U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data ..../..../....

Disciplina CMAT Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

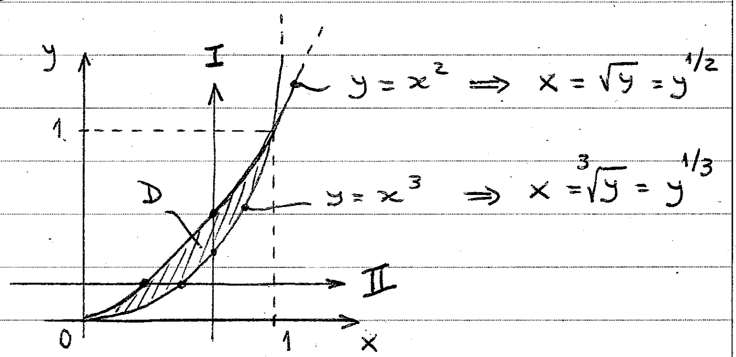
AULA 8 : Ex°s Tratados - Ficha 3 : 3 a), 4 a), 6, 14, PA_20/04/2016_5

Ex°s Propostos - Ficha 3 : 1 a) b) c) d), 2, 3 b) c), 4 c), 8, 11, 12, 15

3) a) Região D limitada pelas curvas $y=x^3$ e $y=x^2$, $0 \le x \le 1$:

$$A(D) = \iint_D dx\, dy$$

Esboço da região D:



i) Definição da região D como região do tipo I:

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \ , \ x^3 \le y \le x^2\}$$

Então:

$$A(D) = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dy\, dx = \int_0^1 [y]_{x^3}^{x^2} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{12}$$

ii) O cálculo da área pode ainda ser feito considerando a região D como região do tipo II:

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \;,\; y^{1/2} \leq x \leq y^{1/3}\}$$

Então:

$$A(D) = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} dx\,dy = \int_0^1 [x]_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} dy = \int_0^1 \left[y^{1/3} - y^{1/2} \right] dy =$$

$$= \left[\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) - (0) = \frac{1}{12}$$

4) a) Neste caso, a forma como está definido o integral permite concluir que a região de integração, D, está definida como região do tipo II:

$$D = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2 \;,\; 0 \leq x \leq y^2\}$$

Obtém-se, então:

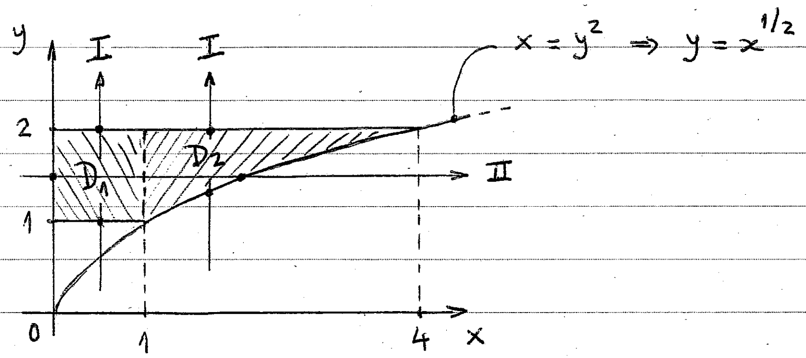
$$\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2} \, dx\,dy = \int_1^2 \left[y^2 e^{x/y^2} \right]_0^{y^2} dy =$$

(y é constante)

$$= \int_1^2 y^2 (e-1)\, dy = (e-1) \int_1^2 y^2 dy = (e-1) \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= (e-1) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{3} (e-1)$$

NOTA: O cálculo do mesmo integral, considerando a região D como região do tipo I seria mais trabalhoso. Verifiquemos esta situação começando por esboçar a região de integração D.



Se se pretende considerar a região D como região do tipo I, então a região D deverá ser considerada como a reunião das regiões D_1 e D_2

$$D = D_1 \cup D_2$$

já que, quando x varia no intervalo $[0,4]$ a variável y não tem uma variação uniforme.

Tem-se então

$$D_1 = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1 , \; 1 \leq y \leq 2 \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) : 1 \leq x \leq 4 , \; x^{1/2} \leq y \leq 2 \}$$

e, portanto,

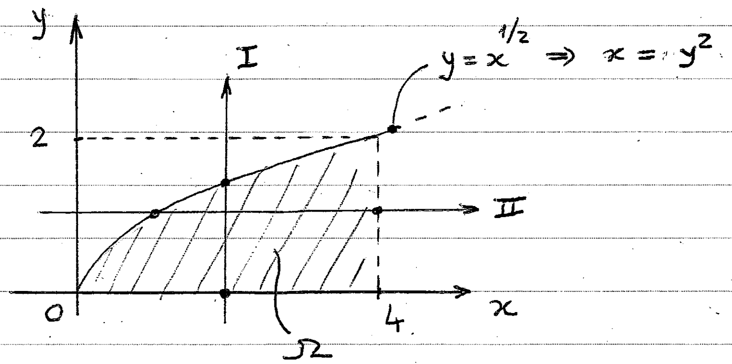
$$\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2} \, dx \, dy = \iint_{D_1} e^{x/y^2} \, dy \, dx + \iint_{D_2} e^{x/y^2} \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 e^{x/y^2}\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x^{1/2}}^2 e^{x/y^2}\, dy\, dx = \cdots = \frac{7}{3}(e-1)$$

Como é visível este processo de cálculo é mais trabalhoso do que o que foi considerado inicialmente.

No cálculo de um integral duplo a definição da região de integração (tipo I ou tipo II) é, em muitas situações, extremamente importante para a eficiência do processo envolvido.

6) Neste caso, começamos por esboçar a região de integração Ω, região do plano limitada pelas linhas $y=0$, $y=x^{1/2}$ e $x=4$:



i) Se definirmos a região Ω como região do tipo I, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4\ ,\ 0 \le y \le x^{1/2}\}$$

o integral é escrito sob a forma

$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{x^{1/2}} \frac{y}{1+x^2}\, dy\, dx\,.$$

Neste caso, inicia-se por integrar a função em relação à variável y (o que é muito simples), já que

$$\frac{1}{1+x^2} \int_0^{x^{1/2}} y\, dy = \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^{1/2}} = \frac{x}{2(1+x^2)} \qquad (1)$$

ii) Se optarmos por definir a região Ω como região do tipo II, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2 \ , \ y^2 \leq x \leq 4\}$$

o integral duplo é escrito sob a forma

$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy$$

Neste caso, inicia-se por integrar a função em relação à variável x

$$y \int_{y^2}^4 \frac{1}{1+x^2}\, dx = y \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_{y^2}^4 =$$

$$= y \operatorname{arctg}(4) - y \operatorname{arctg}(y^2)$$

pelo que o integral seguinte, em relação à variável y,

$$\int_0^2 y \operatorname{arctg}(4)\, dy - \int_0^2 y \operatorname{arctg}(y^2)\, dy$$

será muito mais trabalhoso do que aquele resultante em i).

Assim, optando por considerar a região de integração Ω como região do tipo I, obtém-se:

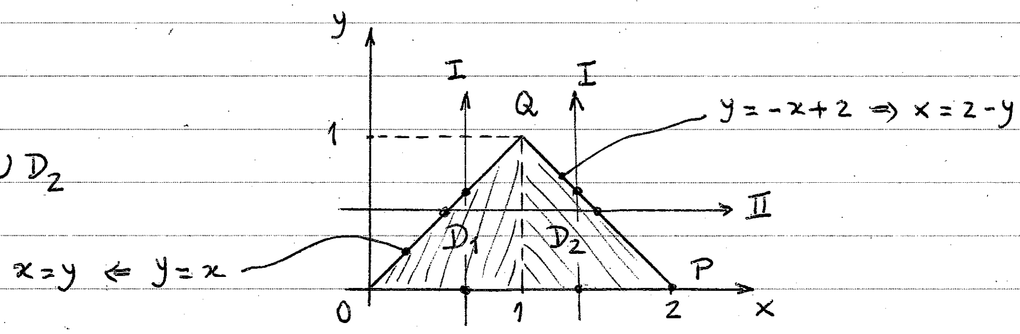
$$\iint_{\Omega} \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^4 \underbrace{\int_0^{x^{1/2}} \frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx}_{(\text{ver }(1))} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^4 = \frac{1}{4}\Big[\ln(17) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(17)$$

14) A região de integração, D, é a região triangular com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $P=(2,0)$ e $Q=(1,1)$, isto é:

$D = D_1 \cup D_2$



i) Se definirmos a região D como região do tipo I, então a região D deverá ser considerada como a reunião das regiões D_1 e D_2

$$D = D_1 \cup D_2$$

já que, quando x varia no intervalo $[0,2]$ a variável y não tem uma variação uniforme.

Tem-se então

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -x+2\}$$

pelo que

$$\iint_D (2x)\,dy\,dx = \iint_{D_1} (2x)\,dy\,dx + \iint_{D_2} (2x)\,dy\,dx =$$

Vítor

Papel 100% Reciclado

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

$$= 2\int_0^1 \int_0^x (x)\, dy\, dx + 2\int_1^2 \int_0^{-x+2} (x)\, dy\, dx = \dots = 2$$

ii) Se a região D for definida como região do tipo II, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \;,\; y \leq x \leq 2-y\}$$

o cálculo pode ser realizado através de um único integral duplo:

$$\iint_D (2x)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \int_y^{2-y} (x)\, dx\, dy = 2\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(2-y)^2 - y^2\right] dy = \int_0^1 (4-4y)\, dy =$$

$$= 4\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - (0)\right] = 2$$

iii) Um processo alternativo para o cálculo consiste em recorrer à propriedade

$$\iint_D x\, dx\, dy = \bar{x}\, A(D)$$

onde $A(D)$ é a área da região D (triângulo) e $\bar{x}$ é a abcissa do centroide, ou centro geométrico) da região D.

Neste caso, a área da região D é:

$$A(D) = \frac{b\,h}{2} = \frac{2\,(1)}{2} = 1 \text{ u.a.}$$

Dado que o triângulo D é um triangulo isósceles, tendo como eixo de simetria a recta $x = 1$, então o centroide estará situado sobre a recta $x = 1$ e, portanto, $\bar{x} = 1$.

Assim, conclui-se que:

$$\iint_D (2x)\,dy\,dx = 2\,\bar{x}\,A(D) = 2\,(1)\,(1) = 2$$

Exercício 5) da 1.ª Prova de Avaliação, realizada em 20/04/2016

Considere-se o integral duplo:

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} (y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2} (y)\,dy\,dx$$

a) Esboce o domínio de integração.

Neste caso a região de integração está definida como região do tipo I sendo dada pela reunião de duas regiões, ou seja,

$$D = D_1 \cup D_2$$

em que, por exemplo,

$$D_1 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0 \,,\; 0 \leq y \leq 2x+2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \,,\; x \leq y \leq 2-x^2\}$$

O esboço da região de integração envolve as linhas $y = 0$, $y = 2x+2$, se $x \in [-1, 0]$, e as linhas $y = x$, $y = 2-x^2$, se $x \in [0, 1]$.

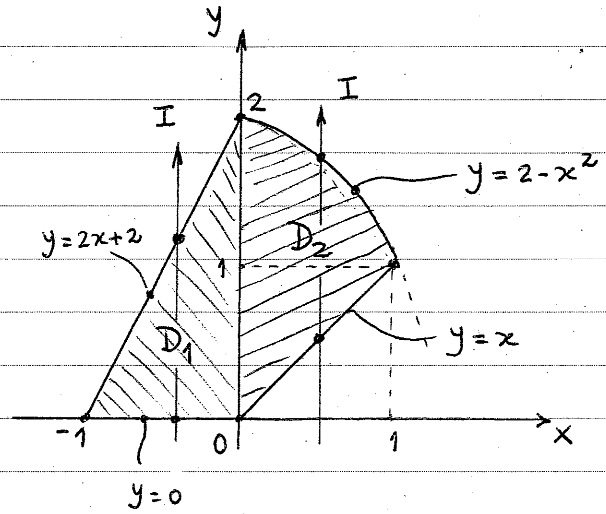
U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador



b) Calcule o valor do integral.

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} (y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left[y^2\right]_{0}^{2x+2} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 4(x+1)^2\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 2\left[(0)-\left(-\frac{1}{3}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2} (y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left[y^2\right]_{x}^{2-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left[(2-x^2)^2-x^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (4-5x^2+x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[4x-\frac{5x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} =$$

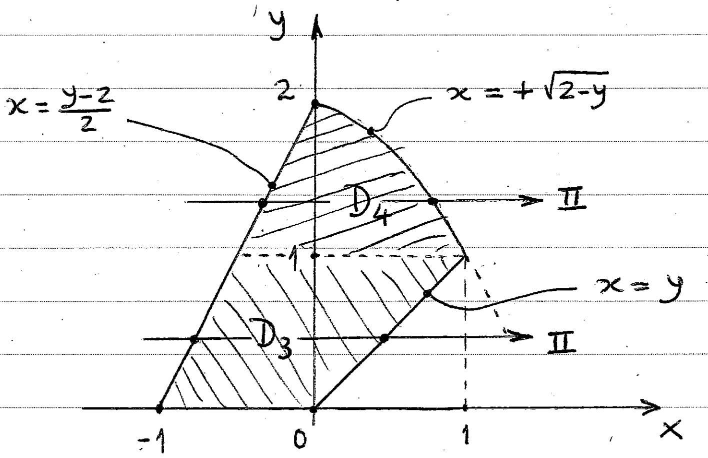
$$= \frac{1}{2}\left[\left(4-\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)-(0)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{15}\right) = \frac{19}{5}$$

Conclui-se que:

$$\iint_{D_1} (y)\, dy\, dx + \iint_{D_2} (y)\, dy\, dx = \frac{2}{3} + \frac{19}{15} = \frac{29}{15}$$

c) Reescrever o integral duplo trocando a ordem de integração.

Considere-se novamente a região de integração D:



Neste caso, a região de integração situa-se no intervalo $y \in [0,2]$. Estudando a variação de x ao longo deste intervalo, verifica-se que ela não é uniforme, registando-se uma alteração na sua variação na linha $y = 1$.

Assim, a região de integração D, como região do tipo II, deverá ser definida como a reunião das regiões D_3 e D_4

$$D = D_3 \cup D_4$$

em que

$$D_3 = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ \frac{y-2}{2} \leq x \leq y \right\}$$

$$D_4 = \left\{ (x,y) : 1 \leq y \leq 2 ,\ \frac{y-2}{2} \leq x \leq +\sqrt{2-y} \right\}$$

Obtém-se, então:

$$\iint_D (y)\, dy\, dx = \iint_{D_3} (y)\, dx\, dy + \iint_{D_4} (y)\, dx\, dy =$$

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

$$= \int_0^1 \int_{\frac{y-2}{2}}^{y} (y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{\frac{y-2}{2}}^{\sqrt{2-y}} (y)\, dx\, dy$$