COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA Ficha 0 - Revisões

DIVERSOS

1) Simplifique os seguintes números:

a)
$$\sqrt[3]{729}$$
.

b)
$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$$
, $a \ge 0$.

c)
$$\sqrt[6]{(-2)^6}$$
.

d)
$$\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$$
.

2) Mostre que: $\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}$.

3) Verifique as seguintes igualdades trigonométricas:

a)
$$(1-\sin^2 x)(1+tg^2x)-1=0$$
.

b)
$$\frac{13\text{sen}(x) - 5}{12 + 13\cos(x)} = \frac{12 - 13\cos(x)}{13\text{sen}(x) + 5}$$
.

c)
$$\frac{1}{\cos(2x)} = \frac{\cot^2(x) + 1}{\cot^2(x) - 1}$$
.

d)
$$tg(2x) = \frac{1}{1 - tg(x)} - \frac{1}{1 + tg(x)}$$
.

e) $(sen(x) + cos(x))^2 - (sen(x) - cos(x))^2 = 2sen(2x)$.

4) Calcule, sem recorrer à máquina de calcular:

a) $\log_5(\sqrt{5}) + 3\log_4(0,25)$.

b) $3^{2-2\log_3(7)}$.

c) $\log_4(\sqrt{2})\log_2(4)$.

d) $\ln(2e) + 3\ln(e^2) + \ln(0,5)$.

5) Verifique as seguintes igualdades em \mathbb{C} :

 $\mathbf{a)} \quad \frac{1+i}{1-i} = i \; .$

b) $i^{77} = i$.

c) $i^{98} = -1$.

d) $(2+i)^3 + (2-i)^3 = 4$.

- 6) Dados $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n \in \mathbb{R}$, mostre que se α é uma raiz complexa da equação polinomial $\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$, então $\overline{\alpha}$ é também raiz da equação.
- 7) Em cada uma das alíneas seguintes, obtenha o quociente q(x) = f(x)/g(x) e o respectivo resto r(x):
 - a) $f(x) = x^2 3x + 2$ e g(x) = x 1.
 - **b)** $f(x) = 11x^4 + 3x^5 + 7x + 9 15x^2$ e $g(x) = x^2 + 2x 1$.
- **8)** Efectue as operações indicadas, apresentando o resultado sob a forma de uma única fracção simplificada, com o numerador e o denominador factorizados:

a)
$$x+1+\frac{1}{x-1}$$
.

b)
$$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{5-x}{1-x^2}$$
.

c)
$$\frac{2x-6}{x^2-x-2} - \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x-1}{x^2+x-6}$$
.

9) Decomponha em frações simples:

a)
$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}$$
.

b)
$$\frac{x}{(x-1)(x^2-4)}$$
.

c)
$$\frac{x}{(x-1)^2}$$
.

d)
$$\frac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$$
.

10) Calcule as seguintes primitivas:

$$\mathbf{a)} \quad \int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} dx \,.$$

$$\mathbf{b)} \quad \int \frac{x}{4-x^2} \, dx \, .$$

$$\mathbf{c)} \quad \int e^{x^2 - x} (4x - 2) dx \,.$$

$$\mathbf{d)} \quad \int \frac{2}{x^2 - 2x + 1} dx \,.$$

e)
$$\int \cos(2x) \sin^2(2x) dx.$$

$$\mathbf{f}) \qquad \int (x+1)e^x dx \ .$$

$$\mathbf{g}) \quad \int x \cos(2x) dx \,.$$

Soluções:

1) a) 3.

b) \sqrt{a} .

c) 2.

- **d**) 3.
- 2) ----

3) ----

4) a) $-\frac{5}{2}$.

b) $\frac{9}{49}$.

c) $\frac{1}{2}$.

- **d)** 7.
- 5) ----

6) ----

- 7) a) q(x) = x 2 e r(x) = 0.
 - **b)** $q(x) = 3x^3 + 5x^2 7x + 4$ e r(x) = -8x + 13.
- **8) a)** $\frac{x^2}{x-1}$.

b) 0.

- c) $\frac{(2x-\sqrt{23})(2x+\sqrt{23})}{(x-2)(x+1)(x+3)}$.
- 9) a) $\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{2}{x+2}$.
 - **b)** $\frac{x}{(x-1)(x^2-4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} \frac{1}{6}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2}$.
 - c) $\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.
 - **d**) $\frac{x+1}{x^3-4x^2+3x} = \frac{1}{3}\frac{1}{x} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{2}{x-3}$.
- **10)** a) $\int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} dx = \frac{1}{3} \ln |\sin(3x)| + K$.
 - **b)** $\int \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |4-x^2| + K$.
 - c) $\int e^{x^2-x} (4x-2)dx = 2\int (2x-1)e^{x^2-x}dx = 2e^{x^2-x} + K$.

FEUP-MIEIC 2017/2018

d)
$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 1} dx = 2 \int (x - 1)^{-2} dx = -\frac{2}{x - 1} + K$$
.

e)
$$\int \cos(2x) \sin^2(2x) dx = \frac{1}{6} \sin^3(2x) + K$$
.

$$\mathbf{f}) \qquad \int (x+1)e^x dx = \int xe^x dx + \int e^x dx = xe^x + K.$$

g)
$$\int x \cos(2x) dx = \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + K$$
.