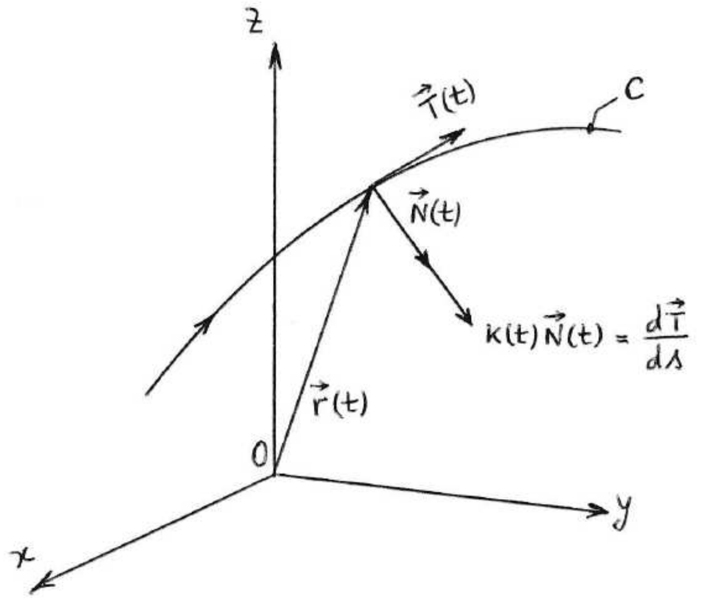
Curvatura de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. De um modo geral, o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, varia ao longo da curva, que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Designa-se por *vector curvatura* da curva *C* à variação de direcção do versor da tangente por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{T}/ds$.



- Chama-se *curvatura* da curva *C*, designando-se por *k*, à norma do vector curvatura, isto é,

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \geq 0$$

Teorema 15: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|} = \frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}\vec{N}(t) \tag{34}$$

$$k(t) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$$

Teorema 16: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3} \tag{35}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t)\vec{N}(t) = \frac{\left(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right) \times \vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^4}$$

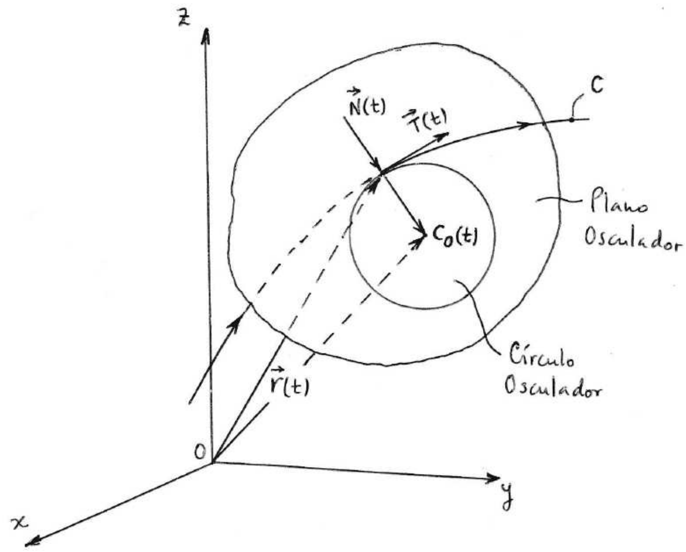
- Chama-se *raio de curvatura*, designando-se por ρ, da curva *C* ao inverso da curvatura, isto é:

$$\rho = \frac{1}{k} \ , \ k > 0$$

- Em face do que foi exposto, é de realçar o seguinte:
  i) Se $k \to 0$, $\rho \to \infty$: a curva *C* tende para uma linha recta;
  ii) Se $k \to \infty$, $\rho \to 0$: a curva *C* tende para um ponto.

- Chama-se *círculo osculador* num ponto da curva C ao círculo situado no plano osculador, tangente à curva e com raio igual ao raio de curvatura de C nesse ponto. Trata-se do círculo que mais se ajusta à curva em cada um dos seus pontos. O centro do círculo orculador em cada ponto da curva, C_O, é o ponto definido por:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t)$$



- No caso do movimento curvilíneo, o vector aceleração normal no instante t, expresso em (31), pode ser reescrito sob a forma

$$\vec{a}_N(t) = k(t)v^2(t)\vec{N}(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}(t)$$

enquanto o seu módulo, definido em (32), é dado por:

$$a_N(t) = k(t)v^2(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Finalmente, atendendo a (33), conclui-se que:

$$k(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v^3(t)}$$

Exemplo 31: Relativamente à circunferência dos exemplos 14 e 24 e parametrizada por

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\mathrm{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ t \in [0, 2\pi]$$

obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}\left(-\cos(t), -\mathrm{sen}(t), 0\right)$$

$$k(t) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

Tal como previsto, o raio de curvatura é constante em qualquer ponto da curva

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = a$$

e o centro do círculo osculador é coincidente com o próprio centro da circunferência:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + a\left(-\cos(t), -\mathrm{sen}(t), 0\right) = (0,0,0)$$

Exemplo 32: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}\ ,\ t \ge 0$$

Atendendo a (14), (17) e (18), obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{2}{5}\left(-\cos(t), -\mathrm{sen}(t), 0\right)$$

$$k(t)=\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|=\frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|}=\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\rho(t)=\frac{1}{k(t)}=\frac{5}{2}$$

$$C_O(t)=\vec{f}(t)+\frac{5}{2}\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),0\right)=\frac{1}{2}\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),2t\right)$$

Exemplo 33: Seja a hélice circular (passo variável) parametrizada por:

$$\vec{r}(t)=2\cos(t)\vec{i}+2\text{sen}(t)\vec{j}+t^2\vec{k}\ ,\ t\geq 0$$

Recorrendo a (35), obtém-se para a curvatura e para o raio de curvatura:

$$\vec{r}'(t)=2\left(-\text{sen}(t),\cos(t),t\right)\quad\Rightarrow\quad\left\|\vec{r}'(t)\right\|=2\sqrt{1+t^2}$$

$$\vec{r}''(t)=2\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),1\right)$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=4\left(\cos(t)+t\,\text{sen}(t),-t\cos(t)+\text{sen}(t),1\right)$$

$$\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|=4\sqrt{\left(\cos(t)+t\,\text{sen}(t)\right)^2+\left(-t\cos(t)+\text{sen}(t)\right)^2+1}=$$

$$=4\sqrt{\cos^2(t)+\text{sen}^2(t)+t^2\left(\cos^2(t)+\text{sen}^2(t)\right)+1}=4\sqrt{2+t^2}$$

$$k(t)=\frac{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}=\frac{4\sqrt{2+t^2}}{\left[2\sqrt{1+t^2}\right]^3}=\frac{\sqrt{2+t^2}}{2\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho(t)=\frac{1}{k(t)}=\frac{2\left(1+t^2\right)^{3/2}}{\sqrt{2+t^2}}$$

Notando que

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),t\right) \qquad (36)$$

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\left(\cos(t)+t\operatorname{sen}(t),-t\cos(t)+\operatorname{sen}(t),1\right)$$

o versor normal principal é:

$$\vec{N}(t)=\vec{B}(t)\times\vec{T}(t)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}\left(t\operatorname{sen}(t)-(1+t^2)\cos(t),-t\cos(t)-(1+t^2)\operatorname{sen}(t),1\right)$$

Finalmente, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=k(t)\vec{N}(t)=\frac{1}{2\left(1+t^2\right)^2}\left(t\operatorname{sen}(t)-(1+t^2)\cos(t),-t\cos(t)-(1+t^2)\operatorname{sen}(t),1\right)$$

Convém realçar que, neste caso, não foi utilizada a expressão (34) para o cálculo do vector curvatura em virtude da dificuldade inerente à derivação do versor da tangente definido em (36).
Por exemplo, no ponto inicial da curva $\vec{r}(0)=(2,0,0)$ obtém-se:

$$k(0)=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \rho(0)=\frac{1}{k(0)}=\sqrt{2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=k(0)\vec{N}(0)=\frac{1}{2}(-1,0,1)$$

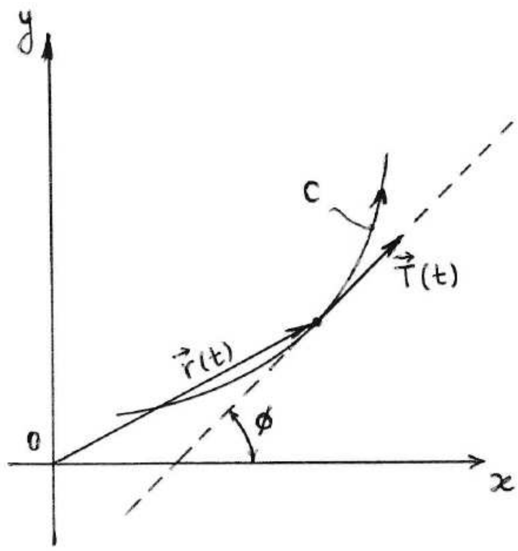
Neste ponto o centro do círculo osculador é:

$$C_O(0)=\vec{r}(0)+\rho(0)\vec{N}(0)=(2,0,0)+(-1,0,1)=(1,0,1)$$

Curvatura de uma curva plana

- No caso da curva C ser plana, o versor da tangente em qualquer ponto da curva pode ser expresso em função do ângulo, ϕ, medido em radianos, que exprime a inclinação da linha tangente à curva, ou seja:

$$\vec{T}(\phi) = \cos(\phi)\vec{i} + \operatorname{sen}(\phi)\vec{j}$$



Neste caso, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = -\frac{d\phi}{ds}\operatorname{sen}(\phi)\vec{i} + \frac{d\phi}{ds}\cos(\phi)\vec{j}$$

sendo a curvatura dada por:

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

Assim, conclui-se que a curvatura da curva pode ser interpretada como sendo a magnitude da variação do ângulo ϕ por unidade do comprimento de arco.

Teorema 17: Seja a curva plana diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\ ,\ t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{3/2}}$$

Teorema 18: Seja a função diferenciável $y = f(x)$, $x \in I$. A curvatura do gráfico da função é dada por:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{3/2}}$$

Torção de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

  $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in I$$

  em que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Tal como o versor da tangente, também o versor binormal, $\vec{B}(t)$, pode variar ao longo da curva, variação que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Chama-se *vector torção* da curva *C* à variação de direcção do versor binormal por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{B}/ds$.

Teorema 19: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$$

Teorema 20: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. O vector torção, $d\vec{B}/ds$, é ortogonal ao versor da tangente, $\vec{T}(t)$, e ao versor binormal, $\vec{B}(t)$, isto é, é um vector paralelo ao versor normal principal, $\vec{N}(t)$.

- Em face da propriedade anterior, é comum escrever-se o vector torção sob a forma

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau(t)\vec{N}(t) \qquad (37)$$

onde a função escalar, $\tau(t)$, definida em $\mathbb{R}$, é designada por *torção* da curva. Nestas condições: $d\vec{B}/ds$ e $\vec{N}(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido, se $\tau < 0$; são vectores paralelos e com sentidos opostos, se $\tau > 0$.

- A expressão (37) permite exprimir a torção de uma curva através do seguinte produto escalar:

$$\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t)$$

- É óbvio que se uma curva é plana, o vector binormal é constante, pelo que o vector torção é o vector nulo, $d\vec{B}/ds = \vec{0}$, e a torção é nula, $\tau = 0$.

Exemplo 34: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}\ ,\ t \geq 0$$

Atendendo a (14), (18) e (19), obtém-se:

$$\vec{B}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\cos(t), \text{sen}(t), 0\right)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|} = \frac{1}{5}\left(\cos(t), \text{sen}(t), 0\right)$$

$$\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t) = -\frac{1}{5}\left(\cos(t), \text{sen}(t), 0\right) \cdot \left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(-\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)\right) = -\frac{1}{5}(-1) = \frac{1}{5}$$

Teorema 21: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{T}(t) \times \vec{N}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$$

$$\tau(t) = -\frac{\vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|} = \frac{\vec{B}(t) \cdot \vec{N}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$$

Fórmulas de Frenet-Serret

- Os versores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$, sendo ortogonais entre si, são linearmente independentes. Assim, o conjunto $S=\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ constitui uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{R}^3$ e define, em cada ponto de uma curva diferenciável, um *referencial ortonormal directo*, designado por *referencial de Frenet*.

- As *fórmulas de Frenet-Serret* apresentam os vectores $d\vec{T}/ds$, $d\vec{N}/ds$ e $d\vec{B}/ds$ como combinação linear dos elementos que formam a base ortonormal $S=\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$.

Teorema 22: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - k\vec{T}$$

em que k e τ representam a *curvatura* e a *torção*, respectivamente.