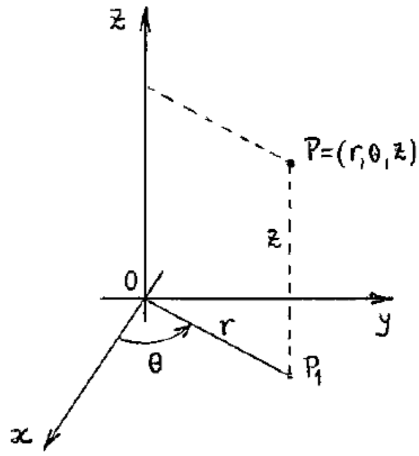
Integral triplo em coordenadas cilíndricas

- Um ponto *P* do espaço, com coordenadas (x,y,z) definidas num referencial ortonormado *Oxyz*, pode ainda ser expresso através de um terno de números reais (r,θ,z); as duas primeiras coordenadas, r e θ, são as coordenadas polares do ponto, P_1, que é a projecção ortogonal do ponto *P* sobre o plano *xOy*, sendo a terceira coordenada a coordenada cartesiana *z* do ponto *P*.



Os números *r*, θ e *z* relacionam-se com as coordenadas cartesianas através das seguintes igualdades

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\ \mathrm{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = z \tag{11}$$

em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e definem-se como as *coordenadas cilíndricas* do ponto *P*. As expressões inversas de (11) são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad z = z$$

excepto para os casos em que $x = 0$. Os pontos onde $x = 0$ requerem uma atenção particular.

- Em coordenadas cartesianas, as *superfícies coordenadas*

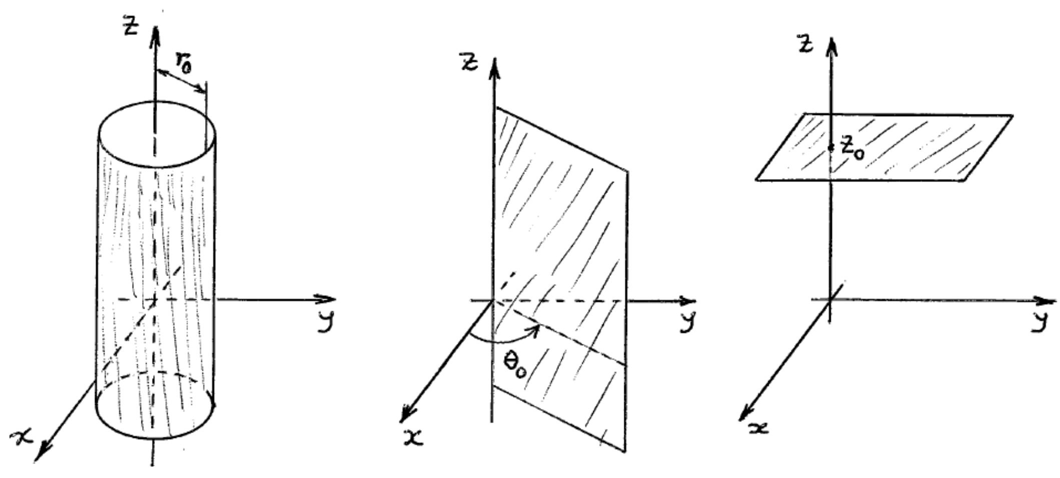
$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

são três planos paralelos aos planos coordenados.
O ponto *P* com coordenadas (x_0, y_0, z_0) situa-se nos planos $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$.

- Em coordenadas cilíndricas, as *superfícies coordenadas* tomam a forma:

$$r = r_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad z = z_0 .$$

A superfície $r = r_0$ é uma *superfície cilíndrica circular recta* de raio r_0; o seu eixo central é o eixo dos *zz*.
A superfície $\theta = \theta_0$ é um *semi-plano vertical* apoiado no eixo dos *zz* e faz um ângulo θ_0 radianos com o semieixo positivo dos *xx*.
A última superfície coordenada é o *plano* $z = z_0$ (plano paralelo ao plano coordenado *xOy*).

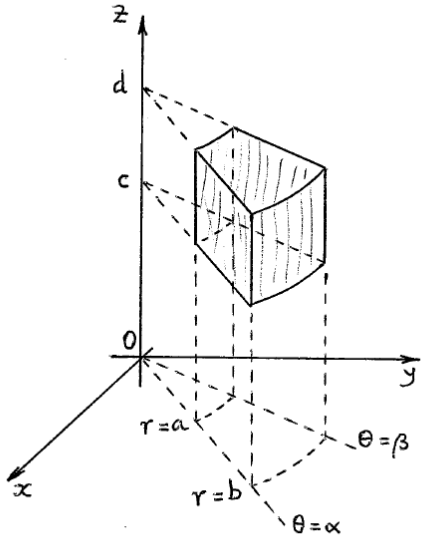


O ponto *P* com coordenadas (r_0, θ_0, z_0) situa-se na superfície cilíndrica $r = r_0$, no semi-plano vertical $\theta = \theta_0$ e no plano $z = z_0$.

- As coordenadas cilíndricas são adequadas para descrever sólidos que apresentam uma forma que se assemelha a uma *cunha cilíndrica*, isto é, que são formados por todos os pontos (x,y,z) do espaço com coordenadas cilíndricas (r,θ,z) definidas no conjunto

$$\Pi=\{(r,\theta,z)\ :\ a\le r\le b\ ,\ \alpha\le\theta\le\beta\ ,\ c\le z\le d\}$$

em que $0\le a<b$, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ e $c<d$.



As coordenadas cilíndricas podem, ainda, ser usadas, de um modo mais geral, em casos onde a região de integração possui um eixo de simetria, sendo considerado o eixo dos *zz* como eixo de simetria.

Cálculo do integral triplo em coordenadas cilíndricas

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região (sólido), T, do espaço. Se T é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) com coordenadas cilíndricas (r,θ,z) definidas numa região Π, então:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Pi f(r\cos\theta,r\ \mathrm{sen}\theta,z)\ r\ drd\theta dz \qquad (12)$$

A igualdade (12) traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas*.

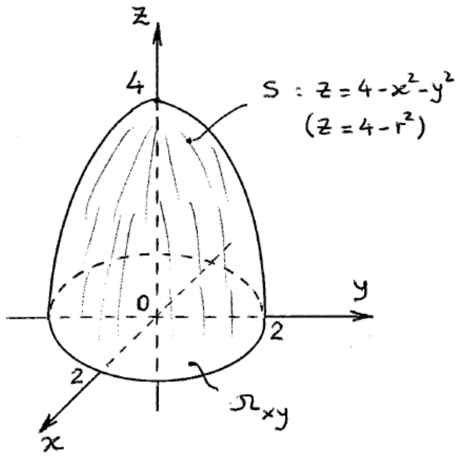
- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (12), conclui-se que o integral triplo

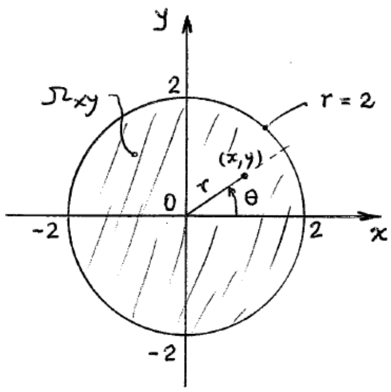
$$V(T)=\iiint_T dxdydz=\iiint_\Pi r\ drd\theta dz$$

exprime o volume do sólido, $V(T)$, descrito pela região T e definido, em coordenadas cilíndricas, pela região Π.

Exemplo 4: Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$, em que T é a região do espaço definida por:

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\ 0\le z\le 4-x^2-y^2\right\}$$





Solução:

O sólido, T, é limitado superiormente pelo paraboloide de revolução de equação

$$z=f(x,y)=4-x^2-y^2$$

e inferiormente pela região circular, Ω_{xy}, situada no plano xOy dada por:

$$\Omega_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x^2+y^2\le 4\right\}$$

Dado que o sólido, T, é simétrico em relação ao eixo dos zz, então pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{(r,\theta,z)\ :\ 0 \le r \le 2\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le z \le 4 - r^2\right\}$$

Assim, obtém-se para o integral triplo:

$$\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_\Pi r^2\ r\ drd\theta dz = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{4-r^2} r^3\ dzd\theta dr =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^3 [z]_0^{4-r^2}\ d\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(4r^3 - r^5)d\theta dr =$$

$$= \int_0^2 (4r^3 - r^5)[\theta]_0^{2\pi}\ dr = 2\pi\int_0^2 (4r^3 - r^5)dr =$$

$$= 2\pi\left[r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_0^2 = 2\pi\left(16 - \frac{32}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

Exemplo 5: Recorra a coordenadas cilíndricas para determinar o volume do sólido, T, limitado superiormente pelo plano $z = y$ (superfície S_1) e inferiormente pelo paraboloide de revolução de equação $z = x^2 + y^2$ (superfície S_2).

Solução:

Considerando a região T descrita em coordenadas cartesianas, verifica-se que as superfícies S_1 e S_2 intersectam-se na curva, C, definida por

$$C : z = y\ \wedge\ x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$$

estando situada sobre a superfície cilíndrica circular de equação:

$$x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$$

A projecção ortogonal de C sobre o plano xOy é a curva, C_1, tal que

$$C_1 : x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4 \ , \ z = 0$$

sendo uma circunferência de raio $1/2$ centrada no ponto $P = (0,1/2,0)$. Assim, o sólido, T, é limitado superiormente pela superfície

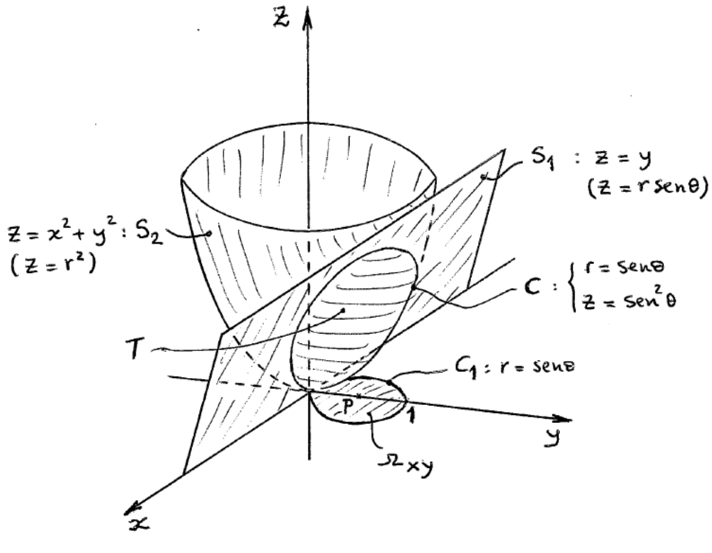
$$S_1 : z = y$$

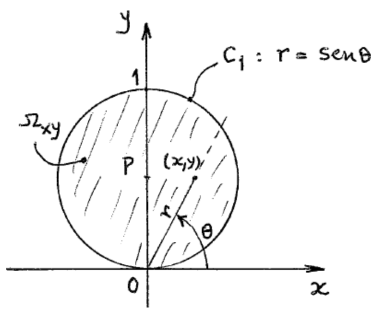
inferiormente pela superfície

$$S_2 : z = x^2 + y^2$$

e a sua projecção ortogonal sobre o plano xOy é a região circular, Ω_{xy}, definida por:

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x^2 + (y - 1/2)^2 \le 1/4 \right\}$$





Considerando, em alternativa, coordenadas cilíndricas, as equações das superfícies S_1 e S_2 são:

$$S_1 : z = r \ \text{sen}\theta \quad \text{e} \quad S_2 : z = r^2 .$$

Por outro lado, as equações das curvas C e C_1 são:

$$C : r = \text{sen}\theta \ , \ z = \text{sen}^2\theta \quad \text{ e } \quad C_1 : r = \text{sen}\theta \ , \ z = 0 .$$

Notando que Ω_{xy} é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r, θ) no conjunto

$$\Gamma = \{(r, \theta) \ : \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le r \le \text{sen}\theta\}$$

o sólido, T, pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{(r, \theta, z) \ : \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le r \le \text{sen}\theta \ , \ r^2 \le z \le r \ \text{sen}\theta\right\}$$

Então, obtém-se para o volume do sólido, $V(T)$:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi r \ drd\theta dz \ = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} \int_{r^2}^{r \ \text{sen}\theta} r \ dzdrd\theta =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} r \, [z]_{r^2}^{r \ \text{sen}\theta} drd\theta = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} (r^2 \text{sen}\theta - r^3) drd\theta =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \text{sen}\theta - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\text{sen}\theta} d\theta = \frac{1}{12} \int_0^\pi \text{sen}^4\theta \ d\theta$$

Sabendo que

$$4\text{sen}^4\theta = (1 - \cos(2\theta))^2 = 1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) =$$

$$= 1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = \frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)$$

obtém-se:

$$V(T) = \frac{1}{32} \int_0^\pi d\theta - \frac{1}{24} \int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta + \frac{1}{96} \int_0^\pi \cos(4\theta) d\theta = \frac{\pi}{32} - 0 + 0 = \frac{\pi}{32}$$