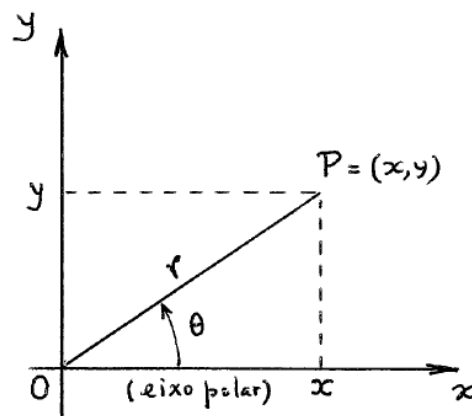


Integral duplo em coordenadas polares

- Existem situações onde o *cálculo do integral duplo* sobre uma região, Ω , do plano xOy pode ser efectuado de forma mais expedita quando se descreve essa região *usando coordenadas polares*.
- Considere-se um ponto P do plano xOy ; se este ponto tem *coordenadas polares* (r, θ) , em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, as suas *coordenadas cartesianas* (x, y) são dadas por:

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta. \quad (13)$$



As expressões inversas de (13) são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

excepto para os casos em que $x = 0$.

- Pretende-se mostrar como é possível calcular o integral duplo

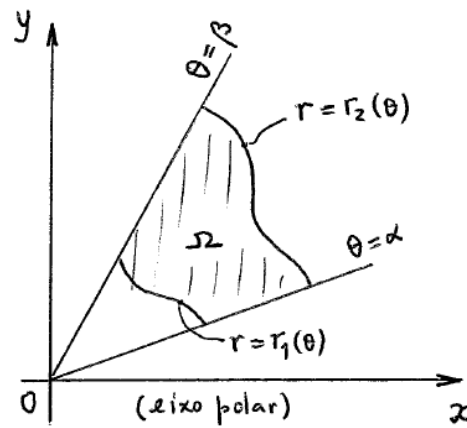
$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (14)$$

usando coordenadas polares (r, θ) .

- Seja a região Ω apresentada na figura seguinte, que é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) definidas no conjunto

$$\Gamma = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta \wedge r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

em que $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.



Como é já conhecido, a área da região Ω , $A(\Omega)$, é dada por:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} ([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2) d\theta$$

A expressão anterior pode, ainda, ser reescrita sob a forma de um integral duplo sobre a região Γ .

Com efeito, tendo em conta que

$$\frac{1}{2} ([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2) = \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr$$

então:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta = \iint_{\Gamma} r dr d\theta$$

- Admita-se que $f(x,y)$ é uma função contínua em todos os pontos (x,y) da região Ω . Então a função composta

$$F(r,\theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

é também uma função contínua em todos os pontos (r,θ) da região Γ .

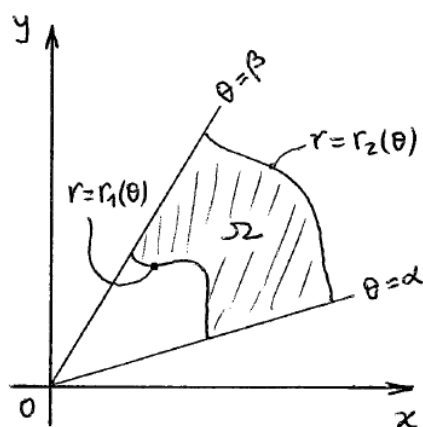
Nestas condições, é possível mostrar que o *integral duplo* (14) é dado, em coordenadas polares, por:

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\Gamma} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (15)$$

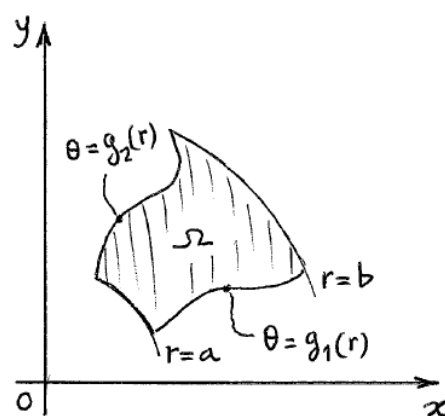
A igualdade (15) traduz, no *integral duplo*, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares*.

Cálculo do integral duplo em coordenadas polares

- O cálculo do integral duplo, sobre uma região Ω , em coordenadas polares pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre um de dois tipos de regiões básicas: região *Tipo I* e região *Tipo II*.



Tipo I



Tipo II

- Admita-se que Ω é uma região *Tipo I*, isto é, é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto

$$\Gamma = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

em que $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ são funções contínuas em $[\alpha, \beta]$.

Se $f(x, y)$ é uma função contínua em todos os pontos de Ω , então:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- Admita-se que Ω é uma região *Tipo II*, isto é, é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto

$$\Gamma = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, g_1(r) \leq \theta \leq g_2(r)\}$$

em que $g_1(r)$ e $g_2(r)$ são funções contínuas em $[a, b]$.

Se $f(x, y)$ é uma função contínua em todos os pontos de Ω , então:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

Exemplo 8: Usando coordenadas polares, calcule o integral duplo $\iint_{\Omega} xy dx dy$ onde Ω é a região, situada no primeiro quadrante, do círculo de raio um centrado na origem.

Solução:

Admita-se que Ω é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 1\}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} xy \, dx dy &= \iint_{\Gamma} (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \, d\theta = \frac{1}{8} \left[\frac{-\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Convém notar que o integral duplo também poderia ser calculado considerando Ω como uma região *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$\iint_{\Omega} xy \, dx dy = \iint_{\Gamma_1} r^3 \cos \theta \sin \theta \, d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \theta \sin \theta \, d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

Exemplo 9: Usando coordenadas polares, calcule o volume da esfera de raio R .

Solução:

Considere-se a superfície esférica de raio R centrada na origem, cuja equação cartesiana é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Assim, a esfera é o sólido, T , limitado superiormente pela superfície, S_1 , de equação

$$S_1 : z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície, S_2 , de equação

$$S_2 : z = g(x, y) = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} , (x, y) \in \Omega$$

em que Ω é o círculo de raio R centrado na origem:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Então, o volume da esfera, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_{\Omega} (f(x, y) - g(x, y)) dx dy$$

isto é, dada a simetria da esfera em relação ao plano xOy :

$$V(T) = 2 \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \quad (16)$$

Considere-se, agora, que Ω é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi , 0 \leq r \leq R\}$$

Recorrendo às coordenadas polares, verifica-se que

$$\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

e, portanto, a equação (16) pode ser reescrita sob a forma:

$$V(T) = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy = 2 \iint_{\Gamma} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta \quad (17)$$

Obtém-se, finalmente:

$$V(T) = 2 \iint_{\Gamma} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R 2r (R^2 - r^2)^{1/2} dr d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R d\theta = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Convém notar que o integral duplo (17) também poderia ser calculado considerando Ω como uma região *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$V(T) = 2 \iint_{\Gamma_1} \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r (R^2 - r^2)^{1/2} \, d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Exemplo 10: Usando coordenadas polares, calcule o volume do sólido, T , limitado superiormente pela superfície cônica, S , de equação

$$S : z = f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente pela região, Ω , de equação:

$$0 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \quad (18)$$

Solução:

Neste caso, Ω é a região circular situada no plano xOy , de raio um e com centro no ponto $P = (0, 1, 0)$, sendo a sua fronteira constituída pelos pontos que pertencem à circunferência, C , de equação cartesiana:

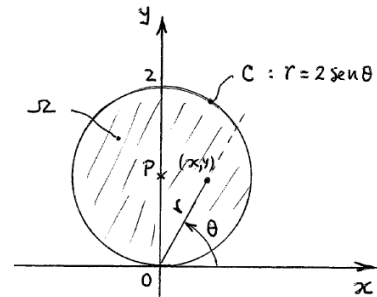
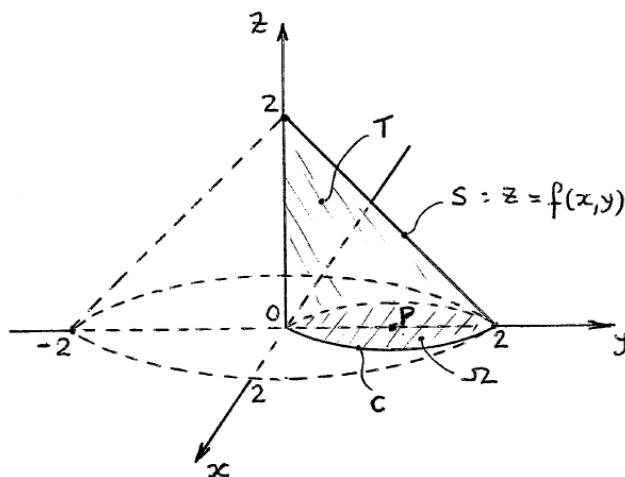
$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

Esta equação pode ser reescrita em coordenadas polares, resultando:

$$r^2 = 2r \sin \theta \Leftrightarrow r = 2 \sin \theta$$

Assim, a região Ω , expressa em (18), é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\} \quad (19)$$



O volume do sólido T , $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo:

$$V(T) = \iint_{\Omega} \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = 2 \iint_{\Omega} dx dy - \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad (20)$$

Na equação (20) a primeira parcela do segundo membro é igual a duas vezes a área da região Ω , $A(\Omega)$, ou seja,

$$2 \iint_{\Omega} dx dy = 2A(\Omega) = 2\pi$$

enquanto a segunda parcela deverá ser determinada usando coordenadas polares.

Então, tendo em atenção (19), resulta:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Gamma} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta - \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \\ &= \frac{8}{3} [-\cos\theta]_0^{\pi} + \frac{8}{3} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{16}{3} - \frac{16}{9} = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

Obtém-se finalmente para o volume do sólido T :

$$V(T) = 2\pi - \frac{32}{9} = \frac{18\pi - 32}{9}$$

Outras aplicações do integral duplo

- Considere-se uma placa muito fina ocupando uma região, Ω , do plano xOy e designe-se por $\lambda(x, y)$ o valor da densidade mássica (por unidade de área) em cada ponto (x, y) de Ω (placa). Assim, a massa da placa, $M(\Omega)$, é dada por:

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \lambda(x, y) dx dy$$

Se a densidade for constante em cada ponto (x, y) de Ω , por exemplo, $\lambda(x, y) = \lambda$, então

$$M(\Omega) = \lambda \iint_{\Omega} dx dy = \lambda A(\Omega) \quad (21)$$

em que $A(\Omega)$ é a área de Ω .

Além disso, as coordenadas do *centro de massa* da placa, $C_M = (x_M, y_M)$, são obtidas a partir das duas *médias ponderadas*, através da função (de peso) $\lambda(x, y)$, seguintes:

$$x_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_{\Omega} x \lambda(x, y) dx dy$$

$$y_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_{\Omega} y \lambda(x, y) dx dy$$

Exemplo 11: Seja uma placa fina com a forma de um semi-círculo de raio a e admita-se que a sua densidade mássica (por unidade de área), $\lambda(x, y)$, é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao ponto médio do lado recto da placa. Determine:

- a) A função que define a densidade mássica em cada ponto da placa.
- b) A massa da placa.
- c) As coordenadas do seu centro de massa.

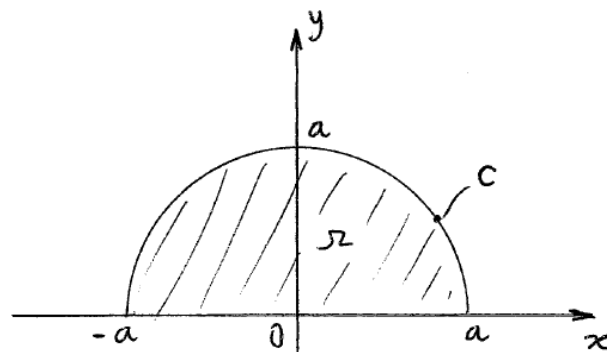
Solução:

- a) Admita-se que a placa ocupa a região, Ω , do plano xOy

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$

tendo como fronteira o eixo dos xx e a linha, C , de equação cartesiana:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



Nestas condições, a densidade mássica é definida, em cada ponto de Ω (placa), pela função

$$\lambda(x, y) = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

b) A massa da placa, M , é dada pelo integral duplo

$$M = \iint_{\Omega} \alpha \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

que deverá ser calculado em coordenadas polares.

Assim, considere-se que Ω é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto (região Tipo I):

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq a\}$$

Notando que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \alpha \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \iint_{\Gamma} (\alpha r) r \, dr d\theta = \alpha \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \, dr d\theta = \\ &= \alpha \int_0^{\pi} \frac{1}{3} [r^3]_0^a d\theta = \frac{\alpha a^3}{3} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\alpha \pi a^3}{3} \end{aligned} \quad (22)$$

c) Designando o centro de massa por $C_M = (x_M, y_M)$, então:

$$x_M = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \alpha x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \quad (23)$$

$$y_M = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \alpha y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

Como a placa é simétrica em relação ao eixo dos yy e a função integranda em (23) é ímpar na variável x , resulta:

$$\iint_{\Omega} \alpha x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = 0 \Rightarrow x_M = 0$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y_M &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \alpha y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \frac{1}{M} \iint_{\Gamma} (\alpha r)(r \sin \theta) r \, dr d\theta = \\
 &= \frac{\alpha}{M} \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 \sin \theta \, dr d\theta = \frac{\alpha}{M} \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \left[r^4 \right]_0^a \sin \theta \, d\theta = \\
 &= \frac{\alpha a^4}{4M} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{\alpha a^4}{4M} [-\cos \theta]_0^{\pi} = \frac{\alpha a^4}{2M}
 \end{aligned}$$

isto é, atendendo a (22):

$$y_M = \frac{3a}{2\pi}$$

Conclui-se que o centro de massa da placa localiza-se no ponto com coordenadas:

$$C_M = \left(0, \frac{3a}{2\pi} \right)$$

- Se a placa é materialmente *homogênea* (se a densidade é constante), tendo em atenção (21), obtém-se:

$$\lambda(x, y) = \lambda = \frac{M(\Omega)}{A(\Omega)}$$

Neste caso, o *centro de massa* da placa é coincidente com o *centroide da região* Ω , $\bar{C} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo as suas coordenadas dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A(\Omega)} \iint_{\Omega} x \, dx dy$$

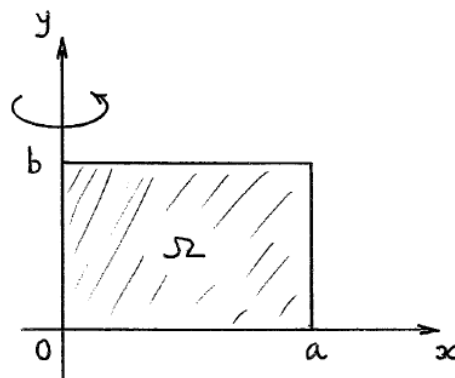
$$\bar{y} = \frac{1}{A(\Omega)} \iint_{\Omega} y \, dx dy$$

- Admita-se, agora, que a placa roda em torno de uma linha, L . O momento de inércia, I_L , da placa em relação ao eixo de rotação L , é dado por

$$I_L = \iint_{\Omega} \lambda(x, y) [r(x, y)]^2 \, dx dy$$

onde $r(x, y)$ é distância de cada ponto (x, y) de Ω ao eixo de rotação. Os momentos de inércia em relação aos eixos dos xx e dos yy são, respectivamente, designados por I_x e I_y .

Exemplo 12: Seja a placa fina de massa M apresentada na figura seguinte



e admita-se que ela roda em torno do eixo dos yy . Calcule o momento de inércia da placa em relação a esse eixo, I_y , supondo que:

- A placa tem uma densidade mássica uniforme.
- A placa tem uma densidade mássica que varia proporcionalmente com o quadrado da distância ao lado oposto ao eixo de rotação.

Solução:

- Se a densidade mássica da placa é constante, então o seu valor é

$$\lambda(x, y) = \frac{M}{A(\Omega)} = \frac{M}{ab}$$

onde $A(\Omega) = ab$ é a área da placa (região Ω).

Projectando Ω sobre o eixo dos yy (região *Tipo II*)

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a\}$$

e sabendo que $r(x, y) = x$, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{M}{ab} \iint_{\Omega} x^2 \, dx dy = \frac{M}{ab} \int_0^b \int_0^a x^2 \, dx dy = \\ &= \frac{M}{ab} \int_0^b \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_0^a dy = \frac{Ma^2}{3b} \int_0^b dy = \frac{Ma^2}{3} \end{aligned}$$

b) Neste caso, a densidade mássica da placa é dada por

$$\lambda(x, y) = \alpha(a - x)^2$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_{\Omega} \alpha(a - x)^2 x^2 \, dx dy = \alpha \int_0^b \int_0^a (a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4) \, dx dy = \\ &= \alpha \int_0^b \left[\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^a dy = \alpha \frac{a^5}{30} \int_0^b dy = \frac{\alpha a^5 b}{30} \end{aligned} \quad (24)$$

O resultado obtido em (24) pode ainda ser reescrito em função da massa, M , da placa.

Com efeito, notando que

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \alpha(a - x)^2 \, dx dy = \alpha \int_0^b \int_0^a (a - x)^2 \, dx dy = \\ &= \alpha \int_0^b \frac{1}{3} \left[-(a - x)^3 \right]_0^a dy = \frac{\alpha a^3}{3} \int_0^b dy = \frac{\alpha a^3 b}{3} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{3M}{a^3 b}$$

substituindo em (24) obtém-se finalmente:

$$I_y = \frac{Ma^2}{10}$$