U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

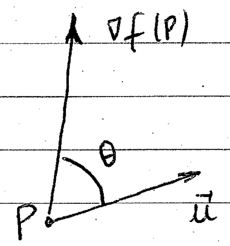
Nome

Espaço reservado para o avaliador

AULA 5 : Ex°s. Tratados - Ficha 2 : 11, 13, 20, 19, 21, 14 a)

Ex°s. Propostos - ficha 2 : 12, 22, 23

11) $f(x,y) = y^2 e^{2x}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$P = (0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y^2 e^{2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\, e^{2x}$$

$$\nabla f(x,y,z) = 2y e^{2x}(y,1)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(0,1) = (2,2)$$

A derivada direccional de $f(x,y)$ no ponto P na direcção do versor $\vec{u}$ é dada por

$$f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(P)\| \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(P)\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(P)$ e $\vec{u}$ (ver figura acima).

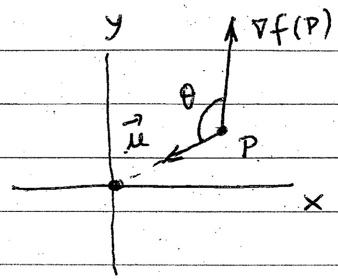
Assim, a taxa de variação de $f(x,y)$ em P será máxima, se $\cos\theta = 1$, ou seja, quando os vectores $\nabla f(P)$ e $\vec{u}$ forem colineares (paralelos) e tiverem o mesmo sentido. Então, para que tal sucede deverá verificar-se:

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

A taxa de variação de $f(x,y)$ em $P = (0,1)$ é máxima na direcção do vector $\nabla f(P)$, ou do versor $\vec{u}$; neste caso, o seu valor é

$$f'_{\vec{u}}(P) = \|\nabla f(P)\| = 2\sqrt{2}$$

13) $f(x,y) = \ln (x^2+y^2)^{1/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$P=(x,y) \neq (0,0)$

$\vec{PO} = (-x,-y)$

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) = \nabla f(P)$$

Seja o vector $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}(-x^2-y^2) =$

$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} < 0$, pelo que a função $f(x,y)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (da origem); na figura acima $\theta \in]\pi/2, \pi[$ (o produto escalar é negativo).

20) A superfície $x^2+y^2+z^2=3$ é uma superfície esférica centrada na origem e com raio igual a $\sqrt{3}$. Trata-se de uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=3$, em que

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

Então $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$

Assim, o vector normal à superfície em P é

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$$

sendo também um vector normal ao plano tangente à superfície em $P=(1,1,1)$.

Assim, a equação cartesiana do plano tangente à superfície em P é:

$$(x,y,z)\cdot\nabla f(P) = P\cdot\nabla f(P) \iff$$

$$\iff 2x+2y+2z = 6 \iff x+y+z=3$$

19) O plano tangente a uma superfície é horizontal (paralelo ao plano coordenado xOy), se e só se o seu vector normal for colinear com o versor $\vec{k}=(0,0,1)$.

i) A superfície $z-xy=0$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=0$ em que $f(x,y,z)=z-xy$.

Então $\nabla f(x,y,z) = (-y,-x,1)$, pelo que o plano tangente à superfície é horizontal, se e só se

$$\begin{cases} -y=0 \\ -x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Substituindo na equação da superfície obtém-se $z=0$. Assim, o único ponto da superfície onde o plano tangente é horizontal é a origem $O=(0,0,0)$. Como $\nabla f(O)=(0,0,1)$ a equação cartesiana do plano tangente é

$$z=0$$

ii) A superfície $4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z = 0$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z) = 0$ em que

$$f(x,y,z) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z$$

Então $\nabla f(x,y,z) = (4 - 2x + y, 2 + x - 2y, -1)$

pelo que o plano tangente à superfície é horizontal, se e só se

$$\begin{cases} 4 - 2x + y = 0 \\ 2 + x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10/3 \\ y = 8/3 \end{cases}$$

Substituindo na equação da superfície obtém-se

$$z = 4\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{16}{3} - \frac{100}{9} + \frac{80}{9} - \frac{64}{9} = \frac{56}{3} - \frac{84}{9} = \frac{28}{3}$$

Assim, o único ponto da superfície onde o plano tangente é horizontal é o ponto

$$P = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right)$$

Como $\nabla f(P) = (0,0,-1)$ a equação cartesiana do plano tangente é

$$-z = -\frac{28}{3} \Leftrightarrow z = \frac{28}{3}$$

21) A superfície $xy + yz + xz = 11$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z) = 11$ em que

$$f(x,y,z) = xy + yz + xz$$

Então $\nabla f(x,y,z) = (y+z, x+z, y+x)$

Assim, o vector normal à superfície em $P = (1,2,3)$ é

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,2,3) = (5,4,3)$$

sendo também um vector normal ao plano tangente à superfície em P.

A equação cartesiana do plano tangente à superfície em P é

$$(x,y,z) \cdot \nabla f(P) = P \cdot \nabla f(P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x + 4y + 3z = 22$$

Por outro lado, a equação vectorial da recta normal à superfície (perpendicular ao plano tangente) em P é

$$\vec{x}(t) = P + t\nabla f(P) = (1,2,3) + t\,(5,4,3)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

14) a) $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz$ e $P = (1,0,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y,\ x+z,\ y)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,0,2) = (2,3,0)$$

A definição da direcção sobre a qual se calculará a derivada direccional exige a determinação do versor da normal à superfície $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$ no ponto $P = (1,0,2)$. Esta superfície é uma superfície de nível da forma $g(x,y,z) = 3$ em que

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 6y + z$$

Então $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y-6, 1)$

Assim, o vector normal à superfície $g(x,y,z) = 3$ em P é

$$\nabla g(P) = \nabla g(1,0,2) = (2,-6,1)$$

Seja o versor $\vec{u} = \dfrac{\nabla g(P)}{\|\nabla g(P)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}(2,-6,1)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}(4-18) = \dfrac{-14\sqrt{41}}{41} < 0$,

pelo que a função $f(x,y,z)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (ou do vector $\nabla g(P)$).

É evidente que se for considerado o versor $\vec{u}_1 = -\vec{u}$, também ele normal à superfície $g(x,y,z) = 3$ em P, a derivada direccional

$$f'_{\vec{u}_1}(P) = -f'_{\vec{u}}(P) = \frac{14\sqrt{41}}{41} > 0,$$ pelo que a

função $f(x,y,z)$ tem, neste caso, um comportamento crescente no ponto P na direcção de $\vec{u}_1$ (ou do vector $-\nabla g(P)$).