Prova sem consulta. Duração: 2h. 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**3,8**] Seja a função vetorial $\boldsymbol{r}(t)=\left(1+\cos(t), 1-\cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t)\right)$, $t\in[0,\pi]$. Calcule:

a) Os versores da tangente e da normal principal à curva no ponto $P=(1,1,\sqrt{2})$.

b) A equação cartesiana do plano osculador à curva no ponto *P*.

2. [**3,8**] Calcule a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y,z)=yxe^{xz}+z^2$ no ponto $R=(1,-1,0)$, na direção do vetor normal à superfície $x^2yz-y^2+xz^2=-1$ nesse ponto.

3. [**2,2**] Calcule os pontos críticos de $f(x,y)=x^2y-y^2-x^2$ e classifique-os.

GRUPO II

4. [**4,0**] A equação $x\ln(y)+y^2z+z^2=6$ define *z* como função implícita de *x* e *y* na vizinhança do ponto $Q=(1,1,2)$. Obtenha as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ em *Q*.

5. [**4,2**] Considere o integral duplo $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} y\, dydx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2} y\, dydx$.

a) Esboce o domínio de integração.

b) Calcule o valor do integral.

c) Reescreva-o trocando a ordem de integração.

6. [**2,0**] Seja $\boldsymbol{r}(t) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ uma curva regular. Sendo $k(t)$ a sua curvatura, mostre que:

a) $\boldsymbol{r}''(t)=\left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\|'\boldsymbol{T}(t)+k(t)\left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\|^2\boldsymbol{N}(t)$.

b) $k(t)=\dfrac{\left\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\right\|}{\left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\|^3}$.