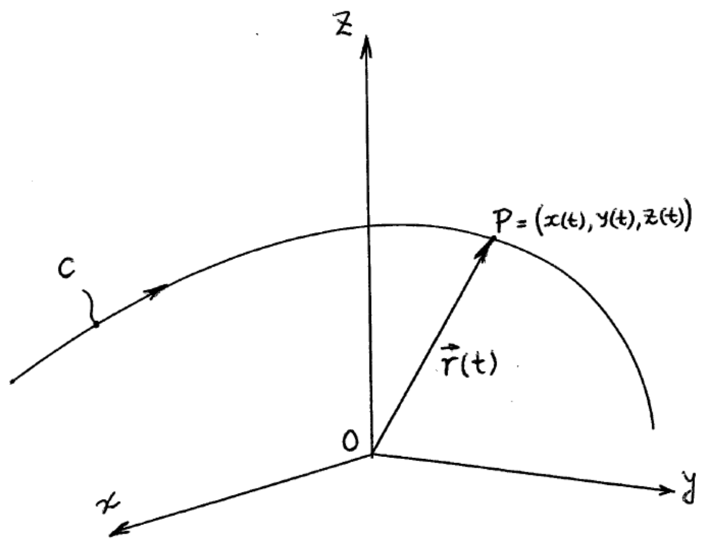
Curvas no espaço

- Admita-se que a função vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

é diferenciável no intervalo *I*; nos extremos, caso existam, apenas se exige a continuidade da função. A extremidade do vector de posição (vector radial) $\vec{r}(t)$ é o ponto de coordenadas $P = (x(t), y(t), z(t))$, verificando-se que *P* traça um caminho, *C*, quando *t* toma valores no intervalo *I*. Diz-se, neste caso, que *C* é uma *curva diferenciável* e que é *parametrizada* por $\vec{r}(t)$ com o parâmetro *t*. É uma *curva orientada*, dado que quando *t* cresce no intervalo *I*, o vector de posição traça *C* segundo uma determinada orientação no espaço.



Exemplo 12: Tal como foi assinalado no exemplo 4, a curva parametrizada por

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*.

Exemplo 13: Em contrapartida, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(u) = \cos(2\pi - u)\vec{i} + \operatorname{sen}(2\pi - u)\vec{j}\ ,\ u \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido retrógrado*.

Tangente a uma curva

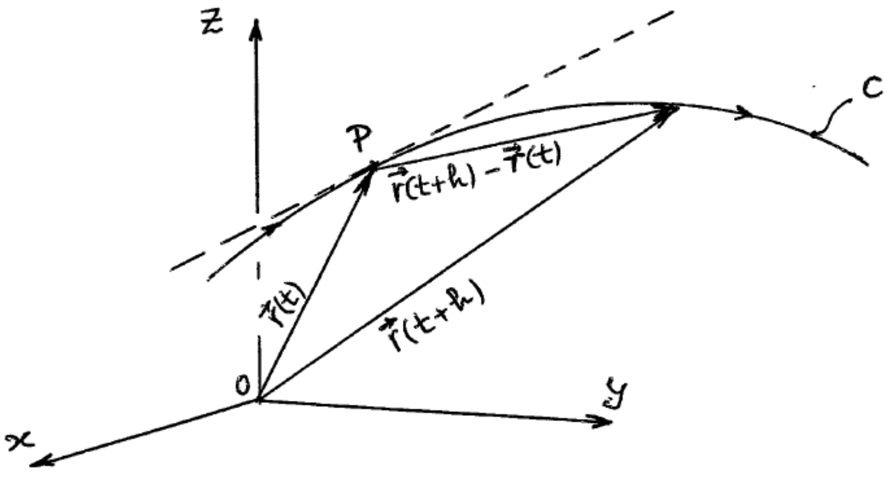
- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

  $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in I$$

  Notando que

  $$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \tag{9}$$

  então, se $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, é óbvio que, para um valor de h suficientemente pequeno, o vector $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \neq \vec{0}$.



Assim, para cada valor real $h \neq 0$, o vector

$$\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$$

é paralelo a $\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)$ e, portanto, o seu limite (9), que se assume diferente de zero, pode ser tomado como o vector direcção da *linha tangente* à curva *C* no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.

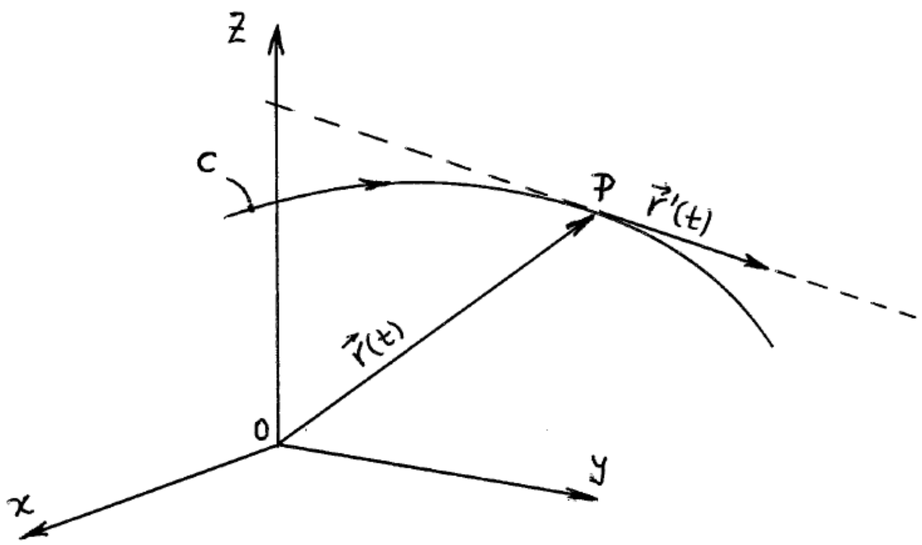
- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ ,\ t\in I \tag{10}$$

O vector $\vec{r}'(t)$, se não for nulo, é designado por *vector tangente* à curva *C* no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ e aponta no sentido definido pelos valores crescentes de *t*. A linha recta parametrizada por

$$X(u)=P+u\vec{r}'(t)\ ,\ u\in\mathbb{R}$$

chama-se *linha tangente* a *C* em *P*.



- Uma curva diferenciável e parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$ diz-se *regular*, se e só se $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

Exemplo 14: Seja a circunferência de raio *a*, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no sentido directo:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\mathrm{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ t \in [0, 2\pi] \tag{11}$$

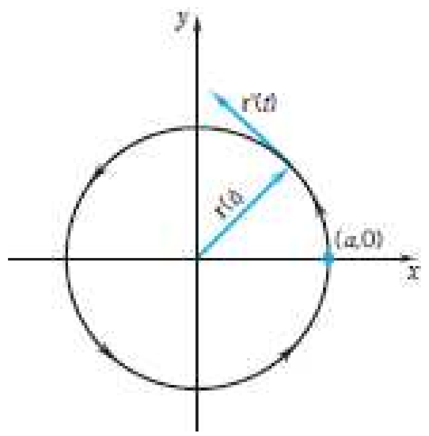
Neste caso, o vector tangente

$$\vec{r}\,'(t) = -a\mathrm{sen}(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k}$$

é ortogonal, em cada ponto da curva, ao vector de posição, já que

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

(teorema 8) e aponta no sentido directo, o sentido de percurso da curva.



Exemplo 15: Seja a curva

$$\vec{r}(t) = t\ \vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

que passa no ponto $P = (-2, 4, -8)$. Dado que $P = \vec{r}(-2)$ e

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2t\ \vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

o vector tangente à curva em *P* é $\vec{a} = \vec{r}\,'(-2) = \vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.
Além disso, a função vectorial

$$\vec{r}_1(u) = P + u\vec{a} = (-2+u)\vec{i} + (4-4u)\vec{j} + (-8+12u)\vec{k} \ , \ u \in \mathbb{R}$$

parametriza a linha tangente à curva no ponto *P*.

- A linha tangente a uma curva, C, é *invariante* face a uma alteração de parâmetro utilizado na sua parametrização.
  Admitindo $t = t(v)$ em (10), a curva passa a ser parametrizada pela função vectorial $\vec{r}_1(v) = \vec{r}\,[t(v)]$.

  Se a derivada $\vec{r}\,'[t(v)]$ existir, então $\vec{r}_1\,'(v)$ também existe, sendo dada por (*regra da cadeia*)

$$\frac{d\vec{r}_1}{dv} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{dv} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_1'(v) = \vec{r}\,'[t(v)]t'(v)$$

  onde $t'(v) \neq 0$; portanto, se $\vec{r}\,'[t(v)] \neq \vec{0}$, então $\vec{r}_1'(v) \neq \vec{0}$.
  Assim, $\vec{r}_1'(v)$ e $\vec{r}\,'[t(v)]$ são *vectores paralelos*; com o mesmo sentido se $t'(v) > 0$ e com sentidos opostos se $t'(v) < 0$.
  Conclui-se que as funções vectoriais $\vec{r}\,(t)$ e $\vec{r}_1(v)$ mantêm a mesma linha tangente em cada um dos pontos da curva, sendo designadas por *funções equivalentes*.

- As duas curvas

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I_1$$

$$C_2 : \vec{r}_2(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \ , \ u \in I_2$$

  intersectam-se, se e só se existirem valores para t e u para os quais $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(u)$. O ângulo, θ, formado pelas curvas C_1 e C_2 num ponto onde $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(u_0)$ é, por definição

$$\theta = \arccos \frac{\left| \vec{r}_1\,'(t_0) \cdot \vec{r}_2\,'(u_0) \right|}{\left\| \vec{r}_1\,'(t_0) \right\| \left\| \vec{r}_2\,'(u_0) \right\|}$$

  ou seja, é o menor dos ângulos formados pelas respectivas linhas tangentes nesse ponto.

Versor da tangente

- Seja a curva duas vezes diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então, em qualquer ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva é possível obter o vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|} \tag{12}$$

que é designado por *versor da tangente*. Uma vez que $\left\|\vec{r}'(t)\right\| > 0$, $\vec{T}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector tangente, $\vec{r}'(t)$.

Exemplo 16: No caso da hélice circular do exemplo 5, parametrizada em (3), o vector tangente à curva é:

$$\vec{f}'(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} = \left(-2\text{sen}(t), 2\cos(t), 1\right) \tag{13}$$

Notando que

$$\left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{5} \tag{14}$$

o versor da tangente à curva é:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\text{sen}(t), 2\cos(t), 1\right) \tag{15}$$

- De um modo geral, o versor $\vec{T}(t)$ vai-se alterando (tal como a linha tangente) ao longo da curva *C*. Dado que $\left\|\vec{T}(t)\right\| = 1$ (constante), essa variação reflecte-se unicamente na mudança da sua direcção.

- A taxa de variação de $\vec{T}(t)$ em relação a *t* é medida através da sua derivada, $\vec{T}'(t)$.

- O vector $\vec{T}'(t)$ é ortogonal a $\vec{T}(t)$ em cada ponto de *C* (teorema 8) e aponta no sentido definido pelo lado côncavo da curva.

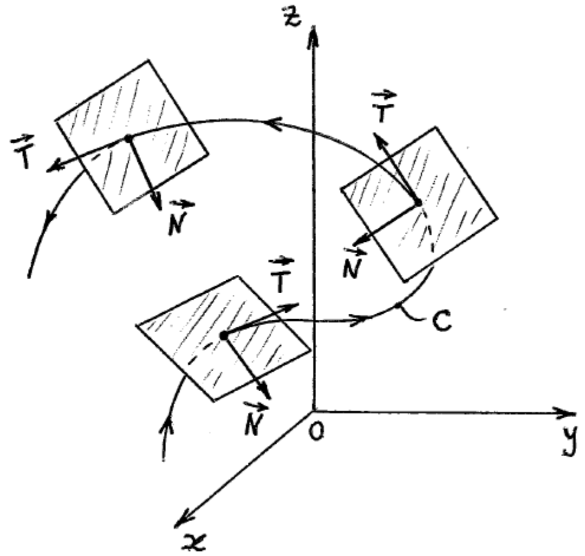
- No caso de *C* ser uma linha recta o versor $\vec{T}(t)$ mantém a sua direcção no espaço, pelo que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Versor normal principal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva *C*, o *versor normal principal*

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} \tag{16}$$

- Dado que $\left\|\vec{T}'(t)\right\| > 0$, $\vec{N}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector $\vec{T}'(t)$.



- A linha recta que passa no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva e parametrizada por

$$X(v)=P+v\vec{N}(t)\ ,\ v\in\mathbb{R}$$

chama-se *linha normal* à curva C em P.

Exemplo 17: Em relação à hélice circular dos exemplos 5 e 16, obtém-se:

$$\vec{T}'(t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\big(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\big) \tag{17}$$

$$\left\|\vec{T}'(t)\right\|=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}=\big(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\big) \tag{18}$$

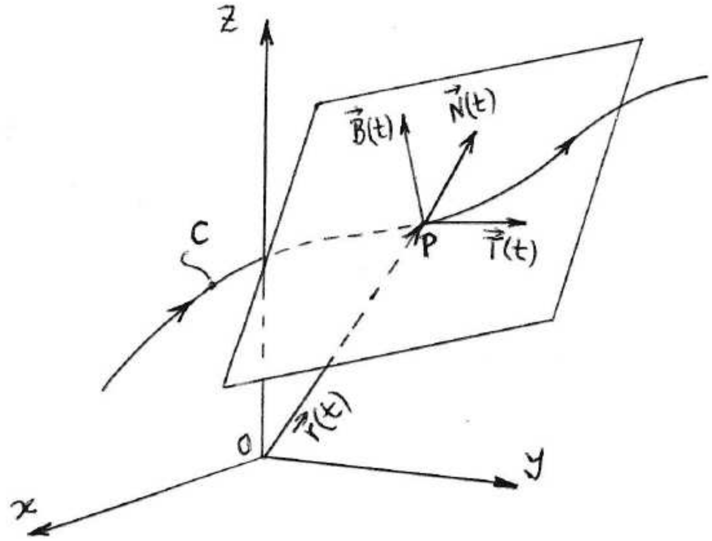
Atente-se que, neste caso (teorema 8):

$$\vec{T}(t)\cdot\vec{T}'(t)=0$$

Versor binormal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ da curva *C*, o *versor binormal*

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$



- Relembrando as propriedades do produto vectorial, pode-se afirmar que $\vec{B}(t)$ é um vector unitário que tem a direcção ortogonal às direcções definidas pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, sendo o seu sentido determinado pela *regra da mão direita*.

- A linha recta que passa no ponto $P = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ da curva e parametrizada por

$$X(w) = P + w\vec{B}(t) \ , \ w \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha binormal* à curva *C* em *P*.

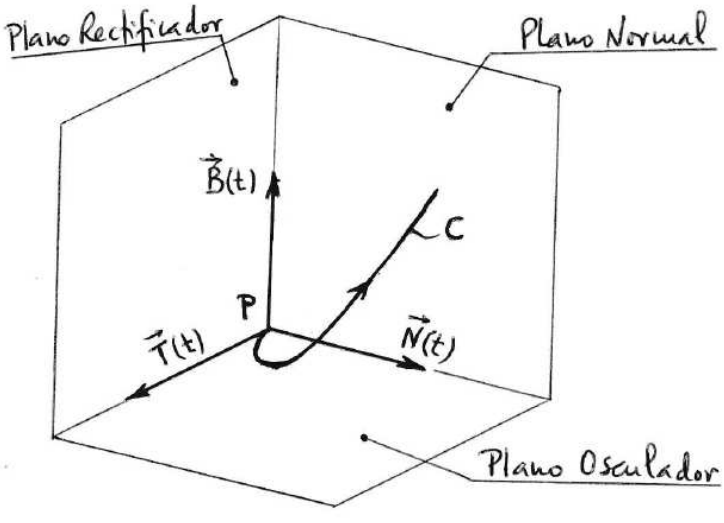
Exemplo 18: Relativamente à hélice circular dos exemplos 5, 16 e 17, resulta:

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\mathrm{sen}(t) & 2\cos(t) & 1\\ -\cos(t) & -\mathrm{sen}(t) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{sen}(t),-\cos(t),2\right) \qquad (19)$$

Triedro de Frenet

- A cada ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ de uma curva diferenciável C é possível associar o conjunto de versores $\left\{\vec{T}(t),\vec{N}(t),\vec{B}(t)\right\}$, que formam uma *base ortonormal* para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e que é designada por *triedro de Frenet*. Estes versores definem, para além das *linhas tangente*, *normal* e *binormal*, três planos ortogonais entre si que constituem os chamados *planos fundamentais* da curva C no ponto P, nomeadamente, os planos *osculador*, *normal* e *rectificador*.



Plano osculador

- O plano que passa no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ da curva *C* e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ chama-se *plano osculador*. É o plano que mais se aproxima da curva no ponto *P* e tem a equação vectorial:

$$X(u,v)=P+u\vec{T}(t)+v\vec{N}(t)\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor binormal, $\vec{B}(t)$, é um vector normal ao plano osculador no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\left(X-P\right)\cdot\vec{B}(t)=0\ \Leftrightarrow\ X\cdot\vec{B}(t)=P\cdot\vec{B}(t)$$

- Se a curva é plana, e não é uma linha recta, o plano osculador coincide com o plano que contém a curva.

Exemplo 19: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I=\vec{f}(0)=(2,0,0)$$

onde o versor da binormal, definido em (19), toma o valor:

$$\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,2)$$

Designando $X=(x,y,z)$, a equação cartesiana do plano osculador da curva no ponto *I* é:

$$X\cdot\vec{B}(0)=I\cdot\vec{B}(0)\ \Leftrightarrow\ -y+2z=0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos *xx* e intersecta o plano coordenado *yOz* segundo a recta $y=2z$.

Plano normal

- O plano que passa no ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano normal*; a sua equação vectorial é:

$$X(u,v) = P + u\vec{N}(t) + v\vec{B}(t)\ ,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor tangente, $\vec{T}(t)$, é um vector normal ao plano normal no ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\left(X - P\right) \cdot \vec{T}(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ X \cdot \vec{T}(t) = P \cdot \vec{T}(t)$$

Exemplo 20: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2,0,0)$$

onde o versor da tangente, definido em (15), toma o valor:

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0,2,1\right)$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano normal da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{T}(0) = I \cdot \vec{T}(0) \ \Leftrightarrow\ 2y + z = 0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos *xx* e intersecta o plano coordenado *yOz* segundo a recta $z = -2y$.

Plano rectificador

- O plano que passa no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano rectificador*; a sua equação vectorial é:

$$X(u,v)=P+u\vec{T}(t)+v\vec{B}(t)\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor normal, $\vec{N}(t)$, é um vector normal ao plano rectificador no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\big(X-P\big)\cdot\vec{N}(t)=0\ \Leftrightarrow\ X\cdot\vec{N}(t)=P\cdot\vec{N}(t)$$

Exemplo 21: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I=\vec{f}(0)=(2,0,0)$$

onde o versor da normal, definido em (18), toma o valor:

$$\vec{N}(0)=(-1,0,0)=-\vec{i}$$

Designando $X=(x,y,z)$, a equação cartesiana do plano rectificador da curva no ponto I é:

$$X\cdot\vec{N}(0)=I\cdot\vec{N}(0)\ \Leftrightarrow\ x=2$$

Trata-se do plano paralelo ao plano coordenado *yOz* e que é tangente à curva no ponto *I*.

Segunda derivada do vector de posição

- A expressão (12) permite apresentar o vector tangente sob a forma:

$$\vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\|\vec{T}(t), \text{ se } \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

Assim, pode-se concluir que o vector tangente pode variar, ao longo da curva *C*, de duas maneiras distintas:
i) Em direcção – relativa à variação do versor $\vec{T}(t)$;
ii) Na sua norma – relativa à variação da função escalar $\|\vec{r}'(t)\|$.

- A taxa de variação do vector tangente, $\vec{r}'(t)$, é medida, em termos globais, através da sua derivada, ou seja, através da função vectorial $\vec{r}''(t)$.

Teorema 12: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$. Se $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$, então:

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|'\vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\|\vec{T}'(t)$$

ou ainda, recorrendo a (11),

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|'\vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\|\|\vec{T}'(t)\|\vec{N}(t) \tag{20}$$

- A equação (20) mostra que o vector $\vec{r}''(t)$ pode ser expresso, em cada ponto da curva *C*, através da soma de duas componentes que são ortogonais entre si, isto é, uma *componente tangencial* e uma *componente normal*.

- A *componente tangencial*, definida por

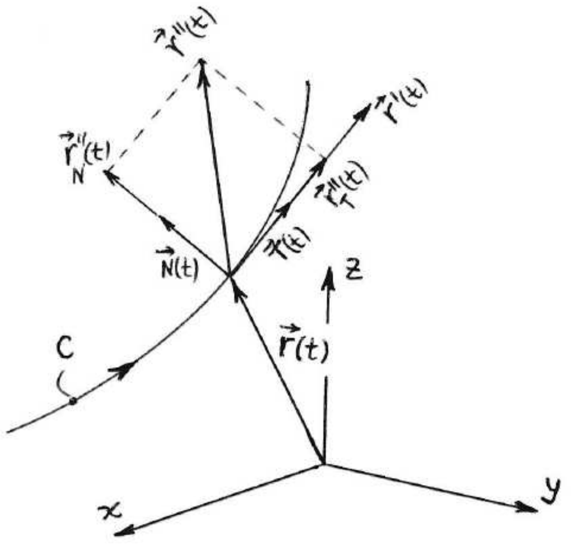
$$\vec{r}_T''(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|' \vec{T}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{T}(t)$ e mede a variação da norma do vector tangente; não sendo nula, terá o mesmo sentido de $\vec{T}(t)$ se $\left\|\vec{r}'(t)\right\|' > 0$ e o sentido oposto se $\left\|\vec{r}'(t)\right\|' < 0$.

- A *componente normal*, definida por

$$\vec{r}_N''(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\| \vec{T}'(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\| \left\|\vec{T}'(t)\right\| \vec{N}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{N}(t)$ e mede a variação de direcção do vector tangente; não sendo nula, terá sempre o mesmo sentido de $\vec{N}(t)$, já que $\left\|\vec{r}'(t)\right\| \left\|\vec{T}'(t)\right\| > 0$.



- Se a curva não é uma linha recta, então $\vec{r}_N''(t) \neq \vec{0}$; caso contrário, obtém-se $\vec{r}''(t) = \vec{r}_T''(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|' \vec{T}(t)$, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Exemplo 22: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada em (3). Tendo em atenção (13) conclui-se que:

$$\vec{f}''_T(t) = \left\|\vec{f}'(t)\right\|' \vec{T}(t) = 0\vec{T}(t) = (0,0,0)$$

Além disso, recorrendo a (14) e (17), resulta:

$$\vec{f}''_N(t) = \left\|\vec{f}'(t)\right\| \vec{T}'(t) = 2\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right)$$

Derivando (13)

$$\vec{f}''(t) = \left(-2\cos(t), -2\text{sen}(t), 0\right) \quad (21)$$

obtém-se, tal como era de prever:

$$\vec{f}''(t) = \vec{f}''_N(t)$$

Neste caso o vector $\vec{f}''(t)$ tem, em cada ponto da curva, a direcção e o sentido do versor $\vec{N}(t)$ e mede apenas a variação de direcção do vector tangente.

Teorema 13: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$.
i) Se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ e $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)\right\|}$$

ii) Se $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ são vectores não nulos e não paralelos, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right\|} \quad (22)$$

- Sendo $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$ um vector normal ao plano osculador no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva, a equação cartesiana deste plano pode ainda ser dada por:

$$\big(X-P\big)\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=0 \;\Leftrightarrow\; X\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=P\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$$

Exemplo 23: Seja a hélice circular do exemplo 5. Atendendo a (13), (21) e (22) resulta

$$\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)=2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\operatorname{sen}(t) & 2\cos(t) & 1\\ -\cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0\end{vmatrix}=2\big(\operatorname{sen}(t),-\cos(t),2\big)$$

$$\left\|\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)\right\|=2\sqrt{5}$$

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\big(\operatorname{sen}(t),-\cos(t),2\big)$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 24: Em relação à circunferência do exemplo 14 e parametrizada em (11) obtém-se

$$\vec{r}'(t)=-a\operatorname{sen}(t)\vec{i}+a\cos(t)\vec{j}+0\vec{k}=a\big(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),0\big),\qquad \left\|\vec{r}'(t)\right\|=a,$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}=\big(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),0\big),$$

$$\vec{T}'(t)=\big(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\big),\qquad \left\|\vec{T}'(t)\right\|=1,$$

$$\vec{N}(t) = \vec{T}'(t) = \left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right),$$

$$\vec{r}''(t) = a\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right),$$

$$\vec{r}''_T(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|'\vec{T}(t) = 0\vec{T}(t) = (0,0,0),$$

$$\vec{r}''_N(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|\vec{T}'(t) = \vec{r}''(t) = a\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right),$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = a^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = a^2\left(0,0,1\right),$$

$$\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\| = a^2,$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t)\times\vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|} = (0,0,1) = \vec{k}$$

Neste caso o plano osculador é constante em todos os pontos da circunferência e tem a equação $z = 0$, sendo coincidente com o plano coordenado *xOy*, plano onde está situada toda a curva.
Por exemplo, no ponto inicial da curva $I = \vec{r}(0) = (a,0,0)$ tem-se

$$\vec{T}(0) = \left(0,1,0\right), \qquad \vec{N}(0) = \left(-1,0,0\right)$$

pelo que, neste ponto, o plano normal tem a equação $y = 0$ (plano coordenado *xOz*) e o plano rectificador tem a equação $x = a$, sendo um plano estritamente paralelo ao plano coordenado *yOz*.