INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

Massa de uma superfície

- Considere-se uma distribuição de matéria sobre uma superfície S (*superfície material*). Se o campo escalar que exprime a densidade do material (massa por unidade de área) for constante, λ, então a massa da *superfície material* é dada pelo produto da densidade pela área da superfície, $A(S)$.
  Assim, se S é uma superfície *simples* e *regular*, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{j} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

  então a massa de S, $M(S)$, é dada por

$$M(S) = \lambda A(S) = \lambda \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv \qquad (1)$$

  onde $\vec{N}(u,v)$ é o *produto vectorial fundamental* de S.
  No entanto, se a densidade variar de ponto para ponto, $\lambda(x,y,z)$, então a massa só poderá ser obtida recorrendo a um processo de integração.
  Com efeito, é possível provar que:

$$M(S) = \iint_{S} \lambda(x,y,z) dS = \iint_{\Omega} \lambda\left[\vec{r}(u,v)\right] \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv =$$

$$= \iint_{\Omega} \lambda\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right] \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv \qquad (2)$$

Integral de superfície

- O integral duplo apresentado em (2) pode ser generalizado para um qualquer campo escalar, $h(x,y,z)$, que seja contínuo na superfície *S*. Este integral é, genericamente, designado por *integral de superfície de* $h(x,y,z)$ *sobre S* e escreve-se:

$$\iint_S h(x,y,z)\; dS = \iint_\Omega h\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\; \left\|\vec{N}(u,v)\right\| dudv$$

Se $h(x,y,z)=1$, então:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(u,v)\right\| dudv$$

Exemplo 1: Determine o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z)=yz$ sobre a superfície, *S*, parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b}\ ,\ (u,v)\in\Omega$$

com $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$ e $\Omega=\left\{(u,v)\ :\ 0\le u\le 1\ ,\ 0\le v\le 1\right\}$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \;\Rightarrow\; \left\|\vec{N}(u,v)\right\| = \sqrt{6}$$

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + (-u+2v)\vec{j} + (u-v)\vec{k}$$

$$h\left[\vec{r}(u,v)\right] = y(u,v)z(u,v) = (-u+2v)(u-v) = -u^2-2v^2+3uv$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S (yz)dS = \sqrt{6}\int_0^1\int_0^1 (-u^2 - 2v^2 + 3uv)dudv =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int_0^1 \left[-2u^3 - 12uv^2 + 9u^2v\right]_0^1 dv = \frac{\sqrt{6}}{6}\int_0^1 \left(-2 - 12v^2 + 9v\right)dv =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12}\left[-4v - 8v^3 + 9v^2\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Exemplo 2: Calcule o integral de superfície do campo escalar $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre a superfície, S, parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\cos(2v)\vec{i} + u\,\text{sen}(2v)\vec{j} + 2v\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

em que $\Omega = \left\{(u,v) \ : \ 0 \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le \pi\right\}$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(2v) & \text{sen}(2v) & 0 \\ -u\,\text{sen}(2v) & u\cos(2v) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\text{sen}(2v)\vec{i} - 2\cos(2v)\vec{j} + 2u\vec{k}$$

$$\left\|\vec{N}(u,v)\right\| = 2\sqrt{1 + u^2}$$

$$g\left[\vec{r}(u,v)\right] = \sqrt{x^2(u,v) + y^2(u,v)} =$$

$$= \sqrt{u^2\cos^2(2v) + u^2\text{sen}^2(2v)} = |u| = u \quad (0 \le u \le 1)$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \frac{2\pi}{3}\left[\left(1+u^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Propriedades do integral de superfície

- Tal como acontece com outros processos de integração, também é possível estabelecer uma condição de valor médio para o integral de superfície.

Teorema 1: Sejam $h(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ campos escalares contínuos numa superfície regular, S. Se $g(x,y,z) \ge 0$ em S, então existe um ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S$ tal que:

$$\iint_S h(x,y,z)g(x,y,z)\,dS = h(x_0,y_0,z_0)\iint_S g(x,y,z)\,dS$$

O valor $h(x_0,y_0,z_0)$ chama-se *média ponderada da função* $h(x,y,z)$ *em S através da função (de peso)* $g(x,y,z)$.

- As coordenadas do centro de massa, (x_M, y_M, z_M), de uma superfície, S, com densidade $\lambda(x,y,z)$ são dadas por

$$x_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S x\lambda(x,y,z)\, dS \quad , \quad y_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S y\lambda(x,y,z)\, dS$$

$$z_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S z\lambda(x,y,z)\, dS \tag{3}$$

onde $M(S)$ é a massa da superfície.

- Considerando $\lambda(x,y,z) = 1$ nas expressões (3) e tendo em atenção (1), obtêm-se as coordenadas do centroide, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, da superfície, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x\, dS \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{A(S)} \iint_S y\, dS \quad , \quad \bar{z} = \frac{1}{A(S)} \iint_S z\, dS$$

onde $A(S)$ é a área da superfície.

- Admitindo que a superfície roda em torno de um eixo, L, o *momento de inércia*, I_L, da superfície *em relação ao eixo de rotação* L é

$$I_L = \iint_S \lambda(x,y,z)[R_L(x,y,z)]^2 dS$$

onde $R_L(x,y,z)$ exprime a distância de cada ponto da superfície ao eixo em causa.

Exemplo 3: Determine a posição do centro de massa da superfície *S*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geq 0 \ (a > 0)$$

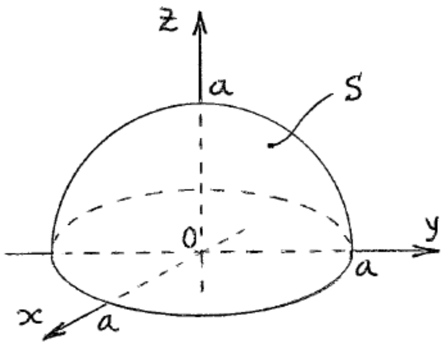
sabendo que a densidade em cada um dos seus pontos, $\lambda(x,y,z)$, é directamente proporcional à distância ao plano *xOy*.

Solução:

A superfície, *S*, é uma casca semi-esférica que pode ser parametrizada, recorrendo a coordenadas esféricas, por

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R$$

em que $R = \{(\theta,\phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$ (exemplo 5, capítulo 6).



A norma do seu produto vectorial fundamental é (exemplo 14, capítulo 6):

$$\left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| = a^2\text{sen}(\phi)$$

O campo escalar que define a densidade pode ser escrito sob a forma

$$\lambda(x,y,z) = kz \ , \ k > 0$$

onde *k* é uma constante de proporcionalidade.

Uma vez que a superfície é, em termos geométricos/materiais, simétrica em relação aos planos *xOz* e *yOz*, então a abcissa e a ordenada do seu centro de massa são nulas, $x_M = y_M = 0$.

Notando que

$$\lambda\left[\vec{r}\,(\theta,\phi)\right] = kz(\theta,\phi) = ka\cos(\phi)$$

a massa da superfície é:

$$M(S) = \iint_S \lambda(x,y,z)\ dS = ka^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^3\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\ d\phi = \pi ka^3\left[\mathrm{sen}^2(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \pi ka^3$$

Por outro lado, dado que

$$(z\lambda)\left[\vec{r}\,(\theta,\phi)\right] = kz^2(\theta,\phi) = ka^2\cos^2(\phi)$$

então:

$$\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = ka^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^4\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi ka^4\left[-\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi ka^4$$

Obtém-se, assim:

$$z_M = \frac{1}{M(S)}\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = \frac{2a}{3}$$

Concluindo, o centro de massa da superfície é o ponto com coordenadas:

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(0,0,\frac{2a}{3}\right)$$

Fluxo de um campo vectorial

- Seja S uma superfície *simples e regular* parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v)\ ,\ (u,v)\in\Omega \tag{4}$$

  e seja $\vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície e que se admite como sendo uma função contínua em S; nestas condições, a superfície S é designada por *superfície orientada*.
  Convém referir que uma superfície deste tipo possui duas faces: a face que tem $\vec{n}$ como versor e a face cujo versor normal é $-\vec{n}$.

- Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial contínuo em S, então o integral de superfície dado por

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS=\iint_S \left[\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\right]\ dS \tag{5}$$

  é designado por *fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ através de S na direcção de $\vec{n}$*.

- O fluxo de um campo vectorial através de uma *superfície orientada* depende da orientação do versor normal à superfície. Se na expressão (5) for considerado, em vez de $\vec{n}$, o versor normal $-\vec{n}$, é fácil concluir que o fluxo sofre uma alteração no seu sinal, isto é:

$$\iint_S \left[\vec{v}\cdot(-\vec{n})\right]\ dS=\iint_S -(\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS=-\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS$$

- Recorrendo a (4) e notando que

$$dS = \left\|\vec{N}(u,v)\right\| \; dudv$$

o integral de fluxo (5) pode ser escrito sob a forma:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n}) \; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{n}(u,v) \; \left\|\vec{N}(u,v)\right\| \; dudv \qquad (6)$$

- O integral de fluxo (6) pode ser reescrito em função do produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, da superfície. Neste caso,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n}) \; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v) \; dudv \qquad (7)$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem o mesmo sentido,

$$\vec{n}(u,v) = +\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|}$$

e, por outro lado,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n}) \; dS = -\iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v) \; dudv \qquad (8)$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem sentidos opostos:

$$\vec{n}(u,v) = -\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|}$$

Exemplo 4: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ \ (a > 0)$$

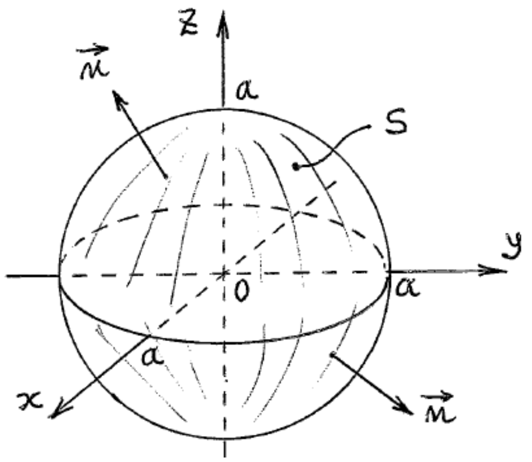
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície esférica orientada, S, pode ser parametrizada, recorrendo a coordenadas esféricas, através da função vectorial

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R$$

em que $R = \{(\theta,\phi) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \pi\}$ (exemplo 5, capítulo 6).



O seu produto vectorial fundamental é (exemplo 10, capítulo 6):

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a^2\mathrm{sen}(\phi)\left(\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + \cos(\phi)\vec{k}\right)$$

Dado que

$$\vec{N}(\theta,\phi)\cdot\vec{k} = -a^2\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) < 0\text{, se } \phi < \pi/2$$

e

$$\vec{N}(\theta,\phi)\cdot\vec{k} > 0\text{, se } \phi > \pi/2$$

então o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(\theta,\phi)$, está orientado no sentido *de fora para dentro* de *S*, ou seja, tem o sentido oposto ao que é considerado para o versor normal à superfície, $\vec{n}(\theta,\phi)$.

Uma vez que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right] = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a^2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right]\cdot\vec{N}(\theta,\phi) = -a^3\mathrm{sen}^3(\phi) - a^4\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\phi)\cos^2(\phi)$$

atendendo a (8), obtém-se para o fluxo:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-a^3\mathrm{sen}^3(\phi) - a^4\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\phi)\cos^2(\phi)\right)d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3(\phi)\, d\phi =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\phi)\, d\phi - 2\pi a^3\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\, d\phi =$$

$$= -2\pi a^3\left[\cos(\phi)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3}\pi a^3\left[\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$$

Exemplo 5: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$$

através da superfície do paraboloide

$$S \ : \ z = 1 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0$$

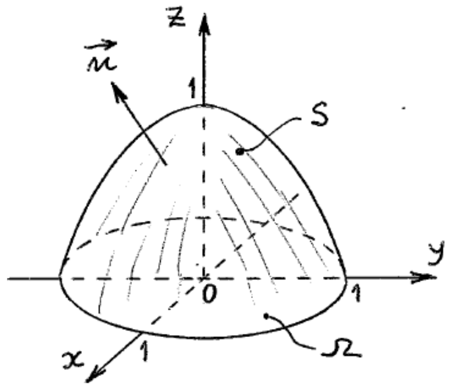
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície parabólica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que $\Omega = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.



O seu produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, pode-se verificar que o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal a S, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Assim, atendendo a (7) e sabendo que

$$\vec{v}\left[\vec{r}\,(x,y)\right] = x\vec{i} + y\vec{j} + 3(1 - x^2 - y^2)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}\,(x,y)\right]\cdot\vec{N}(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 3(1 - x^2 - y^2) = 3 - (x^2 + y^2)$$

obtém-se para o fluxo

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = 3\iint_\Omega dxdy - \iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= 3A(\Omega) - \iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy = 3\pi - \iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy$$

onde $A(\Omega) = \pi$ é a área da região Ω.
Recorrendo a coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta) \ \ , \ \ y = r\ \operatorname{sen}(\theta) \ \ , \ \ dxdy = r\ drd\theta$$

então

$$x^2 + y^2 = r^2\ ,\ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 = \left\{(\theta, r)\ :\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le 1\right\}$$

e, portanto:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = 3\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\ drd\theta = 3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

- O fluxo através de uma *superfície orientada e fechada por secções* (por exemplo, a superfície lateral de um prisma, a superfície de um cilindro fechado nas suas bases e a superfície de um paraboloide fechado na sua base) pode ser determinado somando as contribuições, para o fluxo, de cada uma das secções que limitam essa superfície.

Exemplo 6: Calcule o fluxo do campo vectorial

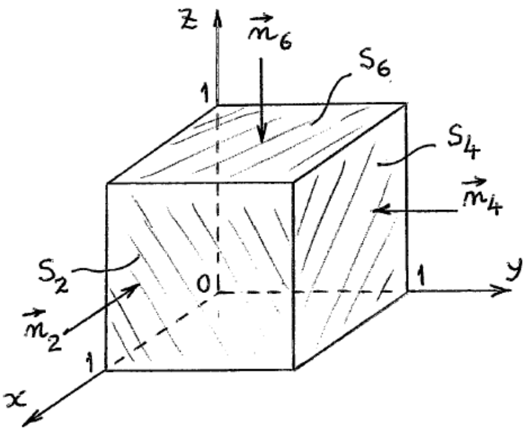
$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície, S, que limita o cubo unitário, T, situado no primeiro octante

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 \text{ , } 0 \le z \le 1\}$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície.

Solução:



A superfície que limita o cubo, S, é uma superfície orientada e fechada por secções e pode ser decomposta em seis secções planas, cujos versores normais, orientados de acordo com o que é exigido no problema, são:

Secção $S_1 = \{(x,y,z) : x = 0 \text{ , } 0 \le y \le 1 \text{ , } 0 \le z \le 1\}$ e $\vec{n}_1(x,y,z) = \vec{i}$

Secção $S_2 = \{(x,y,z) : x = 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 \text{ , } 0 \le z \le 1\}$ e $\vec{n}_2(x,y,z) = -\vec{i}$

Secção $S_3 = \{(x,y,z) : y = 0 \text{ , } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le z \le 1\}$ e $\vec{n}_3(x,y,z) = \vec{j}$

Secção $S_4 = \{(x,y,z) : y = 1 \text{ , } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le z \le 1\}$ e $\vec{n}_4(x,y,z) = -\vec{j}$

Secção $S_5 = \{(x,y,z) : z = 0 \text{ , } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1\}$ e $\vec{n}_5(x,y,z) = \vec{k}$

Secção $S_6 = \{(x,y,z) : z = 1 \text{ , } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1\}$ e $\vec{n}_6(x,y,z) = -\vec{k}$

Em relação à secção S_1 obtém-se:

$$\vec{v}(0,y,z) = 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(0,y,z)\cdot\vec{n}_1(x,y,z) = 0$$

$$\iint_{S_1}(\vec{v}\cdot\vec{n}_1)\ dS = 0$$

Em relação à secção S_2 obtém-se:

$$\vec{v}(1,y,z) = y\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(1,y,z)\cdot\vec{n}_2(x,y,z) = -y$$

$$\iint_{S_2}(\vec{v}\cdot\vec{n}_2)\ dS = \int_0^1\int_0^1(-y)dydz = -\frac{1}{2}$$

Em relação à secção S_3 obtém-se:

$$\vec{v}(x,0,z) = \vec{0} \quad , \quad \vec{v}(x,0,z)\cdot\vec{n}_3(x,y,z) = 0$$

$$\iint_{S_3}(\vec{v}\cdot\vec{n}_3)\ dS = 0$$

Em relação à secção S_4 obtém-se:

$$\vec{v}(x,1,z) = x\vec{i} + 2z^2\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(x,1,z)\cdot\vec{n}_4(x,y,z) = -2z^2$$

$$\iint_{S_4}(\vec{v}\cdot\vec{n}_4)\ dS = \int_0^1\int_0^1(-2z^2)dxdz = -\frac{2}{3}$$

Em relação à secção S_5 obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,0) = xy\vec{i} \quad , \quad \vec{v}(x,y,0)\cdot\vec{n}_5(x,y,z) = 0$$

$$\iint_{S_5}(\vec{v}\cdot\vec{n}_5)\ dS = 0$$

Em relação à secção S_6 obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,1) = xy\vec{i} + 2y\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(x,y,1) \cdot \vec{n}_6(x,y,z) = -y$$

$$\iint_{S_6} (\vec{v} \cdot \vec{n}_6)\, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y) dx dy = -\frac{1}{2}$$

Então, o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ através da superfície lateral do cubo, S, no sentido *de fora para dentro* da superfície, é:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} (\vec{v} \cdot \vec{n}_i)\, dS = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{3}$$

- O conceito de fluxo é aplicado quando se estudam, por exemplo, problemas no âmbito da mecânica dos fluidos. Assim, considere-se um fluido em movimento no espaço, tal que o vector velocidade, em cada ponto (x,y,z), é definido pelo campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$; para simplificar a análise, admita-se que $\vec{v}(x,y,z)$ não varia com o tempo (escoamento em *regime estacionário*).

  Fixe-se uma região do espaço, S, representada por uma superfície *orientada*, *simples* e *regular* e seja $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o *versor normal* à superfície.

  O fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ através de S, definido em (5), representa, em termos relativos, o *caudal* (volume por unidade de tempo) de fluido que atravessa S, a partir da face com *versor normal* $-\vec{n}$ para a face com *versor normal* $\vec{n}$, sendo de realçar o seguinte:

  i) O fluxo é *positivo*, se $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$; neste caso, a transferência de matéria dá-se no sentido admitido para a orientação de S;

  ii) O fluxo é *negativo*, se $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$; neste caso, a transferência de matéria dá-se no sentido oposto àquele que define a orientação de S.

Integral de fluxo: notação diferencial

- A expressão do integral de fluxo apresentada em (5) pode ser reescrita, tal como ocorreu com o integral de linha, usando uma *notação diferencial*.
  Assim, considere-se o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

e a superfície *orientada*, *simples* e *regular*, *S*, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável:

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k} \quad , \quad (u,v)\in\Omega$$

Seja o produto vectorial fundamental da superfície, dado por:

$$\vec{N}(u,v)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u\\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\partial y/\partial u & \partial z/\partial u\\ \partial y/\partial v & \partial z/\partial v\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial z/\partial u\\ \partial x/\partial v & \partial z/\partial v\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial y/\partial u\\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}$$

Notando que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v)=$$

$$=P\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

e admitindo que $\vec{N}(u,v)$ e o versor normal, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados no mesmo sentido, resulta:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v)dudv =$$

$$= \iint_\Omega P\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ dudv + \iint_\Omega Q\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\ dudv +$$

$$+\iint_\Omega R\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ dudv$$

Designando

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv = dy\wedge dz$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv = dz\wedge dx$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = dx\wedge dy$$

obtém-se, em alternativa,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_S P(x,y,z)\ dy\wedge dz + \iint_S Q(x,y,z)\ dz\wedge dx +$$

$$+\iint_S R(x,y,z)\ dx\wedge dy$$

ou ainda, sob um modo mais compacto:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$