Jacobianos: mudança de variáveis na integração dupla

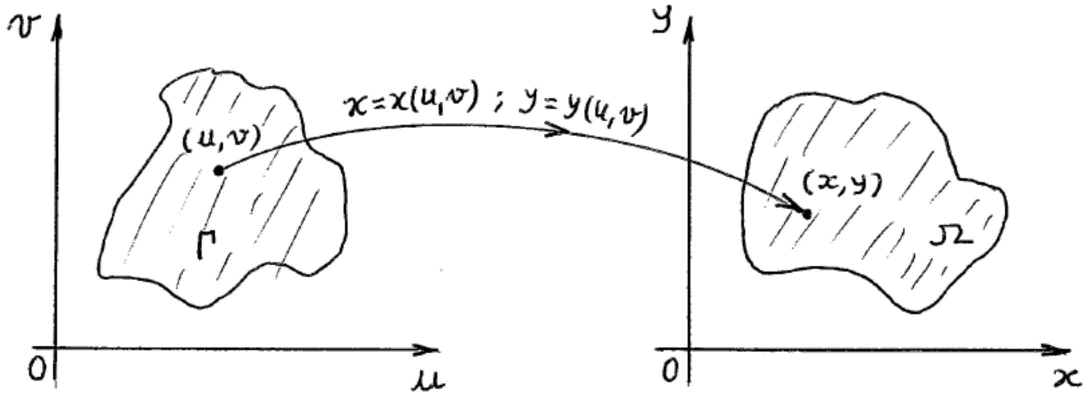
- Como se viu anteriormente, a expressão

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Gamma} f(r\cos\theta, r\ \mathrm{sen}\theta)\ r\ drd\theta \qquad (25)$$

traduz, no *integral duplo*, *a mudança de coordenadas cartesianas* (x,y) *para coordenadas polares* (r,θ).

- Pretende-se agora tratar o processo de cálculo que envolve uma mudança de variáveis na integração dupla de um modo mais geral, do qual a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares pode ser considerado um caso particular.

- Inicie-se este processo pela análise do conceito de área. Seja a região Γ de um plano que é designado pelo plano *uOv*; neste plano, um ponto *P* terá coordenadas (u,v), em que *u* é a *abcissa* e *v* a *ordenada*.



Admita-se que

$$x = x(u,v) \ , \ \ y = y(u,v) \qquad (26)$$

são funções continuamente diferenciáveis na região Γ.

À medida que (u,v) toma valores no interior da região Γ, os pontos de coordenadas $(x,y)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ geram uma região Ω no plano *xOy*. Se o mapeamento associado à transformação

$$(u,v) \;\rightarrow\; (x,y)$$

for injectivo no interior de Γ e se o *Jacobiano*, $J(u,v)$, definido pelo determinante de ordem 2

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

nunca se anular no interior de Γ, então a área da região Ω, $A(\Omega)$, é dada por:

$$A(\Omega)=\iint_{\Omega} dxdy=\iint_{\Gamma}\left|J(u,v)\right|dudv \qquad (27)$$

- Admita-se agora que se pretende integrar uma função contínua $f(x,y)$ na região Ω. Se o processo de cálculo se mostrar demasiado complexo, então é desejável aplicar uma adequada mudança de variáveis, tal como se define em (26), de modo a torná-lo mais acessível. Atendendo a (27), obtém-se, neste caso:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\iint_{\Gamma} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\;\left|J(u,v)\right|dudv \qquad (28)$$

- Pode-se agora mostrar que a expressão (25) é um caso particular do processo de mudança de variáveis definido em (28). Neste caso, as expressões

$$x=r\cos\theta \quad \text{e} \quad y=r\ \operatorname{sen}\theta$$

fazem o mapeamento da região Γ (definida no plano $rO\theta$) na região Ω (definida no plano *xOy*), sendo o Jacobiano dado por:

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r \;\Rightarrow\; \left|J(r,\theta)\right|=r$$

Obtém-se, então:

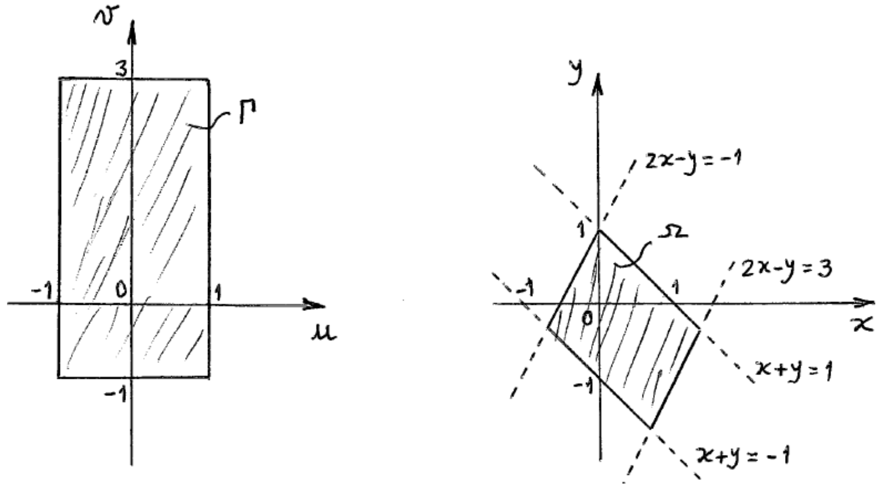
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_\Gamma f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, drd\theta$$

Exemplo 13: Pretende-se calcular o integral duplo $\iint_\Omega (x+y)^2 dxdy$ onde Ω é o paralelogramo limitado pelas linhas:

$$x+y=-1 \;,\; x+y=1 \;,\; 2x-y=-1 \text{ e } 2x-y=3.$$

Solução:

A figura seguinte apresenta um esboço da região de integração Ω.



As linhas que definem a fronteira de Ω sugerem que se considere as seguintes relações para a mudança de variáveis

$$u=x+y \quad \text{e} \quad v=2x-y$$

em que $-1\le u\le 1$ e $-1\le v\le 3$.

Resolvendo as equações anteriores em ordem às variáveis *x* e *y* obtém-se:

$$x = \frac{u+v}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{2u-v}{3}.$$

Esta transformação faz o mapeamento do rectângulo Γ da figura anterior na região Ω, em que o Jacobiano toma o valor:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; |J(u,v)| = \frac{1}{3}$$

Notando que $f(x,y) = (x+y)^2$, obtém-se

$$f\left(x(u,v), y(u,v)\right) = \frac{1}{9}\left((u+v) + (2u-v)\right)^2 = u^2$$

e, portanto:

$$\iint_\Omega (x+y)^2 dxdy = \iint_\Gamma u^2 \; |J(u,v)| dudv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\int_{-1}^{1} u^2 \; dudv =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{3}\Big[u^3\Big]_{-1}^{1} dv = \frac{2}{9}\int_{-1}^{3} dv = \frac{8}{9}$$

Exemplo 14: Pretende-se calcular o integral duplo $\iint_\Omega xy \; dxdy$ onde Ω é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas:

$$x^2 + y^2 = 4 \;\;,\;\; x^2 + y^2 = 8 \;\;,\;\; x^2 - y^2 = 0 \;\; \text{e} \;\; x^2 - y^2 = 4.$$

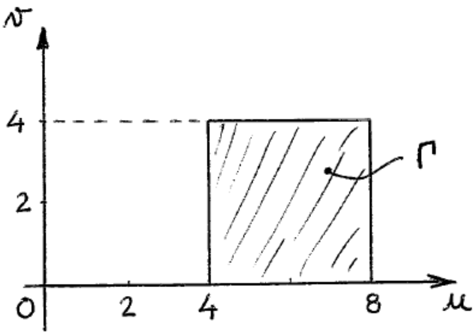
Solução:

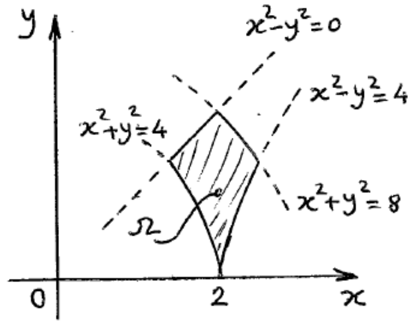
A figura seguinte apresenta um esboço da região de integração Ω.

As linhas que definem a fronteira de Ω sugerem que se considere as seguintes relações para a mudança de variáveis

$$u = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad v = x^2 - y^2$$

em que $4 \le u \le 8$ e $0 \le v \le 4$.





Resolvendo as equações anteriores em ordem às variáveis *x* e *y* obtém-se:

$$x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}\,.$$

Esta transformação faz o mapeamento do rectângulo Γ da figura anterior na região Ω, em que o Jacobiano toma o valor:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u+v}} & \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u-v}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u+v}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u-v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|J(u,v)\right| = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$$

Notando que $f(x,y) = xy$, obtém-se

$$f\left(x(u,v), y(u,v)\right) = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{2}$$

e, portanto,

$$\iint_{\Omega} xy \; dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Gamma} \sqrt{u^2 - v^2} \; \left|J(u,v)\right| dudv =$$

$$= \frac{1}{8}\iint_{\Gamma} dudv = \frac{A(\Gamma)}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

onde $A(\Gamma) = 16$ é a área da região rectangular Γ.