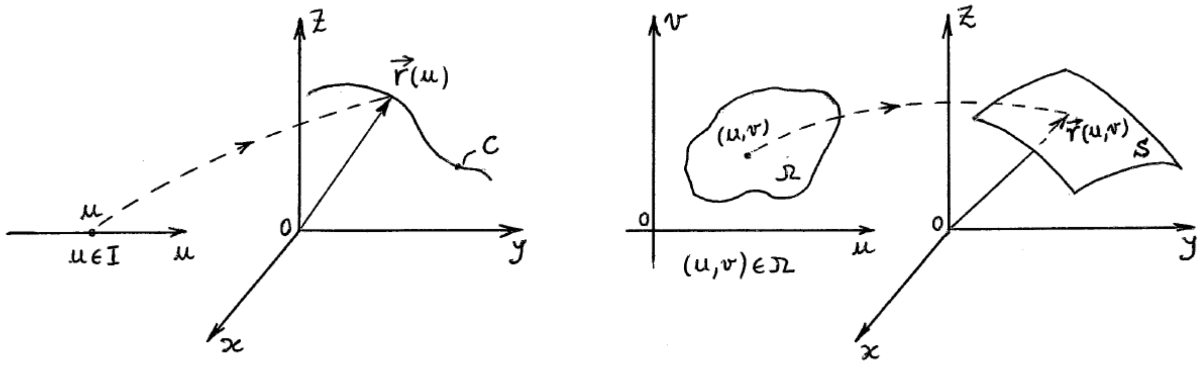
SUPERFÍCIES

Parametrização da superfície

- Como se viu no capítulo 1, uma curva, *C*, no espaço pode ser parametrizada através de uma função vectorial $\vec{r}(u)$, em que *u* toma valores num dado intervalo *I* do eixo dos *uu*. Da mesma forma, é possível parametrizar uma superfície, *S*, no espaço através de uma função vectorial $\vec{r}(u,v)$, onde (u,v) toma valores numa dada região, Ω, do plano *uOv*.



Exemplo 1: O *gráfico da função escalar*

$$z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega$$

pode ser parametrizado considerando:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}\ ,\ (u,v) \in \Omega$$

À medida que (u,v) toma valores em Ω, a extremidade do vector de posição $\vec{r}(u,v)$ traça a superfície $z = f(x,y)$, que é o *gráfico de* $f(x,y)$.

Exemplo 2: O *plano* que passa no ponto P e é gerado pelos vectores (*linearmente independentes*) $\vec{a}$ e $\vec{b}$, pode ser parametrizado como:

$$\vec{r}(u,v) = P + u\vec{a} + v\vec{b} \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Este plano contém as linhas (rectas) ℓ_1 e ℓ_2:

$$\ell_1 : \vec{r}(u,0) = P + u\vec{a} \ , \ u \in \mathbb{R}$$

$$\ell_2 : \vec{r}(0,v) = P + v\vec{b} \ , \ v \in \mathbb{R}$$

Se o plano passa na origem, então a parametrização (1) reduz-se a:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b} \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Exemplo 3: Seja a superfície S (*cilindro de revolução*)

$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ 0 \le z \le h \quad (a > 0) \tag{2}$$

cuja projecção, no plano *xOy*, é a *circunferência* de equação:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ z = 0$$

Considerando (*coordenadas cilíndricas*)

$$x = a\cos(\theta) \quad , \quad y = a\,\mathrm{sen}(\theta) \quad , \quad z = v$$

a parametrização de S pode ser escrita sob a forma

$$\vec{r}(\theta,v) = a\cos(\theta)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + v\vec{k} \ , \ (\theta,v) \in \Omega \tag{3}$$

em que Ω é a *região rectangular* do plano θOv:

$$\Omega = \{(\theta,v) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le v \le h\} \tag{4}$$

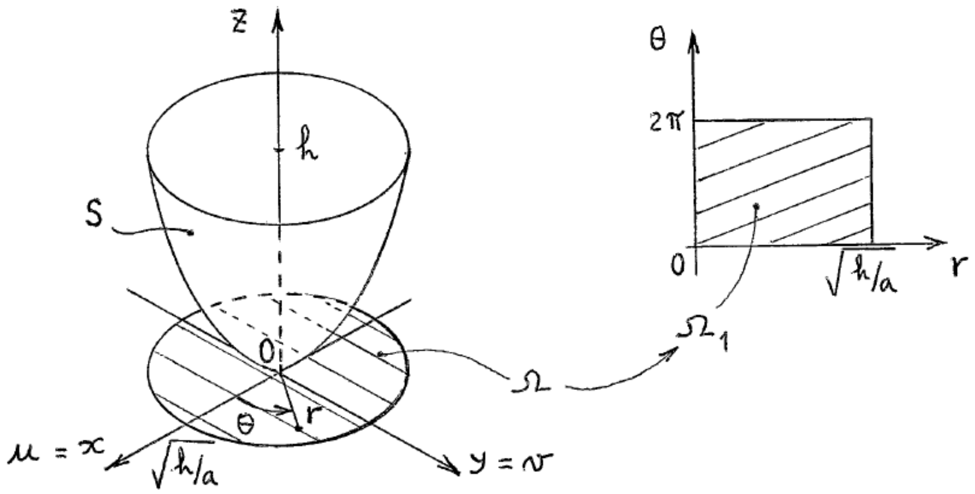
- O exemplo seguinte mostra que a parametrização de uma superfície não é única.

Exemplo 4: Seja a superfície S (*paraboloide de revolução*)

$$z = a(x^2 + y^2)\ ,\ 0 \le z \le h \quad (a > 0) \tag{5}$$

cuja projecção no plano xOy é a *região circular*:

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x^2 + y^2 \le h/a\right\} \tag{6}$$



Dado que $z = f(x,y)$, a parametrização de S pode ser feita considerando $x = u$ e $y = v$ (*coordenadas cartesianas*), isto é:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + a(u^2 + v^2)\vec{k}\ ,\ (u,v) \in \Omega \tag{7}$$

Por outro lado, notando que a região Ω pode ser reescrita, no referencial $rO\theta$ (*coordenadas polares*), sob a forma (*região rectangular*)

$$\Omega_1 = \left\{(r,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le \sqrt{h/a}\right\} \tag{8}$$

é, ainda, possível definir a superfície S usando a seguinte parametrização:

$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + ar^2\vec{k}\ ,\ (r,\theta) \in \Omega_1 \tag{9}$$

Se $a = 1$ obtém-se para a parametrização definida em (6) e (7)

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega \quad , \quad \Omega = \left\{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le h\right\}$$

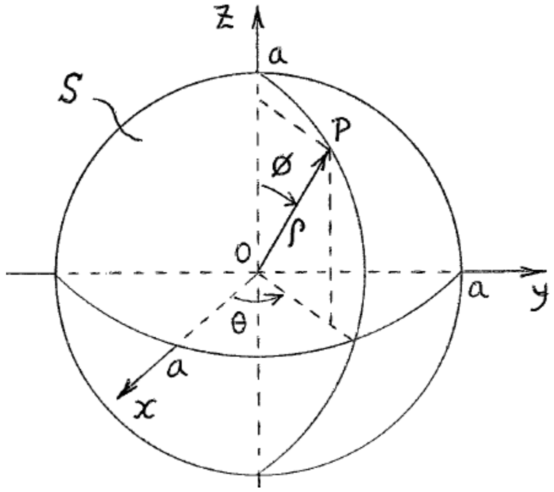
e para a parametrização definida em (8) e (9):

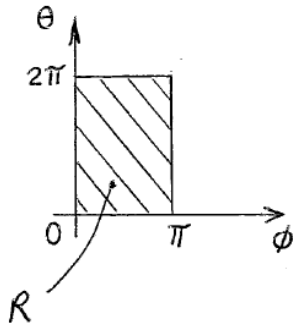
$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\,\text{sen}(\theta)\vec{j} + r^2\vec{k} \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 = \left\{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le \sqrt{h}\right\}$$

Exemplo 5: A *superfície esférica* de raio *a* e com centro na origem tem a equação cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$





A sua parametrização pode ser feita recorrendo a *coordenadas esféricas* (ρ,θ,ϕ)

$$x = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi) \quad , \quad y = a\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) \quad , \quad z = a\cos(\phi)$$

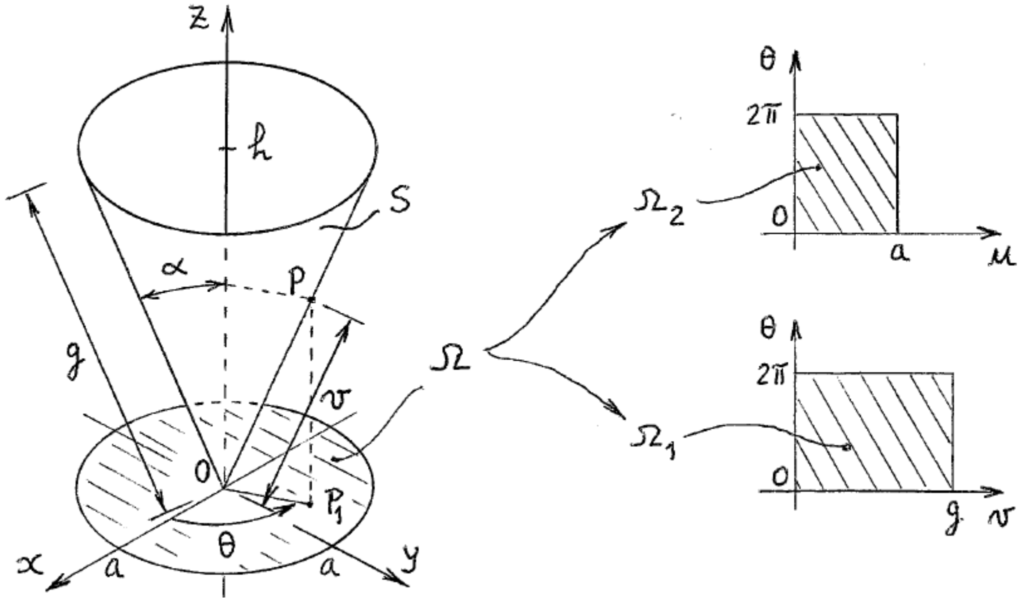
onde se considerou $\rho = a$, resultando

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\,\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R \qquad (10)$$

em que R é a *região rectangular* do plano $\theta O\phi$ definida por:

$$R = \{(\theta,\phi) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \pi\} \tag{11}$$

Exemplo 6: A superfície S da figura seguinte representa um *cone de revolução*, em que h é a sua altura, g é o comprimento da geratriz e α é o ângulo que esta faz com o eixo do cone (eixo dos zz).



O cone tem uma base circular situada no plano

$$z = h = g\cos(\alpha)$$

e a sua projecção no plano xOy é a *região circular*

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le a^2\} \tag{12}$$

em que $a = g \ \text{sen}(\alpha)$ é o raio da circunferência que é a fronteira de Ω.
Sejam $P = (x,y,z)$ o ponto de S à distância v da origem do referencial (vértice do cone), distância medida ao longo da geratriz que passa em P, e $P_1 = (x,y,0)$ o ponto obtido pela projecção ortogonal de P sobre o plano xOy.

Sabendo que

$$\overline{OP} = v \quad \text{e} \quad \overline{OP_1} = v\ \text{sen}(\alpha)$$

e designando por θ o ângulo que $[OP_1]$ faz com o semieixo positivo dos *xx*, as coordenadas de *P* são:

$$x = v\cos(\theta)\text{sen}(\alpha) \quad , \quad y = v\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\alpha) \quad , \quad z = v\cos(\alpha) \qquad (13)$$

Assim, a superfície *S* pode ser parametrizada sob a forma:

$$\vec{r}(\theta,v) = v\text{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + v\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)\vec{j} + v\cos(\alpha)\vec{k}\ ,\ (\theta,v) \in \Omega_1 \quad (14)$$

$$\Omega_1 = \{(\theta,v) : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le v \le g\}\ (\textit{região rectangular}) \qquad (15)$$

Se $\alpha = \pi / 4$, então $a = h = \sqrt{2}g / 2$ e as expressões (13) podem ser reescritas como

$$x = \frac{\sqrt{2}v}{2}\cos(\theta) \quad , \quad y = \frac{\sqrt{2}v}{2}\text{sen}(\theta) \quad , \quad z = \frac{\sqrt{2}v}{2}$$

pelo que a superfície *S* pode ser parametrizada por:

$$\vec{r}(\theta,u) = u\cos(\theta)\vec{i} + u\text{sen}(\theta)\vec{j} + u\vec{k}\ ,\ (\theta,u) \in \Omega_2 \qquad (16)$$

$$\Omega_2 = \{(\theta,u) : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le u \le h\}\ (\textit{região rectangular}) \qquad (17)$$

Neste caso, a superfície do cone é o gráfico da função

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é a região circular definida em (12), sendo, portanto, possível adoptar a seguinte parametrização para *S*:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\vec{k}\ ,\ (x,y) \in \Omega \qquad (18)$$

Produto vectorial fundamental

- Seja a superfície, S, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \tag{19}$$

onde (u,v) toma valores numa dada região, R, do plano uOv; para simplificar a análise admita-se que R é a região rectangular:

$$R = \{(u,v) \ : \ a < u < b \ , \ c < v < d\}$$

Se a função (19) é injectiva, então S é designada por *superfície simples*.
Considerem-se os vectores:

$$\vec{r}_u'(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \tag{20}$$

$$\vec{r}_v'(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k} \tag{21}$$

O vector resultante do produto vectorial

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}_u'(u,v) \times \vec{r}_v'(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$$

que se admite como sendo diferente do vector nulo em todos os pontos de R, chama-se *produto vectorial fundamental* da superfície S, correspondente à parametrização $\vec{r}(u,v)$.

- Se $(u_0,v_0) \in R$, tal que (20) e (21) são funções contínuas e $\vec{N}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$, então $\vec{r}(u_0,v_0)$ é um *ponto regular* da superfície S; caso contrário, será um *ponto singular*. Além disso, diz-se que S é uma *superfície regular*, se todos os seus pontos forem regulares.

- Seja $(u_0,v_0) \in R$, tal que:

$$\vec{N}(u_0,v_0) = \vec{r}_u'(u_0,v_0) \times \vec{r}_v'(u_0,v_0) \neq \vec{0} \tag{22}$$

A função vectorial

$$\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u,v_0) \ , \ u \in (a,b)$$

define uma curva diferenciável, C_1, que está contida na superfície S e é a imagem em $\vec{r}(R)$ da linha:

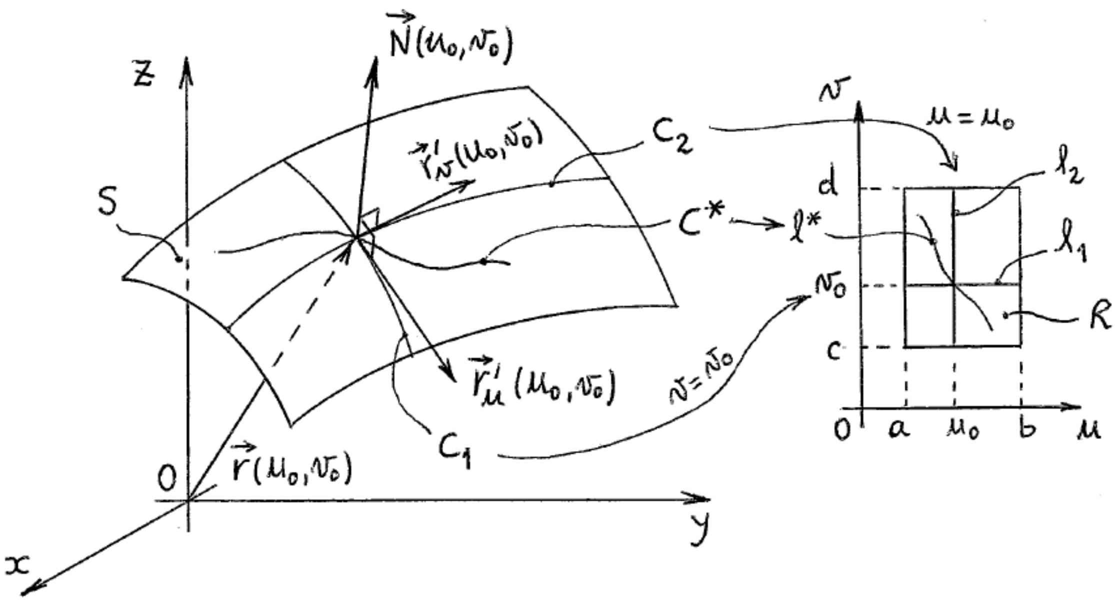
$$\ell_1 : v = v_0, \ u \in (a,b)$$

Por outro lado, a função vectorial

$$\vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0,v) \ , \ v \in (c,d)$$

define uma curva diferenciável, C_2, que também está contida na superfície S e é a imagem em $\vec{r}(R)$ da linha:

$$\ell_2 : u = u_0, \ v \in (c,d)$$



As linhas C_1 e C_2 passam pelo ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$ da superfície e, portanto,

$$\vec{r}_1'(u_0) = \vec{r}_u{}'(u_0,v_0)$$

é o *vector tangente* a C_1 no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$ e

$$\vec{r}_2{}'(v_0) = \vec{r}_v{}'(u_0,v_0)$$

é o *vector tangente* a C_2 no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$.

O produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u_0,v_0)$, expresso em (22), sendo perpendicular a $\vec{r}_u'(u_0,v_0)$ e $\vec{r}_v'(u_0,v_0)$, é também perpendicular às *linhas tangentes* às linhas C_1 e C_2 no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$.

É, ainda, possível mostrar que o vector $\vec{N}(u_0,v_0)$ é perpendicular, no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$, à linha tangente a qualquer linha da superfície S que passe neste ponto.

Assim, pode-se concluir que o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u_0,v_0)$, não sendo nulo, é perpendicular ao *plano tangente* à superfície S no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$, isto é, é um vector normal a S neste ponto.

- O produto vectorial fundamental pode, ainda, ser reescrito sob a forma:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Exemplo 7: O produto vectorial fundamental do *plano* do exemplo 2 e parametrizado em (1) é:

$$\vec{r}_u'(u,v) = \vec{a} \quad , \quad \vec{r}_v'(u,v) = \vec{b}$$

$$\vec{N}(u,v) = \vec{a} \times \vec{b}$$

Trata-se, como é óbvio, de um vector normal ao plano.

Exemplo 8: O produto vectorial fundamental do *cilindro de revolução* do exemplo 3 e parametrizado em (3) e (4) é:

$$\vec{r}_\theta'(\theta,v) = -a\text{sen}(\theta)\vec{i} + a\cos(\theta)\vec{j} \quad , \quad \vec{r}_v'(\theta,v) = \vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,v) = a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos(\theta)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\vec{j} \tag{23}$$

Exemplo 9: O produto vectorial fundamental do *paraboloide de revolução* do exemplo 4 e parametrizado em (6) e (7) é:

$$\vec{r}_u'(u,v) = \vec{i} + 2au\vec{k} \quad , \quad \vec{r}_v'(u,v) = \vec{j} + 2av\vec{k}$$

$$\vec{N}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2au \\ 0 & 1 & 2av \end{vmatrix} = -2au\vec{i} - 2av\vec{j} + \vec{k} \tag{24}$$

Exemplo 10: O produto vectorial fundamental da *superfície esférica* do exemplo 5 e parametrizada em (10) e (11) é:

$$\vec{r}'_\theta(\theta,\phi) = -a\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j}$$

$$\vec{r}'_\phi(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + a\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\vec{j} - a\ \mathrm{sen}(\phi)\vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a\ \mathrm{sen}(\phi)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ a\cos(\theta)\cos(\phi) & a\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) & -a\ \mathrm{sen}(\phi) \end{vmatrix} =$$

$$= -a\ \mathrm{sen}(\phi)\left(a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k}\right) =$$

$$= -a\ \mathrm{sen}(\phi)\vec{r}(\theta,\phi) \tag{25}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental é paralelo ao vector $\vec{r}(\theta,\phi)$, ou seja, tem a direcção radial relativamente à superfície.

Exemplo 11: O produto vectorial fundamental do *cone de revolução* do exemplo 6 e parametrizado em (14) e (15) é:

$$\vec{r}'_\theta(\theta,v) = -v\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + v\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{r}'_v(\theta,v) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + \cos(\alpha)\vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,v) = v\mathrm{sen}(\alpha)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) & \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} =$$

$$= v\mathrm{sen}(\alpha)\left(\cos(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} - \mathrm{sen}(\alpha)\vec{k}\right)$$

Se $\alpha = \pi / 4$ e for considerada a parametrização (16) e (17) para a superficie o produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{r}'_\theta(\theta,u) = -u\operatorname{sen}(\theta)\vec{i} + u\cos(\theta)\vec{j} \quad , \quad \vec{r}'_u(\theta,u) = \cos(\theta)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,u) = u\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 1 \end{vmatrix} = u\left(\cos(\theta)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta)\vec{j} - \vec{k}\right)$$

Por outro lado, se $\alpha = \pi / 4$ e for considerada a parametrização (12) e (18) obtém-se:

$$\vec{r}'_x(x,y) = \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \quad , \quad \vec{r}'_y(x,y) = \vec{j} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$$

$$\vec{N}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & x(x^2+y^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & y(x^2+y^2)^{-1/2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k} \qquad (26)$$

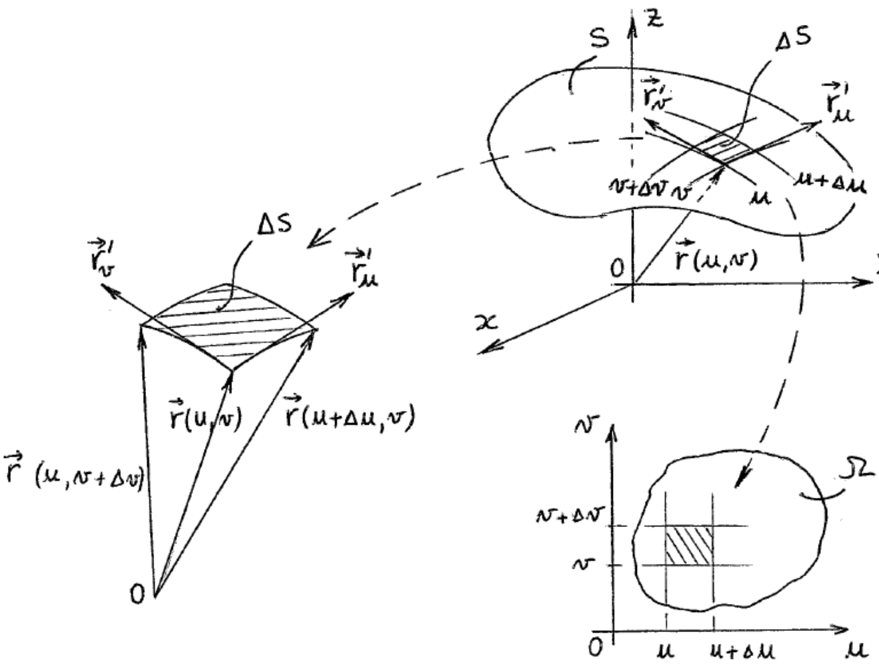
Área de uma superfície

- Seja a superfície regular, *S*, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

  $$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

  onde (u,v) toma valores numa dada região, Ω, do plano *uOv* e tal que $\vec{r}(u,v)$ é injectiva em Ω.

- Seja o elemento de superfície, ΔS, e designe-se por ΔA a sua área.



Trata-se de um *paralelogramo curvilíneo* que pode ser aproximado através do paralelogramo elementar, ΔS^{*}, definido por

$$\Delta\vec{r}_u = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v)$$

$$\Delta\vec{r}_v = \vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v)$$

e cuja área, ΔA^{*}, dada por

$$\Delta A^{*} = \left\| \Delta\vec{r}_u \times \Delta\vec{r}_v \right\|$$

é uma aproximação à área do elemento de superfície, ΔS, isto é:

$$\Delta A \cong \Delta A^{*} = \left\| \Delta\vec{r}_u \times \Delta\vec{r}_v \right\| \tag{27}$$

Sabendo que

$$\Delta\vec{r}_u \cong \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\Delta u \qquad \text{e} \qquad \Delta\vec{r}_v \cong \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\Delta v$$

a equação (27) pode ser reescrita como:

$$\Delta A \cong \Delta A^* = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \qquad (28)$$

Fazendo $\Delta u \to 0$ e $\Delta v \to 0$ a equação (28) toma a forma

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$$

e, portanto, a área da superfície S tem o valor do integral duplo:

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv = \iint_\Omega \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv$$

Exemplo 12: Seja o *cilindro de revolução* definido em (2), com $a = 2$ e $h = 1$. Atendendo a (3), (4) e (23), resulta:

$$\vec{r}(\theta,v) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + v\vec{k} \ , \ (\theta,v) \in \Omega$$

$$\Omega = \left\{ (\theta,v) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le v \le 1 \right\}$$

$$\vec{N}(\theta,v) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} \ \Rightarrow \ \left\| \vec{N}(\theta,v) \right\| = 2$$

Assim, a área da superfície S é:

$$A(S) = \iint_\Omega \left\| \vec{N}(\theta,v) \right\| d\theta dv = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 dv d\theta = 4\pi$$

Exemplo 13: Seja o *paraboloide de revolução* definido em (5), com $a = 2$ e $h = 2$. Atendendo a (6), (7) e (24), resulta:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + 2(u^2 + v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

$$\Omega = \left\{(u,v) \ : \ 0 \le u^2 + v^2 \le 1\right\}$$

$$\vec{N}(u,v) = -4u\vec{i} - 4v\vec{j} + \vec{k} \ \Rightarrow \ \left\|\vec{N}(u,v)\right\| = \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)}$$

Assim, a área da superfície S é:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \left\|\vec{N}(u,v)\right\| dudv = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)}\, dudv$$

Considerando (*coordenadas polares*)

$$u = r\cos(\theta) \ \ , \ \ v = r \ \mathrm{sen}(\theta) \ \ , \ \ dudv = r \ drd\theta$$

então

$$\left\|\vec{N}(r,\theta)\right\| = \sqrt{1 + 16r^2} \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 = \left\{(r,\theta) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1\right\}$$

e, portanto:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)}\, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, drd\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr = \frac{\pi}{16} \int_0^1 32r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr =$$

$$= \frac{\pi}{16} \frac{2}{3} \left[\left(1 + 16r^2\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{24}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$$

Exemplo 14: Seja a *superfície esférica* de raio *a* parametrizada em (10) e (11). Notando que

$$\left\|\vec{r}(\theta,\phi)\right\| = \left\|a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k}\right\| = a$$

atendendo a (25), resulta:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a\ \text{sen}(\phi)\vec{r}(\theta,\phi) \ \Rightarrow\ \left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| = a\left|\text{sen}(\phi)\right|\left\|\vec{r}(\theta,\phi)\right\| = a^2\text{sen}(\phi)$$

Assim, a área da superfície *S* é:

$$A(S) = \iint_R \left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| d\theta d\phi = a^2\int_0^{\pi} sen(\phi)\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi} sen(\phi)\ d\phi = 2\pi a^2\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} = 4\pi a^2$$

Exemplo 15: Seja o *cone de revolução* parametrizado em (12) e (18), com $a = h = 2$:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2+y^2}\vec{k}\ ,\ (x,y)\in\Omega_3$$

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$$

Atendendo a (26), resulta:

$$\left\|\vec{N}(x,y)\right\| = \left\|-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}\right\| = \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right]^{1/2} = \sqrt{2}$$

Assim, a área da superfície *S* é:

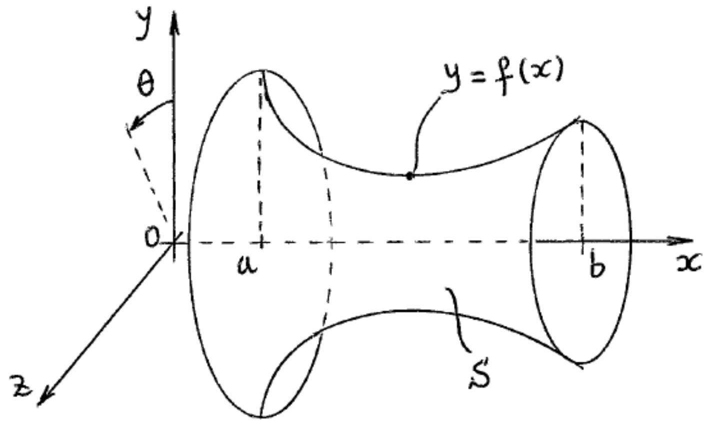
$$A(S) = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(x,y)\right\| dxdy = \sqrt{2}\iint_\Omega dxdy = \sqrt{2}A(\Omega) = 4\sqrt{2}\pi$$

Área de uma superfície: casos particulares

- O cálculo da *área de uma superfície de revolução* pode ser feito recorrendo a um processo alternativo. Seja *S* uma superfície gerada pela rotação, em torno do eixo dos *xx*, do gráfico da função:

$$y = f(x) \ , \ x \in [a,b]$$

Admite-se que $f(x) > 0$ e continuamente diferenciável.



A superfície *S* pode ser parametrizada sob a forma

$$\vec{r}(x,\theta) = x\vec{i} + f(x)\cos(\theta)\vec{j} + f(x)\text{sen}(\theta)\vec{k} \ , \ (x,\theta) \in \Omega$$

em que Ω é a *região rectangular* do plano $xO\theta$:

$$\Omega = \{(x,\theta) : a \le x \le b \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Tem-se, então,

$$\vec{r}'_x(x,\theta) = \vec{i} + f'(x)\cos(\theta)\vec{j} + f'(x)\text{sen}(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{r}'_\theta(x,\theta) = -f(x)\text{sen}(\theta)\vec{j} + f(x)\cos(\theta)\vec{k}$$

pelo que o produto vectorial fundamental da superfície é:

$$\vec{N}(x,\theta)=\vec{r}_x'\times\vec{r}_\theta'=f(x)\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & f'(x)\cos(\theta) & f'(x)\mathrm{sen}(\theta)\\ 0 & -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{vmatrix}=$$

$$=f(x)f'(x)\vec{i}-f(x)\cos(\theta)\vec{j}-f(x)\mathrm{sen}(\theta)\vec{k}$$

Notando que

$$\left\|\vec{N}(x,\theta)\right\|=f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

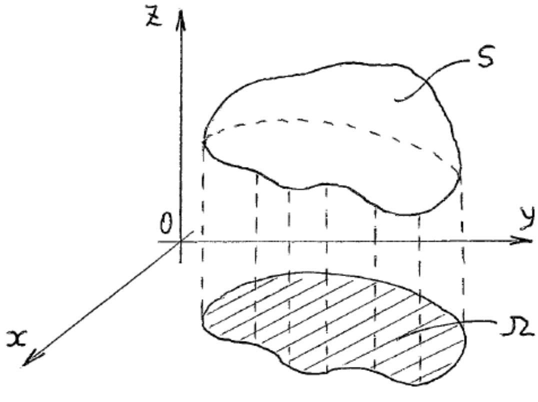
a área da superfície de revolução, S, é dada por:

$$A(S)=\iint_\Omega\left\|\vec{N}(x,\theta)\right\|dxd\theta=\iint_\Omega f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dxd\theta=$$

$$=\int_a^b\int_0^{2\pi}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,d\theta dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

- Seja, agora, a superfície S que é o gráfico da função escalar:

$$z=f(x,y)\ ,\ (x,y)\in\Omega$$



Neste caso, a superfície pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}\ ,\ (x,y)\in\Omega$$

Tendo em atenção que

$$\vec{r}'_x(x,y) = \vec{i} + f_x(x,y)\vec{k} \quad , \quad \vec{r}'_y(x,y) = \vec{j} + f_y(x,y)\vec{k}$$

o seu produto vectorial fundamental é

$$\vec{N}(x,y) = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{vmatrix} = -f_x(x,y)\vec{i} - f_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}$$

tal que:

$$\left\|\vec{N}(x,y)\right\| = \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}$$

A área da superfície *S* é, então, dada por:

$$A(S) = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(x,y)\right\| dxdy = \iint_\Omega \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\, dxdy \qquad (29)$$

Exemplo 16: Calcule a área da superfície, *S*, do *cilindro parabólico* $z = y^2$, cuja projecção no plano coordenado *xOy* é o triângulo com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $P = (0,1)$ e $Q = (1,1)$.

Solução:

A superfície *S* é o gráfico da função escalar

$$z = f(x,y) = y^2 \ , \ (x,y) \in \Omega$$

onde Ω é a *região triangular* do plano coordenado *xOy*:

$$\Omega = \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le x \le y\right\}$$

Atendendo a (29) e notando que

$$f_x(x,y) = 0 \quad , \quad f_y(x,y) = 2y$$

a área da superfície *S* é:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1+4y^2}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{8}\int_0^1 8y\sqrt{1+4y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\left(1+4y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$