Prova sem consulta. Duração: 2h. 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**3,8**] Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 3\mathrm{sen}(t)\vec{j} + (t)\vec{k} \ , \ t \in [0, 2\pi] .$$

Determine:

a) Determine o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, num ponto genérico da curva e o seu valor no ponto $S = (0, 3, \pi/2)$.

b) A equação cartesiana do plano osculador à curva em *S*.

2. [**4,0**] Seja a função escalar:

$$f(x, y, z) = 2\mathrm{sen}(x + 2y) - xz .$$

a) Calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (2, -1, 3)$ ao longo da curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t^2, t, -3t^3)$, $t \leq 0$.

b) Em que direção f tem a máxima razão de variação no ponto *P*? Qual é o valor dessa razão máxima? Justifique.

c) Considere a superfície de nível, *S*, $f(x, y, z) = -6$. Escreva a equação vetorial e as equações cartesianas da reta perpendicular a *S* em *P*.

GRUPO II

3. [**3,8**] Sabendo que a equação $x + ze^{z+x} + (1+2y)^2 = 1$ define, de modo implícito, $z = z(x, y)$ como função de *x* e de *y* na vizinhança do ponto $T = (-1, -1, 1)$, calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ em *T*.

....*continua no verso*

4. [**2,2**] Determine e classifique os pontos estacionários da função:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{2} + y^2 - x^2 y - y\,.$$

GRUPO III

5. [**4,2**] Considere o integral duplo dado por:

$$\int_0^2 \int_{-x}^{\sqrt{2x}} 2y\; dydx + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} 2y\; dydx\,.$$

a) Calcule o valor do integral.

b) Esboce o domínio de integração.

c) Reescreva-o trocando a ordem de integração; defina analiticamente o respetivo domínio de integração.

6. [**2,0**] Seja uma curva plana em $\mathbb{R}^3$ descrita pela função vetorial $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Mostre que, em cada ponto da curva, a derivada do versor da normal principal é dada por $\vec{N}'(t) = -k(t)\,\vec{r}'(t)$, em que $k(t)$ é a curvatura da curva.