Prova sem consulta. Duração: 2h15m.

2ª Prova de Reavaliação

---

* Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;
* A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;
* Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;
* Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.

GRUPO I

1. [3,0] Seja a curva, C, de interseção das superfícies $x+z=1$ e $x^2+y^2=4$, $y \geq 0$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x)dx+(y)dy+(xy)dz$.

2. [3,0] Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (2x^3-y^2)dx+(x^2+3y^2)dy$, sendo C a fronteira do losango, Ω, com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $A=(2,2)$, $B=(0,4)$ e $C=(-2,2)$, percorrida no sentido retrógrado.

3. [3,0] Seja o campo vetorial $\vec{f}(x,y,z)=(y^2z^3+1)\vec{i}+(2xyz^3+y)\vec{j}+(3xy^2z^2+1)\vec{k}$. Mostre que $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente e calcule o integral de linha $\int_L \vec{f}\cdot d\vec{r}$, em que L é uma curva que liga ponto $O=(0,0,0)$ ao ponto $P=(1,1,1)$.

GRUPO II

4. [3,0] Seja a superfície, S, definida por $z=2-x^2-y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

a) Esboce a superfície S e parametrize-a.

b) Calcule a sua área.

.... *continua no verso*

5. [3,0] Considere o campo vetorial $\vec{h}(x,y,z)=z\vec{i}+2xyz^3\vec{j}+x\vec{k}$ e a superfície, S, do plano $x+z=1$, limitada por $x^2+y^2=4$. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{h}$ no sentido definido pelo semieixo positivo dos zz.

6. [3,0] Seja o integral triplo em coordenadas cartesianas:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\;dzdydx$$

a) Esboce o domínio de integração, V.

b) Reescreva-o em coordenadas cilíndricas, identificando analiticamente o domínio de integração, e calcule o seu valor.

c) Reescreva-o em coordenadas cartesianas começando o processo de integração na variável x; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

7. [2,0] Seja C uma curva suave do espaço que liga o ponto P ao ponto Q.

a) Enuncie o teorema fundamental para o integral de linha.

b) Admitindo que f e g são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém C, mostre que $\int_C (f\nabla g+g\nabla f)\cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

Folha Nº ______ / ______

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso ______________________ Data ___ / ___ / ___

Disciplina ______________________ Ano ______ Semestre ______

Nome ______________________

Espaço reservado para o avaliador

1)

a) $C = \begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \quad y \geq 0$

$C : \begin{cases} z = 1 - x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \quad y \geq 0$

Considerando $x = 2\cos\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta$, $z = 1 - 2\cos\theta$

$C : \bar{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 1 - 2\cos\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$

b) $\bar{f}(x,y,z) = (P, Q, R) = (x, y, xy)$

$\bar{r}'(\theta) = (-2\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta)$

$\bar{f}[\bar{r}(\theta)] = (\overset{2\cos\theta}{\cancel{-2\,\text{sen}\,\theta}}, \overset{2\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{2\cos\theta}}, +4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$

$\bar{f}[\bar{r}(\theta)] \cdot \bar{r}'(\theta) = \overset{8\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cancel{4\,\text{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}} =$

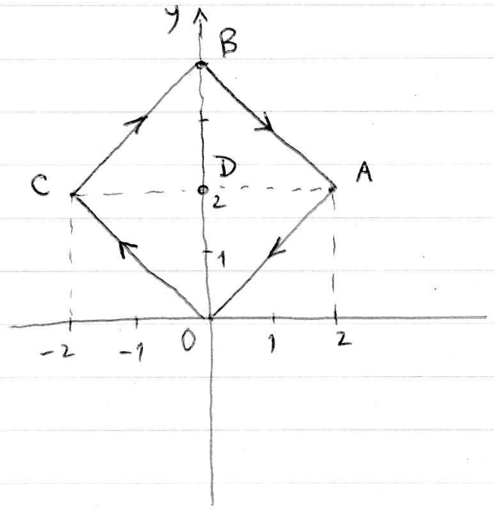
$= 4 \cancel{+ 8\cos\theta\,\text{sen}^3\theta}$

$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^{\pi} (\cancel{4} \; 8\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)\,d\theta = 0$

$\cancel{= 4\pi - \frac{8}{3}\underbrace{[\text{sen}^3\theta]_0^{\pi}}_{=0} = 4\pi}$

2) $\vec{f}(x,y) = (P,Q) = (2x^3 - y^2,\ x^2 + 3y^2)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y$$



A região Ω é simétrica em relação aos eixos $x = 0 \wedge y = 2$, pelo que o seu centroide é o ponto $D = (0,2) = (\bar{x}, \bar{y})$.
Considerando o teorema de Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -2\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy = -2\iint_\Omega x\,dx\,dy - 2\iint_\Omega y\,dx\,dy =$$

$$= -2\underbrace{\bar{x}}_{=0} A(\Omega) - 2\bar{y}A(\Omega) = -4A(\Omega)$$

Dado que o losango é um quadrado de lado $\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ a sua área é

$$A(\Omega) = (2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 8$$

Então

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -32$$

Folha Nº ..../........

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

3) $\bar{f}(x,y,z) = (P, Q, R) = (y^2z^3+1,\ 2xyz^3+y,\ 3xy^2z^2+1)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 3y^2z^2 = \frac{\partial R}{\partial x}$ e

$\frac{\partial Q}{\partial z} = 6xyz^2 = \frac{\partial R}{\partial y}$

$\bar{f}$ é gradiente, isto é, $\exists \varphi(x,y,z) : \nabla\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \bar{f}(x,y,z)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P = y^2z^3+1 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int (y^2z^3+1)\,dx = xy^2z^3 + x + \phi_1(y,z) + K_1$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q = 2xyz^3+y \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int (2xyz^3+y)\,dy = xy^2z^3 + \frac{1}{2}y^2 + \phi_2(x,z) + K_2$

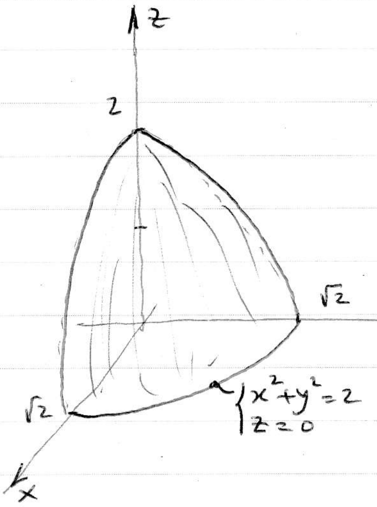
$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R = 3xy^2z^2+1 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int (3xy^2z^2+1)\,dz = xy^2z^3 + z + \phi_3(x,y) + K_2$

Então: $\varphi(x,y,z) = xy^2z^3 + x + \frac{1}{2}y^2 + z + K$

Assim,

$\int_L \bar{f}\cdot d\bar{r} = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) = \left(1+1+\frac{1}{2}+1+K\right) - (K) = \frac{7}{2}$

4) a) $S : z = 2 - x^2 - y^2 \,,\; x \geq 0 \,,\; y \geq 0 \,,\; z \geq 0$



$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

$S : \bar{r}(x,y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2), (x,y) \in \Omega$

$\Omega = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \}$

b) $\vec{r}\,'_x (x,y) = (1, 0, -2x)$ $\qquad \bar{N}(x,y) = (2x, 2y, 1)$

$\vec{r}\,'_y (x,y) = (0, 1, -2y)$ $\qquad \| \bar{N}(x,y) \| = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}$

$$A(S) = \int_S dS = \iint_\Omega \| \bar{N}(x,y) \| \, dx\, dy = \iint_\Omega \sqrt{4(x^2+y^2)+1} \; dx\, dy$$

Considerando $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\sqrt{4(x^2+y^2)+1} = \sqrt{4r^2+1}$$

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta$$

$$A(S) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} r\sqrt{4r^2+1} \; d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{8}\right) \int_0^{\sqrt{2}} 8r\sqrt{4r^2+1} \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[(4r^2+1)^{3/2} \left(\frac{2}{3}\right) \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{24} \left(9\sqrt{9} - 1 \right) = \frac{26\pi}{24} = \frac{13\pi}{12}$$

5) $\vec{h}(x,y,z) = (P,Q,R) = (z, 2xyz^3, x)$

$x + z = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$

$\bar{r}(x,y) = (x, y, 1-x)$, $(x,y) \in \Omega$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ $\underline{10}$

$\bar{r}'_x(x,y) = (1, 0, -1)$ $\bar{N}(x,y) = (1, 0, 1)$: está orientado
$\bar{r}'_y(x,y) = (0, 1, 0)$ no sentido do semieixo positivo
dos zz $\underline{25}$

$\vec{h}[\bar{r}(x,y)] = (1-x, 2xy(1-x)^3, x)$

$\bar{h}[\bar{r}(x,y)] \cdot \bar{N}(x,y) = 1 - x + x = 1$

-20

$\iint_S (\bar{h} \cdot \bar{n})\, dS = \iint_\Omega \bar{h}[\bar{r}(x,y)] \cdot \bar{N}(x,y)\, dx\, dy =$

$= \iint_\Omega dx\, dy = A(\Omega) = 4\pi$

$\underline{60}$

Folha Nº ..../........

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

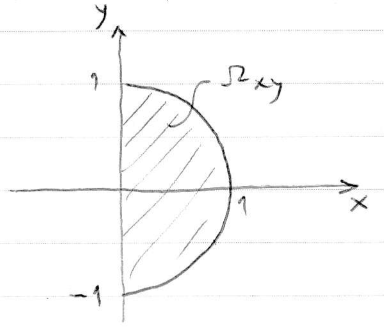
Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

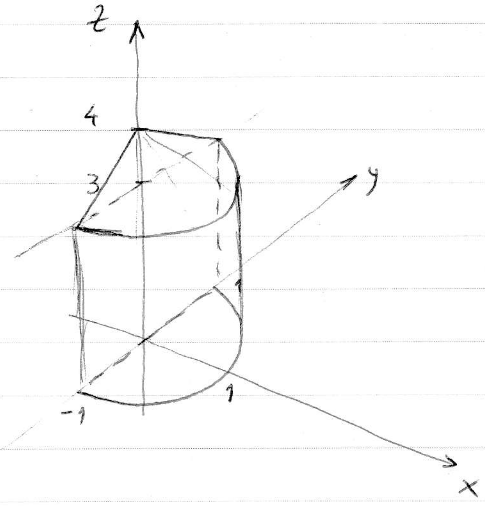
6 a)

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega_{xy} \wedge 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$



$$\begin{cases} z = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$



b) $V_1 = \{(r,\theta,z) : (r,\theta) \in \Omega_{r\theta} \wedge 0 \leq z \leq 4 - r\}$

$\Omega_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1 \wedge -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$ 15

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

-20

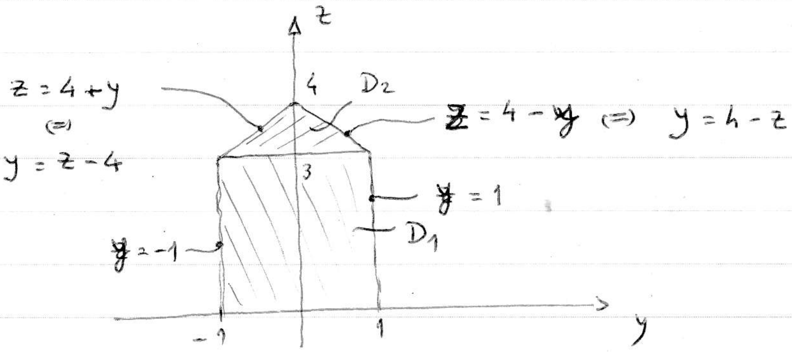
$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4-r} r^2\,dz\,d\theta\,dr =$$

$+20$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4r^2 - r^3)\,d\theta\,dr = \pi \int_0^1 (4r^2 - r^3)\,dr =$$

$$= \pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{13\pi}{12} \qquad 35$$

c)



$$V_2 = V_{21} \cup V_{22}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \in [0,1] \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$$

$$z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}, \quad x \in [0,1] \Rightarrow x = \sqrt{(4-z)^2 - y^2}$$

$$V_{21} = \{ (x,y,z) : (y,z) \in D_1 \wedge 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \}$$

15

$$D_1 = \{ (y,z) : 0 \le z \le 3 \wedge -1 \le y \le 1 \}$$

$$V_{22} = \{ (x,y,z) : (y,z) \in D_2 \wedge 0 \le x \le \sqrt{(4-z)^2 - y^2} \}$$

15

$$D_2 = \{ (y,z) : 3 \le z \le 4 \wedge z-4 \le y \le 4-z \}$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz + \int_3^4 \int_{z-4}^{4-z} \int_0^{\sqrt{(4-z)^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$