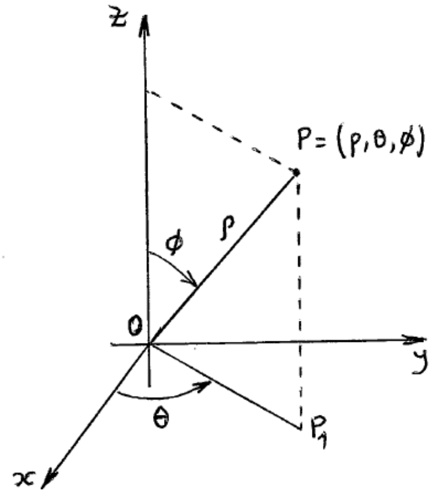
Integral triplo em coordenadas esféricas

- Um ponto *P* do espaço, com coordenadas (x, y, z) definidas num referencial ortonormado *Oxyz*, pode também ser representado através de um terno de números reais (ρ, θ, ϕ). A primeira coordenada, ρ, é a distância de *P* à origem, pelo que $\rho \geq 0$. A segunda coordenada, o ângulo θ, designada por *longitude*, corresponde à segunda coordenada das coordenadas cilíndricas e, portanto, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A terceira coordenada exprime o ângulo, ϕ, que o vector $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo dos *zz*; é designada por *colatitude*, ou *ângulo polar*, e $0 \leq \phi \leq \pi$.



Os números ρ, θ e ϕ estão relacionados com as coordenadas cartesianas através das seguintes igualdades

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad z = \rho\cos(\phi) \qquad (13)$$

e definem-se como as *coordenadas esféricas* do ponto *P*. As expressões inversas de (13) são

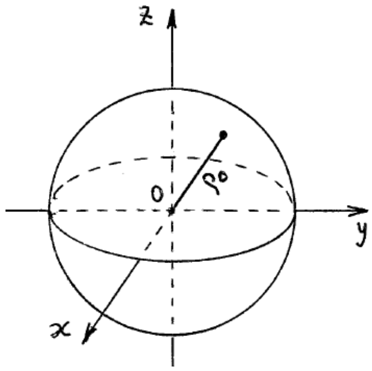
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

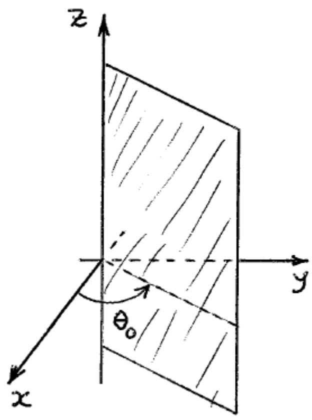
excepto para os casos em que $x = 0$.

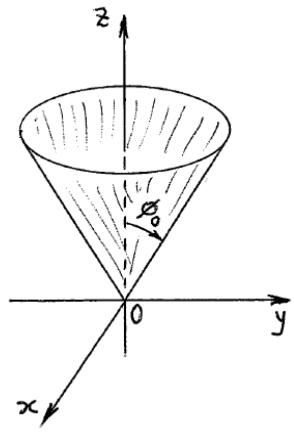
- Em coordenadas esféricas, as *superfícies coordenadas* tomam a forma:

$$\rho = \rho_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 \ \text{ e } \ \phi = \phi_0 .$$

A superfície $\rho = \rho_0$ é uma *superfície esférica* de raio ρ_0 centrada na origem.
Tal como nas coordenadas cilíndricas, $\theta = \theta_0$ é um *semi-plano vertical* apoiado no eixo dos *zz* e faz um ângulo de θ_0 radianos com o semieixo positivo dos *xx*.





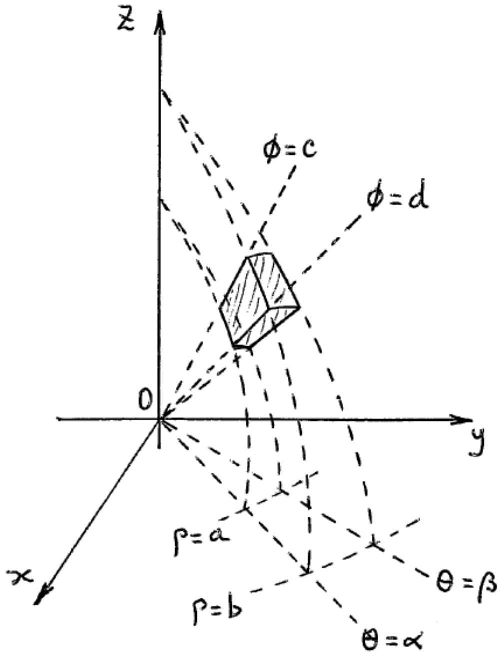


Relativamente à superfície $\phi = \phi_0$ verifica-se o seguinte:
i) Se $0 < \phi_0 < \pi / 2$ ou $\pi / 2 < \phi_0 < \pi$ a superfície corresponde a uma das folhas de um cone circular, que é gerado rodando, em torno do eixo dos *zz*, uma recta que passa na origem e faz um ângulo de ϕ_0 radianos com o semieixo positivo dos *zz*;
ii) A superfície $\phi_0 = \pi / 2$ é o plano coordenado *xOy*;
iii) A equação $\phi_0 = 0$ define o semieixo positivo dos *zz* e a equação $\phi_0 = \pi$ define o semieixo negativo dos *zz*.
O ponto *P* com coordenadas $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ situa-se na intersecção das superfícies $\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$ e $\phi = \phi_0$.

- As coordenadas esféricas são adequadas para descrever sólidos que apresentam uma forma que se assemelha a uma *cunha esférica*, ou seja, que são formados por todos os pontos (x,y,z) do espaço com coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) definidas no conjunto

$$\Pi = \{(\rho,\theta,\phi) \ : \ a \le \rho \le b \ , \ \alpha \le \theta \le \beta \ , \ c \le \phi \le d\}$$

em que $0 \le a < b$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$ e $0 \le c < d \le \pi$.



As coordenadas esféricas podem ser usadas, de uma forma mais geral, em situações onde a região de integração é simétrica em relação à origem do referencial.

Cálculo do integral triplo em coordenadas esféricas

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região (sólido), T, do espaço. Se T é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) com coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) definidas numa região Π, então:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Pi f\left(\rho \mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta), \rho \mathrm{sen}(\phi)\mathrm{sen}(\theta), \rho\cos(\phi)\right)\ \rho^2 \mathrm{sen}(\phi)\ d\rho d\theta d\phi \quad (14)$$

A equação (14) exprime, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas*.

- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (14), conclui-se que o integral triplo

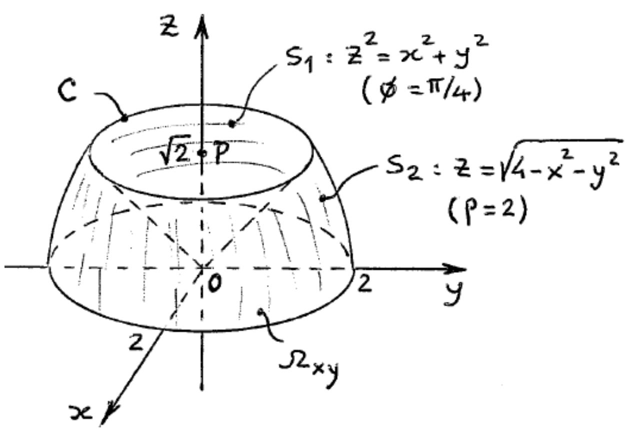
$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi \rho^2 \mathrm{sen}(\phi)\ d\rho d\theta d\phi$$

traduz o volume do sólido, $V(T)$, descrito pela região T e definido, em coordenadas esféricas, pela região Π.

Exemplo 6: Use coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido, T, limitado superiormente pelo cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ (superfície S_1) e inferiormente pela superfície, S_2, de equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Solução:

Todos os pontos situados na superfície S_2 pertencem à metade da superfície esférica de raio $\rho = 2$, centrada na origem e definida no semieixo positivo dos *zz*.



As superfícies S_1 e S_2 intersectam-se na curva, C, definida por:

$$C : x^2 + y^2 = 2 \;\wedge\; z = \sqrt{2}$$

Trata-se de uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada no ponto $P = (0,0,\sqrt{2})$ e está situada sobre a superfície cilíndrica circular de equação:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Verifica-se que $\phi = \pi / 4$ radianos para todos os pontos situados em C.
O sólido, T, é limitado superiormente pela superfície

$$S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; (z \geq 0)$$

inferiormente pela superfície

$$S_2 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

e a sua projecção ortogonal sobre o plano xOy é a região circular, Ω_{xy}, definida por:

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Recorrendo a coordenadas esféricas, conclui-se que o sólido, T, é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) que possuem coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) no conjunto:

$$\Pi = \{(\rho,\theta,\phi) \;:\; 0 \leq \rho \leq 2 \;,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \;,\; \pi / 4 \leq \phi \leq \pi / 2\}$$

Então, obtém-se para o volume do sólido, $V(T)$:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi \rho^2 \mathrm{sen}(\phi)\; d\rho d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \mathrm{sen}(\phi)\; d\phi d\theta d\rho = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \left[-\cos\phi\right]_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 \rho^2\,[\theta]_0^{2\pi}\,d\rho = \sqrt{2}\pi\int_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\left[\rho^3\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$$

Outras aplicações do integral triplo

- Considere-se um sólido, T, definido no espaço e designe-se por $\lambda(x,y,z)$ o valor da densidade mássica (por unidade de volume) em cada ponto (x,y,z) de T.
  Assim, a *massa* do sólido, $M(T)$, é dada por:

  $$M(T) = \iiint_T \lambda(x,y,z)\; dxdydz$$

  Se a densidade for constante em cada ponto (x,y,z) de T, por exemplo, $\lambda(x,y,z) = \lambda$, então

  $$M(T) = \lambda\iiint_T dxdydz = \lambda V(T) \tag{15}$$

  em que $V(T)$ é o volume de T.
  Além disso, as coordenadas do *centro de massa* do sólido, $C_M = (x_M, y_M, z_M)$, são obtidas a partir das três *médias ponderadas*, *através da função (de peso)* $\lambda(x,y,z)$, seguintes:

  $$x_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T x\;\lambda(x,y,z)\; dxdydz$$

  $$y_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T y\;\lambda(x,y,z)\; dxdydz$$

  $$z_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T z\;\lambda(x,y,z)\; dxdydz$$

Exemplo 7: Determine a massa do sólido, *T*, que tem a forma de um cilindro circular recto, com raio *R* e altura *h*, sabendo que a densidade mássica (por unidade de volume), $\lambda(x,y,z)$, é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao eixo do cilindro.

Solução:

Admita-se que a base do cilindro está situada no plano coordenado *xOy* e que o seu eixo coincide com o eixo dos *zz*. Nestas condições, o sólido *T* corresponde, em coordenadas cartesianas, ao conjunto

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in \Omega_{xy} \ , \ 0 \le z \le h\right\}$$

onde Ω_{xy} é a região do plano *xOy* tal que:

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

A densidade mássica é definida, em cada ponto de *T*, pela função

$$\lambda(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

em que $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Recorrendo a coordenadas cilíndricas, o sólido *T* é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) que possuem coordenadas cilíndricas (r,θ,z) no conjunto:

$$\Pi = \{(r,\theta,z) \ : \ 0 \le r \le R \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le z \le h\}$$

Então, a massa do sólido *T*, $M(T)$, é:

$$M(T) = \iiint_T k\sqrt{x^2 + y^2} \ dxdydz = \iiint_\Pi (kr)r \ drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 \ dzd\theta dr = k\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 [z]_0^h d\theta dr =$$

$$= kh\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \ d\theta dr = kh\int_0^R r^2 [\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi kh\int_0^R r^2 \ dr =$$

$$= \frac{2\pi kh}{3}\left[r^2\right]_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3 h$$

Exemplo 8: Determine a massa do sólido, *T*, que tem a forma de uma esfera de raio um, sabendo que a densidade mássica (por unidade de volume), $\lambda(x,y,z)$, é, em cada ponto, directamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de *T*.

Solução:

Admita-se que a esfera tem o seu centro na origem do referencial, isto é:

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

A densidade mássica é definida, em cada ponto de *T*, pela função

$$\lambda(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

em que $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Recorrendo a coordenadas esféricas, o sólido *T* é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) que possuem coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) no conjunto:

$$\Pi = \left\{(\rho,\theta,\phi) \;:\; 0 \le \rho \le 1 \,,\; 0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le \phi \le \pi\right\}$$

Então, a massa do sólido *T*, $M(T)$, é:

$$M(T) = \iiint_T k(x^2 + y^2 + z^2)\; dxdydz = \iiint_\Pi (k\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)\; d\rho d\theta d\phi =$$

$$= k\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^4 \operatorname{sen}(\phi)\; d\phi d\theta d\rho = k\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^4 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}\; d\rho d\theta =$$

$$= 2k\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^4\; d\rho d\theta = 2k\int_0^1 \rho^4 \left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = 4k\pi\int_0^1 \rho^4\; d\rho =$$

$$= \frac{4k\pi}{5}\left[\rho^5\right]_0^1 = \frac{4}{5}k\pi$$

- Se o sólido é materialmente *homogéneo* (se a densidade é constante), tendo em atenção (15), obtém-se:

$$\lambda(x,y,z)=\lambda=\frac{M(T)}{V(T)}$$

Neste caso, o *centro de massa* do sólido é coincidente com o *centroide da região T*, $\overline{C}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, sendo as suas coordenadas dadas por:

$$\overline{x}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T x\ dxdydz$$

$$\overline{y}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T y\ dxdydz$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T z\ dxdydz$$

Exemplo 9: Localize o centroide do sólido, *T*, do exemplo 5.

Solução:

Verificou-se no exemplo 5 que o volume do sólido tem o valor $V(T)=\pi/32$.
Dado que *T* é simétrico em relação ao plano coordenado *yOz*, então $\overline{x}=0$.
Relativamente a $\overline{y}$ verifica-se:

$$\overline{y}=\frac{32}{\pi}\iiint_T y\ dxdydz=\frac{32}{\pi}\iiint_\Pi \big(r\ \operatorname{sen}(\theta)\big)r\ drd\theta dz=$$

$$=\frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\int_{r^2}^{r\ \operatorname{sen}\theta} r^2\operatorname{sen}(\theta)\ dzdrd\theta=$$

$$=\frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\operatorname{sen}(\theta)\left[z\right]_{r^2}^{r\ \operatorname{sen}\theta} drd\theta=$$

$$= \frac{32}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \left(r^3 \operatorname{sen}^2(\theta) - r^4 \operatorname{sen}(\theta) \right) dr d\theta =$$

$$= \frac{32}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{1}{5} r^5 \operatorname{sen}(\theta) \right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta =$$

$$= \frac{8}{5\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6(\theta)\, d\theta$$

Sabendo que

$$\operatorname{sen}^6\theta = \frac{1}{8}(1 - \cos(2\theta))^3 = \frac{1}{8}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right)\left(1 - \cos(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 3\cos(2\theta) + 3\cos^2(2\theta) - \cos^3(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 4\cos(2\theta) + 3\cos^2(2\theta) + \cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cos(2\theta) + \cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{5}{16}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

obtém-se:

$$\bar{y} = \frac{8}{5\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{16} - \frac{5}{16}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta) \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\theta) d\theta + \frac{1}{5\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{1}{2}$$

Relativamente a $\bar{z}$ obtém-se:

$$\bar{z} = \frac{32}{\pi}\iiint_T z\ dxdydz = \frac{32}{\pi}\iiint_\Pi zr\ drd\theta dz =$$

$$= \frac{32}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\mathrm{sen}\theta} \int_{r^2}^{r\ \mathrm{sen}\theta} zr\ dzdrd\theta = \frac{16}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\mathrm{sen}\theta} r\left[z^2\right]_{r^2}^{r\ \mathrm{sen}\theta} drd\theta =$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\mathrm{sen}\theta} \left(r^3 \mathrm{sen}^2(\theta) - r^5\right) drd\theta =$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{1}{4}r^4 \mathrm{sen}^2(\theta) - \frac{1}{6}r^6\right]_0^{\mathrm{sen}\theta} d\theta = \frac{4}{3\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}^6(\theta)\ d\theta =$$

$$= \frac{5}{12\pi}\int_0^\pi d\theta - \frac{5}{12\pi}\int_0^\pi \cos(2\theta)d\theta + \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \cos(2\theta)\mathrm{sen}^2(2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{5}{12} - 0 + 0 = \frac{5}{12}$$

Concluindo, as coordenadas do centroide do sólido são:

$$\bar{C} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}\right)$$

- Admita-se, agora, que o sólido roda em torno de uma linha, L. O *momento de inércia*, I_L, do sólido *em relação ao eixo de rotação L*, é dado por

$$I_L = \iiint_T \lambda(x,y,z)[r(x,y,z)]^2\ dxdydz$$

onde $r(x,y,z)$ é distância de cada ponto (x,y,z) de T ao eixo de rotação. Os momentos de inércia em relação aos eixos dos *xx*, dos *yy* e dos *zz* são, respectivamente, designados por I_x, I_y e I_z.