COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 4

INTEGRAÇÃO TRIPLA

1) Recorrendo ao integral triplo, calcule o volume do sólido, V, situado no primeiro octante e limitado pelos planos $x=2$, $y=1$ e $z=3$.

2) Seja o sólido, V, constituído pelos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tal que $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ e $0\le z\le 1+y$:

a) Esboce o sólido.

b) Calcule o seu volume.

3) Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^1\left[\int_1^{2y}\left[\int_0^x (x+2z)dz\right]dx\right]dy$.

b) $\int_0^1\left[\int_0^x\left[\int_0^y ydz\right]dy\right]dx$.

c) $\int_1^2\left[\int_y^{y^2}\left[\int_0^{\ln(x)} ye^z dz\right]dx\right]dy$.

4) Calcule o integral $\iiint_V ye^{-xy}dxdydz$, sendo $V=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

5) Desenhe o subconjunto $B\subset\mathbb{R}^3$ definido por $0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1+x \wedge 0\le z\le 2$ e calcule o integral $\iiint_B (x^2+z)dxdydz$.

6) Calcule o integral $\iiint_V xyzdxdydz$, sendo V o sólido limitado pelas superfícies $z=y+1$, $y+z=1$, $x=0$, $x=1$ e $z=0$.

7) Determine o integral $\iiint_V 2e^x dxdydz$, sendo V o sólido constituído pelos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tal que $0\le y\le 1$, $0\le x\le y$ e $0\le z\le x+y$.

8) Calcule o volume do sólido, *V*, limitado pelos três planos coordenados, a superfície $x^2+y^2=z$ e o plano $x+y=1$.

9) Determine o volume do sólido, *V*, limitado superiormente pela superfície $z=4-x^2$, inferiormente pelo plano $x+z=2$ e lateralmente pelos planos $y=0$ e $y=3$.

10) Calcule os seguintes integrais:

a) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, sendo V o sólido limitado pela folha superior do cone $x^2+y^2-z^2=0$ e o plano $z=1$.

b) $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, sendo V o sólido limitado pelas superfícies $x^2+y^2=2z$ e $z=2$.

c) $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, sendo V o sólido limitado pela superfície $x^2+y^2=2x$ e pelos planos $z=2$ e *xOy*.

11) Considere o integral $\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{x+y} dz\right]dy\right]dx$.

a) Esboce o domínio de integração e calcule o seu valor.

b) Reescreva-o de modo que a primeira integração se faça em ordem a *y*.

12) Seja o sólido, *V*, cujo volume é dado através do integral $\int_0^3\left[\int_x^{6-x}\left[\int_0^{2x} dz\right]dy\right]dx$.

a) Esboce o sólido e determine o seu volume.

b) Reescreva o integral segundo as seguintes ordens de integração: y,x,z, y,z,x e x,y,z.

13) Obtenha, usando coordenadas cilíndricas, o volume do sólido, *V*, limitado superiormente pela superfície $z=4-(x^2+y^2)$ e inferiormente pela superfície $z=x^2+y^2$.

14) Calcule, usando coordenadas cilíndricas, o volume do sólido, *V*, limitado superiormente pela superfície $z = 1 + x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano coordenado *xOy* e lateralmente pela superfície $x^2 + y^2 = 1$.

15) Determine o volume do sólido, *V*, compreendido entre as superfícies cilíndricas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, sendo limitado superiormente pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.

16) Seja o integral $\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left[\int_0^3 f(x,y,z)dz \right] dy \right] dx$.

- **a)** Esboce o domínio de integração e transforme-o em coordenadas cilíndricas.
- **b)** Determine o seu valor para $f(x,y,z) = 1$.

17) Considere o integral $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^2 dz \right] dy \right] dx$.

- **a)** Esboce o domínio de integração.
- **b)** Reescreva-o de modo que a primeira integração se faça em ordem a *x*.
- **c)** Determine o seu valor.

18) Considere o integral $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dz \right] dy \right] dx$.

- **a)** Esboce o domínio de integração.
- **b)** Determine o seu valor.
- **c)** Reescreva-o de modo que a primeira integração se faça em ordem a *y*.

19) Relativamente ao integral $\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left[\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz \right] dy \right] dx$, identifique o domínio de integração e calcule-o após o transformar em coordenadas cilíndricas.

20) Determine o volume do sólido limitado superiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=5$ e inferiormente pela superfície parabólica $4z=x^2+y^2$.

21) Calcule o integral $\iiint_V xydxdydz$, sendo V o sólido do primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=4$.

Soluções:

1) $\int_0^2\left[\int_0^1\left[\int_0^3 dz\right]dy\right]dx=6$.

2) **a)** - - - -

b) $\int_0^1\left[\int_0^1\left[\int_0^{1+y} dz\right]dy\right]dx=\frac{3}{2}$.

3) **a)** $\frac{2}{3}$. **b)** $\frac{1}{12}$. **c)** $\frac{47}{24}$.

4) $\int_0^1\left[\int_0^1 ye^{-xy}\left[\int_0^1 dz\right]dx\right]dy=\frac{1}{e}$.

5) $\int_0^1\left[\int_0^2\left[\int_0^{1+x}(x^2+z)dy\right]dz\right]dx=\frac{25}{6}$.

6) $\int_0^1 x\left[\int_{-1}^0 y\left[\int_0^{y+1} zdz\right]dy\right]dx+\int_0^1 x\left[\int_0^1 y\left[\int_0^{1-y} zdz\right]dy\right]dx=0$.

7) $2\int_0^1\left[\int_0^y e^x\left[\int_0^{x+y} dz\right]dx\right]dy=7-2e$.

8) $\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{x^2+y^2} dz\right]dy\right]dx=\frac{1}{6}$.

9) $\int_{-1}^2\left[\int_0^3\left[\int_{2-x}^{4-x^2} dz\right]dy\right]dx=\frac{27}{2}$.

10) **a)** $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2\left[\int_r^1 dz\right]dr\right]d\theta=\frac{\pi}{6}$.

b) $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 r^3\left[\int_{r^2/2}^2 dz\right]dr\right]d\theta=\frac{16\pi}{3}$.

c) $\int_0^2\left[\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\left(r+r^3+2r^2\cos(\theta)\right)d\theta\right]dr\right]dz=3\pi$.

11) a) $\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{x+y} dz\right]dy\right]dx=\frac{1}{3}$.

b) $\int_0^1\left[\int_0^{x}\left[\int_0^{1-x} dy\right]dz\right]dx+\int_0^1\left[\int_x^{1}\left[\int_{z-x}^{1-x} dy\right]dz\right]dx$.

12) a) $\int_0^3\left[\int_x^{6-x}\left[\int_0^{2x} dz\right]dy\right]dx=18$.

b) $\int_0^6\left[\int_{z/2}^{3}\left[\int_x^{6-x} dy\right]dx\right]dz$; $\int_0^3\left[\int_0^{2x}\left[\int_x^{6-x} dy\right]dz\right]dx$;

$\int_0^6\left[\int_{z/2}^{3}\left[\int_{z/2}^{y} dx\right]dy\right]dz+\int_0^6\left[\int_3^{6-z/2}\left[\int_{z/2}^{6-y} dx\right]dy\right]dz$.

13) $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}} r\left[\int_{r^2}^{4-r^2} dz\right]dr\right]d\theta=4\pi$.

14) $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{1} r\left[\int_0^{1+r^2} dz\right]dr\right]d\theta=\frac{3\pi}{2}$.

15) $\int_0^{2\pi}\left[\int_1^{2} r\left[\int_0^{\sqrt{10-r^2}} dz\right]dr\right]d\theta=\pi\left(18-4\sqrt{6}\right)$.

16) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos(\theta)}\left[\int_0^{3} rf(r,\theta,z)dz\right]dr\right]d\theta$.

17) a) - - - -

b) $\int_0^1\left[\int_0^{2}\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\right]dz\right]dy$.

c) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{1} r\left[\int_0^{2} dz\right]dr\right]d\theta=\frac{\pi}{2}$.

18) a) - - - -

b) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{1} r\left[\int_0^{1+\sqrt{1-r^2}} dz\right]dr\right]d\theta=\frac{5\pi}{12}$.

c) $\int_0^1\left[\int_0^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\right]dz\right]dx+\int_0^1\left[\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-(z-1)^2}} dy\right]dz\right]dx$.

19) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos(\theta)}\left[\int_0^{a} zr^2dz\right]dr\right]d\theta=\frac{8a^2}{9}$.

20) $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left[\int_{r^2/4}^{\sqrt{5-r^2}} rdz\right]dr\right]d\theta=\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$.

21) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(2\theta)\left[\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3(\varphi)\left[\int_0^2 r^4dr\right]d\varphi\right]d\theta=\frac{32}{15}$.