Jacobianos: mudança de variáveis na integração tripla

- O processo que envolve a mudança de variáveis na integração tripla é semelhante ao que foi exposto para a integração dupla. No presente capítulo foram já referidas duas situações particulares de mudança de variáveis: a integração em coordenadas cilíndricas e a integração em coordenadas esféricas.

- Neste caso, considere-se o conceito de volume. Seja a região Π de um espaço que é representado pelo referencial *Ouvw*; neste espaço, um ponto *P* terá coordenadas (u,v,w), em que u é a *abcissa*, v a *ordenada* e w a *cota*. Admita-se que

$$x = x(u,v,w) \ \ , \ \ y = y(u,v,w) \ \ , \ \ z = z(u,v,w) \qquad (16)$$

são funções continuamente diferenciáveis na região Π.
À medida que (u,v,w) toma valores no interior da região Π, os pontos de coordenadas $(x,y,z) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ geram uma região *T* no espaço representado pelo referencial *Oxyz*.
Se o mapeamento associado à transformação

$$(u,v,w) \ \rightarrow \ (x,y,z)$$

for injectivo no interior de Π e se o *Jacobiano*, $J(u,v,w)$, definido pelo determinante de ordem 3

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

nunca se anular no interior de Π, então o volume da região *T*, $V(T)$, é dado por:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi \left|J(u,v,w)\right| dudvdw \qquad (17)$$

- Admita-se, agora, que se pretende integrar uma função contínua $f(x,y,z)$ na região *T*. Se o processo de cálculo se mostrar demasiado complexo, então é conveniente a aplicação de uma adequada mudança de variáveis, tal como se define em (16), de forma a torná-lo mais expedito. Assim, atendendo a (17), obtém-se:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Pi f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\ \left|J(u,v,w)\right| dudvdw \qquad (18)$$

- Seja *T* o conjunto de todos os pontos (x,y,z) com coordenadas cilíndricas (r,θ,z) definidas numa região Π. A expressão que traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas*, é:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Pi f(r\cos\theta, r\ \operatorname{sen}\theta, z)\ r\ drd\theta dz \qquad (19)$$

Notando que as equações de mudança variáveis são

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\ \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = z$$

obtém-se para o Jacobiano:

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \;\Rightarrow\; \left|J(r,\theta,z)\right| = r$$

Tendo em conta (18), confirma-se o resultado apresentado em (19).

- Seja T o conjunto de todos os pontos (x,y,z) com coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) definidas numa região Π. A expressão que traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas*, é:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Pi f\left(\rho\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta),\rho\cos(\phi)\right)\rho^2\operatorname{sen}(\phi)d\rho d\theta d\phi \quad (20)$$

Notando que as equações de mudança variáveis são

$$x = \rho\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \quad , \quad y = \rho\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad z = \rho\cos(\phi)$$

obtém-se para o Jacobiano:

$$J(\rho,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\phi} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\phi) \\ -\rho\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & \rho\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & -\rho\operatorname{sen}(\phi) \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}(\phi)$$

Tendo em atenção (18), confirma-se o resultado obtido em (20).