Prova sem consulta. Duração: 2h. 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**3,8**] Considere o ponto $T=(1/3,1,0)$ e a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{t^3}{3},t^2,1-t^2\right),\ t\geq 0.$$

a) Determine o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, num ponto genérico da curva e o seu valor no ponto *T*.

b) Calcule o comprimento de arco entre os pontos *T* e $Q=(9,9,-8)$.

2. [**4,0**] Considere a função escalar:

$$f(x,y,z)=(x-y)^3-z(1+y).$$

a) Calcule a derivada direcional de *f* no ponto $P=(1,2,-3)$ na direção definida pelo vetor normal à superfície $x^2+\frac{z^2}{3}-xy-3y=-4$ nesse ponto.

b) Em que direção *f* tem a mínima razão de variação no ponto *P*? Qual é o valor dessa razão mínima? Justifique.

c) Considere a superfície de nível, *S*, $f(x,y,z)=8$. Escreva a equação cartesiana da do plano tangente a *S* em *P*.

GRUPO II

3. [**3,8**] Sabendo que a equação $zx+ye^{z+3}=1$ define, de modo implícito, $z=z(x,y)$ como função de *x* e de *y* na vizinhança do ponto $S=(0,1,-3)$, calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ em *S*.

....*continua no verso*

4. [**2,2**] Determine e classifique os pontos estacionários da função:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - xy + 3\,.$$

GRUPO III

5. [**4,2**] Considere o integral duplo $\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{4x-x^2} x \; dydx$.

a) Calcule o valor do integral.

b) Esboce o domínio de integração.

c) Reescreva-o trocando a ordem de integração; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

6. [**2,0**] Seja uma curva descrita pela função vetorial $\vec{r}(s)$, parametrizada em relação ao comprimento de arco, s, e tal que $\|\vec{r}(s)\| = k$, $\forall s \in [0,a]$ e $k > 0$. Mostre que $\forall s \in [0,a]$, $\vec{r}(s) \cdot \vec{r}\,'(s) = 0$ e $\vec{r}(s) \cdot \vec{r}\,''(s) = -1$.