COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 1

FUNÇÕES VECTORIAIS

1. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = (t^2 - 2)\vec{i} + 2t\vec{j} + e^{t-1}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{t \to 1} \vec{f}(t)$.

2. Considere a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\ln t}{t}\vec{j} + e^{-2t}\vec{k}$, $t \in (0, +\infty)$. Determine:

a) A sua função derivada, $\vec{f}'(t)$.

b) $\int_1^3 \vec{f}(t)\, dt$.

3. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t}\vec{i} + \frac{1}{1+e^t}\vec{j} \right) dt$.

b) $\int_0^1 \left(te^t\vec{i} + t^2e^t\vec{j} + te^{-t}\vec{k} \right) dt$.

4. Dados os vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \int_0^1 \left(te^{2t}\vec{i} + t\cosh(2t)\vec{j} + 2te^{-2t}\vec{k} \right) dt$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

5. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que o ângulo, θ, formado por $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ é independente do valor do parâmetro *t*.

6. Sejam as funções vectoriais $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) \times \vec{f}'(t)$ com valores em $\mathbb{R}^3$. Escreva $\vec{g}'(t)$ em função de $\vec{f}(t)$ e das derivadas desta função.

7. Considere a função vectorial $\vec{f}(t)$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e a função escalar $g(t)=\vec{f}(t)\cdot\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)$. Mostre que $g'(t)=\vec{f}(t)\cdot\vec{f}'(t)\times\vec{f}'''(t)$.

8. Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$,$t\ \geq 0$, tal que $t\vec{f}'(t)=\vec{f}(t)+t\vec{a}$ e $\vec{a}$ é um vector não nulo e constante. Sabendo que $\vec{f}(1)=2\vec{a}$, obtenha os valores de $\vec{f}(3)$ e $\vec{f}''(1)$.

9. Considere a função vectorial $\vec{f}(t)=\text{sen}(2t)\vec{a}+\cos(2t)\vec{b}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vectores não nulos e constantes. Mostre que os vectores $\vec{f}''(t)$ e $\vec{f}(t)$ são paralelos.

10. Parametrize as curvas do plano xOy que são o gráfico das funções:

a) $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. **b)** $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$.

11. Obtenha a parametrização do segmento de recta que liga o ponto $P=(2,7,-1)$ ao ponto $Q=(4,2,3)$.

12. Parametrize as seguintes linhas do plano xOy:

a) $y=x^2$, percorrida no sentido do ponto $(-1,1)$ para o ponto $(3,9)$.

b) $y=x^2$, percorrida no sentido do ponto $(3,9)$ para o ponto $(-1,1)$.

c) $x^2+y^2=4$, percorrida no sentido directo.

d) $x^2+y^2=2x$, percorrida no sentido directo e unindo o ponto $(2,0)$ ao ponto $(0,0)$.

e) $x^2+y^2=4$, percorrida no sentido retrógrado.

13. Determine as equações cartesianas das curvas do plano xOy definidas parametricamente pelas equações:

a) $\vec{f}(t)=(3t-1)\vec{i}+(5-2t)\vec{j}$, $t\in\mathbb{R}$. **b)** $\vec{f}(t)=2\cos(t)\vec{i}+3\text{sen}(t)\vec{j}$, $t\in[0,2\pi]$.

c) $\vec{f}(t)=t^{-1}\vec{i}+t^{-2}\vec{j}$, $t\in(0,3)$. **d)** $\vec{f}(t)=\text{tg}(t)\vec{i}+\sec(t)\vec{j}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

e) $\vec{f}(t)=e^{2t}\vec{i}+(e^{2t}-1)\vec{j}$, $t\leq 0$. **f)** $\vec{f}(t)=2\text{sen}(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

g) $\vec{f}(t)=\text{sen}(t)\vec{i}+\left(1+\cos^2(t)\right)\vec{j}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior e identifique o sentido do percurso das mesmas.

15. Parametrize as seguintes curvas do espaço:

a) $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$.

b) $y = x^2$ e $z = x^3$.

c) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = e^x$.

d) $4(x+1)^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$.

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ e $z = 0$.

16. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior.

17. Obtenha a curva do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{r}'(t) = \alpha\vec{r}(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{r}(0) = (1,2,3)$.

18. Em relação à curva, C, do espaço descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, determine:

a) A equação vectorial da recta, r, tangente à curva no ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

b) Os pontos da curva onde o vector tangente é paralelo ao vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

c) Os pontos da curva onde o vector tangente é ortogonal ao vector $\vec{a}$.

19. Seja a curva plana descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t^3\vec{i} + t^5\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que a parametrização dada não é regular.

b) Indique uma parametrização regular para a curva.

20. Seja a curva, C, parametrizada por $\vec{r}(\theta) = \left(1 + 2\cos(\theta)\right)\vec{i} + \left(2 + 2\text{sen}(\theta)\right)\vec{j}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Esboce a curva C.

b) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde C intersecta o eixo dos xx.

c) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde C intersecta o eixo dos yy.

21. Considere a curva no espaço com equações paramétricas $x = \text{sen}(2t)$, $y = 2\text{sen}^2(t)$ e $z = 2\cos(t)$, $t \in [0, \pi]$. Mostre que:

a) A curva está situada sobre uma superfície esférica centrada na origem.

b) A norma do vector, $\vec{u}$, resultante da projecção ortogonal do vector tangente à curva sobre o plano xOy é constante.

22. Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Determine os pontos da curva onde a linha tangente é paralela à recta de equação vectorial $\vec{r}(u) = (2,1) + u(1,1)$, $u \in \mathbb{R}$.

23. Seja a parábola de equação $y^2 = 4x$.

a) Parametrize a curva.

b) Determine as linhas tangentes à parábola que passam no ponto $P = (-2,0)$.

24. Seja a elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 8$.

a) Parametrize a curva.

b) Obtenha os pontos da elipse onde a linha tangente é paralela à recta de equação $x + 2y = 7$.

25. Seja a curva, C, do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + \text{sen}(2t)\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P = (0,-1,1)$ e é paralelo ao plano osculador da curva no ponto $Q = (-1,0,1)$.

26. Seja hélice cónica descrita pela função vectorial $\vec{r}(\lambda) = \lambda\cos(\lambda)\vec{i} + \lambda\text{sen}(\lambda)\vec{j} + b\lambda\vec{k}$, em que $\lambda \geq 0$ e $b > 0$. Determine, no ponto $O = (0,0,0)$ da hélice:

a) As equações vectoriais dos planos osculador, normal e rectificador.

b) As equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador.

27. Seja a curva plana, C, de equação $y = x^2 / 2$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(0,0)$ e $(1/2, 1/8)$.

28. Seja a curva plana, C, de equação $y^2 = x^3$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(1,-1)$ e $(1,1)$.

29. Seja a curva, C, do espaço de equações $y = x^2$ e $z = 2x^3/3$, tal que $x \geq 0$. Obtenha a função comprimento de arco.

30. Seja a curva do espaço, C, descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = e^t\left(\cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \vec{k}\right)$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Calcule os versores da tangente, da normal principal e da binormal em $\vec{r}(t)$.

c) Obtenha as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador em $\vec{r}(t)$.

d) Determine as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador no ponto $P = (1,0,1)$.

e) Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura em P.

f) Obtenha a função comprimento de arco, que determina o comprimento da curva entre o seu ponto inicial e o ponto genérico $\vec{r}(t)$.

g) Calcule o comprimento do arco da curva, entre o seu ponto inicial e o ponto $\vec{f}(2)$.

h) Determine o comprimento do arco da curva, entre os pontos $\vec{f}(1)$ e $\vec{f}(2)$.

31. Para cada uma das curvas seguintes, determine a função comprimento de arco e indique o valor do comprimento da curva:

a) $\vec{r}(u) = a\left(1-\cos(u)\right)\vec{i} + a\left(u - \text{sen}(u)\right)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

b) $\vec{r}(u) = e^u\cos(u)\vec{i} + e^u\text{sen}(u)\vec{j}$, $0 \leq u \leq 2$.

c) $\vec{r}(u) = a\left(\cos(u) + u\,\text{sen}(u)\right)\vec{i} + a\left(\text{sen}(u) - u\cos(u)\right)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

d) $\vec{r}(u) = \text{sen}(u)\vec{i} + u\vec{j} + \left(1-\cos(u)\right)\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

e) $\vec{r}(u) = u\vec{i} + 3u^2\vec{j} + 6u^3\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2$.

f) $\vec{f}(u) = a\cos(\omega u)\vec{i} + a\,\text{sen}(\omega u)\vec{j} + b\omega u\vec{k}$, $u_0 \leq t \leq u_1$.

32. Seja a curva do espaço, C, descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$.

a) Calcule o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (1,0,0)$ e $Q = (1,0,2\pi)$.

b) Parametrize a curva em função do comprimento de arco.

33. Determine o comprimento da curva plana descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \text{sen}^3(t)\vec{j}$, $t \in [0, \pi/2]$.

34. Seja a curva do espaço, *C*, descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{i} + 3\text{sen}(t)\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Determine o comprimento de arco em função do parâmetro *t*.

c) Obtenha as coordenadas do ponto *Q* da curva, tal que o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (3,0,0)$ e *Q* é igual a 5π m.

d) Parametrize a curva em relação ao comprimento de arco, isto é, defina a função $\vec{r}(s)$, $s \geq 0$.

e) Mostre que a primeira derivada da função vectorial encontrada na alínea anterior é versor.

35. Seja a hélice circular parametrizada por $\vec{f}(t) = a\cos(\omega t)\vec{i} + a\text{sen}(\omega t)\vec{j} + b\omega t\vec{k}$, $t \geq 0$, em que a e ω são constantes positivas. Determine:

a) O ângulo, θ, que a tangente à hélice faz com o eixo dos *zz*.

b) A curvatura da hélice.

36. Determine o comprimento da curva do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r = 1 + \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.

37. Calcule o comprimento da curva (espiral de Arquimedes) do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

38. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é máxima:

a) $y = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $9x^2 + 4y^2 = 36$.

c) $y = \ln(x)$, $x > 0$.

39. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é nula:

a) $y = \text{tg}(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

b) $y = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

40. Para cada uma das curvas seguintes, determine o vector curvatura e a curvatura no ponto genérico da curva e particularize os seus valores para o ponto P:

a) $\vec{r}(u)=(3u-u^3)\vec{i}+3u^2\vec{j}+(3u+u^3)\vec{k}$, $u\in\mathbb{R}$ e $P=\vec{r}(2)$.

b) $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+\sqrt{3}u\vec{k}$, $u\in\mathbb{R}$ e $P=\vec{r}(\pi)$.

c) $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+e^{u}\vec{k}$, $u\in\mathbb{R}$ e $P=\vec{r}(\pi)$.

41. Seja a curva do plano xOy definida, em coordenadas polares, pela função $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$. Mostre que a curvatura da curva é dada pela expressão:

$$k(\theta)=\frac{\left|r^2-rr''+2(r')^2\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{3/2}}$$

42. Considere as curvas planas C_1 : $4x^2+y^2=4$ e C_2 : $y=2\left(1+\sqrt{2}\right)x-2$.

a) Parametrize as curvas dadas.

b) Determine os pontos de intersecção das curvas.

c) Calcule o ângulo, θ, formado pelas duas curvas no ponto de intersecção de menor abcissa.

d) Obtenha a curvatura da curva C_1 no ponto referido na alínea anterior.

43. Seja a curva do espaço parametrizada por $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+\sqrt{3}u\vec{k}$, $u\geq 0$. Calcule:

a) A equação cartesiana do plano osculador no ponto $I=(1,0,0)$.

b) O centro de curvatura num ponto genérico da curva.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Geometria Analítica e Análise Matemática", efeitosgraficos.pt (FEUP), 2017. ISBN: 978-989-99559-3-6

2) $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}, e^{-2t} \right), \; t \in \left]0, +\infty\right[$

a) $\vec{f}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}, e^{-2t} \right)$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right) = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\ln t\right) = -\frac{1}{t^2}\ln t + t^{-1}t^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{t^2}\ln t + \frac{1}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\right) = -2e^{-2t}$$

Então

$$\vec{f}'(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, \frac{1-\ln t}{t^2}, -2e^{-2t} \right), \; t \in \left]0, +\infty\right[$$

b) $$\int_1^3 \vec{f}(t)\,dt = \left(\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt,\ \int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,dt,\ \int_1^3 e^{-2t}\,dt \right)$$

$$\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t| \right]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

$$\int_1^3 \frac{1}{t} \ln t\,dt = \frac{1}{2} \int_1^3 2\left(\frac{1}{t}\right) \ln t\,dt = \frac{1}{2} \left[\ln^2 |t| \right]_1^3 =$$

$$= \frac{\ln^2 3 - \ln^2 1}{2} = \frac{\ln^2 3}{2}$$

$$\int_1^3 e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2} \int_1^3 (-2)\, e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2} \left[e^{-2t} \right]_1^3 = -\frac{1}{2} \left(e^{-6} - e^{-2} \right) =$$

$$= \frac{e^{-2}}{2} \left(1 - e^{-4} \right) = \frac{1 - e^{-4}}{2e^2}$$

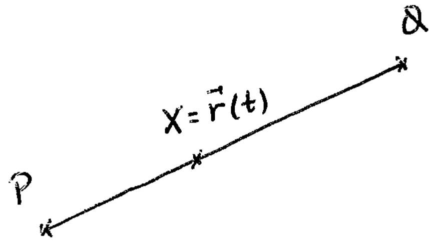
Então

$$\int_1^3 \vec{f}(t)\,dt = \left(\ln 3,\ \frac{\ln^2 3}{2},\ \frac{1 - e^{-4}}{2e^2} \right)$$

11)

$$\vec{r}(t) = P + t\,\overrightarrow{PQ} \quad , t \in [0,1]$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,-5,4)$$



$$\vec{r}(t) = (2,7,-1) + t\,(2,-5,4) =$$

$$= (2+2t,\, 7-5t,\, -1+4t) \quad , \quad t \in [0,1]$$

Nota : $P = \vec{r}(0) = (2,7,-1)$ e $Q = \vec{r}(1) = (4,2,3)$

17) Seja a curva do espaço

$$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Tem-se, então, para cada uma das direcções do espaço $(i=1,2,3)$

$$r_i'(t) = \alpha\, r_i(t) \Leftrightarrow \frac{r_i'(t)}{r_i(t)} = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{r_i'(t)}{r_i(t)}\,dt = \alpha \int dt \Leftrightarrow \ln r_i(t) - \ln C_i = \alpha t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{r_i(t)}{C_i} = \alpha t, \; C_i \neq 0 \Leftrightarrow \frac{r_i(t)}{C_i} = e^{\alpha t}, \; C_i \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_i(t) = C_i\, e^{\alpha t}, \; C_i \neq 0$$

Notando que

$$r_1(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^0 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$r_2(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_2 e^0 \Rightarrow C_2 = 2$$

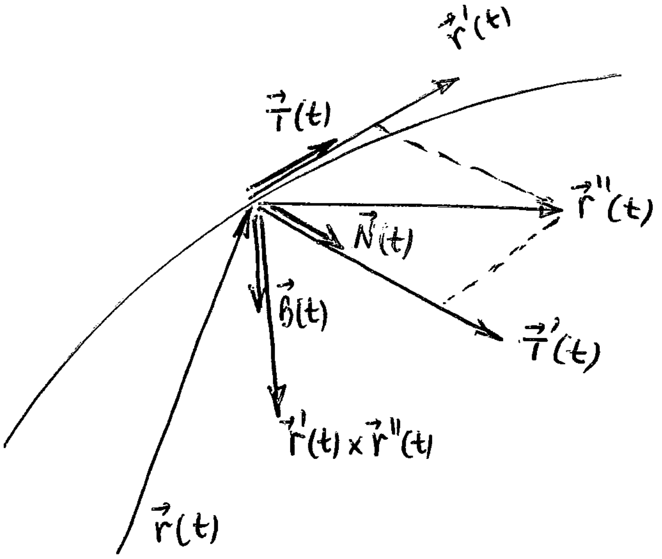
$$r_3(0) = 3 \Rightarrow 3 = C_3 e^0 \Rightarrow C_3 = 3$$

Conclui-se que

$$\vec{r}(t) = (e^{\alpha t}, 2e^{\alpha t}, 3e^{\alpha t}) = e^{\alpha t}(1,2,3), \; t \in \mathbb{R}$$

Nuno

25) $\vec{r}(t) = \left(t^2-1,\ \operatorname{sen} 2t,\ e^{-t}\right),\ t \in \mathbb{R}$



$$\vec r''_T(t) = \|\vec r'(t)\|' \, \vec T(t)$$

$$\vec r''_N(t) = \|\vec r'(t)\| \, \vec T'(t)$$

$\vec N_0 \parallel \vec r'(t) \times \vec r''(t)$

$\vec r'(t) = (2t, 2\cos 2t, -e^{-t})$

$\vec r''(t) = (2, -4\operatorname{sen} 2t, e^{-t})$

$(-1,0,1) = \vec r(0)$

$\vec r'(0) = (0,2,-1)$

$\vec r''(0) = (2,0,1)$

$\vec r'(0) \times \vec r''(0) = (2,-2,-4)$

$\vec N_0 = (1,-1,-2) \perp$ plano osculador

O plano osculador em $\vec r(0)$ é

$$x - y - 2z = -3$$

O plano paralelo ao plano osculador anterior e que passa por $(0,-1,1)$ é

$$x - y - 2z = -1$$

Nota:

$$\vec r'(t) \times \vec r''(t) = \left(2e^{-t}\cos 2t - 4e^{-t}\operatorname{sen} 2t,\ -2e^{-t} - 2te^{-t},\ -8t\operatorname{sen} 2t - 4\cos 2t\right)$$

30) $\vec{f}(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$, $t \geq 0$

a) ----

b) $\vec{f}'(t) = e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 1) + e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) =$

$$= e^t(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)$$

$$\|\vec{f}'(t)\| = |e^t| \sqrt{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1} = \sqrt{3}\, e^t$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\operatorname{sen} t - \cos t, \cos t - \operatorname{sen} t, 0)$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t - \cos t, \cos t - \operatorname{sen} t, 0)$$

$$\vec{B}(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t & 1 \\ -\operatorname{sen} t - \cos t & \cos t - \operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\operatorname{sen} t - \cos t, -\operatorname{sen} t - \cos t, 2)$$

Processo alternativo para a determinação do versor da binormal

$$B(t) = \frac{\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|}$$

em que $\vec{f}''(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1) + e^t(-\operatorname{sen} t - \cos t, \cos t - \operatorname{sen} t, 0) =$

$$= e^t(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 1)$$

$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = e^{2t}(\operatorname{sen} t - \cos t, -\operatorname{sen} t - \cos t, 2)$ e $\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\| = e^{2t}\sqrt{6}$

Vaz

c)

Plano Osculador em $\vec{f}(t)$:

$$(X - \vec{f}(t)) \cdot \vec{B}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{B}(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{B}(t) \Leftrightarrow$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{B}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{6}} (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) \cdot (\operatorname{sen} t - \cos t, -\operatorname{sen} t - \cos t, 2) = \frac{e^t}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} t - \cos t) x - (\operatorname{sen} t + \cos t) y + 2z = e^t$$

Plano Normal em $\vec{f}(t)$:

$$(X - \vec{f}(t)) \cdot \vec{f}'(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{f}'(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \Leftrightarrow$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = e^{2t} (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) \cdot (\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1) = 2 e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - \operatorname{sen} t) x + (\operatorname{sen} t + \cos t) y + z = 2 e^t$$

Plano Rectificador em $\vec{f}(t)$:

$$(X - \vec{f}(t)) \cdot \vec{N}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{N}(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{N}(t) \Leftrightarrow$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{N}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}} (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t - \cos t, \cos t - \operatorname{sen} t, 0) = -\frac{e^t}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow -(\operatorname{sen} t + \cos t) x + (\cos t - \operatorname{sen} t) y = -e^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} t + \cos t) x + (\operatorname{sen} t - \cos t) y = e^t$$

d) $P = (1,0,1) = \vec{f}(0)$

$\vec{f}'(0) = (1,1,1)$

$\vec{T}'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0) \parallel (-1,1,0)$

$B(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2) \parallel (-1,-1,2)$

Plano osculador em P:

$(X-P)\cdot(-1,-1,2) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z-1)\cdot(-1,-1,2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+1-y+2z-2 = 0 \Leftrightarrow x+y-2z = -1$

Plano normal em P:

$(X-P)\cdot(1,1,1) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z-1)\cdot(1,1,1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+z = 2$

Plano rectificador em P:

$(X-P)\cdot(-1,1,0) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z-1)\cdot(-1,1,0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+1+y = 0 \Leftrightarrow x-y = 1$

e) $P = (1,0,1) = \vec{f}(0)$

Curvatura em P:

$$k(0) = \frac{\|\vec{T}'(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ou, em alternativa,

$$k(0) = \frac{\|f'(0) \times \vec{f}''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\vec{f}'(0) \times \vec{f}''(0) = (-1,-1,2)$

Raio de Curvatura em P:

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Centro de Curvatura em P:

$$C(0) = P + \rho(0)\,\vec{N}(0) = (1,0,1) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\vec{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

f) $$s(t) = \int_0^t \|\vec{f}'(u)\|\,du = \int_0^t \sqrt{3}\,e^u\,du = \sqrt{3}\left[e^u\right]_0^t = \sqrt{3}\,(e^t - 1)\,,\ t \geq 0$$

g) $$s = s(2) - s(0) = \sqrt{3}\,(e^2 - 1)$$

h) $$s = s(2) - s(1) = \sqrt{3}\,(e^2 - 1) - \sqrt{3}\,(e - 1) = \sqrt{3}\,e\,(e - 1)$$

Wij

32) $\vec{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \geq 0$

a) $P = (1,0,0) = \vec{f}(0)$

$Q = (1,0,2\pi) = \vec{f}(2\pi)$

$$s = \int_0^{2\pi} \|\vec{f}'(t)\| \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\,\pi$$

$\vec{f}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{2}$

b) $$s(t) = \int_0^t \|\vec{f}'(u)\| \, du = \sqrt{2} \int_0^t du = \sqrt{2}\,t, \quad t \geq 0$$

Então

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad s \geq 0$$

$$\vec{f}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \quad s \geq 0$$

Wur

34) $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\,\text{sen}\,t, 4t)$, $t \geq 0$

a) - - - -

b) $\vec{r}\,'(t) = (-3\,\text{sen}\,t, 3\cos t, 4)$

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{9\,\text{sen}^2(t) + 9\cos^2 t + 16} = \sqrt{25} = 5$

$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = 5\int_0^t du = 5t$, $t \geq 0$

c) $P = (3,0,0) = \vec{r}(0)$

$Q = \vec{r}(t_1)$, $t_1 > 0$

$s(t_1) - s(0) = 5\pi \Leftrightarrow s(t_1) = 5\pi + \underbrace{\cancel{s(0)}}_{=0} = 5\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5t_1 = 5\pi \Leftrightarrow t_1 = \pi$

$Q = \vec{r}(\pi) = (-3, 0, 4\pi)$

d) $s(t) = 5t$, $t \geq 0 \Rightarrow t(s) = \frac{s}{5}$, $s \geq 0$

$\vec{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\,\text{sen}\,\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$, $s \geq 0$

e) $\vec{r}\,'(s) = \left(-\frac{3}{5}\,\text{sen}\,\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(-3\,\text{sen}\,\frac{s}{5}, 3\cos\frac{s}{5}, 4\right)$

$\|\vec{r}\,'(s)\| = \frac{1}{5}\sqrt{9\,\text{sen}^2\left(\frac{s}{5}\right) + 9\cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + 16} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$

Wanj