Prova sem consulta. Duração: 2h. 1ª Prova de Avaliação

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
***A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é permitida a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores.**

1. **[4,1]** Seja a função vetorial $r(t)=\left(e^t\text{sen}(t), e^t\cos(t), t+1\right)$, $t\in\mathbb{R}$. Determine:

a) O versor da tangente à curva no ponto $P=(0,1,1)$.

b) A equação cartesiana do plano osculador à curva no ponto P.

2. **[4,1]** Calcule a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y,z)=x+e^{z^2-y}$ no ponto $R=(0,1,1)$, na direção do vetor normal à superfície $x^2+y^2+z^2=2$ neste mesmo ponto.

3. **[1,5]** Calcule os pontos críticos de $f(x,y)=x-xy^2$ e classifique-os.

4. **[4,1]** Seja a superfície de equação $x\,\text{sen}(x)+ze^z+y^2-1=0$. Assumindo que a equação da superfície define z como uma função implícita de x e y, $z=f(x,y)$, calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ no ponto $Q=(0,1,0)$.

5. **[4,2]** Seja o integral $\int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2x\,dxdy$.

a) Esboce o domínio de integração e calcule o seu valor.

b) Reescreva-o: (i) trocando a ordem de integração;

(ii) em coordenadas polares.

6. **[2,0]** Seja uma curva descrita pela função vetorial $r(t)$. Mostre que $r''(t)$ pertence ao plano osculador em $r(t)$, caso este exista. Justifique convenientemente.

1) $\vec{r}(t) = \left(e^t \operatorname{sen}(t),\ e^t \cos(t),\ t+1\right),\ t \in \mathbb{R}$

a) Vetor tangente à curva:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(e^t \operatorname{sen}(t) + e^t \cos(t),\ e^t \cos(t) - e^t \operatorname{sen}(t),\ 1\right)$$

Vector tangente à curva no ponto $P = (0,1,1) = \vec{r}(0)$

$$\vec{r}\,'(0) = (1,1,1)$$

Vector de tangente à curva no ponto P

$$\vec{T}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0)}{\|\vec{r}\,'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

b)

$$\vec{r}\,''(t) = \left(e^t \cancel{\operatorname{sen}(t)} + e^t \cos(t) + e^t \cos(t) - e^t \cancel{\operatorname{sen}(t)},\right.$$
$$\left. e^t \cancel{\cos(t)} - e^t \operatorname{sen}(t) - e^t \operatorname{sen}(t) - e^t \cancel{\cos(t)},\ 0\right) =$$
$$= \left(2e^t \cos(t),\ -2e^t \operatorname{sen}(t),\ 0\right)$$

obtendo-se para o ponto $P = \vec{r}(0)$

$$\vec{r}\,''(0) = (2,0,0)$$

Vetor normal ao plano osculador no ponto P

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,2,-2)$$

Sendo o vector binormal no ponto P

$$\vec{B}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)}{\|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2,-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

A equação cartesiana do plano osculador no ponto P é

$$\left[(x,y,z) - P\right] \cdot \vec{B}(0) = 0 \Leftrightarrow (x,\ y-1,\ z-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

Wir

2) $f(x,y,z) = x + e^{z^2-y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{z^2-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z\, e^{z^2-y}$

$\nabla f = \left(1, -e^{z^2-y}, 2z\, e^{z^2-y}\right)$

$\nabla f(0,1,1) = (1,-1,2)$

Seja a superfície esférica

$g(x,y,z) = 0$ com $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2$

tendo como vector normal

$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$

O versor de normal à superfície em $R = (0,1,1)$ é

$\vec{u} = \frac{\nabla g(0,1,1)}{\|\nabla g(0,1,1)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

A derivada direcional pretendida é

$f'(R,\vec{u}) = \nabla f(R) \cdot \vec{u} = (1,-1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $f(x,y) = x - xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

Determinação dos pontos críticos

$$\begin{cases} 1 - y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Classificação dos pontos críticos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y$$

Relativamente ao ponto $(0,-1)$ obtém-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

Relativamente ao ponto $(0,1)$ obtém-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

4)

$$x \operatorname{sen}(x) + z e^{z} + y^{2} - 1 = 0 \qquad \text{com} \qquad z = f(x,y)$$

Derivando em ordem a x :

$$\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + \frac{\partial z}{\partial x} e^{z} + z \frac{\partial z}{\partial x} e^{z} = 0 \iff$$

$$\iff \left(e^{z} + z e^{z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x) - x \cos(x) \iff$$

$$\iff \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{e^{z}(1+z)}$$

Derivando em ordem a y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} e^{z} + z \frac{\partial z}{\partial y} e^{z} + 2y = 0 \iff \frac{\partial z}{\partial y} \left(e^{z} + z e^{z} \right) = -2y \iff$$

$$\iff \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{e^{z}(1+z)}$$

No ponto $Q = (0,1,0)$ obtém-se

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1,0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1,0) = \frac{-2}{1} = -2$$

Wnji

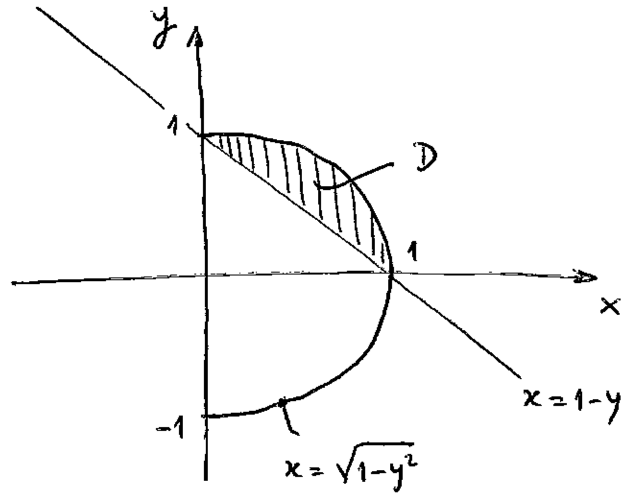
5) $$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2x \, dx \, dy$$

a)

$x = \sqrt{1-y^2}$: semicircunferência

$x = 1-y$: reta

D : domínio de integração



$$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2x \, dx \, dy = \int_0^1 \left[x^2\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[1-y^2-(1-y)^2\right] dy = \int_0^1 (2y-2y^2)\, dy = 2\int_0^1 (y-y^2)\, dy =$$

$$= 2\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

b) i) $x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$

$x = 1-y$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $y = 1-x$, $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2x \, dy \, dx$$

ii) $x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$2x = 2r\cos\theta$

$x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $r = 1$, $\theta \in [0, \pi/2]$

v.s.f.f.

$$x = 1 - y \qquad \Rightarrow \qquad r\cos\theta = 1 - r\,\text{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{1}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

$y \in [0,1]$

$\theta \in [0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\text{sen}\theta+\cos\theta}}^{1} 2r^2\cos\theta \, dr \, d\theta$$

6) Curva : $\vec{r}(t)$

O Plano Osculador da curva em $\vec{r}(t)$ é o plano que é gerado pelos vetores $\vec{T}(t)$ (versor da tangente) e $\vec{N}(t)$ (versor da normal principal). Para mostrarmos que $\vec{r}''(t)$ pertence ao plano osculador basta mostrar que ele é combinação linear dos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$.

Seja o vetor tangente à curva $\vec{r}'(t)$ que pode ser expresso em função do versor $\vec{T}(t)$, isto é,

$$\vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \, \vec{T}(t)$$

Derivando em ordem a t obtém-se

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \, \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \, \vec{T}'(t)$$

em que $\vec{T}'(t)$ é um vetor normal ao versor $\vec{T}(t)$, tendo a direção do versor $\vec{N}(t)$. Assim, considerando

$$\vec{T}'(t) = \|\vec{T}'(t)\| \, \vec{N}(t)$$

resulta finalmente

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \, \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \, \|\vec{T}'(t)\| \, \vec{N}(t)$$

Comprova-se que $\vec{r}''(t)$ é combinação linear dos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, pertencendo ao plano osculador à curva em $\vec{r}(t)$.

qdm