

COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 3

INTEGRAÇÃO DUPLA

1) Calcule os seguintes integrais:

- a) $\iint_Q xy(x+y)dxdy$, $Q = [0,1] \times [0,1]$. b) $\iint_Q \sin(x+y)dxdy$, $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.
- c) $\iint_Q (\sqrt{y} + x - 3xy^2)dxdy$, $Q = [0,1] \times [1,3]$.
- d) $\iint_Q x \sin(x^2 + y)dxdy$, $Q = [0, \sqrt{\pi/2}] \times [0, \pi/2]$.
- e) $\iint_Q \sin^2(x) \sin^2(y)dxdy$, $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
- f) $\iint_Q y^{-3} e^{2xy^{-1}} dxdy$, $Q = [0,2] \times [1,2]$.

2) Altere a ordem de integração em cada um dos integrais seguintes, após identificar e esboçar o domínio de integração:

- a) $\int_0^1 \left[\int_0^y f(x,y)dx \right] dy$. b) $\int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx \right] dy$.
- c) $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{x^2} f(x,y)dy \right] dx$. d) $\int_0^{5/\sqrt{2}} \left[\int_y^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx \right] dy$.
- e) $\int_0^1 \left[\int_{-y}^y f(x,y)dx \right] dy$. f) $\int_1^3 \left[\int_x^{x^2} f(x,y)dy \right] dx$.
- g) $\int_1^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \right] dx$.

3) Calcule a área da região do plano limitada:

- a) Pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. b) Pelas linhas $x + y = 5$ e $xy = 6$.
- c) Superiormente pela parábola $y = 4x - x^2$ e inferiormente pelas rectas $y = -3x + 6$ e $y = 0$.
- d) Pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

4) Calcule os seguintes integrais:

- a) $\int_1^2 \left[\int_0^{y^2} e^{x/y^2} dx \right] dy$. b) $\int_0^1 \left[\int_0^x y \sqrt{x^2 - y^2} dy \right] dx$.
- c) $\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy \right] dx$. d) $\int_{1/4}^1 \left[\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{x}{y}} dy \right] dx$.

5) Calcule cada um dos integrais seguintes, alterando a ordem de integração, após identificar e esboçar o domínio de integração:

- a) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dy \right] dx$. b) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy \right] dx$.

6) Calcule o integral $\iint_{\Omega} y(1+x^2)^{-1} dx dy$, sendo Ω a região limitada pelas linhas $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ e $x = 4$.

7) Calcule o integral $\iint_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy$, sendo Ω a região triangular com vértices em $(0,0)$, $(\pi,0)$ e $(\pi/2, \pi/2)$.

8) Calcule o integral $\iint_{\Omega} (x^4 + y^2) dx dy$, sendo Ω a região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

9) Calcule o integral $\iint_{\Omega} (3xy^2 - y) dx dy$, sendo Ω a região limitada pelas linhas $y = |x|$ e $y = -|x|$, $-1 \leq x \leq 1$.

- 10) Calcule o integral $\iint_D (y^2 + 2)^{-1} dx dy$, sendo D a região limitada pelas linhas $x = 0$, $y = 0$, $x = y^2 + 2$, $0 \leq y \leq 2$.
- 11) Calcule o integral $\iint_D 2(x^2 + 3x + 2)^{-1} dy dx$, sendo D a região do 1º quadrante limitada pelas linhas $y = x$, $y = 0$ e $x = 4$.
- 12) Calcule o integral $\iint_D (2x - y^2) dx dy$, sendo D a região limitada pelas rectas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.
- 13) Determine os seguintes integrais:
- a) $\iint_R e^{y/x} dx dy$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$.
- b) $\iint_D x^2 e^{y^4} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 1\}$.
- 14) Calcule o integral $\iint_D 2x dy dx$, sendo D a região triangular com vértices nos pontos $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$ e $Q = (1, 1)$.
- 15) Calcule o integral $\iint_\Omega (x + y + 1) dx dy$, sendo Ω a região:
- a) Triangular com vértices nos pontos $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$ e $Q = (1, 1)$.
- b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$.
- 16) Calcule o integral $\iint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
- 17) Obtenha o valor médio da função $f(x, y) = xy$, definida na região do plano, D , tal que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$.

18) Seja a função $f(x, y)$ definida na região do plano $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & \text{se } x + y \leq 1 \\ 0, & \text{nos outros pontos de } Q \end{cases}.$$

Calcule $\iint_Q f(x, y) dx dy$.

19) Seja a função $f(x, y)$ definida na região do plano $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0, & \text{nos outros pontos de } Q \end{cases}.$$

Calcule $\iint_Q f(x, y) dx dy$.

20) Usando um integral duplo, determine os seguintes volumes:

- a) Da pirâmide limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + 2y + 3z = 6$.
- b) Do sólido situado no 1º octante e limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2$ e $x + y = 2$.
- c) Do sólido limitado superiormente pela superfície $z = x^3 y$ e que tem por base a região triangular do plano xOy com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$.

21) Em cada uma das alíneas seguintes, esboce a região S e reescreva o integral $\iint_S f(x, y) dx dy$ como um integral em coordenadas polares:

- a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$.
- b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

22) Transforme o integral $\int_1^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right] dx$ em coordenadas polares.

23) Transforme o integral $\int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx$ em coordenadas polares e calcule-o.

$$\text{c)} \quad \int_1^4 \left[\int_0^{4x-x^2} dy \right] dx - \int_1^2 \left[\int_0^{-3x+6} dy \right] dx = \frac{15}{2}.$$

$$\text{d)} \quad 2 \int_0^{\sqrt{15}} \left[\int_{(y^2-25)/10}^{(9-y^2)/6} dx \right] dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{4) a)} \quad \frac{7}{3}(e-1).$$

$$\text{b)} \quad -\frac{1}{12}.$$

$$\text{c)} \quad 1 - \ln 2.$$

$$\text{d)} \quad \frac{13}{80}.$$

$$\text{5) a)} \quad \frac{2}{3}(\cos(2^{-1}) - \cos(1)).$$

$$\text{b)} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

$$\text{6)} \quad \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x^2} dy \right] dx = \frac{1}{4} \ln(17).$$

$$\text{7)} \quad \int_0^{\pi/2} \left[\int_y^{\pi-y} x \cos(x+y) dx \right] dy = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{8)} \quad \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^4 + y^2) dy \right] dx = \frac{9}{280}.$$

$$\text{9)} \quad \text{Atendendo às propriedades dos integrais, conclui-se que } \iint_{\Omega} (3xy^2 - y) dx dy = 0.$$

$$\text{10)} \quad \int_0^2 \frac{1}{y^2+2} \left[\int_0^{y^2+2} dx \right] dy = 2.$$

$$\text{11)} \quad 2 \int_0^4 \frac{1}{x^2+3x+2} \left[\int_0^x dy \right] dx = -2 \ln(5) + 4 \ln(3).$$

$$\text{12)} \quad \int_1^3 \left[\int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) dx \right] dy = -\frac{68}{3}.$$

$$\text{13) a)} \quad \int_0^1 \left[\int_0^x e^{y/x} dy \right] dx = \frac{e-1}{2}.$$

$$\text{b)} \quad \int_0^1 e^{y^4} \left[\int_0^y x^2 dx \right] dy = \frac{e-1}{12}.$$

$$\text{14)} \quad \iint_D 2x dy dx = 2 \iint_D x dy dx = 2 \bar{x} A(D) = 2(1)(1) = 2, \text{ em que } A(D) \text{ designa a área da região } D \text{ e } \bar{x} \text{ a coordenada, segundo o eixo dos } xx, \text{ do seu centroide.}$$

15) a) $\iint_{\Omega} x dx dy + \iint_{\Omega} y dx dy + \iint_{\Omega} dx dy = \bar{x}A(\Omega) + \bar{y}A(\Omega) + A(\Omega) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, em que $A(\Omega)$ designa a área da região Ω e (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do seu centroide.

b) $\iint_{\Omega} x dx dy + \iint_{\Omega} y dx dy + \iint_{\Omega} dx dy = \bar{x}A(\Omega) + \bar{y}A(\Omega) + A(\Omega) = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2$, em que $A(\Omega)$ designa a área da região Ω e (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do seu centroide.

16) $\int_0^{2\pi} \left[\int_2^3 r^2 dr \right] d\theta = \frac{38\pi}{3}$.

17) $f_m = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{4}{\pi} \iint_D xy dx dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \left[\int_0^1 r^3 dr \right] d\theta = \frac{1}{2\pi}$.

18) $\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \frac{1}{6}$.

19) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} (x+y) dx \right] dy = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}$.

20) a) 6.

b) $\frac{20}{3}$.

c) $\frac{2}{15}$.

21) a) $\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right] d\theta$.

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2 \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right] d\theta$.

22) $\int_0^{\pi/4} \left[\int_{2/(\sin(\theta)+\cos(\theta))}^{2 \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right] d\theta$.

23) $\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{2a \cos(\theta)} r^3 dr \right] d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4$.

24) a) π .

b) $\frac{\pi}{2}$.

c) 8π .

d) $\frac{2\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$.

e) 3π .