COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 6

SUPERFÍCIES

1. Parametrize as seguintes superfícies:

a) $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

b) $x^2 + y^2 = 9$, $z \in [-1,3]$.

c) A região da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada acima do plano $z = -\sqrt{2}$.

d) A região do plano $z = x - 1$ que é limitada pela superfície $x^2 + y^2 = 1$.

2. Identifique as seguintes superfícies e defina-as através das respectivas equações cartesianas:

a) $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\cos(v)\vec{i} + 2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + 3\text{sen}(v)\vec{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$.

b) $\vec{r}(u,v) = au\cos(v)\vec{i} + bu\text{sen}(v)\vec{j} - u^2\vec{k}$, $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ $(a,b \in \mathbb{R}^+)$.

c) $\vec{r}(u,v) = \dfrac{a}{2}(u+v)\vec{i} + \dfrac{b}{2}(u-v)\vec{j} + uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b \in \mathbb{R}^+)$.

3. Seja a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + 2uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto $R = (0,2,2)$.

4. Considere a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\text{sen}(v)\vec{i} + \text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + u\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano que passa no ponto $Q = (1,2,1)$ e é paralelo ao plano tangente à superfície no ponto $R = (0,0,\pi)$.

5. Considere a superfície, S, definida por $z = x^2 + y^2$, $z \in [0,4]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Determine a sua área.

6. Seja a superfície, S, parametrizada por $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\text{sen}(v)\vec{j} + u\vec{k}$, tal que $u \in [0,1]$ e $v \in [0,2\pi]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

7. Confirme o resultado obtido no exercício da alínea b) do exercício 6., considerando uma parametrização da superfície em coordenadas cartesianas.

8. Seja a superfície, S, definida por $2 - 2x^2 - 2y^2 - z = 0$, $z \geq 0$.

a) Esboce a superfície. **b)** Determine a sua área.

9. Seja a superfície, S, definida por $z = 5 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 4$.

a) Esboce a superfície. **b)** Obtenha a sua área.

10. Considere a superfície, S, definida por $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [-4,-1]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

11. Seja a superfície, S, definida por $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, tal que $x \geq 0$, $z \geq 0$ e $x + z \leq 1$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

12. Seja a superfície, S, definida por $x^2 + y^2 = (z-4)^2$, tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq z \leq 2$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

13. Determine a área da região, *S*, do plano $x+y+z=a$ situada no interior da superfície cilíndrica $x^2+y^2=b^2$.

14. Seja o plano $bcx+acy+abz=abc$, em que $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. Calcule a área da região, *S*, do plano situada no primeiro octante.

15. Determine a área das superfícies, *S*, definidas por:

a) $3z = x^{3/2} + y^{3/2}$, tal que $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le x$.

b) $z^2 = 2xy$, tal que $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$ e $z \ge 0$.

c) $z = a^2 - (x^2+y^2)$, tal que $0 \le z \le \frac{3}{4}a^2$.

d) $3z^2 = (x+y)^3$, tal que $x \ge 0$, $y \ge 0$ e $x+y \le 2$.

e) $z = y^2$, tal que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$.

f) $x^2+y^2+z^2-4z=0$, tal que $z \ge \sqrt{3(x^2+y^2)}$.

g) $x^2+y^2+z^2-2az=0$, tal que $z \ge \frac{1}{b}(x^2+y^2)$ e $a,b \in \mathbb{R}^+$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.

3)

$$\vec{r}(u,v) = \left(u^2-v^2,\ u^2+v^2,\ 2uv\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

a)

$$\vec{r}\,'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u,\ 2u,\ 2v) = 2\,(u,u,v)$$

$$\vec{r}\,'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-2v,\ 2v,\ 2u) = 2\,(-v,\ v,\ u)$$

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = 4 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & u & v \\ -v & v & u \end{vmatrix} = 4\left(u^2-v^2,\ -v^2-u^2,\ 2uv\right)$$

b) R pertence à superfície, já que, por exemplo,

$$R = (0,2,2) = \vec{r}(1,1)$$

(a solução não é única)

$$\vec{N}(1,1) = 4\,(0,-2,2) = (0,-8,8)$$

O plano tangente à superfície em R é

$$-8y + 8z = d, \quad d = 0 \quad (\text{R pertence ao plano})$$

ou seja,

$$y - z = 0$$

4) $\vec{r}(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v, u)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) $\vec{r}\,'_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, 1)$

$\vec{r}\,'_v = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\cos u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0)$

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \cos v \\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v - \cos^2 u \cos^2 v \end{bmatrix}$$

Considerando, por exemplo, $\operatorname{sen}^2 v = 1 - \cos^2 v$ resulta

$\operatorname{sen}^2 u (1 - \cos^2 v) - \cos^2 u \cos^2 v = \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v - \cos^2 u \cos^2 v =$

$= \operatorname{sen}^2 u - (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) \cos^2 v = \operatorname{sen}^2 u - \cos^2 v$

$\vec{N}(u,v) = (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, \operatorname{sen}^2 u - \cos^2 v)$

b) $R = (0,0,\pi) = \vec{r}(\pi, 0)$

$\vec{N}(\pi, 0) = (0, -1, -1)$

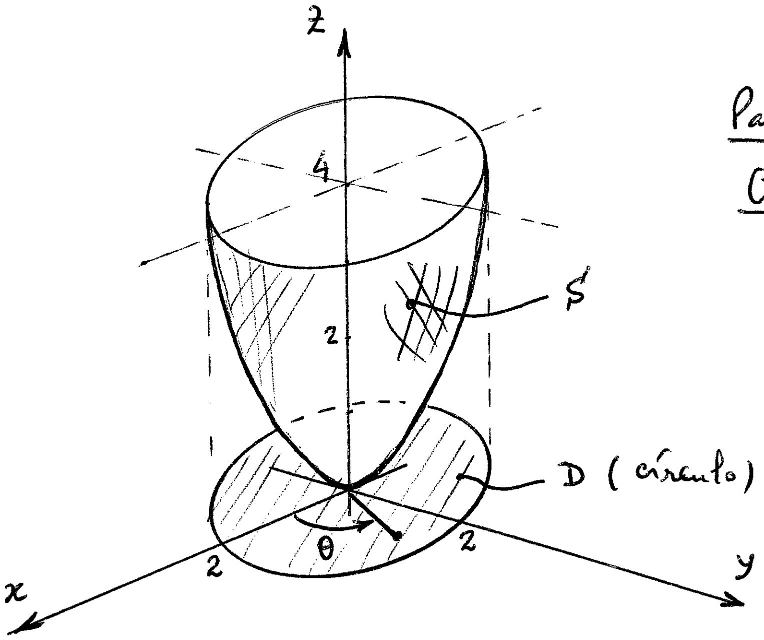
O plano pretendido tem como equação cartesiana

$-y - z = d$, $d = -3$ (R pertence ao plano)

ou seja, $y + z = 3$

5) Superfície S : $z = x^2+y^2$, $z \in [0,4]$

a)



Parabolóide Circular

b) Parametrização em coordenadas cartesianas

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2+y^2) \quad , \quad (x,y) \in D$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$\vec{r}'_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\vec{r}'_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}(x,y) = (-2x, -2y, 1)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

$$A(S) = \iint_D \|N(x,y)\| \, dx\,dy = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)} \, dx\,dy$$

Integração em coordenadas polares (a região D é circular)

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy = r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

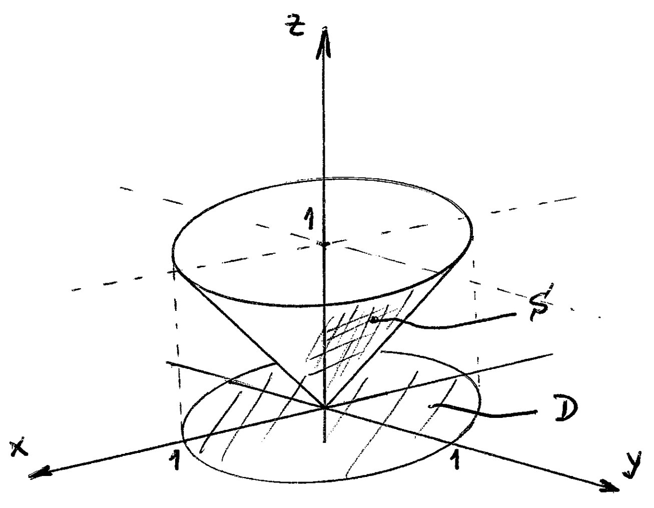
$$A(S) = \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = 2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{12} \int_0^2 \frac{3}{2}(8r)\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Wiv

6) Superfície S : $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u)$
$u \in [0,1] \wedge v \in [0,2\pi]$

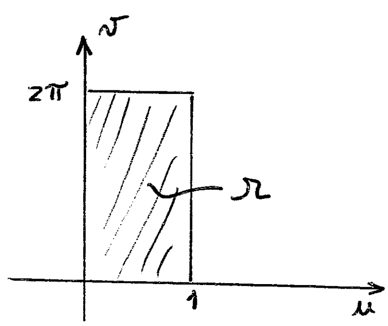
a) Notando que
$$x^2 + y^2 = (u\cos v)^2 + (u\,\text{sen}\,v)^2 = u^2 = z^2$$
a superfície pode ser apresentada sob a forma alternativa
$$S : z = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad z \in [0,1]$$
ou, ainda,
$$S : z = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad (x,y) \in D$$
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \}$$
Trata-se de uma superfície cónica circular.



b) Considerando a parametrização
$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u)\ ,\quad (u,v) \in \Omega$$

$$\vec{r}\,'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (\cos v, \text{sen}\,v, 1)$$

$$\vec{r}\,'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-u\,\text{sen}\,v, u\cos v, 0)$$



$$\vec{N}(u,v) = (-u\cos v, -u\,\text{sen}\,v, u)$$

W.m.

$$\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{2u^2} = \sqrt{2}\,|u| = \sqrt{2}\,u \quad (u \in [0,1])$$

$$A(S) = \iint_{\Omega} \|N(u,v)\|\, du\, dv = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\, du\, dv = \frac{\sqrt{2}}{2}\, 2\pi = \sqrt{2}\,\pi$$

7) Considere-se a parametrização em coordenadas cartesianas

$$\vec{r}_1(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in D$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$ (ver figura em 4 a))

$$\vec{r}\,'_{1x} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{r}\,'_{1y} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

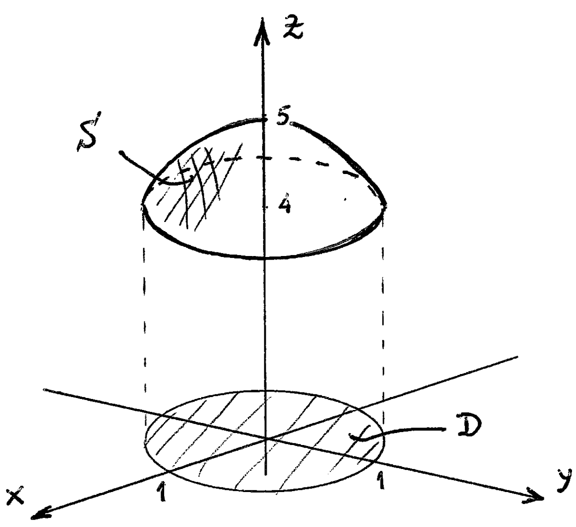
$$\|\vec{N}(x,y)\| = \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right]^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy = \sqrt{2}\iint_D dx\, dy =$$

$$= \sqrt{2}\, A(D) = \sqrt{2}\,\pi$$

D: região circular de raio 1

9) Superfície S : $\begin{cases} z = 5 - (x^2+y^2) \rightarrow \text{parabolóide circular} \\ z \geq 4 \end{cases}$



Considere-se a parametrização em coordenadas cartesianas

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 5-x^2-y^2), \quad (x,y) \in D$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\vec{r}_x' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, -2x)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}(x,y) = (2x, 2y, 1)$$

$$\vec{r}_y' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, -2y)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Integração em coordenadas polares (a região D é circular)

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy = r\sqrt{1+4r^2}\, dr\, d\theta$
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$A(S) = \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2} \int_0^{2\pi} d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{12} \int_0^1 \frac{3}{2}(8r)\sqrt{1+4r^2}\, dr = \frac{\pi}{6}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

Wir

11) $y = \sqrt{x^2+z^2}$ ⟶ superfície cónica de uma folha tendo como eixo o semieixo positivo do eixo dos yy

a) <u>Superfície S</u>:

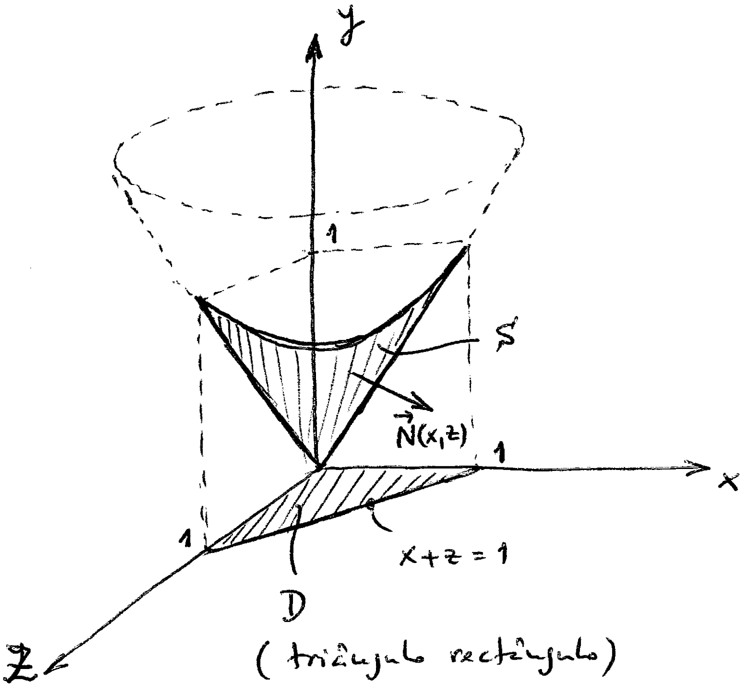
$y = \sqrt{x^2+z^2}$

$x \geq 0$

$z \geq 0$

$x + z \leq 1$

$x + z = 1$ ⟶ plano paralelo ao eixo dos yy



b) Parametrização da superfície S

$$\vec{r}(x,z) = \left(x, \sqrt{x^2+z^2}, z\right) \quad , \quad (x,z) \in D$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x+z \leq 1\}$$

$$\vec{r}\,'_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 0\right)$$

$$\vec{r}\,'_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \left(0, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, 1\right)$$

$$\vec{N}(x,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) \Rightarrow \|\vec{N}(x,z)\| = \sqrt{2}$$

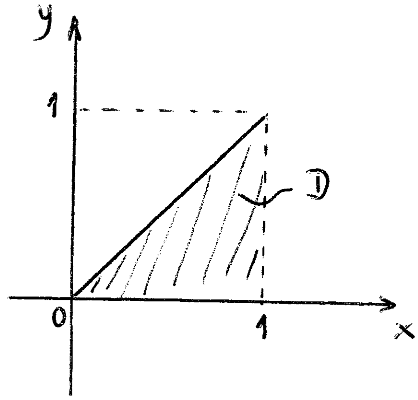
$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(x,z)\|\, dx\, dz = \sqrt{2} \iint_D dx\, dz =$$

$$= \sqrt{2}\, A(D) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

15) a) Seja a superfície

$$S : z = \frac{1}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$$



Considerando a parametrização

$$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{3}\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)\right) \quad , \quad (x,y) \in D$$

$$\vec{r}\,'_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{1}{2}x^{1/2}\right)$$

$$\vec{r}\,'_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{1}{2}y^{1/2}\right)$$

$$\vec{N}(x,y) = \vec{r}\,'_x \times \vec{r}\,'_y = \left(-\frac{1}{2}x^{1/2}, -\frac{1}{2}y^{1/2}, 1\right)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x+y+4}$$

$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^x \sqrt{x+y+4}\; dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^1 \left[(x+y+4)^{3/2}\right]_0^x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[(2x+4)^{3/2} - (x+4)^{3/2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (2x+4)^{3/2} dx - \frac{1}{3}\int_0^1 (x+4)^{3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)\left[(2x+4)^{5/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)\left[(x+4)^{5/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{15}\left(6^{5/2} - 4^{5/2}\right) - \frac{2}{15}\left(5^{5/2} - 4^{5/2}\right) = \frac{36\sqrt{6}}{15} - \frac{32}{15} - \frac{50\sqrt{5}}{15} + \frac{64}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}\left[32 + 36\sqrt{6} - 50\sqrt{5}\right]$$