Prova sem consulta. Duração: 2h45m. Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**2,5**] Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 3\text{sen}(t)\vec{j} + (t)\vec{k}\ ,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

a) Determine o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, num ponto genérico da curva e o seu valor no ponto $S = (0, 3, \pi/2)$.

b) A equação cartesiana do plano osculador à curva em *S*.

2. [**2,5**] Seja a função escalar:

$$f(x, y, z) = 2\text{sen}(x + 2y) - xz\,.$$

a) Calcule a derivada direcional de *f* no ponto $P = (2, -1, 3)$ ao longo da curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t^2, t, -3t^3)$, $t \leq 0$.

b) Considere a superfície de nível, *S*, $f(x, y, z) = -6$. Escreva a equação vetorial e as equações cartesianas da reta perpendicular a *S* em *P*.

3. [**2,5**] Seja a superfície, *S*, definida por $z = 1 + x^2 + y^2$, $2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce a superfície *S* e parametrize-a.

b) Calcule a sua área.

GRUPO II

4. [**2,5**] Sabendo que a equação $x + ze^{z+x} + (1+2y)^2 = 1$ define, de modo implícito, $z = z(x, y)$ como função de *x* e de *y* na vizinhança do ponto $T = (-1, -1, 1)$, calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ em *T*.

....***continua no verso***

5. [**2,5**] Seja a curva, *L*, de interseção das superfícies $y = 2x - x^2$ e $z = x$, definida entre os pontos $O = (0,0,0)$ e $P = (1,1,1)$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva *L*.

b) Calcule o integral de linha $\int_L (y - 2z)dx + (2x)dy + e^x dz$.

6. [**2,5**] Usando o teorema de Green, determine o integral de linha $\int_C (x^2 - y)dx + (x + y^2)dy$, em que *C* é a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $x = y^2$ e $y = -x + 2$ e $y = x - 2$, percorrida no sentido retrógrado.

GRUPO III

7. [**3,0**] Seja o integral triplo em coordenadas cartesianas

$$\iiint_V 2z \; dxdydz$$

em que $V = \left\{(x, y, z) \; : \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3 \, , \, x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.

a) Esboce o domínio de integração.

b) Escreva-o em coordenadas cilíndricas e determine o seu valor.

c) Escreva-o em coordenadas cartesianas começando o processo de integração na variável *z*; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

8. [**2,0**] Sejam $C : \vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$ uma curva suave do espaço. Mostre que:

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{r}(b)\|^2 - \|\vec{r}(a)\|^2\right).$$