$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{(u^2-v^2)e^v}{\cos(u^2v)}-\frac{2v\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos(u^2v)}+\frac{u^2\operatorname{sen}(u^2v)(u^2-v^2)\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos^2(u^2v)}.$$

36) a) $\frac{\partial u}{\partial r}=\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\left(\operatorname{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\frac{r^2\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)-r\left(\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

37) - - - -

38) a) Ponto estacionário em $(0,0)$, com um mínimo local de valor igual a 0.

b) Ponto de sela em $(0,0)$.

c) Ponto estacionário em $(2,1)$, com um mínimo local de valor igual a -3.

d) Pontos estacionários em $(-1,-1)$ e $(1,1)$, com mínimos locais de valor igual a -2; ponto de sela em $(0,0)$.

e) Ponto estacionário em $(1,0)$, com um máximo local de valor igual a 1.

f) Ponto estacionário ao longo da recta $y=x+1$, com um mínimo local de valor igual a 0.

g) Ponto estacionário em $(4,-2)$, com um mínimo local de valor igual a -10.

h) Ponto estacionário em $\left(\frac{10}{3},\frac{8}{3}\right)$, com um máximo local de valor igual a $\frac{28}{3}$.

i) Ponto estacionário em $(2,2)$, com um mínimo local de valor igual a -8; ponto de sela em $(0,0)$.

j) Ponto estacionário em $\left(5,\frac{27}{2}\right)$, com um mínimo local de valor igual a $-\frac{117}{4}$; ponto de sela em $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

k) Sem pontos estacionários nem mínimos ou máximos locais.

l) Pontos de sela em $(0,k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

m) Pontos de sela em $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

n) Ponto estacionário em $\left(\frac{1}{2},4\right)$, com um mínimo local de valor igual a 6.

o) Ponto estacionário em $(1,1)$, com um mínimo local de valor igual a 3.

p) Pontos de sela em $(2,-1)$ e $(-2,-1)$.

39) $\frac{1}{27}$.

40) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

41) O cesto tem uma base quadrada de dimensões $4\times 4\ \text{m}^2$ e a sua altura é $6\ \text{m}$.

1)

a)

$$A = |xy| + 2|xz| + 2|yz|$$

$$f(x,y,z) = |xy| + 2|xz| + 2|yz|$$

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$$

b)

$\vec{v} = (1,1,0)$ $\quad\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$\vec{x} = (x,y,z)$ $\quad\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = x + y$$

$$f(x,y,z) = \arccos\left[\frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \arccos\left[\frac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}\right]$$

$$D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

c)

$\vec{v} = (1,0,0)$

$\vec{u} = (1,1,0)$ $\quad\quad \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = z$

$\vec{x} = (x,y,z)$

$$V = |\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{x}|$$

$$f(x,y,z) = |z|$$

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$$

Wii

2) $$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Analisando a equação é evidente que:

$$b \neq 0 \quad e \quad z \geq 0$$

a)

A intersecção de superfície com planos paralelos a Oxy são elipses. Assim

$$z = k \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + \frac{y^2}{b^2} = k$$

(nota: se $k = 0$ temos o ponto $(0,0,0)$)

Trata-se de elipses com centro sobre o eixo dos zz e semi-eixos:

- $\sqrt{k}$ segundo o eixo dos xx
- $\sqrt{k}\,|b|$ segundo o eixo dos yy

$$\left[\frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}\,b)^2} = 1\right]$$

A intersecção de superfície com planos paralelos a Oyz são parábolas. Assim

$$x = k \quad \wedge \quad z = \frac{y^2}{b^2} + k^2$$

A intersecção da superfície com planos paralelos a Oxz são ainda parábolas. Assim

$$y = k \quad \wedge \quad z = x^2 + \frac{k^2}{b^2}$$

Conclui-se então que a superfície em causa é um parabolóide elíptico.

[illegible]

b) Quando $b \to \infty$ a superfície passa a ter como equação

$$z = x^2 \, , \quad y \in \mathbb{R}$$

Trata-se de um cilindro parabólico com eixo paralelo ao eixo dos yy.

c) Considerando $z = 1$ obtém-se a secção

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad z = 1$$

Trata-se de uma elipse situada no plano $z=1$, com centro em $(0,0,1)$ e com semi-eixos:

i) 1 segundo a direcção do eixo dos xx

ii) $|b|$ segundo a direcção do eixo dos yy

d) Quando $b \to \infty$ a secção anterior passa a ter como equação

$$x^2 = 1 \quad \wedge \quad z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \wedge z = 1) \quad \vee \quad (x = -1 \wedge z = 1)$$

Trata-se de duas rectas paralelas ao eixo dos yy situadas no plano $z = 1$.

Wiz

4) $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

a) Ao longo do eixo dos xx

$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$x \to 0$

$\mathcal{C} \to$ eixo dos xx : $y = 0$

$$f(x,0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$$

b) Ao longo do eixo dos yy

$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$y \to 0$

$\mathcal{C} \to$ eixo dos yy : $x = 0$

$$f(0,y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$$

c) Ao longo da recta $y = mx$

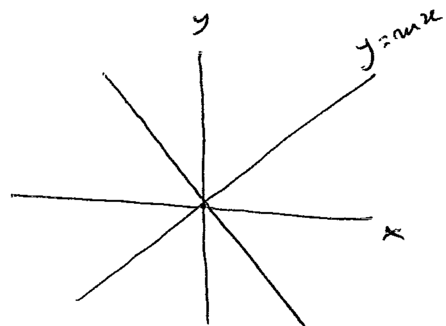
$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$x \to 0$

$\mathcal{C}$: $y = mx$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = g(x)$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$$

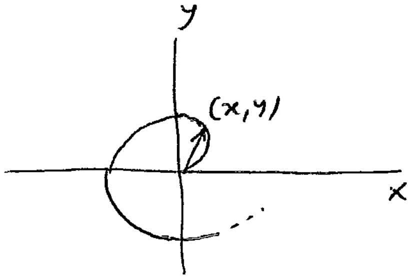


d) Ao longo da espiral $r = \theta$, $\theta > 0$

$\mathcal{C}: \ r = \theta, \ \theta > 0$

$x = r\cos\theta = \theta\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta = \theta\,\text{sen}\,\theta$



$(x,y) \to (0,0)$

$\Downarrow$

$\theta \to 0^+$

$$f(\theta\cos\theta, \theta\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta^2\cos^2\theta + \theta^2\text{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\theta^2\,\text{sen}\,2\theta}{\theta^2} = g(\theta)$$

$$\lim_{\theta\to 0^+} g(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{2}\,\frac{\theta^2\,\text{sen}\,2\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0^+}(\text{sen}\,2\theta) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ r=\theta}} f(x,y) = 0$$

e) Ao longo do arco $r = \text{sen}\,3\theta$, $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$

$\mathcal{C}: \ r = \text{sen}\,3\theta, \ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$

$(x,y) \to (0,0)$

$\Downarrow$

$\theta \to \frac{\pi}{3}^-$

$x = r\cos\theta = \text{sen}(3\theta)\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}(3\theta)\,\text{sen}\,\theta$

$$f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\text{sen}^2(3\theta)\cos^2\theta + \text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}^2(3\theta)} = g(\theta)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} g(\theta) = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} \frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}^2(3\theta)} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}(\text{sen}\,2\theta) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ r=\text{sen}\,3\theta}} f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

f) Ao longo da curva $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$, $t > 0$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \end{cases}, \quad t > 0$$

$$(x,y) \to (0,0) \Downarrow t \to +\infty$$

$$f\left(\frac{1}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}} = \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{t^2(1+\operatorname{sen}^2 t)} = g(t)$$

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{t^2(1+\operatorname{sen}^2 t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen}^2 t}$$ <u>não existe</u>

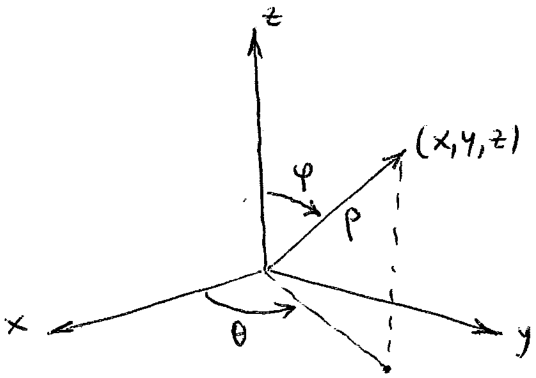
$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (\text{ao longo de } \mathcal{C})}} f(x,y) \longrightarrow$ não existe limite

5)

a) $\rho = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \cos\varphi \cos\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$



Coordenadas esféricas : $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

NOTA : $\rho = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2 = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow$ Superficie esférica $\begin{cases} \text{centro} = (1/2, 0, 0) \\ \text{raio} = 1/2 \end{cases}$

c) $g(x,y) = \operatorname{arctg}(2x+y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

d) $u(x,y,z) = \frac{e^z}{x y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x^{-2} \frac{e^z}{y^2} = -\frac{e^z}{x^2 y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y^{-3} \frac{e^z}{x} = -\frac{2e^z}{x y^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^z}{x y^2}$$

b)

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2} = (x^2+4y^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+4y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}(8y)(x^2+4y^2)^{-1/2} = \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

e) $w(x,y,z) = \ln(zx+3y)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{z}{xz+3y} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{xz+3y} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{xz+3y}$$

f) $v(x,y,z) = x^{y^z}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \ln(x)\frac{\partial}{\partial y}(y^z)\,x^{y^z} = z\ln(x)\,y^{z-1}x^{y^z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \ln(x)\frac{\partial}{\partial z}(y^z)\,x^{y^z} = \ln(x)\ln(y)\,y^z x^{y^z}$$

$$x^{y^z} = e^{\ln x^{y^z}}$$

$$\frac{d}{dy}\ln x^{y^z} \quad e^{\cdots}$$

$$\frac{d}{dy}\,y^z\ln x$$

6) a) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(x+z)\, e^{y} = x e^{y} \operatorname{sen}(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} \operatorname{sen}(x+z) + x e^{y} \cos(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{y} \operatorname{sen}(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x e^{y} \cos(x+z)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(e^{y} \operatorname{sen}(x+z) + x e^{y} \cos(x+z),\ x e^{y} \operatorname{sen}(x+z),\ x e^{y} \cos(x+z) \right) =$$

$$= e^{y} \left(\operatorname{sen}(x+z) + x \cos(x+z),\ x \operatorname{sen}(x+z),\ x \cos(x+z) \right)$$

b) $g(x,y,z) = (-x+2y)^{5} + \frac{2}{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 5(-1)(-x+2y)^{4} = -5(-x+2y)^{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 5(2)(-x+2y)^{4} = 10(-x+2y)^{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{2}{z^{2}}$$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(-5(-x+2y)^{4},\ 10(-x+2y)^{4},\ -\frac{2}{z^{2}} \right)$$

7) $f(x,y) = x\,(4-y^2)$

$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$

b) Usando a composição de funções:

$$f(t) = f(\alpha(t)) = 2\cos t\,(4 - 4\,\text{sen}^2 t) =$$

$$= 8\cos t\,(1 - \text{sen}^2 t) = 8\cos^3 t$$

$$f'(t) = 8\,(3)\cos^2 t\,(-\text{sen}\, t) = -24\,\text{sen}\, t\cos^2 t$$

a) Não efectuando a composição de funções:

$$f'(t) = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t) = 4 - y^2 = 4 - 4\,\text{sen}^2 t = 4\,(1 - \text{sen}^2 t) = 4\cos^2 t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t) = x\,(-2y) = -2xy = -8\,\text{sen}\, t\cos t$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (-2\,\text{sen}\, t, 2\cos t) = 2\,(-\text{sen}\, t, \cos t)$$

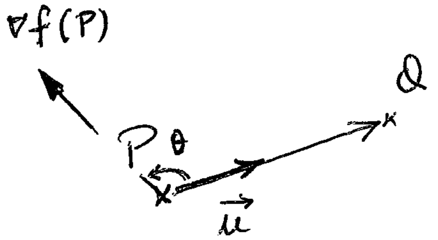
$$\nabla f(\vec{\alpha}(t)) = (4\cos^2 t, -8\,\text{sen}\, t\cos t) = 4\,(\cos^2 t, -2\,\text{sen}\, t\cos t)$$

$$f'(t) = 4\,(\cos^2 t, -2\,\text{sen}\, t\cos t) \cdot [2\,(-\text{sen}\, t, \cos t)] =$$

$$= 8\,(-\text{sen}\, t\cos^2 t - 2\,\text{sen}\cos^2 t) = -24\,\text{sen}\, t\cos^2 t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f \cdot \vec{\alpha}'(t)$$

8) $f(x,y,z) = z \ln \frac{x}{y}$



$P = (1,2,-2)$

$Q = (2,2,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \, \frac{1/y}{x/y} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \, \frac{-x\, y^{-2}}{x/y} = -\frac{z}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ln \frac{x}{y}$$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,0,3)$

$\| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{10}$

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}, \ln \frac{x}{y} \right)$$

No ponto P obtém-se

$$\nabla f(1,2,-2) = \left(-2, 1, \ln \tfrac{1}{2}\right) = (-2, 1, -\ln 2)$$

$$f'(P,\vec{u}) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow$$

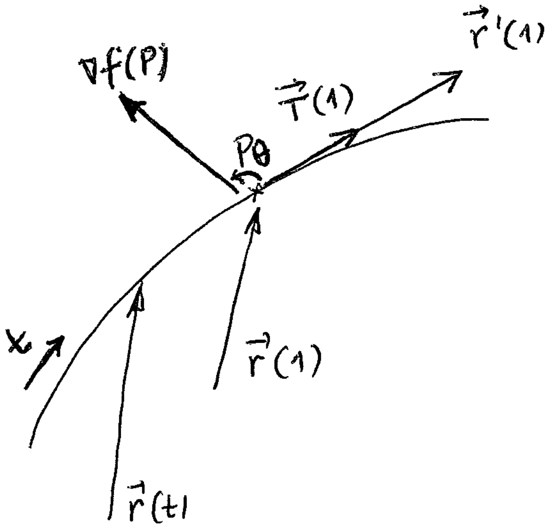
$$\Leftrightarrow \quad f'\left[(1,2,-2) \,;\, \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)\right] = (-2,1,-\ln 2) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-2 + 0 - 3\ln 2) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{3\ln 2}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{5} - 3\,\frac{\sqrt{10}}{10}\ln 2$$

$(\theta > \pi/2)$

9) $f(x,y,z) = x\, e^{y^2-z^2}$



$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2-z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{y^2-z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -2xz\, e^{y^2-z^2}$

$\vec{r}(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$

$P = (1,2,-2) \Rightarrow \vec{r}(1) = P$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^{y^2-z^2}, 2xy\, e^{y^2-z^2}, -2xz\, e^{y^2-z^2}\right) =$$
$$= e^{y^2-z^2}(1, 2xy, -2xz)$$

Em P obtém-se

$$\nabla f(1,2,-2) = (1,4,4)$$

$\vec{r}\,'(t) = (1, -2\,\text{sen}(t-1), -2e^{t-1})$

$\vec{r}\,'(1) = (1,0,-2)$ e $\|\vec{r}\,'(1)\| = \sqrt{5}$

$\vec{u} = \vec{T}(1) = \dfrac{\vec{r}\,'(1)}{\|\vec{r}\,'(1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2) \rightarrow$ versor tangente à curva no ponto P

$$f'\left[(1,2,-2); \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)\right] = \nabla f(1,2,-2) \cdot \vec{T}(1) =$$
$$= (1,4,4) \cdot \left[\tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)\right] = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1+0-8) =$$
$$= -\frac{7}{\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Concluindo $f'(P; \vec{T}(1)) = -\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ $(\theta > \pi/2)$

15)

Seja a função $f(x,y,z)$ diferenciável e contínua em todos os pontos do segmento de recta $[AB]$ e $f(A) = f(B)$.

Seja a parametrização do segmento de recta $[AB]$

$$\vec{r}(t) = A + t\,(B - A) \quad , \quad t \in [0,1]$$

em que $\quad A = \vec{r}(0) \quad$ e $\quad B = \vec{r}(1)$

Considere-se a função composta

$$g(t) = f[\vec{r}(t)] \quad , \quad t \in [0,1]$$

tal que

$$g(0) = f(A) \quad \text{e} \quad g(1) = f(B)$$

Sendo $g(t)$ uma função contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $]0,1[$, tal que

$$g(0) = g(1)$$

o teorema de Rolle (para as funções reais de variável real) permite escrever

$$\exists_{t \in]0,1[} \; : \; g'(t) = 0$$

Sabendo que

$$g'(t) = \nabla f[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}\,'(t) = \nabla f[\vec{r}(t)] \cdot (B - A)$$

então

$$\exists_{C \in [AB]} \; : \; 0 = \nabla f(C) \cdot (B - A)$$

ou ainda

$$\exists_{C \in [AB]} \; : \; \nabla f(C) \perp (B - A)$$

Wmj

16) $f(x,y,z) = 4xz - y^2 + z^2$

$A = (0,1,1)$

$B = (1,3,2)$

Parametrização do segmento de recta $[AB]$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,1)$

$\vec{r}(t) = A + t\vec{v}, \quad t \in [0,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = (0,1,1) + t\,(1,2,1), \quad t \in [0,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = (t, 1+2t, 1+t), \quad t \in [0,1]$

$f(B) = f(1,3,2) = 8 - 9 + 4 = 3$

$f(A) = f(0,1,1) = -1 + 1 = 0$

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (4z, -2y, 4x + 2z)$

$C \in [AB] \Rightarrow C = (t, 1+2t, 1+t), \quad t \in [0,1]$

$\nabla f(C) = \nabla f(t, 1+2t, 1+t) = (4+4t, -2-4t, 4t+2+2t) =$

$= (4+4t, -2-4t, 2+6t)$

$\nabla f(C) \cdot \vec{v} = 4 + 4t - 4 - 8t + 2 + 6t = 2 + 2t$

$f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 3 = 2 + 2t \Leftrightarrow t = 1/2$

Então

$$C = \left(1/2, 2, 3/2\right)$$

Wair

18) $P = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$T(x,y) = \sqrt{2}\, e^{-y} \cos x$$

Admite-se que a trajectória da partícula na vizinhança de P é dada pela curva $y = f(x)$, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

cujo vector tangente é

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

<u>PROCESSO I</u>

A condição a verificar é

$$\nabla T(x,y) = k\, \vec{r}'(t), \quad k > 0$$

(o vector gradiente tem a mesma direcção e sentido do vector tangente à curva, para que a partícula possa seguir um percurso a que corresponde a máxima variação positiva de temperatura)

$$\nabla T(x,y) = \left(-\sqrt{2}\, e^{-y} \operatorname{sen} x, -\sqrt{2}\, e^{-y} \cos x\right)$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t) = k\, x'(t) \\ -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \cos x(t) = k\, y'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t)}{x'(t)} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \cos x(t) = \dfrac{-\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t)}{x'(t)}\, y'(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x'(t) \cos x(t) = y'(t) \operatorname{sen} x(t) \end{cases}$$

Da expressão anterior resulta

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Wuy

Então

$$y = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Como a curva passa no ponto $P = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, obtém-se

$$0 = \ln\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right| + C \Leftrightarrow C = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$$

Assim,

$$y = \ln|\operatorname{sen} x| + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2}\,|\operatorname{sen} x|\right)$$

<u>PROCESSO II</u> (o problema em causa está no plano Oxy)

O vector tangente à curva tem a direcção do vector

$$\vec{u} = (1, f'(x))$$

O vector normal à curva, em cada ponto, será então

$$\vec{n} = (f'(x), -1)$$

Assim, a condição

$$\nabla T(x,y) = k\,\vec{r}\,'(t), \quad k > 0$$

pode ser substituída por

$$\nabla T(x,y) \perp \vec{n} \Leftrightarrow \nabla T(x,y) \cdot \vec{n} = 0$$

Então

$$\left(-\sqrt{2}\,e^{-y}\operatorname{sen} x, -\sqrt{2}\,e^{-y}\cos x\right) \cdot (y', -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\,e^{-y}y'\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\,e^{-y}\cos x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

A partir deste momento o processo de resolução é idêntico ao considerado no processo de resolução anterior.

Wij

19) $f(x,y,z) = z - xy$

Superfície: $z - xy = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-y, -x, 1)$$

O plano tangente é horizontal $\Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 0$

Verifica-se no ponto $O = (0,0,0)$

$g(x,y,z) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z$

Superfície: $g(x,y,z) = 0$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (4 - 2x + y, 2 + x - 2y, -1)$$

O plano tangente é horizontal $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2x + y = 0 \\ 2 + x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10/3 \\ y = 8/3 \end{cases}$$

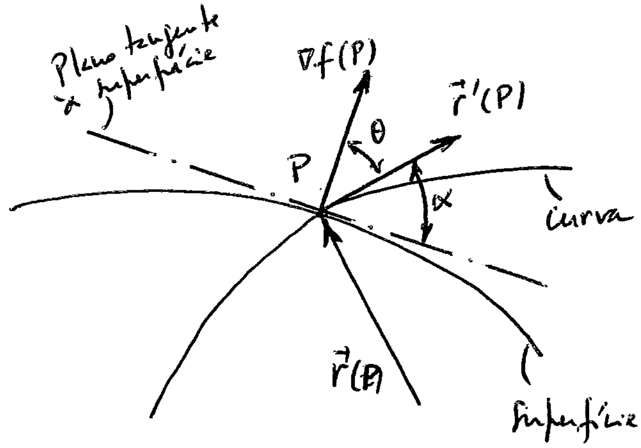
A coordenada z do ponto é

$$\frac{40}{3} + \frac{16}{3} - \frac{100}{9} + \frac{80}{9} - \frac{64}{9} - z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{28}{3}$$

Verifica-se no ponto $P = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right)$

Wij

23) Curva:



$$\vec{r}(t) = (2t, 3t^{-1}, -2t^2), \ t>0$$

$$\vec{r}\,'(t) = (2, -3t^{-2}, -4t)$$

$$P = (2,3,-2) = \vec{r}(1)$$

$$\vec{r}\,'(P) = \vec{r}\,'(1) = (2,-3,-4)$$

Superfície: $f(x,y,z) = 25$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 6z)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(2,3,-2) = (4,6,-12)$$

$$\cos\theta = \frac{|\nabla f(P) \cdot \vec{r}\,'(P)|}{\|\nabla f(P)\| \ \|\vec{r}\,'(P)\|} = \frac{|8-18+48|}{\sqrt{29}\ \sqrt{196}} = \frac{38}{14\sqrt{29}} = \frac{19}{7\sqrt{29}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{19\sqrt{29}}{203}$$

Então

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{19\sqrt{29}}{203}\right)$$

24) Seja $f(x,y,z) = x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2}$ e a superfície

$f(x,y,z) = \omega^{1/2}$, $\omega > 0$.

Ponto da superfície: $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}, y^{-1/2}, z^{-1/2}\right)$$

O vector normal ao plano tangente à superfície em P é

$$\nabla f(P) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$$

Plano tangente à superfície em P

$$(X - P) \cdot \nabla f(P) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{\sqrt{z_0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = x_0^{1/2} + y_0^{1/2} + z_0^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \omega^{1/2}$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos xx

$$I_x = \left(x_0^{1/2}\omega^{1/2}, 0, 0\right)$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos yy

$$I_y = \left(0, y_0^{1/2}\omega^{1/2}, 0\right)$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos zz

$$I_z = \left(0, 0, z_0^{1/2}\omega^{1/2}\right)$$

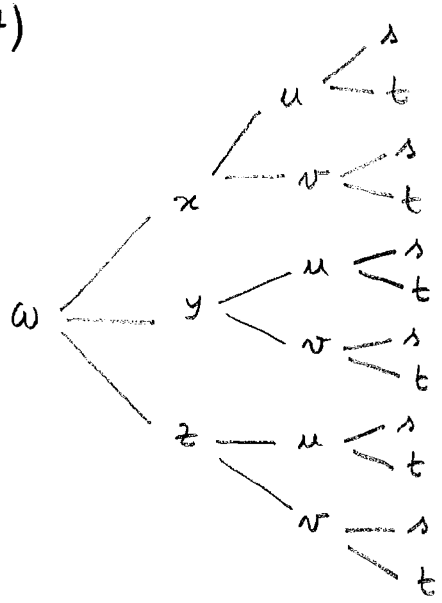
Então

$$x_0^{1/2}\omega^{1/2} + y_0^{1/2}\omega^{1/2} + z_0^{1/2}\omega^{1/2} = \omega^{1/2}\left(x_0^{1/2} + y_0^{1/2} + z_0^{1/2}\right) =$$

$$= \omega^{1/2}\omega^{1/2} = \omega$$

Wr

27)



$$w = w(x,y,z)$$
$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$
$$u = u(s,t)$$
$$v = v(s,t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

De modo análogo, obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

28)

$$x + z + (y+z)^2 = 6 \longrightarrow z = f(x,y)$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x+z+(y+z)^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial x}(y+z) = 0 \Leftrightarrow \quad 1$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{1+2y+2z}}$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x+z+(y+z)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + 2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z) = 0 \Leftrightarrow \quad 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y}(y+z) + 2(y+z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial z}{\partial y} = -2y-2z \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y-2z}{1+2y+2z}}$$

Cálculo de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Diferenciando a expressão 2 em ordem à variável x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z) + 2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\left(1+\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right)\frac{(-1)}{1+2y+2z} \Leftrightarrow$$

V.v.s.f.

$$\Leftrightarrow \left(1+2y+2z\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{1+2y+2z} \quad \frac{1}{1+2y+2z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}}$$

A funçãs $z = f(x,y)$ diz-se regular se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Calculando $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, diferenciando a expressão 1 em ordem à variável y, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(y+z) + 2\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2y+2z\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2y+2z\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{1+2y+2z}\left(1+\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2y+2z\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{1+2y+2z} \quad \frac{1}{1+2y+2z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}}$$

Assim, conclui-se que a função $z = f(x,y)$ é regular.

Jluiz

Sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y-2z}{1+2y+2z}$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right) =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(-2y-2z)\,(1+2y+2z) - (-2y-2z)\,\frac{\partial}{\partial x}(1+2y+2z)}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}(1+2y+2z) + (2y+2z)\, 2\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(-2-\cancel{4y}-\cancel{4z}+\cancel{4y}+\cancel{4z}\right)}{(1+2y+2z)^2} = \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{-2\left(\frac{-1}{1+2y+2z}\right)}{(1+2y+2z)^2} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}$$

Sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{1+2y+2z}$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{1+2y+2z}\right) = \frac{-(-1)\frac{\partial}{\partial y}(1+2y+2z)}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{2+2\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+2y+2z)^2} = \frac{2+2\,\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{2(1+2y+2z)-4y-4z}{(1+2y+2z)^3} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}$$

A função $z=f(x,y)$ é regular, já que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

Wij

29)

$$z = f(x,y)$$

$$e^{\cos z} \ln(z+1) = \operatorname{arctg}(2x+y)$$

Derivando em ordem a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\cos z}\ln(z+1)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\cos z}\right)\ln(z+1) + e^{\cos z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(z+1)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\cos z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(z+1)}{z+1} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-\operatorname{sen} z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+1} =$$

$$= e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z \ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}(2x+y)\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

Considerando a derivada da expressão em ordem a x obtém-se:

$$e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z \ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

No ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ obtém-se

$$e\,\frac{\partial z}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{2},1,0\right) = \frac{2}{1+0} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{2},1,0\right) = \frac{2}{e}$$

Wir

Derivando em ordem a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\cos z}\ln(z+1)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\cos z}\right)\ln(z+1) + e^{\cos z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(z+1)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(\cos z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\,\frac{\frac{\partial}{\partial y}(z+1)}{z+1} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y}(-\operatorname{sen} z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\,\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z+1} =$$

$$= e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z\ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(2x+y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

Considerando a derivada da expressão em ordem a y obtém-se

$$e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z\ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

No ponto $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ obtém-se

$$e\,\frac{\partial z}{\partial y}(-1/2, 1, 0) = \frac{1}{1+0} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(-1/2, 1, 0) = \frac{1}{e}$$

Wiz

38 f)

$$f(x,y) = (x-y+1)^2$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x-2y+2, -2x+2y-2) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Pontos estacionários ao longo da recta $y = x+1$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ o teste é inconclusivo.

Verifica-se que

$$f(x, x+1) = 0$$

Notando que

$$f(x,y) = (x-y+1)^2 \geq 0$$

Conclui-se que ao longo da recta $y = x+1$ teremos um mínimo local de valor igual a zero.

Wig

k) $f(x,y) = e^x \cos y$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y \right) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{e^x}\cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Impossível} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

A função não tem pontos estacionários (ausência de mínimos e de máximos locais).

l) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\operatorname{sen} y, x \cos y \right) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \\ x \cos y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases}$$

Pontos estacionários : $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$\Delta(0, k\pi) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{pontos de sela}$$

40) Recta $r: \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$ $\quad O = (0,0,0) \in r \quad A = (1,2,3) \in r \quad \vec{a} = \vec{OA} = (1,2,3)$

Equação vectorial da recta r: $X(s) = s\vec{a} = s(1,2,3)$, $s \in \mathbb{R}$

Recta v: $\begin{cases} z = x \\ y = x+2 \end{cases}$ $\quad B = (0,2,0) \in v \quad C = (1,3,1) \in v \quad \vec{b} = \vec{BC} = (1,1,1)$

Equação vectorial da recta v: $X(t) = B + t\vec{b} = (0,2,0) + t(1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$

Seja $I_r = (s, 2s, 3s)$ um ponto situado na recta r

Seja $I_v = (t, t+2, t)$ um ponto situado na recta v

$$I_v - I_r = (t-s, t-2s+2, t-3s)$$

$$\| I_v - I_r \|^2 = (t-s)^2 + (t-2s+2)^2 + (t-3s)^2$$

Seja a função

$$f(t,s) = (t-s)^2 + (t-2s+2)^2 + (t-3s)^2$$

que traduz o quadrado da distância entre dois pontos genéricos situados nas rectas r e v (I_r e I_v).
A distância entre as duas rectas passa pela determinação do valor mínimo da função $f(t,s)$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(t-s) + 2(t-2s+2) + 2(t-3s) = 6t - 12s + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -2(t-s) - 4(t-2s+2) - 6(t-3s) = -12t + 28s - 8$$

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = -2 \\ -3t + 7s = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2/3 \\ s = 0 \end{cases}$$

Confirmemos que $(-2/3, 0)$ corresponde a um mínimo local:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 28 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = -12$$

$$\Delta(-2/3, 0) = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 28 \end{vmatrix} > 0 \;\wedge\; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} > 0 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

Vire

O mínimo local em $(-2/3, 0)$ tem o valor

$$f(-2/3, 0) = (-2/3)^2 + (-2/3 + 2)^2 + (-2/3)^2 =$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

A distância entre as rectas r e v é

$$d_{r,v} = \sqrt{f(-2/3, 0)} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

que corresponde à distância entre os pontos

$$I_r = O = (0,0,0) \in r$$

$$I_v = (-2/3, 4/3, -2/3) \in v$$

W