Prova sem consulta. Duração: 2h15m. 2ª Prova de Avaliação

* Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;
* A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;
* Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;
* Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.

GRUPO I

1. **[3,0]** Seja a curva, C, de interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 2$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x^2)dx + (x-y)dz$.

2. **[3,0]** Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (x^2+2x)dx + (xy)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelo semieixo negativo dos xx e pelos gráficos das funções $y = x$ e $y = \sqrt{4-x^2}$, percorrida no sentido retrógrado.

3. **[3,0]** Seja o campo vetorial $\vec{f}(x,y,z) = \left(2x\ln(y) - yz\right)\vec{i} + (x^2y^{-1} - xz)\vec{j} - xy\vec{k}$. Mostre que $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente e calcule o integral de linha $\int_L \vec{f} \cdot d\vec{r}$, em que L é uma curva que liga ponto $A = (1,2,1)$ ao ponto $B = (3,2,2)$.

GRUPO II

4. **[3,0]** Seja a superfície, S, definida por $z = 4 - x - y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

a) Esboce a superfície S e parametrize-a.

b) Calcule a sua área.

.... *continua no verso*

5. [**3,0**] Considere o campo vetorial $\vec{g}(x,y,z) = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$ e a superfície, S, do plano $x+y+z=4$, limitada por $x^2+y^2=1$. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{g}$ no sentido definido pelo semieixo positivo dos zz.

6. [**3,0**] Seja o integral triplo em coordenadas cartesianas:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^2 z\sqrt{1-x^2}\;dzdydx$$

a) Esboce o domínio de integração, V.

b) Reescreva-o em coordenadas cilíndricas, identificando analiticamente o domínio de integração.

c) Reescreva-o em coordenadas cartesianas começando o processo de integração na variável x; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

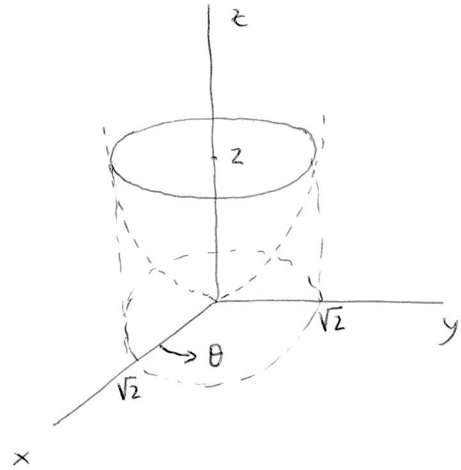
7. [**2,0**] Considere a família das curvas, C, do plano $x^2+(y-b)^2=1$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Enuncie o teorema de Green.

b) Sem recorrer ao cálculo de qualquer integral, mostre que o integral de linha $\int_C (-Axy)dx + (Bxy)dy$, $A, B \in \mathbb{R}$ é independente de A e indique, justificando, em que condições o seu valor é nulo.

1) $z = x^2 + y^2 \;\wedge\; x^2 + y^2 = 2$

a)



$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$x = \sqrt{2}\cos\theta$
$y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$
$z = 2$

$\vec{r}(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta, 2), \quad \theta \in [0, 2\pi]$

b) $\bar{f}(x,y,z) = (P, Q, R) = (x^2, 0, x-y)$

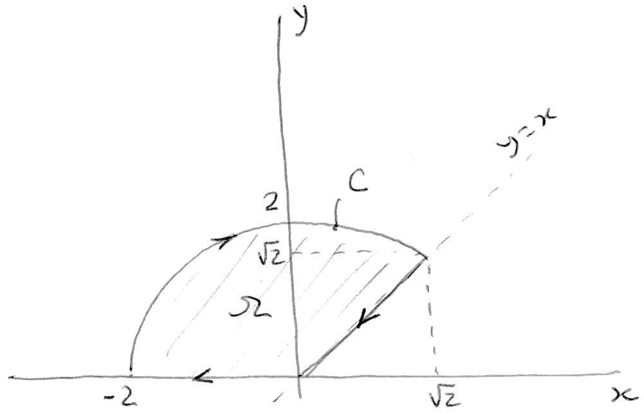
$\bar{r}'(\theta) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 0)$

$\bar{f}[\bar{r}(\theta)] = (2\cos^2\theta, 0, \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$\vec{f}(\bar{r}(\theta)) \cdot \bar{r}'(\theta) = -2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta$

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^{2\pi} \bar{f}[\bar{r}(\theta)] \cdot \bar{r}'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} -2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\,d\theta = 0$$

2) $\bar{F}(x,y) = (P,Q) = (x^2+2x\,,\ xy)$



$x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$$

$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ em que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$\Omega_1 = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

$\Omega_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \ \wedge \ x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

Considerando coordenadas polares:

$\Omega \rightarrow \Omega_3 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2 \ \wedge \ \pi/4 \leq \theta \leq \pi\}$

$$-\iint_\Omega y\,dx\,dy = -\int_0^2\int_{\pi/4}^{\pi} (r \operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta = +\int_0^2 r^2\,[\cos\theta]_{\pi/4}^{\pi}\,dr =$$

$$= \int_0^2 r^2\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] dr = -\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{8}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3) $\bar{f}(x,y,z) = (P,Q,R) = \left(2x\ln(y) - yz,\ x^2y^{-1} - xz,\ -xy\right)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy^{-1} - z - 2xy^{-1} + z = 0 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = -x + x = 0 \ \checkmark$$

$\bar{f}$ é gradiente, isto é,

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -y + y = 0 \ \checkmark$$

$$\exists_{\varphi(x,y,z)} : \nabla\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \bar{f}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P = 2x\ln(y) - yz \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int 2x\ln(y) - yz\, dx =$$
$$= x^2\ln(y) - xyz + \phi_1(y,z) + k_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q = x^2y^{-1} - xz \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int x^2y^{-1} - xz\, dy =$$
$$= x^2\ln(y) - xyz + \phi_2(x,z) + k_2$$

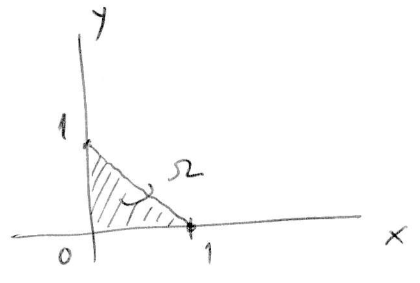
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = R = -xy \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int -xy\, dz = -xyz + \phi_3(x,y) + k_3$$

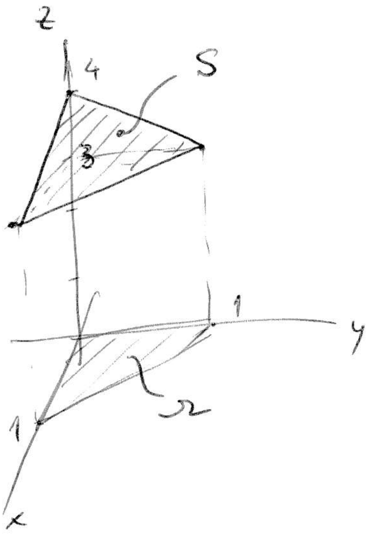
Então $\varphi(x,y,z) = x^2\ln(y) - xyz + K$

$$\int_L \bar{f}\cdot d\vec{r} = \varphi(3,2,2) - \varphi(1,2,1) = 9\ln(2) - 12 + K - [\ln(2) - 2 + K] =$$
$$= 8\ln(2) + 10$$

4)

a) $S: \ z = 4 - x - y \ , \quad 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1-x$





$S: \ \bar{r}(x,y) = (x, y, 4-x-y) \ , \ (x,y) \in \Omega$

$\Omega = \{ (x,y) : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1-x \}$

b) $\bar{r}'_x(x,y) = (1, 0, -1) \qquad \bar{N}(x,y) = (1,1,1)$

$\bar{r}'_y(x,y) = (0, 1, -1) \qquad \| \bar{N}(x,y) \| = \sqrt{3}$

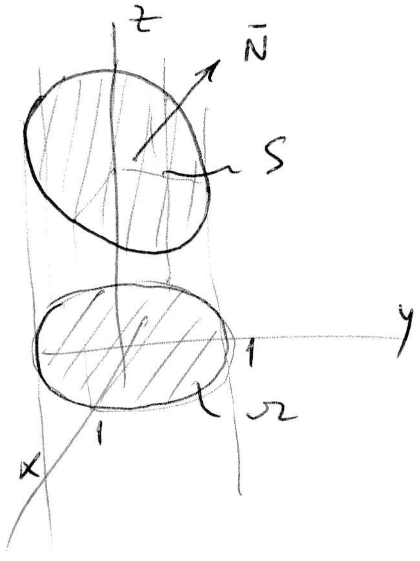
$$A(S) = \int_S dS = \iint_\Omega \| \bar{N}(x,y) \| \, dx\,dy = \sqrt{3} \iint_\Omega dx\,dy = \sqrt{3}\, A(\Omega) =$$

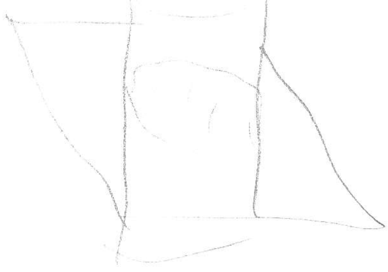
$$= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5)

$\bar{g}(x,y,z) = (y, -z, x)$

$S: x+y+z=4 \quad \wedge \quad x^2+y^2 \le 1$





$S: \bar{r}(x,y) = (x, y, 4-x-y), \quad (x,y) \in \Omega$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ 10

$\bar{N}(x,y) = (1,1,1)$ 25

$\iint_S \bar{g}\cdot\bar{n}\, dS = \iint_\Omega \bar{g}[\bar{r}(x,y)]\cdot\bar{N}(x,y)\, dx\, dy =$

-20

$\bar{g}[\bar{r}(x,y)] = (y, -4+x+y, x)$

$\bar{g}[\bar{r}(x,y)]\cdot\bar{N}(x,y) = y-4+x+y+x = 2x+2y-4$

$= 2\iint_\Omega x+y-2\, dx\, dy = 2\iint_{\Omega_1} (r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta - 2)\, r\, dr\, d\theta =$

60

$\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\cos\theta + r^2\,\text{sen}\,\theta - 2r\, d\theta\, dr = -8\pi \int_0^1 r\, dr = -4\pi$

20 20

falta (r) -25%

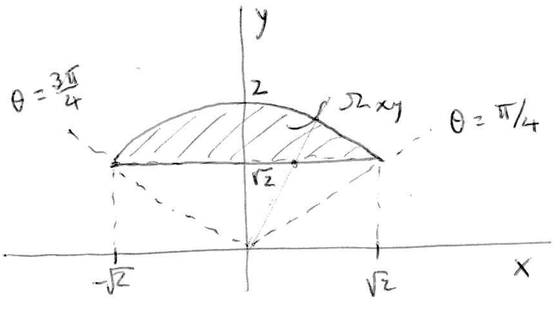
-25%

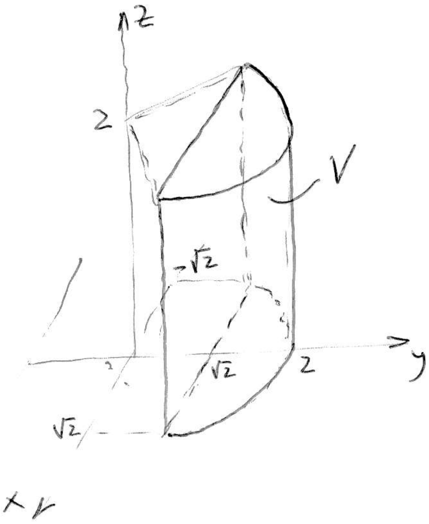
6)

a)

$$V = \{ (x,y,z),\ (x,y) \in \Omega_{xy} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$\Omega_{xy} = \{ (x,y) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \ \wedge \ \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \}$$





b)

$$V = \{ (r,\theta,z),\ (r,\theta) \in \Omega_{r\theta} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$\Omega_{r\theta} = \{ (r,\theta) : \underbrace{\pi/4 \leq \theta \leq \tfrac{3\pi}{4}}_{-35} \ \wedge \ \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta} \leq r \leq 2}_{-35} \}$$ 15

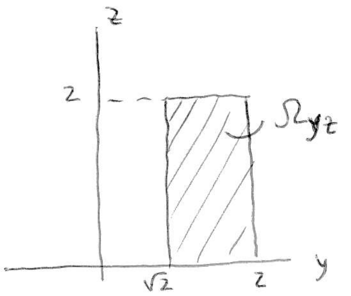
$$y = \sqrt{2} \Rightarrow r \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$f(x,y,z) = z\sqrt{1-x^2} \Rightarrow g(r,\theta,z) = z\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}}^{2} \int_0^2 z\,\underbrace{r}_{20} \underbrace{\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}_{-20}\,dz\,dr\,d\theta$$

c)



$$y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-y^2}$$

$$\Omega_{yz} = \{ (y,z) : \sqrt{2} \leq y \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$V = \{ (x,y,z) : (y,z) \in \Omega_{yz} \ \wedge \ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \}$$ 20

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz\,dy$$

7)

a)

b)

$\vec{f}(x,y) = (P,Q) = (-Axy, Bxy)$, $A,B \in \mathbb{R}$

$$\oint_C (-Axy)\,dx + (Bxy)\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

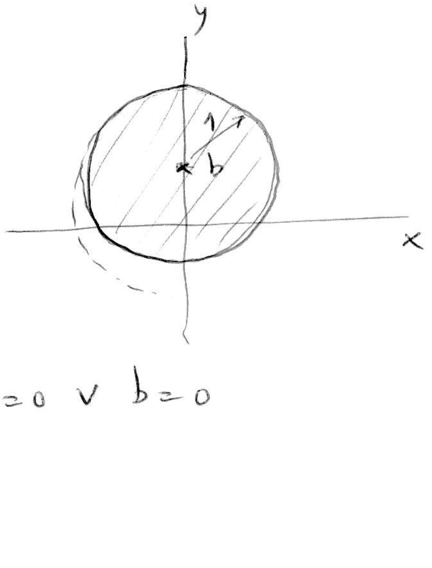
$$= \iint_\Omega (By + Ax)\,dx\,dy = B \iint_\Omega y\,dx\,dy + A \iint_\Omega x\,dx\,dy =$$

$$= B\,\bar{y}\,A(\Omega) + A\,\bar{x}\,A(\Omega)$$

em que $A(\Omega)$ é a área da região Ω e $(\bar{x},\bar{y})$ são as coordenadas do centróide da região Ω.

Sabendo que $A(\Omega) = \pi$ e $(\bar{x},\bar{y}) = (0, b)$ então

NOTA: $\bar{x} = 0$ já que Ω é simétrica em relação ao eixo dos yy



$$\oint_C (-Axy)\,dx + \oint Bxy)\,dy =$$

$= B\,b\,\pi$, ou seja é independente de A.

$\oint_C (-Axy)\,dx + (Bxy)\,dy = 0$ se e só se $B = 0 \vee b = 0$