

O operador vectorial diferencial ∇ (nabla)

- O *operador vectorial diferencial*, ∇ , por vezes também designado por *operador gradiente*, é definido por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

e tanto pode ser aplicado a *campos escalares*, como a *campos vectoriais*.

Gradiente de um campo escalar, ∇f

- Se $f(x, y, z)$ é um *campo escalar*, então

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

designa o *gradiente* de $f(x, y, z)$ no ponto (x, y, z) .

A função resultante, $\nabla f(x, y, z)$, é um campo vectorial e pode ser usada, por exemplo, no cálculo da *derivada direccional* de $f(x, y, z)$ num ponto ou na definição do *plano tangente* a uma *superfície de nível* que passa num ponto, ou seja, a uma superfície do tipo $f(x, y, z) = k$, $k \in \mathbb{R}$ (tal como vimos no capítulo 2).

Exemplo 7: O gradiente do campo escalar

$$f(x, y, z) = x^3 z + xy^2 z^2 - 2yz + 2x - 1$$

é o campo vectorial:

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 z + y^2 z^2 + 2) \vec{i} + (2xyz^2 - 2z) \vec{j} + (x^3 + 2xy^2 z - 2y) \vec{k}$$

Divergência de um campo vectorial, $\nabla \cdot \vec{f} = \text{div } \vec{f}$

- Dado o campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$$

o campo escalar definido por

$$\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = \text{div } \vec{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

chama-se *divergência de $\vec{f}(x, y, z)$* no ponto (x, y, z) .

- O campo vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ diz-se *solenoidal* quando $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = 0$.

Exemplo 8: A divergência do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = \alpha \vec{r}(x, y, z) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j} + \alpha z\vec{k} \quad (9)$$

é o campo escalar:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v_3}{\partial z} = 3\alpha$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha \neq 0$.

Exemplo 9: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + 0\vec{k}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (10)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\alpha x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

obtem-se para a divergência de $\vec{v}(x, y, z)$:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (12)$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha \neq 0$.

Exemplo 10: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x, y, z) = -\frac{\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} + 0\vec{k}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (13)$$

Recorrendo às derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\alpha xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

conclui-se que

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

ou seja, o campo vectorial é *solenoidal*.

Rotacional de um campo vectorial, $\nabla \times \vec{f} = \text{rot } \vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$$

o campo vectorial dado por

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \text{rot } \vec{f}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

chama-se *rotacional de $\vec{f}(x, y, z)$* no ponto (x, y, z) .

- O campo vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ diz-se *irrotacional* quando $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \vec{0}$.
- A propriedade apresentada no teorema seguinte estabelece uma condição para que um campo vectorial, $\vec{v}(x, y, z)$, seja *gradiente*, ou seja, para que $\vec{v}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, em que $f(x, y, z)$ é um dado campo escalar.

Teorema 2: O rotacional de um gradiente é o vector nulo, isto é, se $f(x, y, z)$ é um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

- Em face do teorema anterior pode-se, ainda, afirmar que um campo vectorial, $\vec{v}(x, y, z)$, é *gradiente*, se e só se for *irrotacional*.

Exemplo 11: O rotacional do campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ definido em (9) é:

$$\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \alpha \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Conclui-se, então, que o campo vectorial é *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 12: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ definido em (10). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\alpha xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{\alpha xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x, y, z)$

$$\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

ou seja, trata-se de um campo vectorial *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 13: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{-\alpha}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{\alpha y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{\alpha x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{k} \quad (18)$$

- Atente-se em mais algumas propriedades que envolvem a divergência e o rotacional.

Teorema 3: A divergência de um rotacional é nula, isto é, se as componentes de um campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

Teorema 4: Se $f(x, y, z)$ um campo escalar e se $\vec{u}(x, y, z)$ e $\vec{v}(x, y, z)$ são campos vectoriais, então:

$$\nabla \cdot (f \vec{v}) = (\nabla f) \cdot \vec{v} + f(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\nabla \times (f \vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v})$$

Teorema 5: Seja o campo vectorial $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, tal que $r(x, y, z) = \|\vec{r}(x, y, z)\|$. Se $n \in \mathbb{N}$, então para todo o $\vec{r} \neq \vec{0}$ verifica-se:

$$\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$$

$$\nabla \times (r^n \vec{r}) = \vec{0}$$

Laplaciano de um campo escalar, $\nabla^2 f$

- Seja $f(x, y, z)$ um campo escalar. O campo escalar definido por

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \nabla \cdot (\nabla f(x, y, z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

designa o *laplaciano* de $f(x, y, z)$ no ponto (x, y, z) .

Exemplo 14: O laplaciano do campo escalar

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 6$$

Exemplo 15: O laplaciano do campo escalar

$$g(x, y, z) = e^{xyz}$$

é o campo escalar:

$$\begin{aligned}\nabla^2 g(x, y, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{xyz}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(yze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial y}(xze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z}(xye^{xyz}) = \\ &= (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)e^{xyz}\end{aligned}$$

Laplaciano de um campo vectorial, $\nabla^2 \vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$$

o campo vectorial dado por

$$\nabla^2 \vec{f}(x, y, z) = \left(\nabla^2 f_1(x, y, z)\right)\vec{i} + \left(\nabla^2 f_2(x, y, z)\right)\vec{j} + \left(\nabla^2 f_3(x, y, z)\right)\vec{k}$$

designa o laplaciano de $\vec{f}(x, y, z)$ no ponto (x, y, z) .

Exemplo 16: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (10). Recorrendo a (11) e (15), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{3\alpha xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3\alpha xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3\alpha x^2 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{3\alpha x^2 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2 \vec{v}(x,y,z) = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (19)$$

Exemplo 17: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Recorrendo a (14) e (16), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha x^2 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{3\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha y^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Por outro lado, tendo em atenção (14) e (17), resulta:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{3\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3\alpha x^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3\alpha xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x, y, z)$ é:

$$\nabla^2 \vec{v}(x, y, z) = \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (20)$$

- A propriedade apresentada no teorema seguinte relaciona os operadores divergência, rotacional e laplaciano de um campo vectorial.

Teorema 6: Se $\vec{v}(x, y, z)$ é um campo vectorial, então:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (21)$$

Exemplo 18: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ dos exemplos 9 e 12 é *irrotacional*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$$

Recorrendo a (12), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \vec{j} = \\ &= -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \end{aligned}$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 19: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ do exemplo 10 é *solenoidal*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2 \vec{v} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{v})$$

Recorrendo a (18), obtém-se

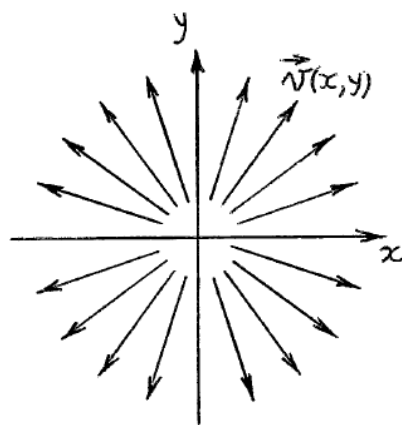
$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= -\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = -\alpha \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & (x^2 + y^2)^{-1/2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \end{aligned}$$

confirmando-se o resultado encontrado em (20).

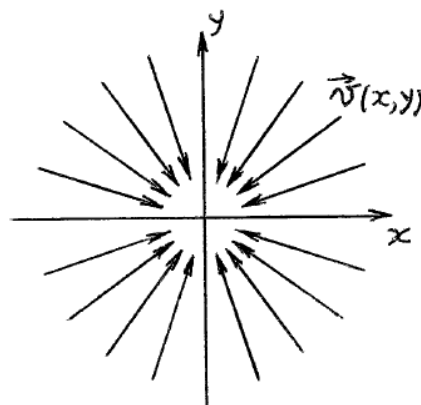
Interpretação da divergência

- Considere-se uma sala fechada sujeita a um processo de aquecimento/arrefecimento, em que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ define, em cada ponto (x,y,z) da sala, a velocidade do ar que se encontra em movimento.

Se, numa determinada região, o ar é aquecido, então ele estará sujeito a um fenómeno de expansão em todas as direcções; nesta situação a *divergência* do campo de velocidades é *positiva*. Fixando um pequeno elemento de volume em torno de um ponto, P , nessa região, verifica-se que haverá uma maior quantidade de ar a sair do que a entrar nesse elemento de volume; neste caso, o ponto P é designado por “*fonte*”.



$$\nabla \vec{v}(x,y) > 0 \text{ (fonte)}$$



$$\nabla \vec{v}(x,y) < 0 \text{ (sumidouro)}$$

Por outro lado, se o ar for arrefecido, verificar-se-á uma contracção e a *divergência* do campo de velocidades será *negativa*. No elemento de volume referido haverá, agora, uma maior quantidade de ar a entrar do que a sair e o ponto P é designado por “*sumidouro*”.

Se a *divergência* do campo de velocidades for *nula* não se verifica nem a acumulação, nem a dispersão do fluido em qualquer ponto do escoamento; neste caso, diz-se que o escoamento é *solenoidal*.

Exemplo 20: O campo de velocidades expresso em (9), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = 3\alpha$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 21: O campo de velocidades expresso em (10), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 22: O campo de velocidades definido em (13), cuja divergência é

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = 0$$

diz respeito a um escoamento *solenoidal*.

Interpretação do rotacional

- É, ainda, possível dar uma interpretação para o rotacional de um campo vectorial no âmbito da mecânica dos fluidos. Assim, se o campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ representar o campo de velocidades de um fluido, o seu rotacional num dado ponto P caracteriza a tendência do fluido poder girar sobre si próprio em torno de P . Nos dois exemplos seguintes apresentam-se dois casos particulares de dois escoamentos bidimensionais designados por *vórtices*, isto é, escoamentos em que a componente radial da velocidade é nula; nestes casos, o fluido circula ao longo de linhas de escoamento que são circunferências concêntricas.

Exemplo 23: Admita-se que o campo vectorial

$$\vec{v}(x, y) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}, \quad \omega > 0 \quad (22)$$

define o campo de velocidades de um escoamento bidimensional.

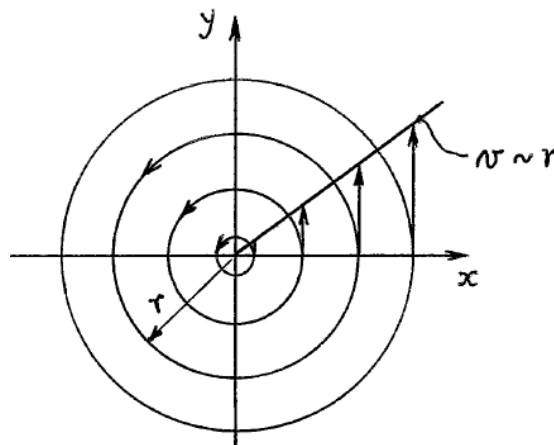
Pode-se verificar que, em cada ponto do escoamento, o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$$

e a sua intensidade

$$\|\vec{v}(x, y)\| = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega r$$

é directamente proporcional à distância, r , do ponto à origem.



rotação sólida (vórtice forçado)

Dado que a componente radial do campo de velocidades é nula, então a divergência é nula (o escoamento é *solenoidal*)

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\omega \frac{\partial y}{\partial x} + \omega \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

sendo o seu rotacional dado por

$$\nabla \times \vec{v}(x, y) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \vec{k}$$

ou seja, é duas vezes o vector velocidade angular, $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$.

O campo de velocidades (22) define um escoamento onde o meio não sofre qualquer deformação, sendo designado por *rotação sólida*, ou *vórtice forçado*.

Para exemplificar este tipo de escoamento, considere-se um recipiente cilíndrico com água que é colocado lentamente em rotação em torno do seu eixo até se atingir uma velocidade angular constante ω . A viscosidade inerente ao fluido conduzirá a uma situação em que este se moverá em círculos concêntricos. Após um período transitório, espera-se que o fluido se mova apenas com velocidade na direcção tangencial (escoamento *solenoidal*) e sem qualquer variação na direcção vertical. Nestas condições o fluido desloca-se como se fosse um corpo sólido.

Exemplo 24: Considere-se, agora, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}, \quad (x,y) \neq (0,0) \quad (23)$$

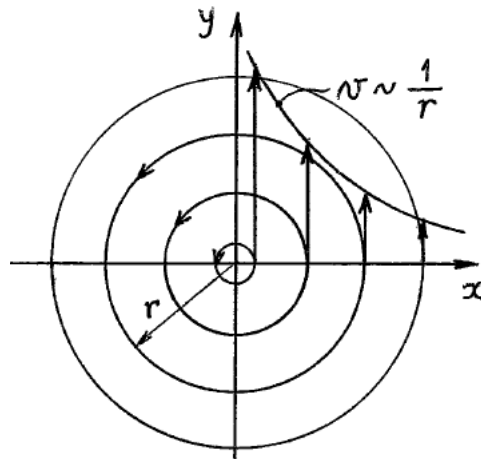
que define um campo de velocidades de um escoamento bidimensional. Em cada ponto do escoamento o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} \right) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$$

sendo a sua intensidade

$$\|\vec{v}(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$$

inversamente proporcional à distância, r , do ponto à origem.



Vórtice irrotacional (vórtice livre)

Uma vez que o escoamento é *solenoidal* (a componente radial do campo de velocidades é nula), a divergência é nula:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Por outro lado, sabendo que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

obtem-se para o rotacional

$$\nabla \times \vec{v}(x, y) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

ou seja, o escoamento é *irrotacional*.

O campo de velocidades (23) define um escoamento que é designado por *vórtice irrotacional*, ou *vórtice livre*.

Este modelo de escoamento, também conhecido por *modelo furacão*, pode ser observado no processo de escoamento da água de uma banheira, quando a água se aproxima do ralo.