

- * Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;
- * A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;
- * Não é permitida a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores.

1. [3,3] Calcule $\oint_C -ydx + zdy - dz$, em que C é a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $x + y + z = 1$.
2. [3,4] Obtenha a área da superfície S dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $1 \leq z \leq 3$.
3. [4,0] Considere a curva C de interseção do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 4 - 2x$.
 - a) Parametrize a curva C .
 - b) Calcule o fluxo do rotacional da função de campo vetorial $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$, de dentro para fora da superfície do paraboloide limitada pela curva C .
4. [3,3] Resolva, recorrendo ao método da variação das constantes, a equação diferencial $y'' - 2y' + y = \frac{4e^x}{1+x}$, $x > 0$.
5. [4,0] Determine:
 - a) A função inversa da transformada de Laplace $F(s) = \frac{2}{s^2 + 9} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 5}$.
 - b) A solução da equação diferencial $y'' + 4y = 4 - 4u(t - 2)$, com $y(0) = y'(0) = 0$, usando transformadas de Laplace.
6. [2,0] Enuncie devidamente o teorema de Green. Recorrendo a este teorema, mostre que a área da região D limitada por uma curva regular fechada C é dada por $A(D) = \frac{1}{2} \oint_C -ydx + xdy$.

(continua no verso)

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f * g$	$F(s)G(s)$

Tabela 4.1 Transformadas de Laplace

in “Problemas de equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace”, Luísa Madureira, FEUPedições

1)

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\text{superfície cilíndrica}) \\ x + y + z = 1 & (\text{plano}) \end{cases}$$

C é uma curva fechada; verifiquemos se a função de campo vetorial é gradiente.

$$\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (-y, z, -1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \Rightarrow \vec{F} \text{ não é gradiente.}$$

Formulacao vetorial: Consideremos a parametrização para a curva C

$$\vec{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta - \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Como não é imposto o sentido de percurso de C , optemos por: $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = (-\sin \theta, 1 - \cos \theta - \sin \theta, -1)$$

$$\vec{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, +\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(\theta) = \sin^2 \theta + \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + 2 \cos \theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \sin \theta \cos \theta - \sin \theta =$$

$$= -\cos(2\theta) + 2 \cos \theta - \sin \theta \cos \theta - \sin \theta$$

Calculando:

$$\int_C -y dx + z dy - dz = \int_0^{2\pi} (-\cos(2\theta) + 2 \cos \theta - \sin \theta \cos \theta - \sin \theta) d\theta = 0$$

$$\int_C \text{me} \quad \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

WV

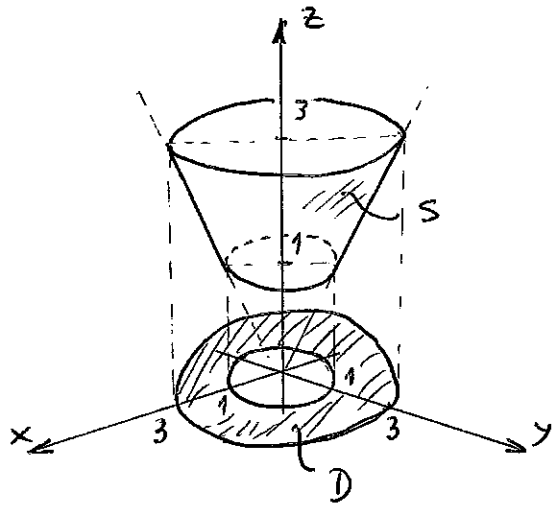
$$2) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \in [1, 3]$$

Parâmetrização de superfície

S (Coordenadas cartesianas)

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in D$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3^2\}$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Vetor Fundamental de S :

$$\vec{N}(x, y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

$$\|\vec{N}(x, y)\| = \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right]^{1/2} = \sqrt{2}$$

Área da superfície S :

$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(x, y)\| \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_D dx \, dy =$$

$$= \sqrt{2} A(D) = \sqrt{2} \pi [3^2 - 1^2] = 8\sqrt{2} \pi$$

Wm

3)

$$a) \quad C: \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 & (\text{parabolóide}) \\ z = 4 - 2x & (\text{plano}) \end{cases}$$

$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2)$$

$$\text{Se } z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Considerando o ângulo θ referido na figura, tem-se

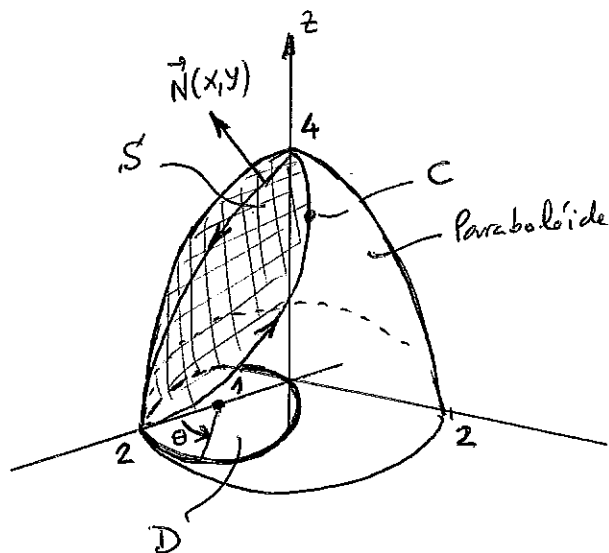
$$x = 1 + \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

$$z = 4 - 2(1 + \cos \theta)$$

Então

$$\vec{r}(\theta) = (1 + \cos \theta, \sin \theta, 2 - 2 \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



b)

Alternativa 1:Cálculo do fluxo:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

Superfície S:

$$\vec{r}_1(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2), \quad (x, y) \in D$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} = (1, 0, -2x) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} = (0, 1, -2y)$$

$$\vec{N}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

$$(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}_1(x, y)) = (0, 0, 2)$$

Alternativa 2:Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = (-\sin \theta, 1 + \cos \theta, 0)$$

$$\vec{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 2\pi$$

ylyr

Alternative 1 (cont.) :

$$(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}_1(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) = 2$$

Concluindo

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = 2 \iint_D dx \, dy =$$

$$= 2 A(D) = 2\pi$$

4) $y'' - 2y' + y = 0$: equação homogênea

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lambda = 1 \quad (\text{raiz real dupla})$$

Soluções da equação homogênea

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Método de variação das constantes

$$y = y_h + y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = x e^x \quad g(x) = \frac{4e^x}{1+x}$$

$$f_1'(x) = e^x \quad f_2'(x) = e^x + x e^x$$

$$\begin{cases} f_1 c_1' + f_2 c_2' = 0 \\ f_1' c_1 + f_2' c_2 = g \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{bmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4e^x}{1+x} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$c_1' = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{4e^x}{1+x} & e^x + x e^x \end{vmatrix} = \frac{1}{e^{2x}} \left[-\frac{4x e^{2x}}{1+x} \right] = \frac{-4x}{1+x}$$

$$c_1 = -4 \int \frac{x}{1+x} dx = -4 \int \frac{1+x-1}{1+x} dx = -4 \int dx + 4 \int \frac{1}{1+x} dx =$$

$$= -4x + 4 \ln(1+x) + k_1$$

$$c_2' = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{4e^x}{1+x} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^{2x}} \left[\frac{4e^{2x}}{1+x} \right] = \frac{4}{1+x}$$

$$c_2 = 4 \int \frac{1}{1+x} dx = 4 \ln(1+x) + k_2$$

Soluções da equação não homogênea

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 x e^x + [-4x + 4 \ln(1+x)] e^x + 4x e^x \ln(1+x) = \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x + 4e^x \ln(1+x) [1+x] \end{aligned}$$

WV

5 a)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+9} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+9} \right] = \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s^2+9} \right] = \frac{2}{3} \sin(3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+4} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2+4} \right]_{t \rightarrow t-\pi} u(t-\pi) =$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2+4} \right]_{t \rightarrow t-\pi} u(t-\pi) = \frac{1}{2} \left[e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+4} \right] \right]_{t \rightarrow t-\pi} u(t-\pi) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-(t-\pi)} \sin(2(t-\pi)) u(t-\pi) = \frac{1}{2} e^{\pi-t} \sin(2t) u(t-\pi)$$

Concluindo

$$f(t) = \frac{2}{3} \sin(3t) + \frac{1}{2} e^{\pi-t} \sin(2t) u(t-\pi) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3} \sin(3t), & 0 < t < \pi \\ \frac{2}{3} \sin(3t) + \frac{1}{2} e^{\pi-t} \sin(2t), & t > \pi \end{cases}$$

WV

$$5b) \quad y'' + 4y = 4 - 4u(t-2) \quad \text{com} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y] = Y(s)$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}[4 - 4u(t-2)] = \mathcal{L}[4] - 4\mathcal{L}[u(t-2)] = \frac{4}{s} - \frac{4}{s} e^{-2s}$$

Então

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s} e^{-2s} \quad (\Leftrightarrow) \quad Y(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4)} - \frac{4}{s(s^2 + 4)} e^{-2s}$$

$$\frac{4}{s(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$4 = A(s^2 + 4) + Bs^2 + Cs \quad ; \quad s=0 \Rightarrow A=1$$

$$\text{Termos em } s^2 : A + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$\text{Termos em } s : C = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} e^{-2s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] = \cos(2t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right] = u(t-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4} e^{-2s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right]_{t \rightarrow t-2} u(t-2) = \cos(2t-4) u(t-2)$$

Concluindo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \cos(2t) - u(t-2) + \cos(2t-4) u(t-2) =$$

$$= \begin{cases} 1 - \cos(2t) , & 0 < t < 2 \\ -\cos(2t) + \cos(2t-4) , & t > 2 \end{cases}$$

WAV

6) Teorema de Green:

Sejam P e Q campos escalares em \mathbb{R}^2 contínuos e com derivadas contínuas num conjunto aberto $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Seja C a curva de Jordan seccionalmente suave e seja $D \subset S$ a região constituída por C e o seu interior. Então:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy \quad (1)$$

Tendo em atenção a definição de integral duplo, sabe-se que a área de D , $A(D)$, é dada por

$$A(D) = \iint_D dx dy$$

Assim, se em (1) se considerar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

verifica-se que

$$A(D) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Encontramos, então, uma função $\vec{F}(x, y) = (P, Q)$ que satisfaz esta condição.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

isto é, por exemplo,

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} x \quad \text{e} \quad P(x, y) = -\frac{1}{2} y$$

Substituindo em (1), obtém-se

$$A(D) = \iint_D dx dy = \oint_C \left(-\frac{1}{2} y \right) dx + \left(\frac{1}{2} x \right) dy = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

plur