

- * Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;
- * A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;
- * Não é permitida a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores.

1. [3,6] Calcule

$$\oint_C (2y + \sqrt{1+x^5}) dx + (5x - e^{y^2}) dy$$

onde C é a curva de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 4$.

2. [3,6] Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2y, -2x, 1)$ ao longo da trajetória resultante da interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2y$, no sentido retrógrado visto da parte positiva do eixo dos zz .
3. [3,6] Considere a superfície $z = x^2 + y^2 + 1$, $3 \leq z \leq 5$. Faça o seu esboço e calcule a sua área.
4. [3,6] Seja a função de campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 1)$. Determine o fluxo de $\nabla \times \vec{F}$ no sentido de dentro para fora da superfície $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$.
5. [3,6] Considere o integral:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz \right) dy \right) dx$$

- a) Esboce o domínio de integração e calcule o seu valor.
- b) Reescreva-o de modo que a primeira integração se faça em ordem a y .
6. [2,0] Seja a superfície S definida pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v) : T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que em qualquer ponto da superfície o produto vetorial fundamental é perpendicular a uma qualquer linha $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$, situada sobre a superfície.

$$1) \quad \vec{F}(x, y) = (P, Q) = (2y + \sqrt{1+x^5}, 5x - e^{y^2})$$

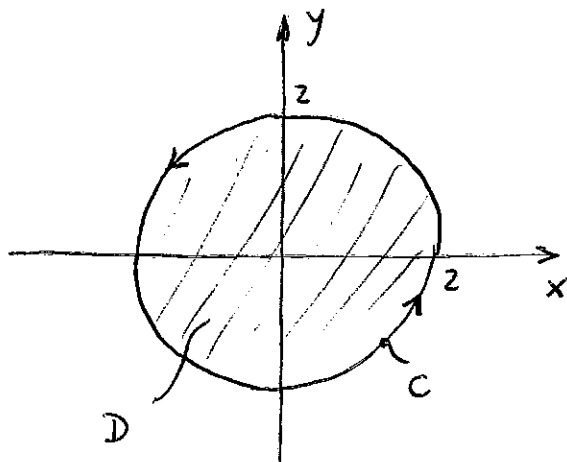
A curva C é plana e fechada pelo que podemos recorrer ao Teorema de Green.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ não é gradiente.}$$

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \iint_D 3 dx dy = 3 \iint_D dx dy = 3 A(D) = \\ &= 3 \pi (2^2) = 12 \pi \end{aligned}$$

(Admitir-se que a curva C é percorrida no sentido directo)



$$2) \quad \vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (2y, -2x, 1)$$

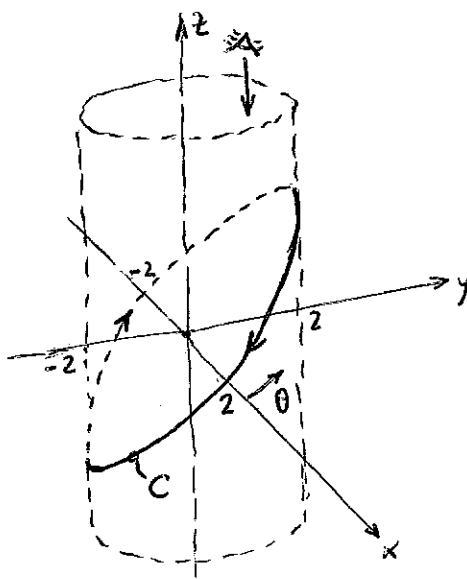
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2 \Rightarrow \vec{F} \text{ não é gradiente}$$

$$\text{Curva } C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2y \end{cases} \rightarrow \text{curva resultante da interseção de uma superfície cilíndrica com um plano}$$

Parametrizando a curva C em coordenadas polares:

$$\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 4 \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$$

NOTA: O sentido de percurso da curva é contrário ao da marcação do ângulo θ .



phiv

$$\vec{r}'(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 4 \cos \theta)$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = (4 \sin \theta, -4 \cos \theta, 1)$$

$$\begin{aligned}\vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta) &= -8 \sin^2 \theta - 8 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta = \\ &= 4 \cos \theta - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta) d\theta &= 4 \int_{2\pi}^0 \cos \theta d\theta - 8 \int_{2\pi}^0 d\theta = \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

Wir

$$3) \quad \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \text{ (raio = 2)} \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \text{ (raio = } \sqrt{2}) \\ z = 3 \end{cases}$$

Opção I: Coordenadas cartesianas

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 1), \quad (x, y) \in D$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

$$\vec{N}(x, y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

$$\|\vec{N}(x, y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \Rightarrow A(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

Resolvendo em coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$ obtemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^2 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left[(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \\ &= \frac{\pi}{6} [17\sqrt{17} - 9\sqrt{9}] = \frac{\pi}{6} [17\sqrt{17} - 27] \end{aligned}$$

Opção II: Coordenadas polares

$$\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 + 1), \quad r \in [\sqrt{2}, 2] \wedge \theta \in [0, 2\pi]$$

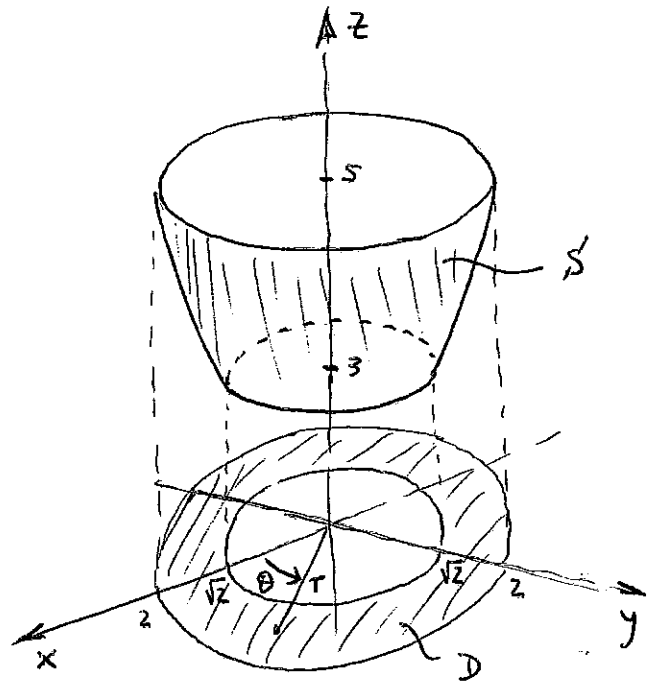
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\vec{N}(r, \theta) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r)$$

$$\|\vec{N}(r, \theta)\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r \sqrt{1 + 4r^2}$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^2 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\theta = \dots = \frac{\pi}{6} [17\sqrt{17} - 27]$$

S : seções de um parabolóide



Wiv

4) S : secção de um parabolóide

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \text{ (raio = 2)} \\ z = 4 \end{cases}$$

OPÇÃO I : Cálculo do fluxo através de definições

Parametrizando em coordenadas cartesianas

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad (x, y) \in D$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

$$\vec{N}(x, y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \quad \text{vector dirigido de fora para dentro de } S!$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -1) \quad (\text{constante})$$

$$(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}(x, y)) = (-1, 0, -1) \quad (\nabla \times \vec{F})(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) = 2x - 1$$

Fluxo de dentro para fora de S :

$$\begin{aligned} - \iint_D (\nabla \times \vec{F})(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) \, dx \, dy &= -2 \iint_D x \, dx \, dy + \iint_D 1 \, dx \, dy = \\ &= -2 \underbrace{\bar{x}_D}_0 A(D) + A(D) = A(D) = \pi(2^2) = 4\pi \end{aligned}$$

OPÇÃO II : Teorema de Stokes

Parametrizando a linha C (bordo de S) em coordenadas polares :

$$\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 4) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (\text{sentido retrógrado})$$

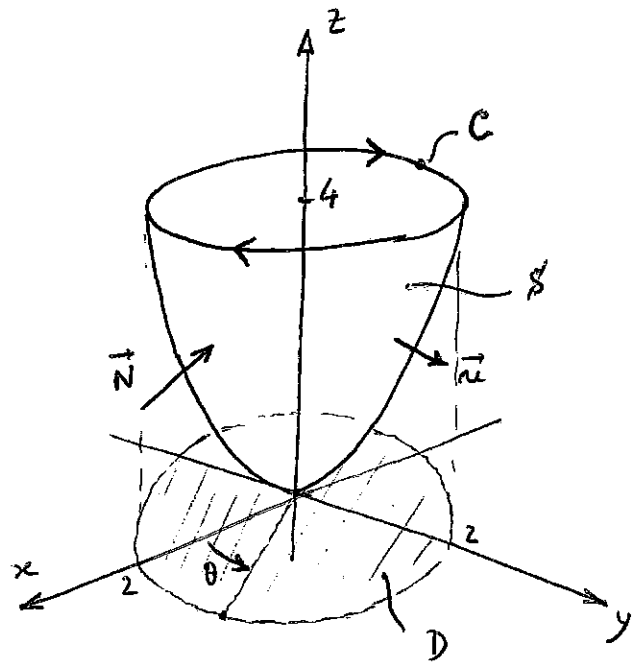
$$\vec{r}'(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}[\vec{r}(\theta)] &= (2 \sin \theta, 4, 1) \quad \vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta) = -4 \sin^2 \theta + 8 \cos \theta = \\ &= -2 + 2 \cos(2\theta) + 8 \cos \theta \end{aligned}$$

Fluxo de dentro para fora de S :

$$\int_{2\pi}^0 (+2 \cos(2\theta) + 8 \cos \theta - 2) \, d\theta = -2 \int_{2\pi}^0 d\theta = 4\pi$$

WV

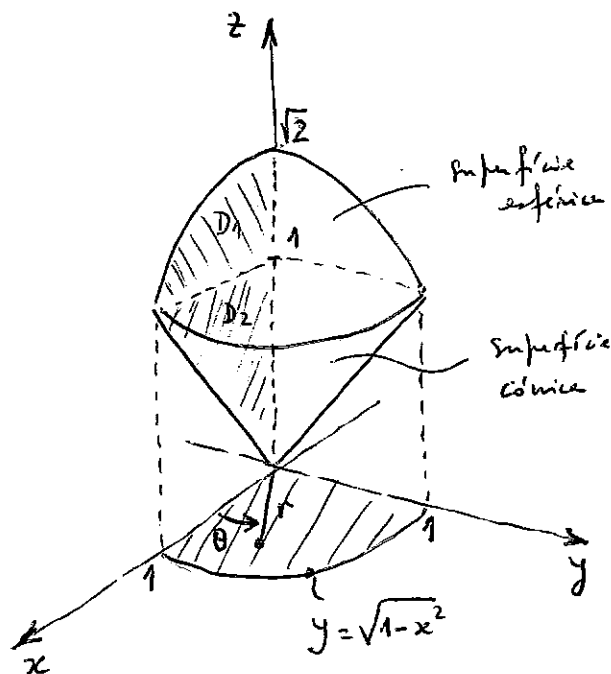


5 a)

$$x \in [0, 1]$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$$



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[z^2 \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dy \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2-x^2-y^2-x^2-y^2) dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy \, dx = (*)$$

Passando para coordenadas polares :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$1-x^2-y^2 = 1-r^2$$

$$r \in [0, 1] ; \theta \in [0, \pi/2]$$

$$(*) = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1-r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (r-r^3) \, dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$$

plm

b) Projectando o volume no plano xOz obtém-se o domínio de integração que integra as regiões D_1 e D_2 (ver figura na alínea a)).

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} \int_0^{\sqrt{2-x^2-z^2}} z \, dy \, dz \, dx + \iint_{D_2} \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z \, dy \, dz \, dx = \\ & = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z \, dy \, dz \, dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z \, dy \, dz \, dx \end{aligned}$$

NOTAS: Superfície cônica:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ y &= \sqrt{z^2-x^2} \end{aligned}$$

Superfície esférica

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2-x^2-y^2}, \quad z \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ y &= \sqrt{2-x^2-z^2} \end{aligned}$$