U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

Nome

Espaço reservado para o avaliador

AULA 7 : Ex°s Tratados - ficha 2 : 34, 38 a) d) e) i), 41, 39

Ex°s Propostos - ficha 2 : 37, 38 b) c) f) h) k), 40

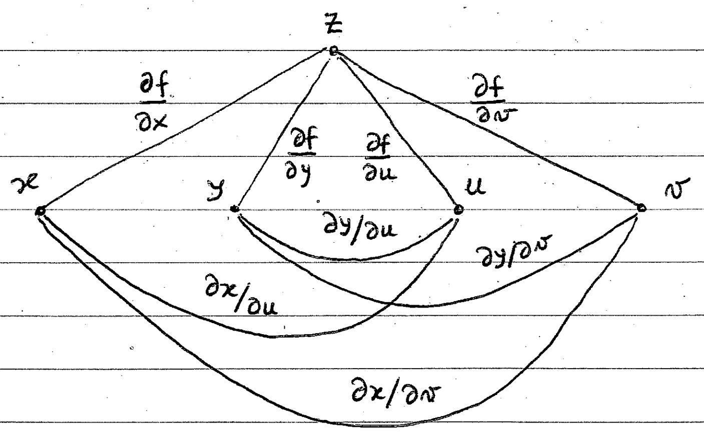
34) $z = f(y, x, v, u)$ em que

$$f(y, x, v, u) = x + \ln(u) + (y+v)^2$$

$$x(u,v) = 2u + 3v$$

$$y(u,v) = \cos(u) + \operatorname{sen}(v)$$

Considere-se o diagrama de árvore



Sabe-se que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+v) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2(y+v) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 3 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \cos(v) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\operatorname{sen}(u)$$

Então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 2(y+v)(-\operatorname{sen}(u)) + (1)(2) + \frac{1}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = -2\operatorname{sen}(u)\big(v + \cos(u) + \operatorname{sen}(v)\big) + 2 + \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2(y+v)\cos(v) + (1)(3) + 2\cdot(y+v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2(y+v)\big(1+\cos(v)\big) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2\big(1+\cos(v)\big)\big(v + \cos(u) + \operatorname{sen}(v)\big) + 3$$

EXTREMOS LOCAIS - RESUMO

Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis.

Pontos Críticos → pontos onde:

i) $\nabla f(x,y) = 0$

$\downarrow$

Pontos Estacionários

Neste caso a classificação é feita recorrendo ao teste das derivadas parciais de segunda ordem

ii) $\nabla f(x,y)$ não existe

Neste caso a classificação do ponto crítico tem de ser feita estudando o comportamento da função na vizinhança desse ponto.

Wiggo

No caso presente apenas nos centraremos no problema da classificação de um ponto estacionário. Existem três situações que podem ocorrer: mínimo local, máximo local e ponto de sela (ponto onde a função não tem um comportamento uniforme ao longo de todas as direcções que passam nesse ponto).

Se (x_0, y_0) é um ponto estacionário, o teste das derivadas parciais de segunda ordem envolve o cálculo do determinante:

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

onde se admitiu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = B$

Então;

i) $\Delta < 0$, (x_0,y_0) é um ponto de sela;

ii) $\Delta > 0$ e $A > 0$, $f(x,y)$ possui um mínimo local em (x_0,y_0);

iii) $\Delta > 0$ e $A < 0$, $f(x,y)$ possui um máximo local em (x_0,y_0);

iv) $\Delta = 0$, o teste é inconclusivo; a classificação é feita analisando o comportamento da função na vizinhança de (x_0,y_0)

Wir

38) a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

Ponto Estacionário : $O = (0,0)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

No ponto $O = (0,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$ e $A > 0$.

A função tem um mínimo local (neste caso, é um mínimo absoluto) em $O = (0,0)$ tendo o valor $f(0,0) = 0$.

NOTA : A superfície $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ é um parabolóide virado para cima (na direcção do semieixo positivo dos zz) pelo que o ponto $O = (0,0)$ corresponde, de facto, a um ponto onde $f(x,y)$ possui um mínimo local (absoluto).

38) d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^9 - y = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^8 - 1) = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

Pontos Estacionários : $O = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,-1)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$ então

Curso ____ Data __/__/__

Disciplina ____ Ano ____ Semestre ____

Nome ____

Espaço reservado para o avaliador

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

i) No ponto $O = (0,0)$:

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-4)^2 = -16 < 0$$

A função tem um ponto de sela em $O = (0,0)$.

ii) No ponto $P_1 = (1,1)$:

$$\Delta = 12(12) - (-4)^2 = 128 > 0 \quad e \quad A = 12 > 0$$

A função tem um mínimo local em $P_1 = (1,1)$ tendo o valor $f(1,1) = -2$.

iii) No ponto $P_2 = (-1,-1)$:

$$\Delta = 12(12) - (-4)^2 = 128 > 0 \quad e \quad A = 12 > 0$$

A função tem um mínimo local em $P_2 = (-1,-1)$ tendo o valor $f(-1,-1) = -2$.

Neste caso, como $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$, estes pontos correspondem a mínimos absolutos.

38) e) $f(x,y) = 1-(x-1)^2-y^2 = -x^2-y^2+2x$

$\nabla f(x,y) = (-2x+2, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=0 \\ -y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Ponto Estacionário : $P=(1,0)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x+2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

No ponto $P=(1,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0$ e $A < 0$

A função tem um máximo local (neste caso, é um máximo absoluto) em $P=(1,0)$ tendo o valor $f(1,0)=1$.

38) i) $f(x,y) = x^3+y^3-6xy$

$\nabla f(x,y) = (3x^2-6y, 3y^2-6x) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2y=0 \\ y^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-8y=0 \\ x=y^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^3-8)=0 \\ x=y^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Pontos Estacionários : $O=(0,0)$, $P=(2,2)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-6y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-6x$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$

No ponto $O = (0,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$

A função tem um ponto de sela em $O = (0,0)$.

No ponto $P = (2,2)$

$\Delta = 12(12) - (-6)^2 = 108 > 0$ e $A = 12 > 0$

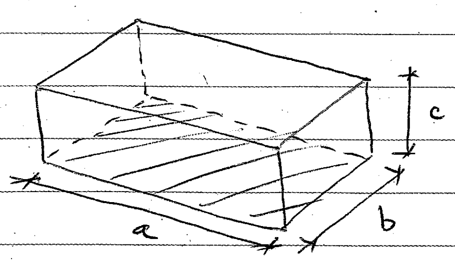
A função tem um mínimo local (neste caso, é um mínimo absoluto) em $P = (2,2)$ tendo o valor $f(2,2) = -8$.

41)

Volume:

$V = abc = 96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = \frac{96}{ab}$



Custo da base da caixa: $0{,}3\,ab$

Custo das faces laterais da caixa: $2(0{,}1)\,bc + 2(0{,}1)\,ac =$

$= 0{,}2\,\cancel{b}\,\frac{96}{a\cancel{b}} + 0{,}2\,\cancel{a}\,\frac{96}{\cancel{a}b} = 19{,}2\,a^{-1} + 19{,}2\,b^{-1}$

função que define o custo da caixa:

$$f(a,b) = 0,3\,ab + 19,2\,a^{-1} + 19,2\,b^{-1}$$

Pretende-se encontrar o "ponto" (a,b) onde a função possui um mínimo local (absoluto).

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}\right) = \left(0,3\,b - \frac{19,2}{a^2}\ ,\ 0,3\,a - \frac{19,2}{b^2}\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3\,b - \dfrac{19,2}{a^2} = 0 \\ 0,3\,a - \dfrac{19,2}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \dfrac{64}{a^2} = 0 \\ a - \dfrac{64}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ ab^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ ab^2 = a^2 b \end{cases} \underset{(a \neq 0)}{} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ b^2 - ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ b(b-a) = 0 \end{cases} \underset{(b \neq 0)}{} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 64 \\ b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

pelo que $c = \dfrac{96}{16} = 6$ e

$$f(4,4) = 0,3\,(16) + \frac{19,2}{4} + \frac{19,2}{4} = 4,8 + 2\,(4,8) = 14,4\ €$$

Confirmemos que $a = b = 4$ corresponde a um mínimo local (absoluto) da função:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{38,4}{a^3}\ ,\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{38,4}{b^3}\ ,\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 0,3$$

No "ponto" $(4,4)$ verifica-se:

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{(38,4)^2}{2\,(64)^2} - (0,3)^2 = 0,09 > 0 \quad \text{e} \quad A = \frac{38,4}{64} = 0,6 > 0$$

Efectivamente, a função tem um mínimo local (absoluto) em $(4,4)$.

[signature]

Folha Nº 9 / 10

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

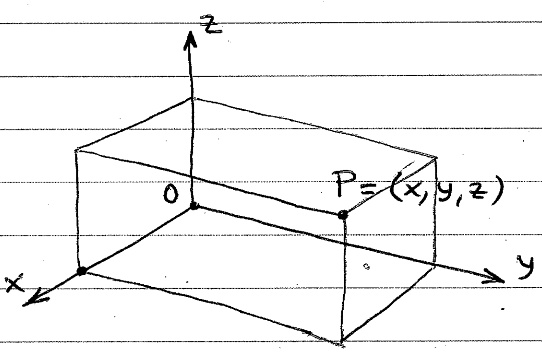
Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

39)

O ponto P está situado no plano $x+y+z=1$.



Volume do prisma:

$$V = xyz \quad \wedge \quad x+y+z=1$$

A função que define o volume do prisma é:

$$f(x,y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$$

Pretende-se encontrar o "ponto" (x,y) onde a função possui um máximo local (absoluto).

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - 2xy - y^2,\ x - x^2 - 2xy\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = y - y^2 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 - y \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - x - 2(1-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-2x \\ -1+3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

pelo que $z = 1 - 1/3 - 1/2 = 1/3$ e

$$f(1/3, 1/3) = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27} \quad \text{(volume)}$$

Confirmemos que $x = y = 1/3$ corresponde a um máximo local (absoluto) da função:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \,,\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \,,\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y$$

No "ponto" $(1/3, 1/3)$ verifica-se:

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{e} \quad A = -\frac{2}{3} < 0$$

Efectivamente, a função tem um máximo local (absoluto) em $(1/3, 1/3)$.