FUNÇÕES VECTORIAIS

Introdução

- Chamam-se *funções reais a uma variável real*, ou simplesmente *funções escalares*, às funções que associam um número real a um dado número real. Por exemplo:

$$f(t) = 1 - 3t\,, \qquad g(t) = 1 + 2t + 3t^3\,, \qquad h(t) = \cos(4t) + e^t$$

- Chamam-se *funções vectoriais a uma variável real*, ou simplesmente *funções vectoriais*, às funções que associam um vector a um dado número real. Por exemplo:

$$\vec{f}(t) = \vec{r} + t\vec{d}\,, \qquad \vec{g}(t) = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c}\,, \qquad \vec{h}(t) = \cos(4t)\vec{a} + \operatorname{sen}(2t)\vec{b}$$

- As funções vectoriais podem ser encontradas em diversas áreas da ciência. Por exemplo:
  i) **Geometria**: representação das linhas (rectas e curvas) no espaço e estudo das suas propriedades;
  ii) **Física/Mecânica**: trabalho realizado por uma força ao longo de uma dada trajectória, estudo do comportamento cinemático (espaço, velocidade e aceleração) de um corpo em movimento.

Definições

- Sendo $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ funções escalares definidas num intervalo *I*, então, para cada $t \in I$, é possível definir a função vectorial

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \ , \ t \in I \tag{1}$$

em que *I* representa o *domínio de* $\vec{f}(t)$ e as funções $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são designadas por *componentes de* $\vec{f}(t)$.
Um valor *t* pertence ao domínio de $\vec{f}(t)$, se e só se pertencer ao domínio de cada uma das suas componentes. Se o domínio de $\vec{f}(t)$ não for especificado, admite-se que ele corresponderá ao domínio comum das suas componentes.

- Se a função $\vec{f}(t)$ definida em (1) for entendida como um *vector de posição* (*vector radial*) aplicado na origem do referencial, à medida que *t* toma valores no intervalo *I* a extremidade do vector de posição traça um determinado *caminho* (*curva*), *C*, no espaço. Diz-se, então, que $\vec{f}(t)$ *parametriza C*, sendo

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t) \ \text{e} \ z = f_3(t)$$

as *equações paramétricas* de *C*. Se uma das suas componentes for nula em *I*, por exemplo, se $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$, $t \in I$, então *C* é uma *curva plana*; caso contrário, trata-se de uma *curva espacial*.

- Se se considerar o *referencial cartesiano ortonormado directo Oxyz* para se representar os vectores no espaço, a que está associada a *base canónica*, ou *base natural*, $E=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\subset\mathbb{R}^3$, a função vectorial definida em (1) pode ser simplesmente escrita sob a forma:

$$\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right)\ ,\ t\in I$$

Exemplo 1: Considerando as funções escalares

$$f_1(t)=p_1+a_1t\ ,\qquad f_2(t)=p_2+a_2t\ ,\qquad f_3(t)=p_3+a_3t\ ,\qquad t\in\mathbb{R}$$

obtém-se a função vectorial

$$\vec{f}(t)=(p_1+a_1t)\vec{i}+(p_2+a_2t)\vec{j}+(p_3+a_3t)\vec{k}\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

que parametriza a *linha recta* que passa no ponto $P=(p_1,p_2,p_3)$ e tem o *vector direcção* (*vector director*) $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(a_1,a_2,a_3)$.
Se $\vec{a}=(0,0,0)$, então $\vec{f}(t)$ reduz-se à função constante:

$$\vec{f}(t)=p_1\vec{i}+p_2\vec{j}+p_3\vec{k}=(p_1,p_2,p_3)\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

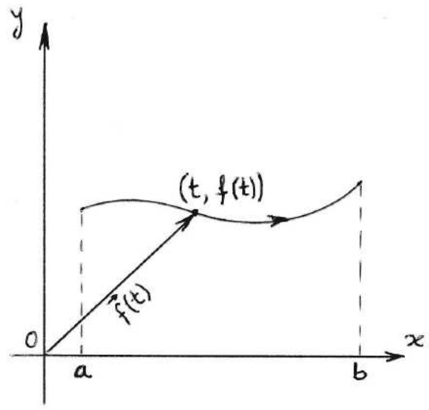
Neste caso, o caminho traçado por $\vec{f}(t)$ reduz-se ao ponto *P*.

Exemplo 2: A função vectorial

$$\vec{f}(t)=(1-3t)\vec{i}+(2+t)\vec{j}+(-3+2t)\vec{k}\ ,\ t\in[-1,1]$$

parametriza o *segmento de recta* que liga o ponto $P=(4,1,-5)$ ao ponto $Q=(-2,3,-1)$.

Exemplo 3: É possível associar a qualquer função real de variável real, f, definida no intervalo $[a,b]$, uma função vectorial.



Considerando

$$f_1(t) = t\,, \qquad f_2(t) = f(t)\,, \qquad f_3(t) = 0\,, \qquad t \in [a,b]$$

obtém-se

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ t \in [a,b]$$

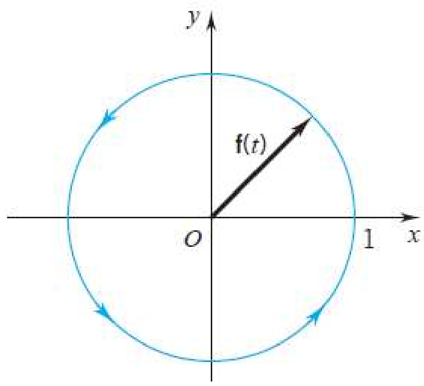
À medida que t varia entre a e b, a extremidade do vector de posição $\vec{f}(t)$ traça o *gráfico de f* no sentido definido pelos valores crescentes de t.

Exemplo 4: Seja a função vectorial

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j}\ ,\ t \in [0,2\pi] \tag{2}$$

Notando que

$$\left\|\vec{f}(t)\right\| = 1\,,\ t \in [0,2\pi]$$



conclui-se que a função (2) parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*.

Exemplo 5: A função vectorial

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \geq 0 \qquad (3)$$

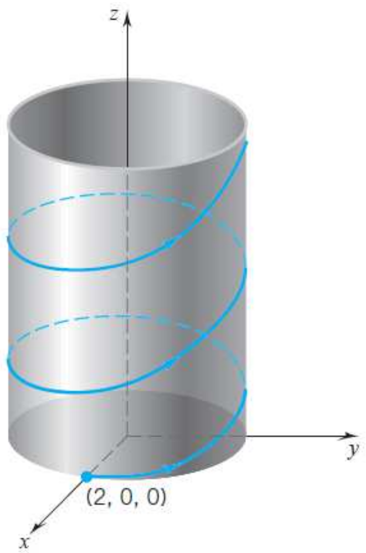
parametriza uma *hélice circular*. Se $t = 0$, a extremidade do vector de posição $\vec{f}(0)$ situa-se no ponto $(2,0,0)$.

À medida que *t* aumenta, a extremidade de $\vec{f}(t)$ descreve uma *espiral* situada sobre a *superfície cilíndrica circular*

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \ z \in \mathbb{R}$$

efectuando uma volta completa em cada intervalo de *t* de amplitude 2π.

Em cada um desses intervalos a cota da extremidade de $\vec{f}(t)$ sofre uma variação de valor 2π, que é designado por *passo da hélice*.



Operações envolvendo funções vectoriais

Teorema 1: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar, funções com um domínio comum *I*. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então é possível obter as seguintes funções vectoriais, definidas em *I*,

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) \ , \qquad (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t) = \alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t) \ ,$$

$$(u\vec{f})(t) = u(t)\vec{f}(t) \ , \qquad (\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

assim como a função escalar, definida em *I*:

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

Teorema 2: Seja $u(t)$ uma função escalar com domínio *I* e tal que o seu contradomínio está contido no domínio da função vectorial $\vec{f}(t)$. Então é possível obter a seguinte função vectorial (*composta*) definida em *I*:

$$(\vec{f} \circ u)(t) = \vec{f}[u(t)]$$

Limite de uma função vectorial

Teorema 3: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo *I* que contém o ponto t_0, podendo não estar definida em t_0, e seja o vector $\vec{a}$. Então:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} \text{, se e só se } \lim_{t \to t_0} \left\| \vec{f}(t) - \vec{a} \right\| = 0 . \tag{4}$$

- A expressão $\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ pode ser substituída por:

$$\text{quando } t \to t_0,\ \vec{f}(t) \to \vec{a} .$$

Teorema 4: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo *I* que contém o ponto t_0, podendo não estar definida em t_0, e seja o vector $\vec{a}$. Então:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \vec{f}(t) \right\| = \left\| \vec{a} \right\| \text{, se } \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} . \tag{5}$$

- Note-se que a proposição inversa de (5) é falsa; por exemplo, seja $\vec{f}(t) = \vec{i}$ e $\vec{a} = -\vec{i}$.

Regras para o cálculo de limites

Teorema 5: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais, $u(t)$ uma função escalar e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Supondo que, quando $t \to t_0$,

$$\vec{f}(t) \to \vec{a}\,, \qquad \vec{g}(t) \to \vec{b}\,, \qquad u(t) \to \varphi$$

então:

$$\vec{f}(t)+\vec{g}(t) \to \vec{a}+\vec{b}\,, \qquad \alpha\vec{f}(t)+\beta\vec{g}(t) \to \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\,,$$

$$u(t)\vec{f}(t) \to \varphi\vec{a}\,, \qquad \vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t) \to \vec{a}\cdot\vec{b}\,, \qquad \vec{f}(t)\times\vec{g}(t) \to \vec{a}\times\vec{b}$$

- O cálculo do limite apresentado em (4) pode ser feito componente a componente.

Teorema 6: Admitindo que $\vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$ e $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, então $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, se e só se:

$$\lim_{t\to t_0} f_1(t) = a_1, \qquad \lim_{t\to t_0} f_2(t) = a_2\,, \qquad \lim_{t\to t_0} f_3(t) = a_3 \qquad (6)$$

Exemplo 6: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t-\pi)\vec{i} + 2\ln(e+t)\vec{j} + e^{2t^3}\vec{k}\ ,\ t \in (-e,+\infty)$$

Então:

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t) = \left[\lim_{t\to 0}\cos(t-\pi)\right]\vec{i} + \left[2\lim_{t\to 0}\ln(e+t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to 0} e^{2t^3}\right]\vec{k} =$$

$$= (-1)\vec{i} + (2)\vec{j} + (1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1,2,1)$$

Continuidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *contínua* em t_0, se e só se:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$$

- Tendo em atenção (6) é evidente que $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0, se e só se cada uma das suas componentes for contínua em t_0.

- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar contínuas em t_0. Então as funções

$$(\vec{f} + \vec{g})(t), \qquad (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(u\vec{f})(t), \qquad (\vec{f} \cdot \vec{g})(t), \qquad (\vec{f} \times \vec{g})(t)$$

  são contínuas em t_0.

- Sejam $u(t)$ uma função escalar contínua em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial contínua em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é contínua em t_0.

Derivabilidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *diferenciável* (*derivável*) em *t*, se e só se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h} \text{ existe.}$$

Se este limite existir, então ele é designado por *derivada de* $\vec{f}(t)$ *em t* e é indicado por $\vec{f}'(t)$.

- Também o cálculo da derivada da função vectorial $\vec{f}(t)$ pode ser feito componente a componente.

Teorema 7: Se $\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right)$ é diferenciável em *t*, então:

$$\vec{f}'(t)=f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}=\left(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t)\right)$$

- Tal como nas funções escalares, se $\vec{f}(t)$ é diferenciável em *t*, então $\vec{f}(t)$ é contínua em *t*. Além disso, se $\vec{f}'(t)$ é diferenciável em *t*, então é possível obter $\vec{f}''(t)$ (*segunda derivada*), e assim sucessivamente.

- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar diferenciáveis em t_0. Então as funções

$$(\vec{f}+\vec{g})(t), \qquad (\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})(t), \text{ com } \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

$$(u\vec{f})(t), \qquad (\vec{f}\cdot\vec{g})(t), \qquad (\vec{f}\times\vec{g})(t)$$

são diferenciáveis em t_0.

- Sejam $u(t)$ uma função escalar diferenciável em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é diferenciável em t_0.

Exemplo 7: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t-\pi)\vec{i} + 2\ln(e+t)\vec{j} + e^{2t^3}\vec{k} \ , \ t \in (-e,+\infty)$$

Então:

$$\vec{f}'(t) = -\text{sen}(t-\pi)\vec{i} + \frac{2}{e+t}\vec{j} + 6t^2 e^{2t^3}\vec{k}$$

$$\vec{f}''(t) = -\cos(t-\pi)\vec{i} - \frac{2}{(e+t)^2}\vec{j} + 3t\left(4+12t^3\right)e^{2t^3}\vec{k}$$

Regras para a derivação

- É possível estabelecer as seguintes regras para a derivação de funções vectoriais:

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(t) = \alpha\vec{f}'(t) + \beta\vec{g}'(t), \text{ com } \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$(u\vec{f})'(t) = u(t)\vec{f}'(t) + u'(t)\vec{f}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \times \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = \vec{f}'[u(t)]u'(t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)] \ \ (\textit{regra da cadeia})$$

Exemplo 8: Sejam as funções

$$\vec{f}(t) = (t^2, -1, t), \qquad \vec{g}(t) = (1, 2t, t^3), \qquad u(t) = -2t^2$$

tais que:

$$\vec{f}'(t) = (2t, 0, 1), \qquad \vec{g}'(t) = (0, 2, 3t^2), \qquad u'(t) = -4t$$

Então:

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = (t^2 + 1, -1 + 2t, t + t^3) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = (2t, 2, 1 + 3t^2) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(-2\vec{f})(t) = (-2t^2, 2, -2t) = -2\vec{f}(t)$$

$$(-2\vec{f})'(t) = (-4t, 0, -2) = -2\vec{f}'(t)$$

$$(u\vec{f})(t) = (-2t^4, 2t^2, -2t^3) = u(t)\vec{f}(t)$$

$$(u\vec{f})'(t) = (-8t^3, 4t, -6t^2) = u'(t)\vec{f}(t) + u(t)\vec{f}'(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = t^2 - 2t + t^4 = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = 2t - 2 + 4t^3 = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & -1 & t \\ 1 & 2t & t^3 \end{vmatrix} = (-t^3 - 2t^2, t - t^5, 2t^3 + 1) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = (-3t^2 - 4t, 1 - 5t^4, 6t^2) = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \circ u)(t) = (4t^4, -1, -2t^2) = \vec{f}[u(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = (16t^3, 0, -4t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)]$$

- Usando a notação de Leibniz, as regras para a derivação atrás apresentadas podem ser reescritas sob a forma:

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{g})=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha\frac{d\vec{f}}{dt}+\beta\frac{d\vec{g}}{dt}\text{, com }\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}(u\vec{f})=u\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{du}{dt}\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\cdot\vec{g})=\left(\vec{f}\cdot\frac{d\vec{g}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\cdot\vec{g}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\times\vec{g})=\left(\vec{f}\times\frac{d\vec{g}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\times\vec{g}\right)$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\frac{d\vec{f}}{du}\frac{du}{dt}\ \text{(}\textit{regra da cadeia}\text{)}$$

Teorema 8: Seja $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável, tal que $\left\|\vec{f}(t)\right\|$ é constante num intervalo aberto *I*. Tem-se, então,

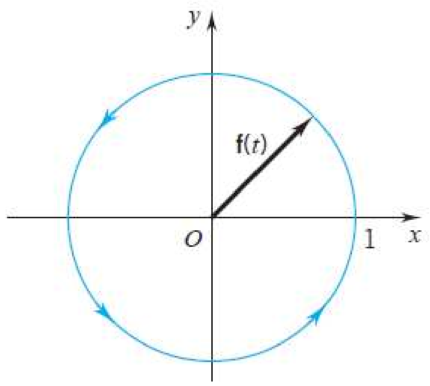
$$\vec{f}'(t)\cdot\vec{f}(t)=0\ ,\ \forall t\in I$$

ou seja, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em *I*.

Exemplo 9: Seja a função vectorial do exemplo 4

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} \ , \ t \in [0,2\pi]$$

que parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*, tal que:



$$\left\|\vec{f}(t)\right\| = 1 \ , \ t \in [0,2\pi]$$

Considerando o vector

$$\vec{f}'(t) = -\text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \ , \ t \in [0,2\pi] \qquad (7)$$

verifica-se, então, que

$$\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0 \ , \ \forall t \in [0,2\pi]$$

isto é, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em cada ponto da circunferência. Assim, pode-se concluir que o vector (7) define uma linha que é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos.

Teorema 9: Se $\vec{f}(t)$ é uma função vectorial diferenciável em *t*, então a função escalar $f(t) = \left\|\vec{f}(t)\right\|$ é diferenciável onde não é zero e:

$$\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = f\,\frac{df}{dt}$$

Além disso, onde $f(t) = \left\|\vec{f}(t)\right\| \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{f}}{f}\right) = \frac{1}{f^3}\left[\left(\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right) \times \vec{f}\right]$$

Integrabilidade de uma função vectorial

- Tal como se verifica na derivação, também é possível definir a integração de funções vectoriais componente a componente.

Teorema 10: Sendo $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ uma função vectorial contínua em $[a,b]$, obtém-se:

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)dt\right)\vec{k}$$

Exemplo 10: Considerando

$$\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + 3\sqrt{1+t}\,\vec{j} + 4e^{-2t}\vec{k}$$

obtém-se:

$$\int_0^1 \vec{f}(t)dt = \left(\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_0^1 3\sqrt{1+t}\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_0^1 4e^{-2t}dt\right)\vec{k} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos(\pi t)\right]_0^1 \vec{i} + 2\left[(1+t)^{3/2}\right]_0^1 \vec{j} - 2\left[e^{-2t}\right]_0^1 \vec{k} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\vec{i} + 2(2\sqrt{2} - 1)\vec{j} - 2(e^{-2} - 1)\vec{k}$$

- Da mesma forma é ainda possível definir integrais indefinidos com funções vectoriais.

Exemplo 11: Considerando

$$\vec{f}'(t) = \left(\cos(t) + 1\right)\vec{i} + t^2\text{sen}(t^3)\vec{j} + 2(t - e^t)\vec{k} \text{ e } \vec{f}(0) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

resulta

$$\vec{f}(t) = \int \vec{f}'(t)dt = \left(\int \left(\cos(t) + 1\right)dt\right)\vec{i} + \left(\int t^2\text{sen}(t^3)dt\right)\vec{j} + \left(\int 2(t - e^t)dt\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\text{sen}(t) + t + C_1\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{3}\cos(t^3) + C_2\right)\vec{j} + \left(t^2 - 2e^t + C_3\right)\vec{k}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes a serem determinadas.
Uma vez que

$$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \vec{f}(0) = C_1\vec{i} + \left(-\frac{1}{3} + C_2\right)\vec{j} + \left(-2 + C_3\right)\vec{k}$$

conclui-se que:

$$C_1 = 2\,,\ C_2 = \frac{4}{3} \text{ e } C_3 = 1$$

Obtém-se, então:

$$\vec{f}(t) = \left(\text{sen}(t) + t + 2\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{3}\cos(t^3) + \frac{4}{3}\right)\vec{j} + (t^2 - 2e^t + 1)\vec{k}$$

Propriedades do integral

Teorema 11: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais contínuas em $[a,b]$, o vector $\vec{a}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\int_a^b [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)]dt = \int_a^b \vec{f}(t)dt + \int_a^b \vec{g}(t)dt$$

$$\int_a^b [\alpha \vec{f}(t)]dt = \alpha \int_a^b \vec{f}(t)dt$$

$$\int_a^b [\vec{a} \cdot \vec{f}(t)]dt = \vec{a} \cdot \left(\int_a^b \vec{f}(t)dt \right)$$

$$\left\| \int_a^b \vec{f}(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \vec{f}(t) \right\| dt \qquad (8)$$