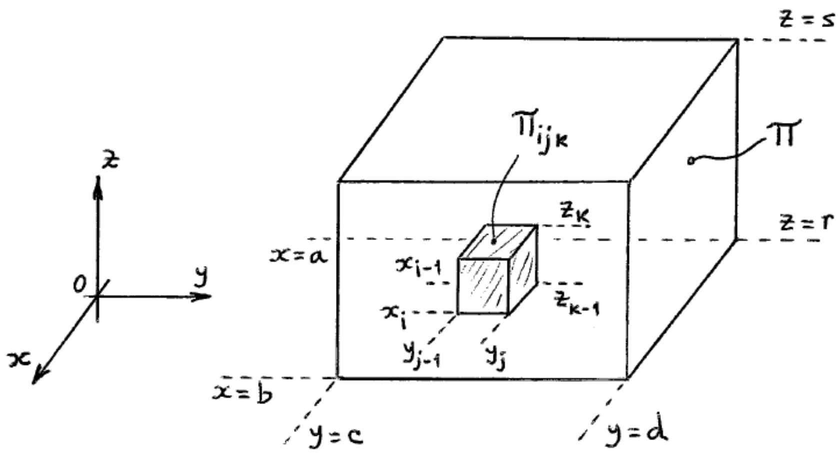
INTEGRAIS TRIPLOS

Integral triplo sobre um paralelepípedo

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região paralelepipédica (fechada), Π, do espaço, dada por:

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \ , \ r \le z \le s\right\} = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$



Pretende-se definir o *integral triplo* de $f(x,y,z)$ sobre Π:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz \qquad (1)$$

Considere-se uma *partição* para $[a,b]$

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \text{ , tal que } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

uma *partição* para $[c,d]$

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ , tal que } c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

e uma *partição* para $[r,s]$:

$$P_3 = \{z_0, z_1, \ldots, z_p\} \text{ , tal que } r = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = s$$

O conjunto resultante do *produto cartesiano* de P_1, P_2 e P_3

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 = \left\{ (x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_i \in P_1 \ , \ y_j \in P_2 \ , \ z_k \in P_3 \right\}$$

chama-se *partição P para a região* Π.
A partição P permite definir, sobre a região Π, $m \times n \times p$ paralelepípedos elementares (que não se sobrepõem), com faces paralelas aos planos coordenados:

$$\Pi_{ijk} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j \ , \ z_{k-1} \le z \le z_k \right\} =$$

$$= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \ , \ (i = 1, \ldots, m \ ; \ j = 1, \ldots, n \ ; \ k = 1, \ldots, p)$$

- Designa-se por *diâmetro da partição P para a região* Π o comprimento, δ_P, da maior diagonal de entre todos os paralelepípedos elementares Π_{ijk}, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, p$.

- Seja ΔV_{ijk} o volume de cada paralelepípedo elementar Π_{ijk}, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, p$, e escolha-se, em cada um destes paralelepípedos, um ponto arbitrário $P_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$.
  Considerando o valor da função $f(x,y,z)$ em cada ponto P_{ijk}, $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, formem-se as *somas triplas de Riemann* relativas à partição *P*:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \ \Delta V_{ijk} \tag{2}$$

Assim, se para toda a partição P para a região Π o limite das somas (2) existir e for finito, sendo independente da escolha de $P_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, esse limite é designado por *integral triplo de* $f(x,y,z)$ *sobre a região* Π e escreve-se:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz \quad \text{ou} \quad \iiint_{\Pi} f(x,y,z)dV .$$

Nestas condições, verifica-se

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\ \Delta V_{ijk}\right) \tag{3}$$

e $f(x,y,z)$ diz-se uma função integrável em Π.
Sendo δ_P o diâmetro de uma partição P para a região Π, quando se considera em (3) o limite, quando δ_P tende para zero, está-se a admitir que a partição P é formada por um número crescente de paralelepípedos elementares, Π_{ijk}, cada um deles de volume cada vez menor, ou seja:

$$\text{quando } \delta_P \to 0,\ \Delta V_{ijk} \to 0 .$$

- Considerando em (3) $f(x,y,z) = 1$ para todo o $(x,y,z) \in \Pi$, então

$$\iiint_{\Pi} dxdydz = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \Delta V_{ijk}\right) = V(\Pi)$$

sendo $V(\Pi)$ o volume da região paralelepipédica Π.

- Se a função real a três variáveis $f(x,y,z)$ é integrável numa região paralelepipédica

$$\Pi = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$$

então a aplicação do *método dos integrais iterados* ao intergral triplo (1) conduz a:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\ dydxdz = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\ dydzdx =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\ dzdydx = \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x,y,z)\ dzdxdy =$$

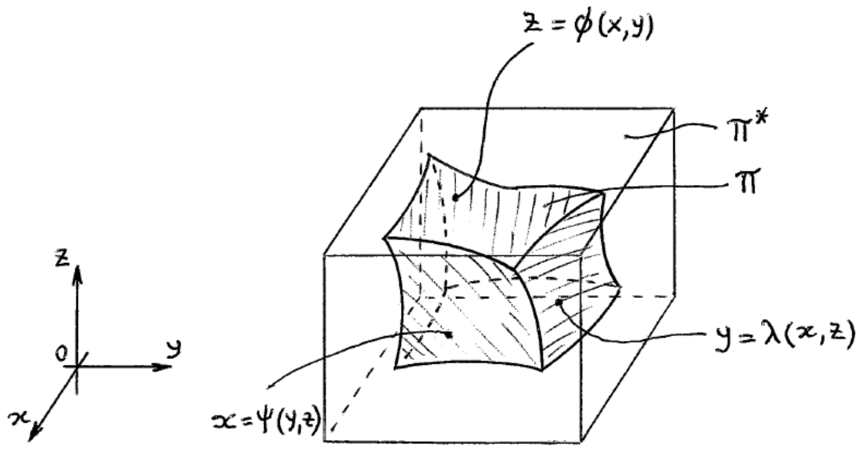
$$= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x,y,z)\ dxdzdy$$

Integral triplo sobre uma região limitada do espaço

- O cálculo do integral triplo

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz \qquad (4)$$

onde Π é uma qualquer região limitada do espaço, é feito usando um método similar ao utilizado no caso do integral duplo.



- Considere-se uma região paralelepipédica Π^* que contém a região Π e uma função real a três variáveis $f^*(x,y,z)$ definida por

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) \text{ , se } (x,y,z)\in \Pi \\ 0 \text{ , se } (x,y,z)\in \Pi^* \setminus \Pi \end{cases}$$

que resulta da extensão de $f(x,y,z)$ à região Π^*.

A função $f^*(x,y,z)$ é limitada na região Π^* e é contínua em todos os pontos de Π^*, excepto, possivelmente, em pontos que pertencem à fronteira de Π.
Verifica-se, então, que

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Pi^*} f^*(x,y,z)dxdydz$$

e diz-se que $f(x,y,z)$ é integrável em Π se $f^*(x,y,z)$ for integrável na região paralelepipédica Π^*.

- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (4), conclui-se que o integral triplo

$$V(\Pi)=\iiint_{\Pi} dxdydz$$

exprime o volume do sólido, $V(\Pi)$, descrito pela região Π.

Cálculo do integral triplo (região limitada do espaço)

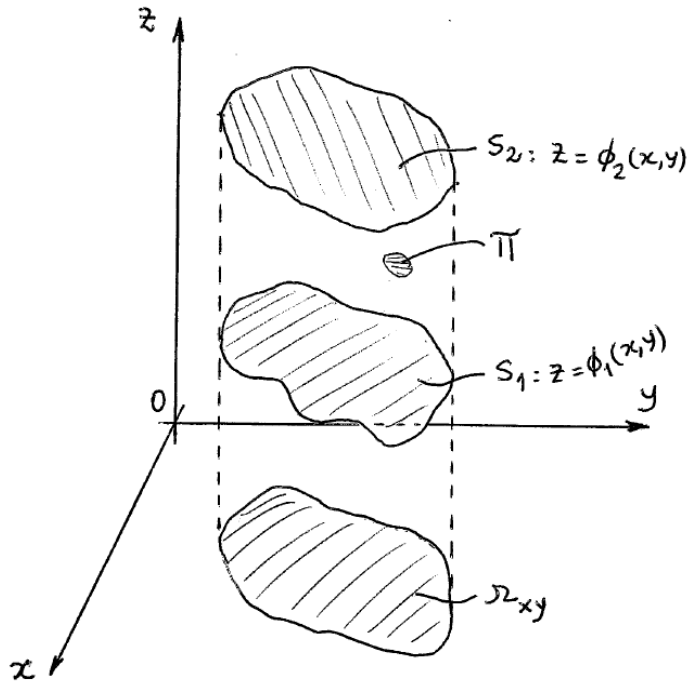
- O cálculo do integral triplo sobre uma região fechada e limitada, Π, do espaço pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre uma de três tipos de regiões básicas.

- Uma região do espaço, Π, diz-se do *Tipo 1*, se existir uma região Ω_{xy} do plano *xOy*, tal que

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in \Omega_{xy} \ , \ \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y) \right\}$$

em que $\phi_1(x,y)$ e $\phi_2(x,y)$ são funções contínuas em Ω_{xy}.

A região Π define um sólido cuja projecção sobre o plano *xOy* é a região Ω_{xy}, sendo limitado superiormente pela superfície, S_2, de equação $z = \phi_2(x,y)$ e inferiormente pela superfície, S_1, de equação $z = \phi_1(x,y)$.



Tipo 1

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \qquad (5)$$

Em primeiro lugar calcula-se

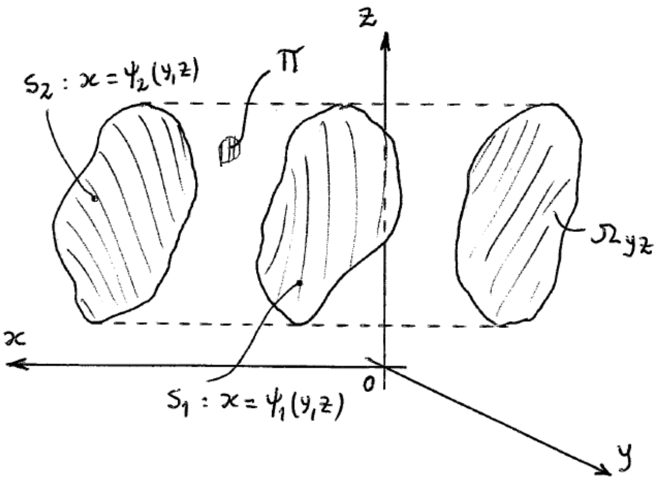
$$A(x,y) = \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (6)$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável z entre $z=\phi_1(x,y)$ e $z=\phi_2(x,y)$. O resultado de (6) é uma função nas variáveis x e y, $A(x,y)$, que deverá ser integrada em Ω_{xy}.

- Uma região do espaço, Π, diz-se do *Tipo 2*, se existir uma região Ω_{yz} do plano *yOz*, tal que

$$\Pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (y,z)\in\Omega_{yz}\ ,\ \psi_1(y,z)\le x\le\psi_2(y,z)\right\}$$

em que $\psi_1(y,z)$ e $\psi_2(y,z)$ são funções contínuas em Ω_{yz}.



Tipo 2

A região Π define um sólido cuja projecção sobre o plano *yOz* é a região Ω_{yz}, sendo limitado superiormente pela superfície, S_2, de equação $x=\psi_2(y,z)$ e inferiormente pela superfície, S_1, de equação $x=\psi_1(y,z)$.

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz=\iint_{\Omega_{yz}}\left(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dydz \qquad (7)$$

Em primeiro lugar calcula-se

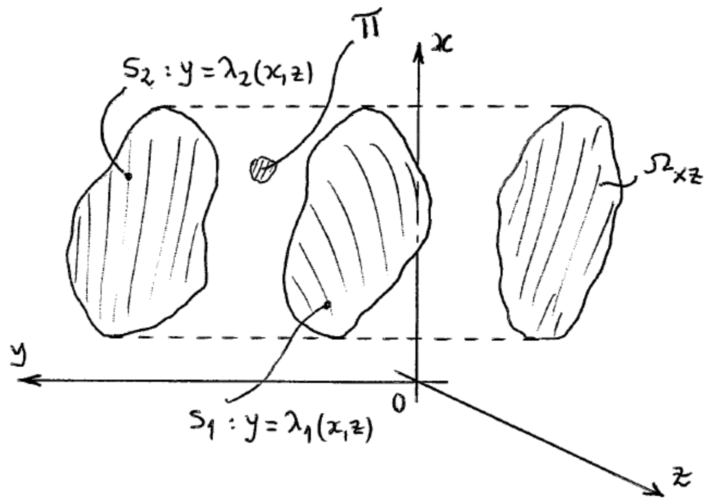
$$B(y,z)=\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \qquad (8)$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável x entre $x=\psi_1(y,z)$ e $x=\psi_2(y,z)$. O resultado de (8) é uma função nas variáveis y e z, $B(y,z)$, que deverá ser integrada em Ω_{yz}.

- Uma região do espaço, Π, diz-se do *Tipo 3*, se existir uma região Ω_{xz} do plano *xOz*, tal que

$$\Pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,z)\in\Omega_{xz}\ ,\ \lambda_1(x,z)\le y\le\lambda_2(x,z)\right\}$$

em que $\lambda_1(x,z)$ e $\lambda_2(x,z)$ são funções contínuas em Ω_{xz}.



Tipo 3

A região Π define um sólido cuja projecção sobre o plano *xOz* é a região Ω_{xz}, sendo limitado superiormente pela superfície, S_2, de equação $y=\lambda_2(x,z)$ e inferiormente pela superfície, S_1, de equação $y=\lambda_1(x,z)$.

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz=\iint_{\Omega_{xz}}\left(\int_{\lambda_1(x,z)}^{\lambda_2(x,z)}f(x,y,z)dy\right)dxdz \qquad (9)$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$C(x,z)=\int_{\lambda_1(x,z)}^{\lambda_2(x,z)}f(x,y,z)dy \qquad (10)$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável *y* entre $y=\lambda_1(x,z)$ e $y=\lambda_2(x,z)$. O resultado de (10) é uma função nas variáveis *x* e *z*, $C(x,z)$, que deverá ser integrada em Ω_{xz}.

- Os integrais apresentados em (6), (8) e (10) são designados por *integrais iterados* para o integral triplo.

Propriedades do integral triplo

- Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções integráveis numa região limitada do espaço, Π, e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Verifica-se:

i) $\iiint_\Pi [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dxdydz =$

$$=\alpha\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz+\beta\iiint_\Pi g(x,y,z)]dxdydz$$

ii) Se $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z)\in\Pi$, então:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_\Pi g(x,y,z)dxdydz$$

iii) Se $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$, em que Π_1 e Π_2 são regiões do espaço que não se intersectam, excepto, possivelmente, nas suas fronteiras comuns, então:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Pi_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\Pi_2} f(x,y,z)dxdydz$$

iv) $\left|\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_\Pi |f(x,y,z)|dxdydz$

- O teorema seguinte é conhecido por *teorema do valor médio para o integral triplo*.

Teorema 1: Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções contínuas numa região limitada do espaço, Π. Se $g(x,y,z)\geq 0$ para todo o $(x,y,z)\in\Pi$, então existe um ponto $(x_0,y_0,z_0)\in\Pi$ tal que:

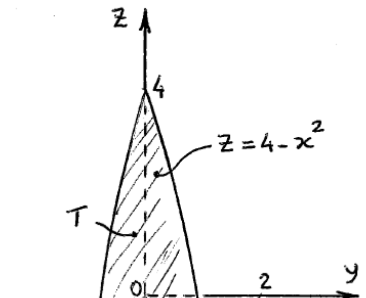
$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)g(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\iiint_{\Pi} g(x,y,z)dxdydz$$

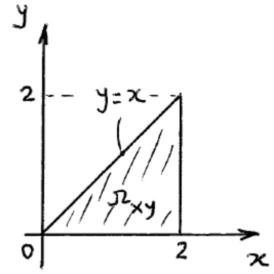
O valor $f(x_0,y_0,z_0)$ chama-se *média ponderada da função* $f(x,y,z)$ *em* Π *através da função (de peso)* $g(x,y,z)$.

Exemplo 1: Calcule o integral triplo $\iint_T xyz\, dxdydz$, onde T é o sólido situado no primeiro octante, limitado pela superfície $z=4-x^2$ (cilindro parabólico) e pelos planos $z=0$, $y=x$ e $y=0$. Considere T como uma região do *Tipo 1*.

Solução:

Na figura seguinte apresenta-se um esboço do sólido *T*.





Projectando *T* sobre o plano *xOy* (região *Tipo 1*), obtém-se

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,y)\in\Omega_{xy}\ ,\ 0\leq z\leq 4-x^2\right\}$$

onde Ω_{xy} é a região do plano *xOy* tal que:

$$\Omega_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\leq x\leq 2\ ,\ 0\leq y\leq x\right\}$$

Então:

$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_0^{4-x^2} xyz\ dz\ dxdy = \iint_{\Omega_{xy}} \frac{xy}{2}\Big[z^2\Big]_0^{4-x^2} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\Omega_{xy}} xy\left(4-x^2\right)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^x x\left(4-x^2\right)^2 y\ dydx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 x\left(4-x^2\right)^2\Big[y^2\Big]_0^x dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^3\left(4-x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2\left(16x^3-8x^5+x^7\right)dx = \frac{1}{4}\left[4x^4-\frac{4}{3}x^6+\frac{x^8}{8}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Exemplo 2: Escreva o integral triplo do exemplo 1, considerando *T*:

a) Uma região do *Tipo 2*.

b) Uma região do *Tipo 3*.

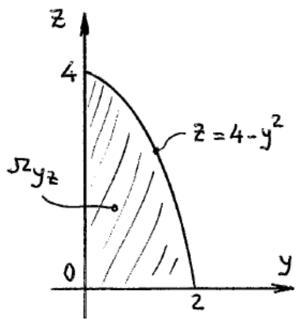
Solução:

a) Projectando *T* sobre o plano *yOz* (região *Tipo 2*), obtém-se

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (y,z)\in\Omega_{yz}\ ,\ y\le x\le\sqrt{4-z}\right\}$$

onde Ω_{yz} é a região do plano *yOz* tal que:

$$\Omega_{yz} = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le 2\ ,\ 0\le z\le 4-y^2\right\}$$



Então:

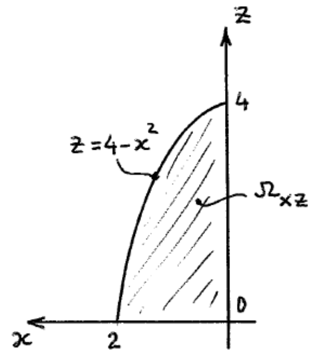
$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{yz}} \int_y^{\sqrt{4-z}} xyz\ dx\ dydz = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_y^{\sqrt{4-z}} xyz\ dx\ dzdy$$

b) Projectando *T* sobre o plano *xOz* (região *Tipo 3*), obtém-se

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,z) \in \Omega_{xz}\ ,\ 0 \le y \le x\right\}$$

onde Ω_{xz} é a região do plano *xOz* tal que:

$$\Omega_{xz} = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le z \le 4 - x^2\right\}$$



Então:

$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{xz}} \int_0^{x} xyz\ dy\ dxdz = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{x} xyz\ dy\ dzdx$$

Exemplo 3: Calcule o volume do tetraedro, *T*, apresentado na figura da página seguinte.

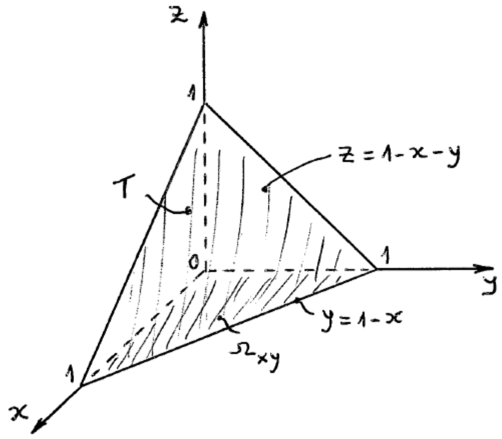
Solução:

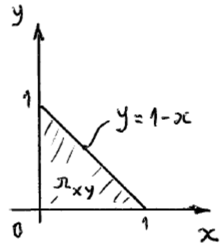
Projectando *T* sobre o plano *xOy* (região *Tipo 1*), obtém-se

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y) \in \Omega_{xy}\ ,\ 0 \le z \le 1 - x - y\right\}$$

onde Ω_{xy} é a região do plano *xOy* tal que:

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1\,,\; 0 \le y \le 1-x\right\}$$





Então o volume, $V(T)$, do sólido é:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_0^{1-x-y} dz\; dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega_{xy}} [z]_0^{1-x-y}\, dxdy = \iint_{\Omega_{xy}} (1-x-y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)dydx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$