COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Ficha 0;1 - Revisões

ÁLGEBRA VECTORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA

1) Sejam $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} - y\vec{k}$, $\vec{b} = (y-x)\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Calcule o valor de:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, o produto escalar de $\vec{a}$ por $\vec{b}$.

b) $\vec{a} \times \vec{b}$, o produto vectorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$.

c) O que se pode concluir em relação a $\vec{b} \times \vec{a}$?

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$, o produto misto $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$.

e) O que se pode concluir em relação a $\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c}$?

2) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$.

a) O que se pode concluir em relação ao paralelogramo definido pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

b) Mostre que se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, então $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

3) Mostre que o vetor $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) \in \mathbb{R}^3$ é múltiplo escalar de $\vec{u} \times \vec{v}$.

4) Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vectores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{d}$ é ortogonal a $\vec{a}$ e $\vec{c}$ é paralelo a $\vec{a}$. Mostre que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são ortogonais.

5) Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, em que $\vec{a}$ é não nulo. Mostre que se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, então $\vec{b} = \vec{c}$.

6) Relativamente aos vectores $x\vec{i} + 11\vec{j} - 3\vec{k}$ e $2x\vec{i} - x\vec{j} - 5\vec{k}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, calcule todos os valores de x de forma que eles sejam perpendiculares.

7) Sejam os vectores $\vec{a} = \vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ do espaço $\mathbb{R}^3$; determine para que valores de *x* e *y* se verifica $\vec{a} \perp \vec{b}$ e $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.

8) Sejam $\vec{a}, \vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 3$ e $\vec{a} \cdot \vec{c} = -4$. Obtenha o valor do parâmetro real *k*, de modo que $\|\vec{a} + k\vec{c}\| = 2$.

9) Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{7}$, $\|\vec{b}\| = 1$ e o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $60°$. Calcule o valor de $\|\vec{a}\|$.

10) Considere os pontos *P* e *Q* do espaço $\mathbb{R}^3$ e seja *R* o ponto do segmento de reta $[PQ]$, cuja distância a *P* é o dobro da distância a *Q*. Designando por $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{r}$ os vectores de posição dos pontos *P*, *Q* e *R*, respectivamente, mostre que $\vec{r} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}$.

11) Calcule as coordenadas do centro, *C*, da circunferência e o valor do seu raio, *r*, sabendo que ela passa pelos pontos $P = (1, -3)$, $Q = (4, 6)$ e $R = (-3, 5)$. Escreva a equação cartesiana da circunferência.

12) Mostre que se $\vec{b}$ é um vector não nulo do espaço $\mathbb{R}^3$, então qualquer vector $\vec{a}$ pode ser expresso, de modo único, através da soma dos vectores $\vec{a}_{||}$ (colinear com $\vec{b}$) e $\vec{a}_{\perp}$ (perpendicular a $\vec{b}$), isto é, $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$.

13) Determine uma equação vectorial para a reta, *r*, de equações cartesianas $\frac{x+1}{2} = y - 1 = -z$.

14) Seja o plano definido pelos pontos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (-1, -1, 2)$ e $R = (2, 2, -1)$. Determine:

a) Um vector, $\vec{n}$, normal ao plano.

b) A equação cartesiana do plano.

c) A área, *S*, do triângulo $[PQR]$.

15) Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vectores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Mostre que $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.

b) Tendo em atenção a propriedade da alínea anterior, mostre que, sendo $\vec{u}$ um versor de $\mathbb{R}^3$, então $\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}+(\vec{u}\times\vec{a})\times\vec{u}$, isto é, o vector $\vec{a}$ pode ser expresso, de modo único, através da soma dos vectores $(\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}$ (colinear com $\vec{u}$) e $(\vec{u}\times\vec{a})\times\vec{u}$ (perpendicular a $\vec{u}$).

16) Obtenha a equação cartesiana do plano, *M*, que passa no ponto $P=(1,3,1)$ e contém a reta, *s*, de equações paramétricas $x=t$, $y=t$, $z=-2+t$, $t\in\mathbb{R}$.

17) Considere o ponto $P=(1,3,4)$ e o plano, *M*, de equação cartesiana $x+y-2z=0$. Determine:

a) A distância de *P* a *M*.

b) O ponto, *I*, do plano *M* mais próximo de *P*.

18) Considere o ponto $P=(1,3,1)$ e a recta, *s*, de equações paramétricas $x=t$, $y=t$, $z=-2+t$, $t\in\mathbb{R}$. Determine:

a) A distância de *P* a *s*.

b) O ponto, *I*, da recta *s* mais próximo de *P*.

19) Seja a recta *r*, do plano *Oxy*, de equações $y=mx+b$ e $z=0$. Mostre que a distância do ponto $P=(p_1,p_2,p_3)$ à recta *r* é dada por:

$$d_{P,r}=\frac{\sqrt{(1+m^2)(p_3)^2+(mp_1-p_2+b)^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

20) Seja o plano, *M*, de equação cartesiana $x+2y+3z=-2$. Obtenha os valores dos parâmetros *k* e *w*, de forma que a recta, *r*, de equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}=(w,2,0)+t(2,k,w)$, $t\in\mathbb{R}$, esteja contida no plano *M*.

21) Sejam as rectas $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}=(1,0,1)+t(1,1,2)$, $t\in\mathbb{R}$ e $s\ :\ x-2z=2y=2$. Determine:

a) Uma equação vectorial para a recta *s*.

b) A equação vectorial de uma recta, *h*, que passa no ponto $Q=(3,2,1)$ e que é concorrente com as rectas *r* e *s*.

Soluções:

1) **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2y - x$.

b) $\vec{a}\times\vec{b} = (y^2 - xy - 1, x, xy - x^2)$.

c) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b} = (-y^2 + xy + 1, -x, -xy + x^2)$.

d) $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 2x^2 + y^2 - x - 3xy - 1$.

e) $\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b} = -\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = -2x^2 - y^2 + x + 3xy + 1$.

2) **a)** Trata-se de um paralelogramo rectângulo. **b)** - - - -

3) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = -(\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{v}\times\vec{u}) = -2(\vec{u}\times\vec{v})$.

4) - - - - **5)** - - - -

6) $(x,11,-3)\cdot(2x,-x,-5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = 3$.

7) $(1,x,1)\cdot(2,-1,y) = 0 \wedge x^2 + 2 = y^2 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \wedge y = -\frac{1}{4}$.

8) $k = 0 \vee k = \frac{8}{9}$. **9)** $\|\vec{a}\| = 2$.

10) $R = P + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}$. **11)** $C = (1,2)$, $r = 5$ e $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

12) $\vec{a}_{\parallel} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$ e $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$.

13) $r : X(t) = P + t\vec{a} = (-1,1,0) + t(2,1,-1) , t \in \mathbb{R}$.

14) **a)** $\vec{n} = (0,1,1) \parallel \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$. **b)** $y + z = 1$. **c)** $S = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

15) - - - -

16) O vector normal ao plano é $\vec{n} = (0,1,-1)$, pelo que a equação cartesiana do plano é $y - z = 2$.

17) **a)** $d_{P,M} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) Sendo $\vec{n}=(1,1,-2)$ o vector normal ao plano M e $h\ :\ X(t)=P+t\vec{n}\ ,\ t\in\mathbb{R}$ a recta que passa em P e é perpendicular a M, então $I=h\cap M=\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{8}{3}\right)$.

18) a) $d_{P,s}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) Sendo $S=(0,0,-2)$ um ponto da recta e $\vec{u}=(1,1,1)$ o respectivo vector director, então $I=S+\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{u}}\,\overrightarrow{SP}=\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right)$.

19) - - - -

20) Sendo $\vec{n}=(1,2,3)$ o vector normal ao plano M e notando que $P=(w,2,0)\in M$ e $\vec{a}=(2,k,w)\perp\vec{n}$, obtém-se $k=8$ e $w=-6$.

21) a) $s\ :\ X(u)=S+u\vec{w}=(2,1,0)+u(2,0,1)\ ,\ u\in\mathbb{R}$.

b) $h\ :\ X(v)=Q+v\vec{r}=(3,2,1)+v(1,1,1)\ ,\ v\in\mathbb{R}$; é de notar que $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}\times\vec{r}=0$ e $\overrightarrow{SQ}\cdot\vec{w}\times\vec{r}=0$ para que a recta h seja concorrente com as rectas r e s.