Prova sem consulta. Duração: 2h15m.

1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**3,8**] Sejam o ponto $Q=(1,0,1)$ e a curva, C, parametrizada por:

$$\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+e^t\operatorname{sen}(t)\vec{j}+e^t\cos(t)\vec{k}\ ,\ t\geq 0.$$

Determine:

a) Os versores da tangente e da binormal no ponto Q.

b) A equação cartesiana do plano osculador em Q.

c) O comprimento da curva compreendida entre Q e o ponto $\vec{r}(\pi/2)$.

2. [**3,8**] Considere a função escalar $f(x,y,z)=ye^x-z$ e o ponto $P=(0,2,1)$.

a) Calcule a derivada direcional de f no ponto P, na direção definida pelo vetor $\vec{v}=(-2,-1,1)$.

b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação no ponto P? Qual o valor dessa taxa máxima? Justifique.

c) Determine a equação vetorial da reta normal à superfície $f(x,y,z)=1$ no ponto P.

3. [**3,8**] Sabendo que a equação $y+xe^{xz}+z^2=3$ define, de modo implícito, $z=z(x,y)$ como função de x e de y na vizinhança do ponto $R=(0,2,1)$, obtenha as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ em R.

.... *continua no verso*

Prova sem consulta. Duração: 2h15m.

1ª Prova de Reavaliação

GRUPO II

4. [**2,4**] Determine e classifique os pontos críticos da função:

$$f(x,y) = 4xy - y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 .$$

5. [**4,2**] Considere o integral duplo dado por:

$$\iint_D (2xy)dxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{\sqrt{2x}} (2xy)dydx + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} (2xy)dydx .$$

a) Esboce o domínio de integração, *D*.

b) Calcule o valor do integral.

c) Reescreva-o trocando a ordem de integração; defina analiticamente o domínio de integração.

6. [**2,0**] Enuncie devidamente o Teorema de Green e mostre que a área da região, *D*, limitada por uma curva regular fechada, *C*, é dada por: $A(D) = \frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy$.

1 a)

$$\bar{r}(t) = (e^t, e^t \operatorname{sen}(t), e^t \cos(t)), \quad t \geq 0$$

$$Q = (1,0,1) = \vec{r}(0)$$

$$\vec{r}'(t) = (e^t, e^t \operatorname{sen}(t) + e^t \cos(t), e^t \cos(t) - e^t \operatorname{sen}(t))$$

$$\vec{r}'(0) = (1, 1, 1) \qquad \vec{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\bar{r}''(t) = (e^t, \cancel{e^t \operatorname{sen}(t)} + e^t \cos(t) + e^t \cos(t) - \cancel{e^t \operatorname{sen}(t)},$$
$$\cancel{e^t \cos(t)} - e^t \operatorname{sen}(t) - e^t \operatorname{sen}(t) - \cancel{e^t \cos(t)}) =$$

$$= (e^t, 2e^t \cos(t), -2e^t \operatorname{sen}(t))$$

$$\vec{r}''(0) = (1, 2, 0)$$

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

b) $$\bar{B}(0) \cdot Q = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1) = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-2x+y+z) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \iff -2x+y+z = -1$$

c)
$$\|\vec{r}'(t)\| = e^t \sqrt{\begin{array}{l} 1 + \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + \cancel{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)} + \\ + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) - \cancel{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)} \end{array}} = \sqrt{3}\, e^t$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{3}\, e^t \, dt = \sqrt{3}\left[e^t\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{3}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$$

2) $f(x,y,z) = y e^{x} - z \qquad P = (0,2,1)$

a) $$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(y e^{x}, e^{x}, -1\right)$$

$$\nabla f(0,2,1) = (2,1,-1)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,-1,1)$$

$$f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\cdot(-2,-1,1) = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

b) Uma vez que $f'_{\vec{a}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{a} = \|\nabla f(P)\| \, \|\vec{a}\| \cos\alpha =$

$$= \|\nabla f(P)\| \cos\alpha$$

a taxa de variação tem o valor máximo quando $\cos\alpha = 1$, ou seja, quando $\alpha = 0$ e, portanto, o vector $\nabla f(P)$ tem a mesma direcção e o mesmo sentido do versor $\vec{a}$, isto é, se

$$\vec{a} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)$$

Neste caso, a máxima taxa de variação no ponto P tem o valor

$$f'_{\vec{a}}(P) = \|\nabla f(P)\| = \sqrt{6}$$

c) O vector director da recta normal à superfície no ponto P é

$$\nabla f(0,2,1) = (2,1,-1)$$

Assim, a equação vectorial da recta é

$$\vec{x}(t) = P + t\,\nabla f(0,2,1) = (0,2,1) + t(2,1,-1), \; t \in \mathbb{R}$$

Folha Nº ..../.......

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

3) $y + x e^{xz} + z^2 = 3$ e $R = (0,2,1)$

Derivando em ordem a x:

$$e^{xz} + x\left(z + \frac{\partial z}{\partial x}\right) e^{xz} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{xz} + xze^{xz} + xe^{xz}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(1+xz)e^{xz}}{xe^{xz} + 2z} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0,2,1) = \frac{-1}{2}$$

Derivando em ordem a y:

$$1 + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} e^{xz} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 e^{xz} + 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,2,1) = \frac{-1}{2}$$

Derivando em ordem a x a função $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{-(-1)\left(2xe^{xz} + x^2\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right)e^{xz} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{[x^2e^{xz} + 2z]^2} =$$

$$= \frac{2xe^{xz} + x^2ze^{xz} + x^3\frac{\partial z}{\partial x}e^{xz} + 2\frac{\partial z}{\partial x}}{[x^2 \cdot e^{xz} + 2z]^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,2,1) = \frac{2(-1/2)}{4} = \frac{-1}{4}$$

4) $f(x,y) = 4xy - y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(4y - x^3 + 2x^2, 4x - 2y\right)$ 15

$$\begin{cases} 4y - x^3 + 2x^2 = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - x^3 + 2x^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(x^2 - 2x - 8) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x(x-4)(x+2) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Ponto críticos: $O = (0,0)$, $A_1 = (4,8)$, $B_1 = (-2,-4)$ 30

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -3x^2 + 4x$

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$

Ponto	A	B	C	$\Delta = AB - C^2$	Classificação	Extremo	
(0,0)	0	-2	4	-16	Sela	—	15
(4,8)	-32	-2	4	48	máximo local	$\frac{128}{3}$	20
(-2,-4)	-20	-2	4	24	máximo local	$\frac{20}{3}$	20

Papel 100% Reciclado

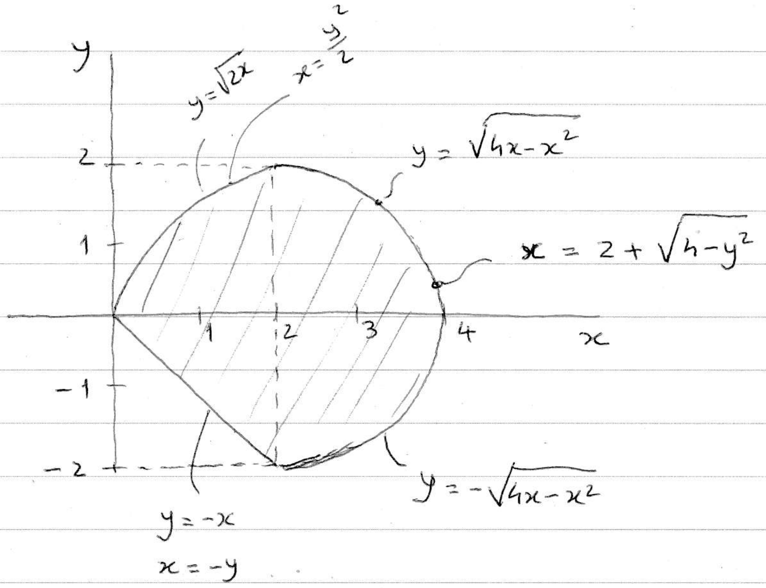
5) a)

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge -x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 4 \wedge -\sqrt{4x-x^2} \leq y \leq \sqrt{4x-x^2}\}$$

$$y = \sqrt{4x-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$



b) $f(x,y) = 2xy$ é uma função ímpar na variável y; como D_2 é uma região simétrica em relação ao eixo dos xx então

$$\iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

$$\int_0^2 \int_{-x}^{\sqrt{2x}} (2xy)\, dy\, dx = \int_0^2 x\left[y^2\right]_{-x}^{\sqrt{2x}} dx = \int_0^2 x(2x - x^2)\, dx =$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx = \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

Folha Nº ..../.......

U. PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ...../...../.....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

c)

$$D = D_3 \cup D_4$$

$$D_3 = \{(x,y) : -2 \le y \le 0 \ \wedge \ -y \le x \le 2+\sqrt{4-y^2}\}$$ 1√

$$D_4 = \{(x,y) : 0 \le y \le 2 \ \wedge \ \frac{y^2}{2} \le x \le 2+\sqrt{4-y^2}\}$$ 1√

$$\iint_D (2xy)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0}\int_{-y}^{2+\sqrt{4-y^2}} (2xy)\,dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{y^2/2}^{2+\sqrt{4-y^2}} (2xy)\,dx\,dy$$