FUNÇÕES ESCALARES

Introdução

- Seja *D* um subconjunto não vazio do plano *xOy*. A função que associa um número real $f(x,y)$ a cada ponto $(x,y) \in D$ chama-se *função real a duas variáveis*. O conjunto *D* é designado por *domínio* de *f*, enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y)$ chama-se *contradomínio* de *f*.

Exemplo 1: A função

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < 1\right\}$$

e como contradomínio $D' = [1,+\infty)$. O domínio é o conjunto dos pontos interiores à circunferência com a equação $x^2+y^2=1$.

- Seja *D* um subconjunto não vazio do espaço tridimensional. A função que associa um número real $f(x,y,z)$ a cada ponto $(x,y,z) \in D$ chama-se *função real a três variáveis*. O conjunto *D* é designado por *domínio* de *f*, enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y,z)$ chama-se *contradomínio* de *f*.

Exemplo 2: A função

$$f(x,y,z) = \cos\left(\frac{1}{x+y-z}\right)$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq x+y\right\}$$

e como contradomínio $D' = [-1,1]$. O domínio é o conjunto dos pontos que não pertencem ao plano com a equação $x+y-z=0$.

Exemplo 3: A magnitude da força gravitacional exercida por um corpo de massa *M* situado na origem sobre um corpo de massa *m* situado no ponto (x,y,z) é dada por

$$F(x,y,z) = \frac{GmM}{x^2+y^2+z^2}$$

em que *G* é a constante gravitacional universal. O seu domínio é

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) \neq (0,0,0)\right\}$$

e o contradomínio é $D' = (0,+\infty)$.

Exemplo 4: A função

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2|x| < y < 2|x|\right\}$$

e contradomínio $D' = (0,+\infty)$.

- Sempre que o domínio de uma função a várias variáveis não for dado de forma explícita, considera-se que ele será formado pelo conjunto máximo dos pontos onde a função está definida.

Exemplo 5: No caso da função

$$f(x,y)=\frac{1}{x-y}$$

admite-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $y\neq x$; trata-se dos pontos do plano que não pertencem à recta com a equação $y=x$. O seu contradomínio é:

$$D'=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

Exemplo 6: No caso da função

$$f(x,y,z)=\text{arcsen}(x+y+z)$$

considera-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que $-1\leq x+y+z\leq 1$; trata-se dos pontos do espaço situados na placa que é limitada pelos planos (estritamente paralelos) com as equações

$$x+y+z=-1 \text{ e } x+y+z=1.$$

O seu contradomínio é:

$$D'=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Superfícies quádricas

- As superfícies do espaço tridimensional definidas por uma equação do segundo grau da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0$$

onde $A, B, C, \ldots, K$ são constantes (A, B, C não são todas nulas), chamam-se *superfícies quádricas*.

É possível eliminar os termos xy, xz, yz na equação anterior recorrendo a uma adequada mudança de coordenadas (envolvendo as noções de valores próprios e vectores próprios de uma matriz). Assim, apenas se considerará equações da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + H = 0$$

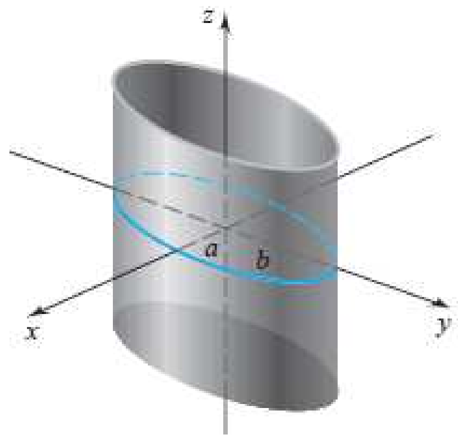
As superfícies quádricas podem ser classificadas em nove tipos distintos:
i) *Cilindro elíptico*;
ii) *Cilindro parabólico*;
iii) *Cilindro hiperbólico*;
iv) *Elipsoide*;
v) *Hiperboloide de uma folha*;
vi) *Hiperboloide de duas folhas*;
vii) *Cone elíptico*;
viii) *Paraboloide elíptico*;
ix) *Paraboloide hiperbólico*.

- A análise das superfícies quádricas inside sobre um conjunto de propriedades que as caracterizam, nomeadamente:
  i) Os *pontos de intersecção* com os eixos coordenados;
  ii) Os *traços*, que são as intersecções com os planos coordenados;
  iii) As *secções*, que são as intersecções com planos em geral;
  iv) O *centro* (algumas possuem um centro; outras não);
  v) *Simetria* (em relação a eixos ou a planos);
  vi) Se são *limitadas* ou *não limitadas*.

- Seja a curva *C* situada no plano *M*. O conjunto dos pontos situados nas linhas que passam em *C* e são perpendiculares a *M* definem uma superfície que é designada por *superfície cilíndrica recta*; a curva *C* chama-se *directriz*, enquanto as linhas referidas designam-se por *geratrizes* da superfície. Se as geratrizes não forem perpendiculares ao plano M, a superfície chama-se *superfície cilíndrica oblíqua*.

Exemplo 7: *Cilindro elíptico* (*recto*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\ z\in\mathbb{R}$$



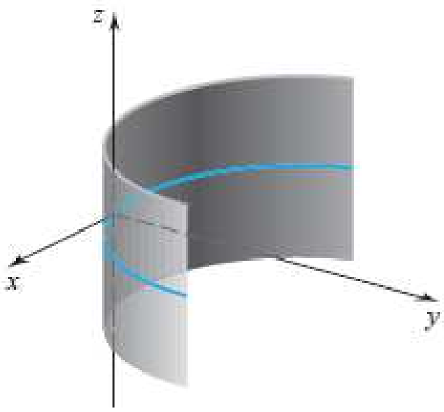
A superfície é formada pelas *geratrizes* que passam na elipse (*directriz*)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*. Se $a=b$ obtém-se uma *superfície cilíndrica circular* (*recta*).

Exemplo 8: *Cilindro parabólico* (*recto*):

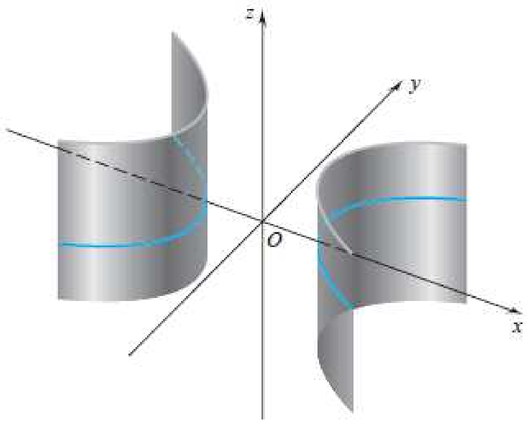
$$x^2 = 4cy \ , \ z \in \mathbb{R}$$



Trata-se de uma superfície que é formada pelas *geratrizes* que passam na parábola (*directriz*) $x^2 = 4cy$ e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*.

Exemplo 9: *Cilindro hiperbólico* (*recto*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ z \in \mathbb{R}$$



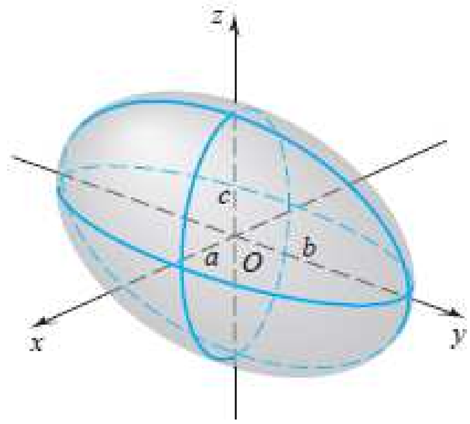
A superfície divide-se em duas regiões, cada uma delas gerada por um dos ramos da hipérbole (*directriz*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As *geratrizes* passam na hipérbole e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*.

Exemplo 10: *Elipsoide*:

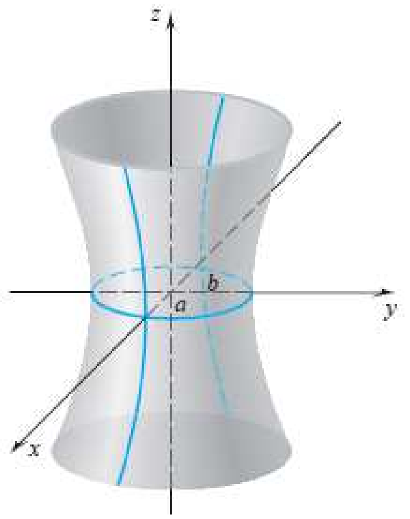
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Os pontos onde a superfície intersecta os eixos coordenados são os *vértices* do elipsoide. Os valores *a*, *b* e *c* chamam-se *semieixos*. Se dois dos semieixos forem iguais obtém-se um *elipsoide de revolução*; se $a=b=c$ obtém-se uma *superfície esférica*.

Exemplo 11: *Hiperboloide de uma folha*:

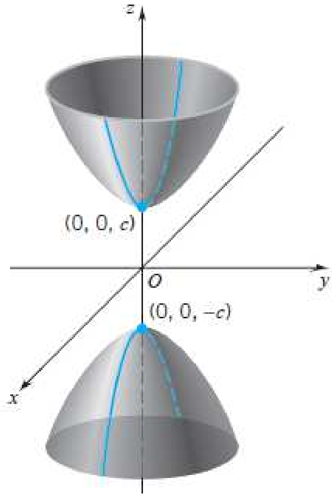
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Se $a=b$ obtém-se um *hiperboloide* (*de uma folha*) *de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são círcunferências.

Exemplo 12: *Hiperboloide de duas folhas*:

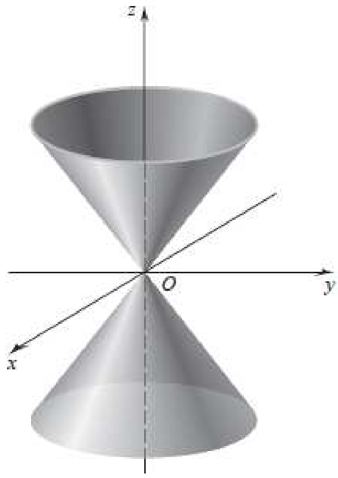
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



A superfície intersecta os eixos coordenados em dois pontos que são os seus *vértices*. Se $a=b$ obtém-se um *hiperboloide* (*de duas folhas*) *de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são circunferências.

Exemplo 13: *Cone elíptico*:

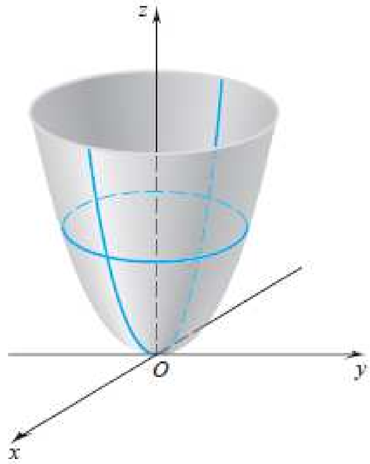
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



A superfície intersecta os eixos coordenados na origem. A superfície divide-se em duas regiões que se designam por *folhas do cone*. Se $a=b$ obtém-se um *cone circular* (*de duas folhas*) ou, simplesmente, um *cone*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são circunferências.

Exemplo 14: *Paraboloide elíptico*:

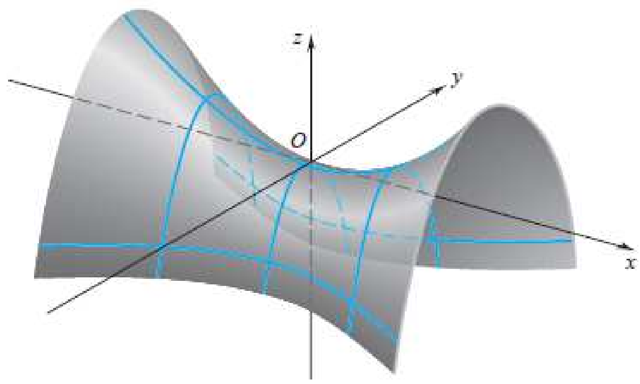
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



A origem é o *vértice* do paraboloide. Se $a=b$ obtém-se um *paraboloide de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são circunferências.

Exemplo 15: *Paraboloide hiperbólico*:

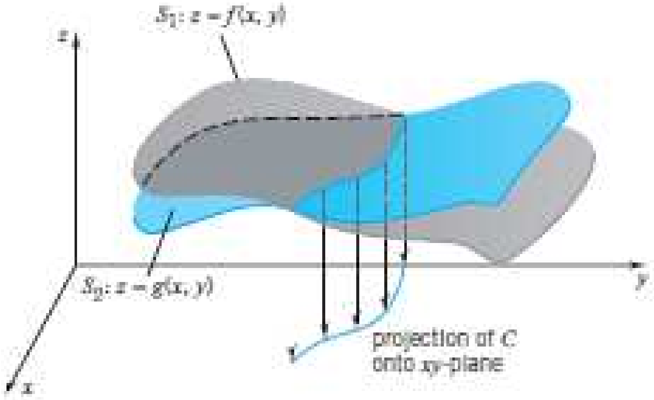
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



A origem é um *mínimo* para o *traço* da superfície no plano *xOz* e um *máximo* para o *traço* no plano *yOz*. Como se verá oportunamente um ponto nestas condições é designado por *ponto de sela da função* $z=f(x,y)$.

Projeções

- Seja C a curva do espaço definida pela intersecção das superfícies $S_1\ :\ z = f(x,y)$ e $S_2\ :\ z = g(x,y)$.



- A curva C é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) tais que:

$$z = f(x,y) \text{ e } z = g(x,y)$$

- O conjunto de todos os pontos tais que

$$f(x,y) = g(x,y)\ ,\ z \in \mathbb{R}$$

é a superfície cilíndrica vertical que passa pela curva C (*directriz*).

- O conjunto de todos os pontos tais que

$$f(x,y) = g(x,y)\ ,\ z = 0$$

é designada por *projecção de C no plano xOy*; trata-se da curva no plano xOy que resulta da intersecção deste plano com a superfície cilíndrica atrás referida.

Exemplo 16: Seja a curva *C* definida pela intersecção do plano $z = 2y + 3$ com o *paraboloide de revolução* $z = x^2 + y^2$; esta superfície pode ser gerada rodando a parábola $z = x^2$ em torno do eixo dos *zz*.
A curva *C* é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 2y + 3$$

A projecção de *C* no plano xOy é o conjunto de todos os pontos tais que

$$x^2 + y^2 = 2y + 3 \;,\; z = 0$$

ou seja:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4 \;,\; z = 0$$

Trata-se de uma circunferência (situada no plano *xOy*) de raio 2 e com centro no ponto $(0,1,0)$.

Curvas de nível

- Seja *f* uma função real a duas variáveis definida num subconjunto *D* do plano *xOy*. Chama-se *gráfico de f* ao conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y) \;,\; (x, y) \in D$$

Exemplo 17: O domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é todo o plano *xOy*. O gráfico de *f* é o *paraboloide de revolução*:

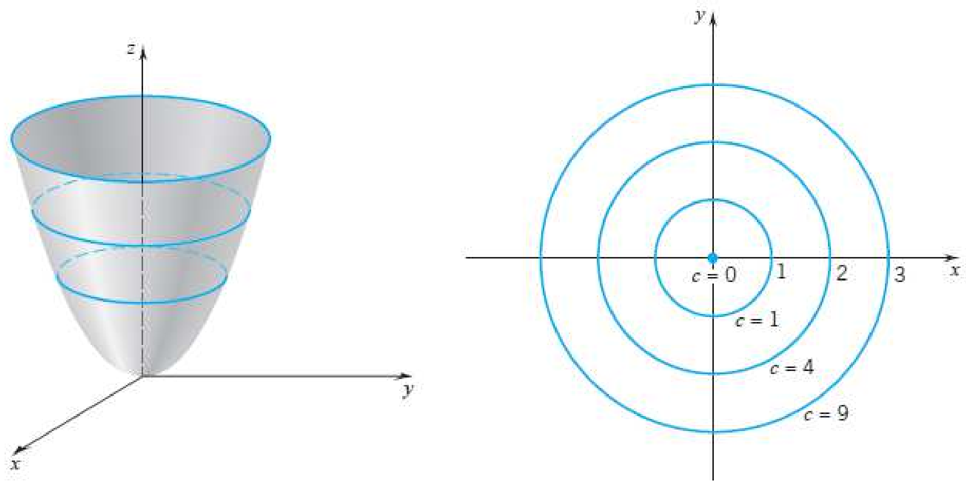
$$z = x^2 + y^2$$

- Se c pertence ao contradomínio da função $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então é possível traçar a curva $f(x,y) = c$, $z = 0$ e que é designada por *curva de nível de f*. Esta curva pode ser obtida a partir da projecção no plano *xOy* da linha de intersecção do gráfico de f com o plano horizontal $z = c$.

- As curvas de nível permitem interpretar gráficos de funções reais a duas variáveis que, em muitos casos, são difíceis de visualizar e de desenhar; mesmo quando desenhados, são difíceis de interpretar.

Exemplo 18: No caso da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ do exemplo 17, as suas curvas de nível são as circunferências situadas no plano *xOy* e centradas na origem:

$$x^2 + y^2 = c \ , \ z = 0 \ (c \geq 0)$$



A função $f(x,y)$ toma o valor c em todos os pontos do plano *xOy* situados na circunferência de raio $\sqrt{c}$ e centrada na origem; na origem obtém-se $f(x,y) = 0$.

Superfícies de nível

- Sendo o desenho de funções reais a duas variáveis, muitas vezes, complicado, o desenho de uma função real a três variáveis é impossível. No entanto, é possível visualizar o comportamento de uma função $w = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$ analisando as chamadas *superfícies de nível de f*. São subconjuntos do domínio de *f* com equações da forma $f(x,y,z) = c$, em que *c* pertence ao contradomínio da função *f*.

Exemplo 19: As superfícies de nível da função $f(x,y,z) = Ax + By + Cz$ são os planos estritamente paralelos $Ax + By + Cz = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20: As superfícies de nível da função $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ são as superfícies esféricas centradas na origem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \ , \ c \geq 0$$

Derivadas parciais: funções reais a duas variáveis

- Seja *f* uma função real a duas variáveis *x*, *y*. As *derivadas parciais de f em relação a x* e *em relação a y* são, respectivamente, as funções f_x e f_y , definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso, $f_x(x_0,y_0)$ define a razão da variação de $f(x,y_0)$ em relação a x em $x = x_0$, e $f_y(x_0,y_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y)$ em relação a y em $y = y_0$.

Exemplo 21: Em relação à função

$$f(x,y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y)$$

tem-se:

$$f_x(x,y) = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2 + y} \qquad\qquad f_y(x,y) = xe^{xy} + \frac{1}{x^2 + y}$$

O número

$$f_x(2,1) = e^2 + \frac{4}{5}$$

representa a razão da variação em relação a x da função:

$$f(x,1) = e^x + \ln(x^2 + 1) \text{ em } x = 2$$

O número

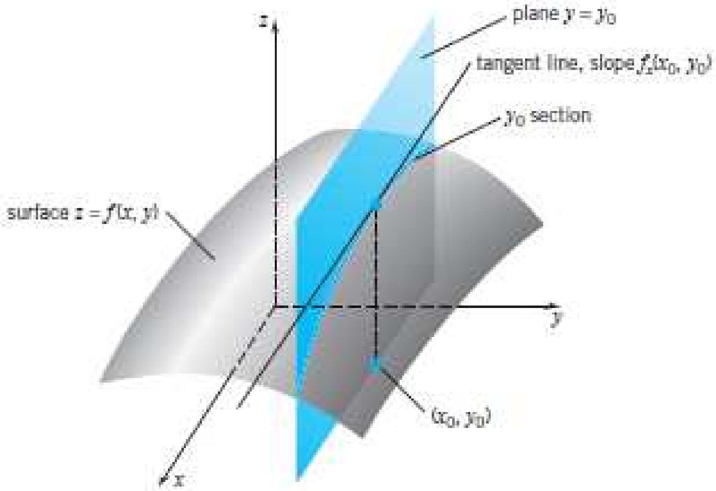
$$f_y(2,1) = 2e^2 + \frac{1}{5}$$

representa a razão da variação em relação a y da função:

$$f(2,y) = e^{2y} + \ln(4 + y) \text{ em } y = 1$$

- Tal como acontece no caso de uma função real a uma variável, os valores das derivadas parciais $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ podem ser interpretados geometricamente.

- Seja a superfície $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $y = y_0$ (paralelo ao plano *xOz*) obtém-se uma curva, que é a secção y_0 da superfície.



A secção y_0 da superfície é o gráfico da função:

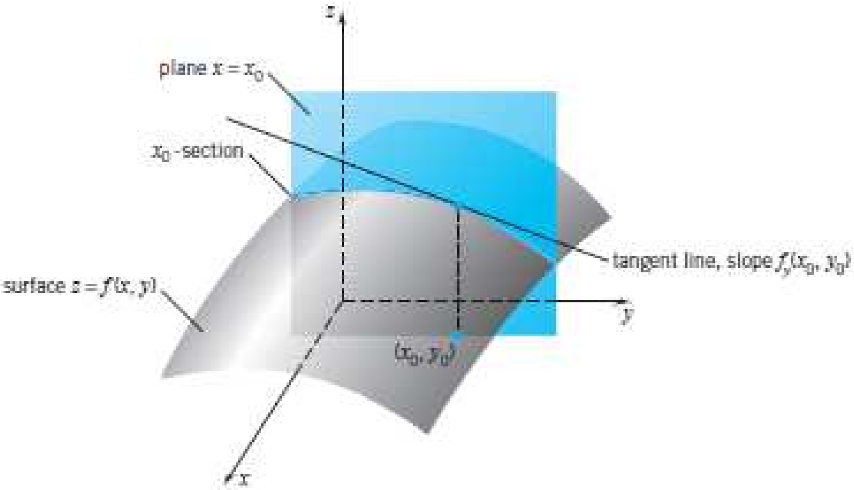
$$g(x) = f(x,y_0)$$

Derivando em ordem a *x* obtém-se

$$g'(x) = f_x(x,y_0)$$

e, em particular, $g'(x_0) = f_x(x_0,y_0)$. Assim, $f_x(x_0,y_0)$ é o declive da secção y_0 da superfície no ponto de coordenadas $\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$.

- Seja a superfície $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $x = x_0$ (paralelo ao plano *yOz*) obtém-se uma curva, que é a secção x_0 da superfície.



A secção x_0 da superfície é o gráfico da função:

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Derivando em ordem a *y* obtém-se

$$h'(y) = f_y(x_0, y)$$

e, em particular, $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Assim, $f_y(x_0, y_0)$ é o declive da secção x_0 da superfície no ponto de coordenadas $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$.

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Derivadas parciais: funções reais a três variáveis

- Seja f uma função real a três variáveis x, y, z. As *derivadas parciais de f em relação a x, em relação a y* e *em relação a z* são, respectivamente, as funções f_x, f_y e f_z, definidas por

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso:
  i) $f_x(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x,y_0,z_0)$ em relação a x em $x = x_0$;
  ii) $f_y(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y,z_0)$ em relação a y em $y = y_0$;
  iii) $f_z(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y_0,z)$ em relação a z em $z = z_0$.

Exemplo 22: Em relação à função

$$g(x,y,z) = x^2 e^{y/z}$$

tem-se:

$$g_x(x,y,z) = 2xe^{y/z} \qquad g_y(x,y,z) = \frac{x^2}{z} e^{y/z}$$

$$g_z(x,y,z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{y/z}$$

Em particular:

$$g_x(-1,2,1) = -2e^2, \qquad g_y(-1,2,1) = e^2, \qquad g_z(-1,2,1) = -2e^2$$

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x,y,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \qquad f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$