Vizinhança de um ponto

- A *vizinhança* de um número real x_0 é um conjunto da forma $\{x \ : \ |x - x_0| < \delta\}$, com $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em x_0:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

  Se retirarmos x_0 deste conjunto, obtém-se:

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

- A *vizinhança* de um ponto $\vec{x}_0$ é um conjunto da forma $\{\vec{x} \ : \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em $\vec{x}_0$.

- Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$, a vizinhança de $\vec{x}_0$ é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de raio δ e centrada em (x_0, y_0). Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a vizinhança de $\vec{x}_0$ é o conjunto dos pontos interiores à superfície esférica de raio δ e centrada em (x_0, y_0, z_0).

- Se retirarmos o ponto $\vec{x}_0$ do conjunto que define a vizinhança de $\vec{x}_0$, obtém-se o conjunto $\{\vec{x} \ : \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$.

- Um ponto $\vec{x}_0$ diz-se um *ponto interior* de um conjunto *S* se o conjunto *S* contém alguma vizinhança de $\vec{x}_0$. O conjunto de todos os pontos interiores de *S* é designado por *interior de S*.

- Um ponto $\vec{x}_0$ diz-se um *ponto fronteira* de um conjunto *S* se qualquer vizinhança de $\vec{x}_0$ contém pontos que estão em *S* e pontos que não estão em *S*. O conjunto de todos os pontos fronteira de *S* chama-se *fronteira de S*.

- Um conjunto *S* diz-se *aberto* se qualquer um dos seus pontos é um ponto interior (não possui pontos fronteira). Por outro lado, o conjunto *S* diz-se *fechado* se contém a sua fronteira.

Limite

- Seja *f* uma função real a várias variáveis definida pelo menos numa vizinhança de $\vec{x}_0$, podendo não estar definida em $\vec{x}_0$. Então

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \tag{1}$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que:

$$\text{se } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

- No caso de uma função real a várias variáveis, o processo que permite demonstrar a existência de limite num ponto $\vec{x}_0$, envolve, na generalidade das situações, um processo de cálculo muito trabalhoso, já que se tem de mostrar que o limite toma sempre o mesmo valor, independentemente da trajectória que é considerada na aproximação a $\vec{x}_0$. Neste caso é necessário recorrer à definição de limite apresentada em (1). Pelo contrário, é mais simples mostrar que uma função a várias variáveis não tem limite em $\vec{x}_0$.

Exemplo 23: Vamos mostrar que a função

$$f(x,y)=\frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que *f* não está definida em $(0,0)$, mas está definida em todos os pontos $(x,y)\neq(0,0)$.
Ao longo dos caminhos mais óbvios que nos conduzem a $(0,0)$, os eixos coordenados, obtém-se:

Eixo dos *xx*, $y=0$:

$$f(x,y)=f(x,0)=0 \text{ e } \lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0\,.$$

Eixo dos *yy*, $x=0$:

$$f(x,y)=f(0,y)=y \text{ e } \lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} y=0\,.$$

Contudo, ao longo da linha $y=mx,\ m\neq 0$, obtém-se

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2+m^3x^3}{(1+m^2)x^2}=\frac{m(1+m^2x)}{1+m^2}\quad (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{m(1+m^2x)}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Uma vez que os caminhos considerados na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que *f* não tem limite em $(0,0)$.

Exemplo 24: Vamos mostrar que a função

$$g(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que o domínio de *g* contém todos os pontos do plano *xOy* tais que $(x,y)\neq(0,0)$.

Tal como no exemplo 23, verifica-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$$

ao longo dos eixos coordenados.

Considerando a linha $y=mx,\ m\neq 0$, obtém-se

$$g(x,y)=g(x,mx)=\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx}{x^2+m^2}\ \ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0$$

Considerando, no entanto, o caminho $y=x^2$ na aproximação a $(0,0)$, obtém-se

$$g(x,y)=g(x,x^2)=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\ \ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Dado que os caminhos escolhidos na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que *g* não tem limite em $(0,0)$.

- O limite de uma função $f(\vec{x})$ num ponto $\vec{x}_0$ existe, se for independente do caminho que for utilizado na aproximação a $\vec{x}_0$.

- O limite de uma função $f(\vec{x})$, se existir, é único. Além disso, se

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \quad \text{e} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = M$$

então:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[f(\vec{x}) + g(\vec{x})\right] = L + M$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[\alpha f(\vec{x})\right] = \alpha L \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[f(\vec{x}) g(\vec{x})\right] = LM$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}\right] = \frac{L}{M} \ \text{ se } M \neq 0$$

Continuidade

- Seja $\vec{x}_0$ um ponto interior do domínio de *f*. Dizer que *f* é *contínua* em $\vec{x}_0$ é equivalente a dizer que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

  ou, em alternativa:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0)$$

- Dizer que *f* é contínua num *conjunto aberto S* é o mesmo que dizer que *f* é contínua em todos os pontos de *S*.

- Os *polinómios* a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos. As *funções racionais* (quocientes de polinómios) a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos, excepto naqueles onde o denominador se anula.

Exemplo 25: Por exemplo, o polinómio a duas variáveis

$$P(x,y) = x^2y + x^4y^2 - 2x + y$$

é contínuo em todos os pontos do plano *xOy*, e o polinómio a três variáveis

$$Q(x,y,z) = 2x^2z + z^4y^2 + 2xyz + 2x - y$$

é contínuo em todos os pontos do espaço tridimensional.

Exemplo 26: A função racional

$$f(x,y)=\frac{x-2y}{x^2+y^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto na origem $(0,0)$.

Exemplo 27: A função racional

$$g(x,y)=\frac{x^2}{2x-y}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto ao longo da recta $y=2x$.

Exemplo 28: A função racional

$$h(x,y)=\frac{1}{y-x^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto ao longo da parábola $y=x^2$.

Exemplo 29: A função racional

$$q(x,y,z)=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto na origem $(0,0,0)$.

Exemplo 30: A função racional

$$r(x,y,z) = \frac{x^3 + y}{2x + y - z}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano $2x + y - z = 0$.

Exemplo 31: A função

$$w(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{x^3 z}{x + y}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano vertical $x + y = 0$.

Exemplo 32: A função

$$t(x,y,z) = \sqrt{x^4 + y^6 + z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional.

- Sejam as funções a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se g é contínua no ponto $\vec{x}_0$ e se f é contínua em $g(\vec{x}_0)$, então a função composta $(f \circ g)(\vec{x}) = f[g(\vec{x})]$ é contínua no ponto $\vec{x}_0$ (*continuidade da composição de funções a várias variáveis*).

- Se uma função a várias variáveis é contínua, então é contínua em relação a cada uma das suas variáveis, consideradas individualmente; por exemplo, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

então:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0).$$

Note-se, no entanto, que a *proposição inversa é falsa*.

Continuidade e existência de derivadas parciais

- Sabe-se que no caso de uma *função real a uma variável* a *existência de derivada* num ponto *garante a continuidade* da função nesse ponto.

- Já no caso de uma *função real a várias variáveis* a *existência de derivadas parciais* num ponto *não garante a continuidade* da função nesse ponto.

- Por exemplo, a existência da derivada parcial $f_x = \partial f / \partial x$ num ponto apenas depende do comportamento da função ao longo de uma linha paralela ao eixo dos *xx* que passa nesse ponto. No entanto, a continuidade da função num ponto depende do comportamento da função ao longo de qualquer linha que passe nesse ponto.

Exemplo 33: Seja a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tendo em atenção que

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$$

pode-se concluir que a função é "contínua" ao longo do eixo dos *xx* e é "contínua" ao longo do eixo dos *yy*; além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

Contudo, considerando a linha $y=x$, obtém-se

$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

Conclui-se, assim, que a *função é descontínua em* $(0,0)$.

Derivadas parciais de segunda ordem

- Relativamente à função real a duas variáveis $f(x,y)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$ e $f_y = \partial f / \partial y$ (*de primeira ordem*), é possível definir as seguintes derivadas parciais de *segunda ordem*:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemplo 34: Seja a função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^3)-4x^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{2(-x^2+y^3)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6y(x^2+y^3)-9y^4}{(x^2+y^3)^2} = \frac{3y(2x^2-y^3)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2x(3y^2)}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-3y^2(2x)}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

Note-se que, neste caso, verifica-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x,y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

são contínuas.

- Relativamente à função real a três variáveis $f(x,y,z)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$ e $f_z = \partial f / \partial z$ (*de primeira ordem*), é possível definir as seguintes derivadas parciais de *segunda ordem*:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xz} = (f_x)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yz} = (f_y)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

$$f_{zx} = (f_z)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$f_{zy} = (f_z)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$$f_{zz} = (f_z)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x,y,z)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

são contínuas.

Exemplo 35: Seja a função $f(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \pi x e^y \cos(\pi z)$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\pi^2 xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = e^y \operatorname{sen}(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \pi e^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \pi xe^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)$$