Teorema de Stokes

- Seja, novamente, o teorema de Green. Se Ω é uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C, e $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω, então

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (40)$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva C, percorrida no sentido directo.

- Considerando, agora, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,0)=P(x,y,0)\vec{i}+Q(x,y,0)\vec{j}+0\vec{k} \qquad (41)$$

obtém-se para o seu rotacional

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

e, portanto:

$$\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,0)\right)\cdot\vec{k}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

A expressão (40) pode, então, ser reescrita, em termos do campo vectorial (41), sob a forma

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,0)\right)\cdot\vec{k}\,\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{C}\vec{v}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r} \quad (42)$$

onde

$$\vec{r}\,(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\ ,\ t\in I$$

é a função vectorial que parametriza a curva *C*.

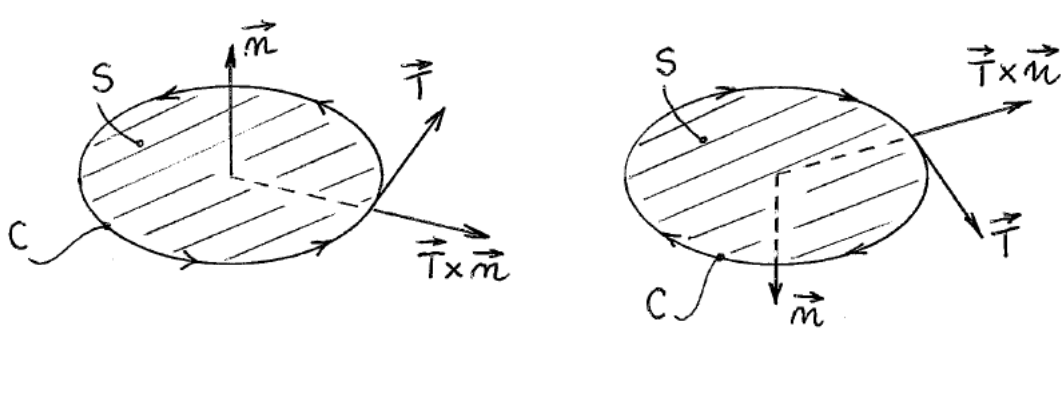
- A propriedade expressa em (42), derivada para uma região de Jordan situada no plano coordenado *xOy*, pode, ainda, ser aplicada a uma superfície plana do espaço $\mathbb{R}^3$.

  Seja *S* uma superfície plana de $\mathbb{R}^3$ limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *S*, então

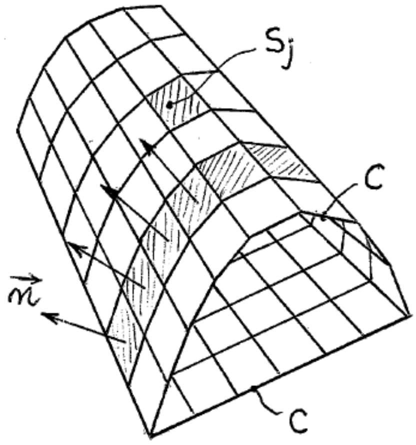
  $$\iint_{S}\left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\,\right]dS=\oint_{C}\vec{v}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r}$$

  onde $\vec{n}$ é o versor normal à superfície *S* e o integral à direita é o integral de linha ao longo de *C*, percorrido no *sentido positivo em relação a* $\vec{n}$, isto é, no sentido do versor da tangente, $\vec{T}$, à curva *C*, o qual é definido de modo que o versor $\vec{T}\times\vec{n}$ aponte na direcção exterior à superfície *S*.

  Neste caso, diz-se que a curva *C* é *percorrida no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}$).



- A figura seguinte ilustra uma *superfície poliédrica*, S, limitada, no seu bordo, por uma *linha poligonal fechada*, C. A superfície S é constituída por um número finito de faces planas, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, que são, respectivamente, limitadas pelas linhas poligonais $C_1, C_2, \ldots, C_n$, e possuem versores normais $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$; admite-se que todos estes versores apontam para o mesmo lado da superfície S.



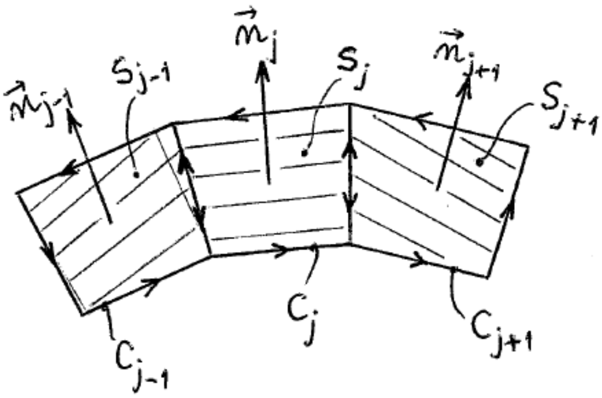
Seja, agora, $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície e que toma os valores $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$ nas faces planas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, respectivamente, sendo irrelevante o seu valor em cada um dos segmentos de recta que são comuns a essas mesmas faces.
Assim, se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém S, então

$$\iint_{\Omega}\left[(\nabla\times\vec{v}(x,y,0))\cdot\vec{k}\right]dxdy = \sum_{j=1}^{n}\iint_{S_j}\left[(\nabla\times\vec{v}(x,y,0))\cdot\vec{n}_j\right]dS =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\oint_{C_j}\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (43)$$

em que o integral de linha ao longo da linha poligonal C_j é definido de modo a que esta é percorrida *no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}_j$).

Quando se somam os integrais de linha no segundo membro de (43), verifica-se o anulamento das contribuições, para o integral de linha, dos segmentos de recta que não pertencem à linha poligonal fechada C, já que esses segmentos de recta, sendo comuns a duas faces planas adjacentes, são percorridos duas vezes e em sentidos opostos.



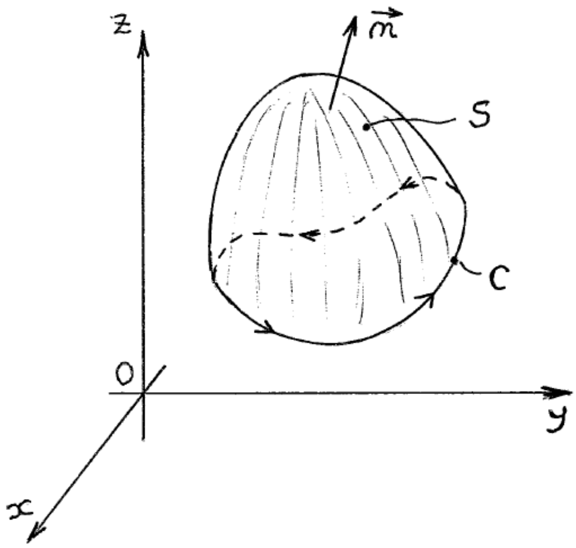
Então, tendo em atenção que

$$\sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{C} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Obtém-se para uma superfície poliédrica, S, limitada por uma linha poligonal fechada, C:

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x,y,z) \right) \cdot \vec{n} \right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (44)$$

- A propriedade estabelecida em (44) pode ser generalizada a uma superfície suave e orientada, *S*, limitada por uma curva suave, *C*, já que esta superfície pode ser sempre aproximada por uma superfície poliédrica. No limite, quando o número de faces planas, S_j, admitidas na aproximação tender para infinito, a superfície poliédrica tende para a superfície *S*.



É desta forma informal que é possível justificar a propriedade transcrita no teorema seguinte, que é conhecido por *teorema de Stokes*.

Teorema 8: Seja *S* uma *superfície regular e orientada* limitada por uma *curva suave*, *C*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *S*, então

$$\iint_S \left[(\nabla \vec{v}(x,y,z) \cdot \vec{n} \right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal a *S*, que varia continuamente em *S*, e o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, *percorrida no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}$).

Exemplo 28: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - xyz\vec{k}$$

através da superfície parabólica

$$S \ : \ z = 1 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície:

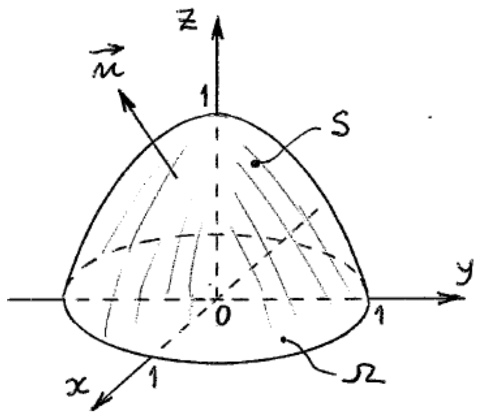
a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & -xyz \end{vmatrix} = (-xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + 0\vec{k}$$



A superfície parabólica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de *S*.
Assim, atendendo a (7) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] = -x(1 - x^2 - y^2)\vec{i} + y(1 - x^2 - y^2)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] \cdot \vec{N}(x,y) = -2(x^2 - y^2) + 2(x^4 - y^4)$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de *S*:

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x,y,z) \right) \cdot \vec{n} \right] dS = -2 \iint_\Omega \Big((x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) \Big) dxdy \qquad (45)$$

Recorrendo a *coordenadas polares*

$$x = r\cos(\theta) \ \ , \ \ y = r \ \operatorname{sen}(\theta) \ \ , \ \ dxdy = r \ drd\theta$$

então

$$(x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) = r^2 \left(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \right) +$$

$$+ r^4 \left(\cos^4(\theta) - \operatorname{sen}^4(\theta) \right) \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1$$

em que:

$$\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1\}$$

Assim, a expressão (45) toma a forma:

$$\iint_S \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,z)) \cdot \vec{n} \right] dS = -2\iint_\Omega \Big((x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) \Big) dxdy =$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \Big(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \Big) drd\theta -$$

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5 \Big(\cos^4(\theta) - sen^4(\theta) \Big) drd\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \Big) d\theta -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^4(\theta) - sen^4(\theta) \Big) d\theta \qquad (46)$$

Particularizando, verifica-se:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4}[2\theta + \text{sen}(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \qquad (47)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4}[2\theta - \text{sen}(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \qquad (48)$$

Por outro lado, recorrendo a processos de integração por partes e atendendo a (47) e (48), resulta:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\cos^3(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\text{sen}(\theta)\cos^3(\theta) \Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad (49)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^4(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta)\text{sen}^3(\theta)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)\Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad (50)$$

Finalmente, substituindo (47) a (50) em (46), obtém-se:

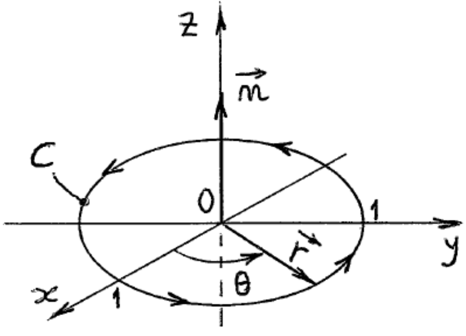
$$\iint_S \Big[\big(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\big)\cdot\vec{n}\Big]dS = -\frac{1}{2}(\pi-\pi) - \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

b) A superfície parabólica

$$S \ : \ z = 1-(x^2+y^2) \ , \ z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela circunferência de raio um e centrada na origem:

$$C \ : \ x^2+y^2 = 1 \, , \ z = 0$$



Esta linha pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C \ : \ \vec{r}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + sen(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ \theta \in [0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de dentro para fora* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo positivo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista de um ponto com cota positiva.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = \cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta) = -\cos(\theta)\mathrm{sen}^3(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)\cos^3(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\cos(\theta)\mathrm{sen}^3(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\cos^3(\theta)\right)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\mathrm{sen}^4(\theta)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\left[\cos^4(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Exemplo 29: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^4\vec{k}$$

através da superfície do elipsoide

$$S\ :\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geq \sqrt{2}/2$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

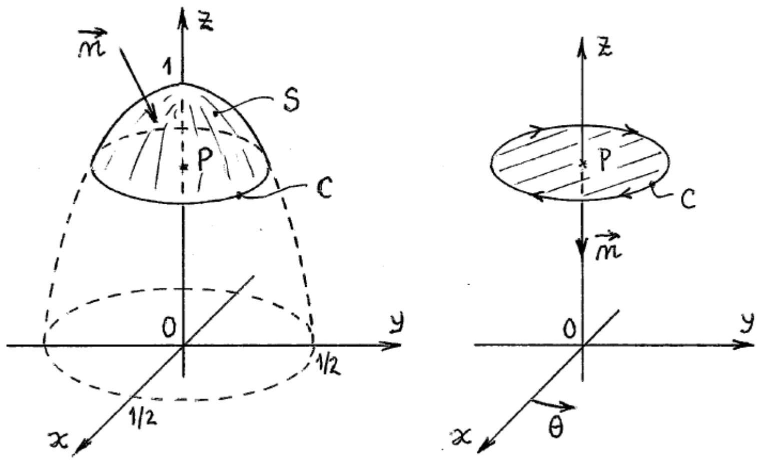
a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6\vec{k}$$



A superfície elipsoidal orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1 - 4(x^2 + y^2)}\,\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que

$$\Omega = \left\{(x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1/8\right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4x\left(1 - 4(x^2 + y^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -4y\left(1 - 4(x^2 + y^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{1 - 4(x^2 + y^2)}}\vec{i} + \frac{4y}{\sqrt{1 - 4(x^2 + y^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados em sentidos opostos ($\vec{N}(x,y)$ tem coordenada positiva na direcção do eixo dos *zz*).
Assim, atendendo a (8) e sabendo que

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right]=6\vec{k}\,, \qquad (\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right]\cdot\vec{N}(x,y)=6$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de *S*

$$\iint_S\left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS=-6\iint_\Omega dxdy=-6A(\Omega)=-\frac{3\pi}{4}$$

onde $A(\Omega)=\pi/8$ é a área da região circular Ω.

b) A superfície do elipsoide

$$S\ :\ 4x^2+4y^2+z^2=1\,,\ z\geq\sqrt{2}/2$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C\ :\ x^2+y^2=1/8\,,\ z=\sqrt{2}/2$$

isto é, pela circunferência de raio $\sqrt{2}/4$ e centrada em $P=\left(0,0,\sqrt{2}/2\right)$, que pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C\ :\ \vec{r}(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}sen(\theta)\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ ,\ \theta\in[0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista da origem do referencial.
Sabendo que

$$\vec{r}\,'(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{sen}(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}\text{sen}(\theta)\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta) = \frac{3}{8}$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{3}{8}\int_{2\pi}^{0} d\theta = -\frac{3\pi}{4}$$

Exemplo 30: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = z^2\vec{i} - 2x\vec{j} + y^3\vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \ z \geq 0$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -2x & y^3 \end{vmatrix} = 3y^2\vec{i} + 2z\vec{j} - 2\vec{k}$$

A superfície esférica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,\vec{k} \;,\; (x,y) \in \Omega$$

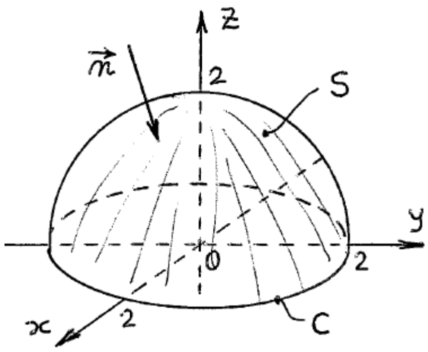
em que

$$\Omega = \left\{(x,y) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -x\left(4-(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -y\left(4-(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$



Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados em sentidos opostos ($\vec{N}(x,y)$ tem coordenada positiva na direcção do eixo dos zz).
Assim, atendendo a (8) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] = 3y^2\vec{i} + 2\sqrt{4-(x^2+y^2)}\,\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] \cdot \vec{N}(x,y) = \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} + 2y - 2$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de *S*:

$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v}(x,y,z))\cdot\vec{n}\right]dS = -\iint_\Omega \left[\frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} + 2y - 2\right]dxdy$$

Uma vez que a função

$$h(x,y) = \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$$

é ímpar na variável *x* e a região de integração Ω é simétrica em relação ao eixo dos *yy*, resulta:

$$\iint_\Omega \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}dxdy = 0$$

Então, o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de *S* reduz-se à expressão

$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v}(x,y,z))\cdot\vec{n}\right]dS = -2\iint_\Omega (y)dxdy + 2\iint_\Omega dxdy =$$

$$= -2\bar{y}A(\Omega) + 2A(\Omega) = 8\pi$$

em que $A(\Omega) = 4\pi$ é a área da região circular Ω e $\bar{y} = 0$ é a ordenada do seu centroide.

b) A superfície esférica

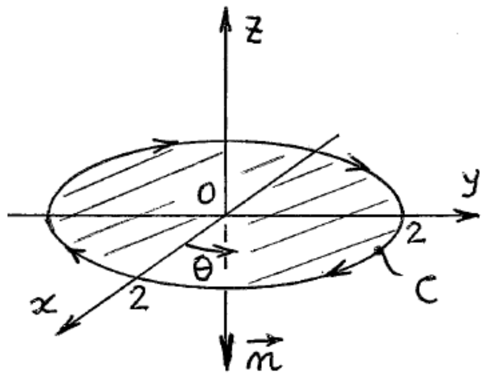
$$S \ : \ x^2+y^2+z^2 = 4 \ , \ z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C \ : \ x^2+y^2 = 4 \ , \ z = 0$$

isto é, pela circunferência de raio dois e centrada na origem, que pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C \ : \ \vec{r}(\theta) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2sen(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ \theta \in [0, 2\pi]$$



Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido retrógrado*, quando vista de um ponto com cota positiva.
Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -2\text{sen}(\theta)\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = 0\vec{i} - 4\cos(\theta)\vec{j} + 8\text{sen}^3(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) \cdot \vec{r}'(\theta) = -8\cos^2(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x,y,z)\right) \cdot \vec{n}\right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -8\int_{2\pi}^{0} \cos^2(\theta) d\theta =$$

$$= -4\int_{2\pi}^{0} \left(1 + \cos(2\theta)\right) d\theta = -2\left[2 + sen(2\theta)\right]_{2\pi}^{0} = 8\pi$$