Comprimento de arco

- Seja a curva diferenciável, C, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in [a,b]$$

Pretende-se obter uma função que determine o comprimento da curva, $L(C)$, medido a partir do seu ponto inicial, $\vec{r}(a)$.

- A função pretendida é uma função escalar, $s(t)$, $t \in [a,b]$, designada por *comprimento de arco*, que tem as seguintes propriedades:
i) É uma função monótona crescente;
ii) $s(a) = 0$ e $s(b) = L(C)$;
iii) É aditiva.

- Comecemos por mostrar que:

$$L(C) \le \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Consideremos o seguinte conjunto de pontos em $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

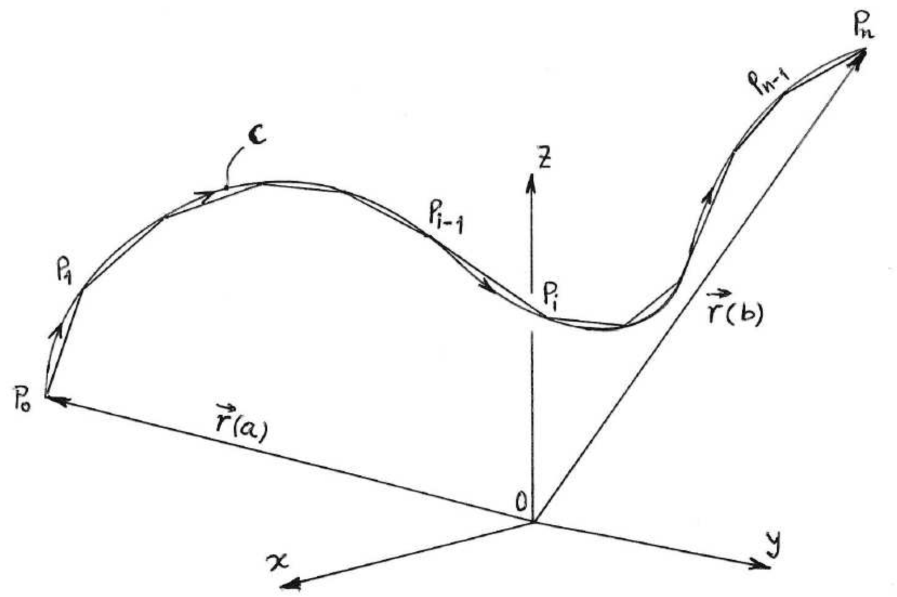
a que correspondem, respectivamente, os seguintes pontos sobre a curva C:

$$P_0,\ P_1,\ \ldots\ ,\ P_{i-1},\ P_i,\ \ldots\ ,\ P_{n-1},\ P_n$$

Unindo estes pontos, consecutivamente, através de segmentos de recta, obtém-se uma *linha poligonal* γ, ou seja,

$$\gamma = \overline{P_0P_1} \cup \ldots \cup \overline{P_{i-1}P_i} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$$

que constitui uma aproximação para a curva *C*.



É intuitivo que, por mais pontos que se considere na construção de γ, o comprimento de γ nunca excederá o comprimento de *C*, isto é:

$$L(\gamma) \leq L(C)$$

Seja, então, a seguinte partição arbitrária, Π, para o intervalo $[a,b]$

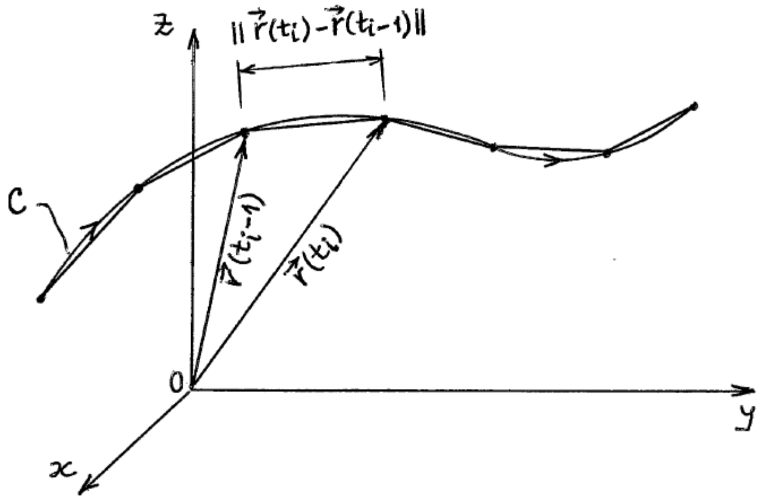
$$\Pi = \{a = t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n = b\}$$

à qual estão associados os seguintes pontos em *C*:

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(t_0),\ \ldots\ ,\vec{r}(t_{i-1}),\ \vec{r}(t_i),\ \ldots\ ,\vec{r}(t_n) = \vec{r}(b)$$

O comprimento da linha poligonal inscrita em C é dado por:

$$L_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \left\| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \right\|$$



Notando que

$$\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec{r}'(t)dt$$

resulta, tendo em atenção (8),

$$\left\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\right\|=\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec{r}'(t)dt\right\|\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt$$

e, portanto,

$$L_{\Pi}=\sum_{i=1}^{n}\left\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\right\|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt=\int_a^b\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt$$

Como a partição Π considerada é arbitrária, então a desigualdade

$$L_{\Pi}\le\int_a^b\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt \tag{23}$$

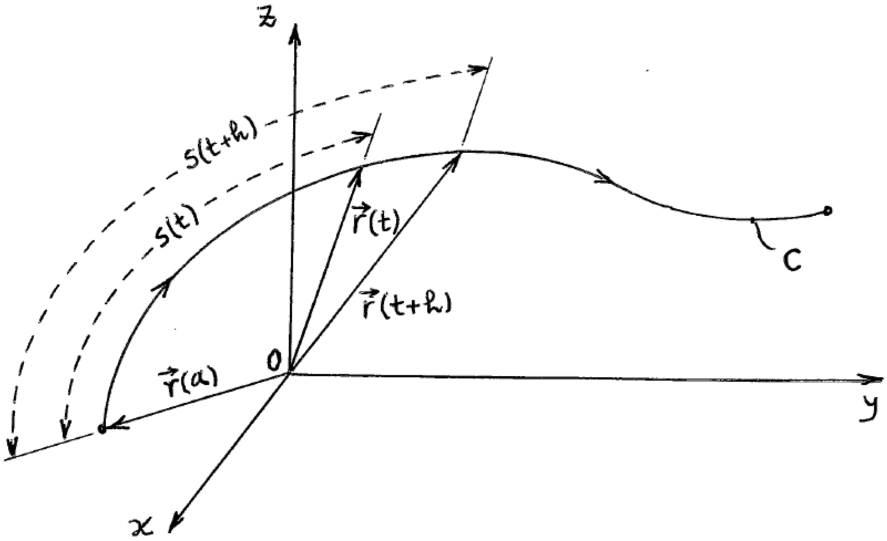
deverá verificar-se para qualquer L_{Π}, pelo que é possível afirmar que o integral em (23) será um *majorante* para qualquer L_{Π}.

Como $L(C)$ é o *supremo* de todos os valores que se podem obter para L_{Π}, então pode-se concluir que:

$$L_{\Pi}\le L(C)\le\int_a^b\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt \tag{24}$$

- O objectivo seguinte passa por mostrar que a desigualdade (24) é, na realidade, uma igualdade.

- Sejam os pontos $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, em que $h>0$, sobre a curva *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$, tais que:
  i) $s(a)=0$;
  ii) $s(t)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$;
  iii) $s(t+h)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$;
  iv) $s(t+h)-s(t)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$.



Atendendo a (24), tem-se

$$\left\|\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right\| \leq s(t+h)-s(t) \leq \int_t^{t+h} \left\|\vec{r}'(u)\right\| du$$

ou seja, dividindo por $h>0$,

$$\left\|\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}\right\| \leq \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|\vec{r}'(u)\right\| du$$

O *primeiro teorema do valor médio* permite escrever:

$$\exists c \in (t,t+h) \ : \ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|\vec{r}'(u)\right\| du = \frac{1}{h}\left\|\vec{r}'(c)\right\|(t+h-t) = \left\|\vec{r}'(c)\right\|$$

Verifica-se, então,

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{\vec{r}\,(t+h)-\vec{r}\,(t)}{h}\right\| \le \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

isto é:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \le \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \;\Leftrightarrow\; \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

De modo semelhante, é possível mostrar que se $h<0$:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \le \lim_{h\to 0^-}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \;\Leftrightarrow\; \lim_{h\to 0^-}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

Assim, conclui-se que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \;\Leftrightarrow\; s'(t) = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

Integrando entre *a* e *t*, obtém-se

$$s(t)-s(a) = \int_a^t \left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

e, ainda,

$$s(t) = \int_a^t \left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

já que, por hipótese, se considerou $s(a)=0$.
O comprimento total da curva *C* é, então, dado por:

$$L(C) = s(b) = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt$$

Exemplo 25: Seja a circunferência do exemplo 14, parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\text{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

Sabendo que

$$\vec{r}'(t) = -a\text{sen}(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ \Rightarrow \ \left\| \vec{r}'(t) \right\| = a$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \vec{r}'(u) \right\| du = a\int_0^t du = at \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

O perímetro da circunferência corresponde ao comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(2\pi)$, isto é:

$$s(2\pi) = a\int_0^{2\pi} du = 2\pi a$$

Exemplo 26: Seja a hélice circular do exemplo 5, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \geq 0$$

Notando que

$$\vec{f}'(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} \ \Rightarrow \ \left\| \vec{f}'(t) \right\| = \sqrt{5}$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \vec{f}'(u) \right\| du = \sqrt{5}\int_0^t du = \sqrt{5}t \ , \ t \geq 0$$

O comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(2\pi)$ é:

$$s(2\pi) = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} du = 2\sqrt{5}\pi$$

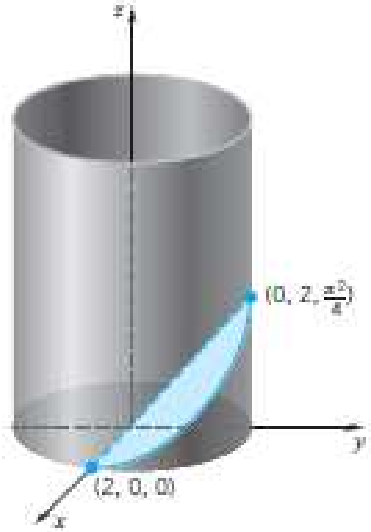
Exemplo 27: A função vectorial

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(t)\vec{j} + t^2\vec{k} \;,\; t \in [0, \pi/2]$$

parametriza a curva, C, que tem o seu ponto inicial em $\vec{r}(0) = (2,0,0)$ e tem o seu ponto final em $\vec{r}(\pi/2) = \left(0, 2, \pi^2/4\right)$.

A curva C é um arco de uma *hélice circular* que, contrariamente ao que sucede com a hélice do exemplo 5, tem *passo* variável; entre as rotações de ordem $n-1$ e de ordem n o passo tem o valor:

$$(2n-1)(2\pi)^2$$



Pretende-se calcular o comprimento de C e compara-lo com a distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$.

Dado que

$$\vec{r}'(t) = -2\mathrm{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2t\vec{k} \;\Rightarrow\; \left\|\vec{r}'(t)\right\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

o comprimento da curva C é dado por:

$$L(C) = \int_0^{\pi/2} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2}\, dt \qquad (25)$$

Considerando no integral indefinido

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt$$

a mudança de variável

$$t = \mathrm{tg}(u) \;\Rightarrow\; dt = \frac{1}{\cos^2(u)} du = \sec^2(u) du$$

e notando que

$$\sec^2(u) = 1 + \text{tg}^2(u)$$

resulta:

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \int \sec^2(u)\sqrt{1+\text{tg}^2(u)}\,du = \int \sec^2(u)\sec(u)\,du \qquad (26)$$

Aplicando o processo de integração por partes

$$v = \sec(u) \;\Rightarrow\; dv = \sec(u)\text{tg}(u)\,du$$

$$dw = \sec^2(u)\,du \;\Rightarrow\; w = \text{tg}(u)$$

obtém-se para (26):

$$\int \sec^2(u)\sec(u)\,du = \int v\,dw = vw - \int w\,dv \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)\,du = \sec(u)\text{tg}(\text{u}) - \int \sec(u)\left(\sec^2(u) - 1\right)du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\int \sec^3(u)\,du = \sec(u)\text{tg}(\text{u}) + \int \sec(u)\,du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)\,du = \frac{1}{2}\sec(u)\text{tg}(\text{u}) + \frac{1}{2}\int \sec(u)\,du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)\,du = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \sec(u)\,du \qquad (27)$$

Por outro lado,

$$\int \sec(u)\,du = \int \sec(u)\frac{\sec(u)+\text{tg}(u)}{\sec(u)+\text{tg}(u)}\,du = \int \frac{\sec^2(u)+\sec(u)\text{tg}(u)}{\sec(u)+\text{tg}(u)}\,du$$

e tendo em conta que

$$v = \sec(u) + \text{tg}(u) \;\Rightarrow\; dv = \left(\sec(u)\text{tg}(u) + \sec^2(u)\right)du$$

resulta:

$$\int \sec(u)du = \int \frac{1}{v}dv = \ln(v) + K_1 = \ln\big(\sec(u) + \operatorname{tg}(u)\big) + K_1 =$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K_1 \tag{28}$$

Recorrendo a (27) e (28), o integral indefinido (26) toma o valor

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K$$

pelo que o comprimento da curva *C*, definido em (25), é:

$$L(C) = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2}dt = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \ln\left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right] \tag{29}$$

A distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$ é:

$$\left\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\right\| = \left\|-2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k}\right\| = \sqrt{8 + \frac{\pi^4}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{128 + \pi^4} \tag{30}$$

Comparando os valores das distâncias (29) e (30)

$$\frac{L(C)}{\left\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\right\|} \cong 1{,}108$$

pode-se concluir que o comprimento da curva *C* é cerca de 11% maior que a distância entre os pontos que são as suas extremidades.

Exemplo 28 Seja a curva, C, correspondente ao gráfico da função real de variável real do exemplo 3, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ t \in [a,b]$$

Sabendo que

$$\vec{f}'(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ \Rightarrow\ \left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{1+[f'(t)]^2}$$

o seu comprimento é:

$$L(C) = \int_a^b \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}\ dt$$

- Seja a curva diferenciável, C, parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in [a,b]$$

Sendo $s(t)$ o comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$, então

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

e, portanto,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- Seja a função contínua e diferenciável $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Sendo $s(x)$ o comprimento do gráfico da função entre $(a,f(a))$ e $(x,f(x))$, então:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

O comprimento de arco como parâmetro

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

com comprimento igual a $L(C) = L$.
O comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$ é:

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(u)\| du$$

Dado que $s'(t) = \|\vec{r}\,'(t)\| > 0$, a função $s = s(t)$ é estritamente crescente e injectiva. É, então, possível definir a sua função inversa:

$$t = t(s) \ , \ s \in [0,L]$$

A função vectorial

$$\vec{R} = \vec{R}(s) = \vec{r}[t(s)] \ , \ s \in [0,L]$$

parametriza a curva *C* em relação ao comprimento de arco.

Teorema 14: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada em relação ao comprimento de arco, *s*, pela função $\vec{R} = \vec{R}(s)$, $s \in [0,L]$. Então $\|\vec{R}\,'(s)\| = 1$ e, portanto:

$$\vec{R}\,'(s) = \vec{T}(s)$$

Neste caso o vector tangente à curva, $\vec{R}\,'(s)$, coincide com o versor da tangente, $\vec{T}(s)$, em cada ponto de *C*.

Exemplo 29: Em relação à circunferência dos exemplos 14 e 25, tem-se

$$s = s(t) = at \;\Leftrightarrow\; t = t(s) = s/a$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ s \in [0, 2\pi a]$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}$$

e, portanto, $\left\|\vec{R}'(s)\right\| = 1$.

Exemplo 30: No caso da hélice circular dos exemplos 5 e 26, tem-se

$$s = s(t) = \sqrt{5}t \;\Leftrightarrow\; t = t(s) = s/\sqrt{5}$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{f}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) = 2\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\vec{k}\ ,\ s \geq 0$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

e, portanto, $\left\|\vec{R}'(s)\right\| = 1$.

Aplicação ao movimento curvilíneo

- Admita-se que a curva C representa a *trajectória* percorrida por um objecto que se movimenta no espaço, situando-se, em cada instante de tempo t, no ponto que é a extremidade do vector de posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in I$$

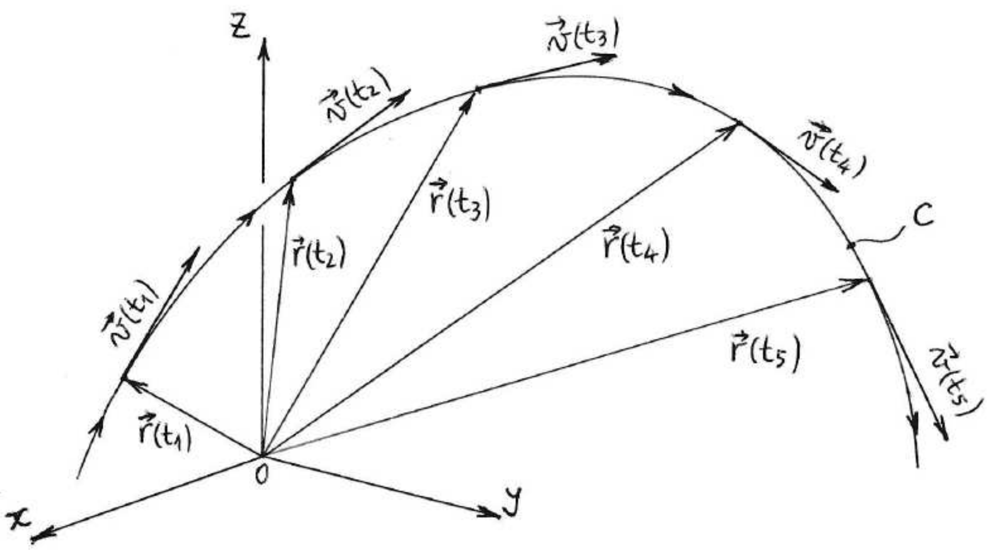
Neste caso, a função vectorial $\vec{r}(t)$ é usualmente designada por *função de posição do movimento*.

- O movimento do objecto ao longo da trajectória, C, é caracterizado, em termos cinemáticos, através das propriedades seguintes:

a) *Vector velocidade* no instante t: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$.
É tangente à trajectória em cada ponto e aponta no sentido do movimento, sendo dado por

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$$

em que $\vec{T}(t)$ é o versor da tangente à trajectória e $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ é o *módulo do vector velocidade* (grandeza medida pelo velocímetro).



b) Durante o intervalo de tempo $[t_0, t]$ o objecto desloca-se, ao longo de *C*, entre os pontos $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{r}(t)$, percorrendo o *espaço* dado por:

$$s'(t) = v(t) \;\Rightarrow\; s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(u)du \;,\; t_0, t \in I$$

c) *Vector aceleração* no instante *t*: $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$.
Mede a variação do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, podendo, de um modo geral, ser decomposto em duas componentes ortogonais:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

d) *Vector aceleração tangencial* no instante *t*: $\vec{a}_T(t)$.
Mede a variação do *módulo do vector velocidade*, $v(t)$, sendo definido por:

$$\vec{a}_T(t) = v'(t)\vec{T}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T}(t)$$

Se $v'(t) = 0$ o movimento é *uniforme* ($v(t)$ é constante) e, portanto, $\vec{a}_T(t) = \vec{0}$. O movimento é *acelerado* se $v'(t) > 0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido), sendo *retardado* se $v'(t) < 0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com sentidos opostos).

e) *Vector aceleração normal* no instante *t*: $\vec{a}_N(t)$.
Mede a variação de direcção do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, sendo dado por

$$\vec{a}_N(t) = v(t)\vec{T}'(t) = v(t)\left\|\vec{T}'(t)\right\|\vec{N}(t) = \frac{ds}{dt}\left\|\vec{T}'(t)\right\|\vec{N}(t) \tag{31}$$

em que $\vec{N}(t)$ é o versor normal principal. Esta componente só será nula se a trajectória for rectilínea, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$; caso contrário, apontará, tal com o versor $\vec{N}(t)$, no sentido definido pelo lado côncavo da trajectória, sendo, também, designada por *componente centrípeta* do *vector aceleração*.

f) O *módulo do vector aceleração* $a(t)=\|\vec{a}(t)\|$ no instante t pode ser reescrito sob a forma

$$a(t)=\sqrt{a_T^2(t)+a_N^2(t)}$$

em que

$$a_T(t)=\|\vec{a}_T(t)\|=|v'(t)|$$

é o *módulo do vector aceleração tangencial* e

$$a_N(t)=\|\vec{a}_N(t)\|=v(t)\|\vec{T}'(t)\| \tag{32}$$

é o *módulo do vector aceleração normal*.
Notando que

$$v'(t)=\vec{a}(t)\cdot\vec{T}(t)$$

tem-se:

$$a_T(t)=\left|\vec{a}(t)\cdot\vec{T}(t)\right|=\frac{\left|\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)\right|}{v(t)}$$

Por outro lado, tendo em conta que

$$\vec{T}(t)\times\vec{a}(t)=v(t)\vec{T}(t)\times\vec{T}'(t)=v(t)\left\|\vec{T}'(t)\right\|\vec{B}(t)$$

obtém-se:

$$a_N(t)=\left\|\vec{T}(t)\times\vec{a}(t)\right\|=\frac{\left\|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\right\|}{v(t)} \tag{33}$$