



## **Departamento de Engenharia Física**

**Sumários de Física 1, 2020**

**Jaime E. Villate**

Porto, 2020

Copyright © 2020, Jaime E. Villate  
E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>  
ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305,  
USA.

# Conteúdo

<b>1 Sumários</b>	<b>1</b>
1.1 Cinemática . . . . .	2
1.2 Cinemática vetorial . . . . .	13
1.3 Movimento curvilíneo . . . . .	21
1.4 Mecânica vetorial . . . . .	30
1.5 Dinâmica dos corpos rígidos . . . . .	37
1.6 Trabalho e energia . . . . .	51
1.7 Sistemas dinâmicos . . . . .	61
1.8 Mecânica lagrangiana . . . . .	73
1.9 Sistemas lineares . . . . .	88
1.10 Sistemas não lineares . . . . .	102
1.11 Ciclos limite e dinâmica populacional . . . . .	112
<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>



# **Capítulo 1**

## **Sumários**

**Disciplina:** Física 1.

**Curso:** Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

**Ano académico:** 2019–2020, segundo semestre.

**Regente:** Jaime E. Villate.

**Docentes:** Joana Ascenso, Mercedes Filho, Luis Miguel Martelo e Jaime E. Villate.

**Número de alunos:** 222.

**Método de avaliação:** Exame final (100%).

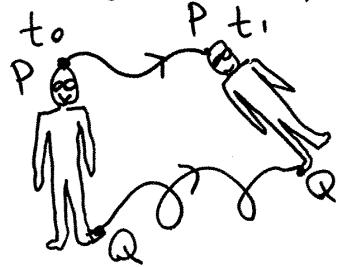
Aula 1. 2020-02-10

## CINEMÁTICA

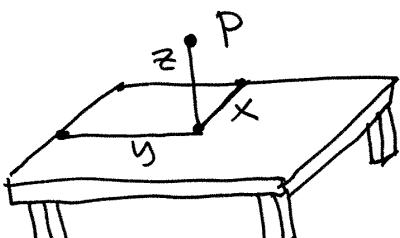
Descrição geométrica do movimento, sem considerar as suas causas.

Movimento. Variação da posição dum objeto em diferentes instantes.

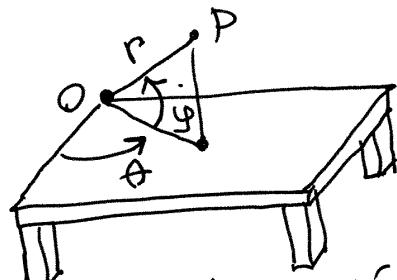
A posição do objeto a cada instante é um conjunto de pontos. Cada um desses pontos segue uma trajetória (curva contínua) em função do tempo  $t$ .



Para determinar a posição dum ponto, num instante, há que medir 3 grandezas, em relação a um referencial. Se o referencial for uma mesa, duas possibilidades são:



coordenadas cartesianas  
( $x, y, z$ )



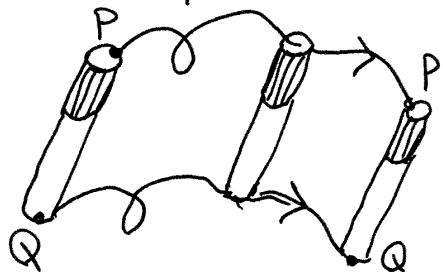
coordenadas esféricicas  
( $r, \theta, \varphi$ )

A posição ( $(x, y, z)$  ou  $(r, \theta, \varphi)$ ) é relativa a o referencial mesa. O movimento, ou repouso, de P será relativo a esse referencial (movimento se  $(x, y, z)$  mudam).

Nos corpos rígidos, as trajetórias dos pontos do objeto deverão ser tais que a distância entre dois pontos do corpo permaneça constante a cada instante  $t$ .

Alguns casos simples do movimento dum corpo rígido:

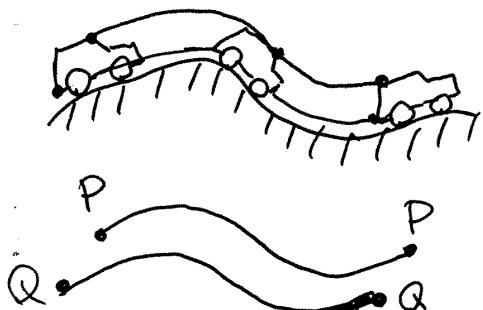
① translação sem rotação,



A trajetória de todos os pontos no objeto é a mesma curva.

Basta conhecer o movimento de um desses pontos

② movimento ao longo de uma calha ou estrada, mantendo o contacto com a superfície.

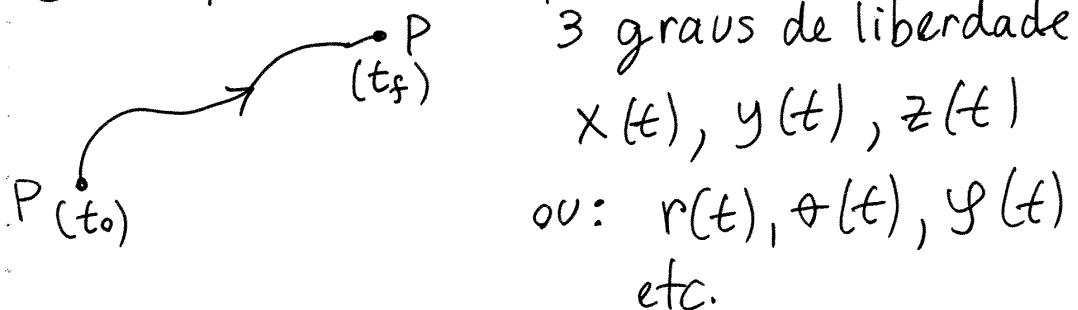


Todos os pontos seguem a mesma trajetória, igual à curva na superfície, embora alguns pontos percorram diferentes partes dessa curva.

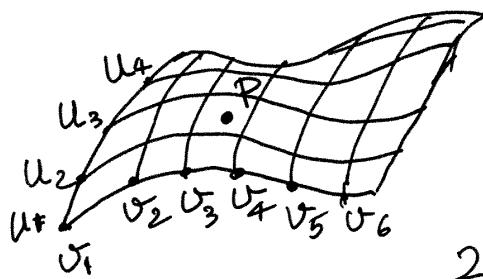
## GRAUS DE LIBERDADE

- Número mínimo de variáveis necessárias para determinar a posição do objeto. Cada uma dessas variáveis será função contínua do tempo  $t$ .

① Um ponto P no espaço.



② Ponto P que só pode andar sobre uma superfície

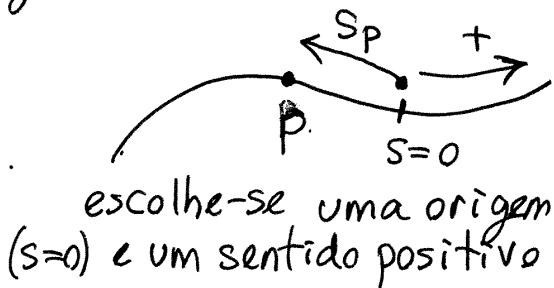


A superfície pode ser definida por dois parâmetros  $u$  e  $v$  (coordenadas curvilíneas sobre a superfície)

2 graus de liberdade:  $u(t), v(t)$

③ Movimento dum ponto P com apenas um grau de liberdade. Se a trajetória do ponto é conhecida, basta um grau de liberdade:

$s(t)$  = posição ao longo da trajetória, em t.

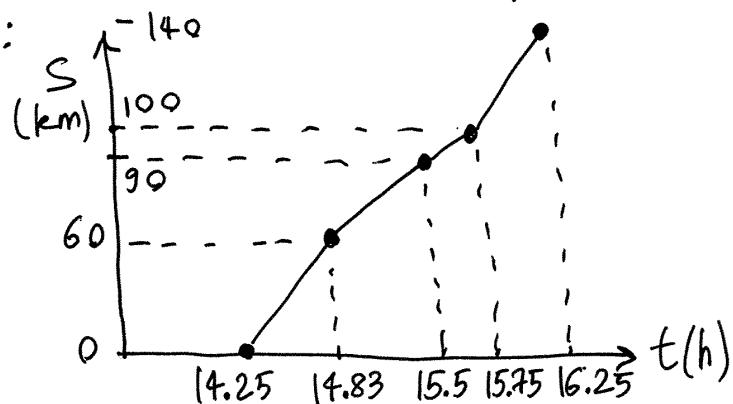


### Exemplo 1.1

O movimento de um automóvel numa autoestrada foi determinado observando a posição (quilômetro da autoestrada, em 5 instantes diferentes:

tempo (horas)	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
$s$ (km)	0	60	90	100	140
	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$

Gráfico de  $s$  vs  $t$ :



## VELOCIDADE MÉDIA

No intervalo  $\Delta t_{ij} = t_j - t_i$  ( $t_j > t_i$ ), define-se a velocidade média:

$$\bar{v}_{ij} = \frac{s_j - s_i}{t_j - t_i} = \frac{\Delta s_{ij}}{\Delta t_{ij}}$$

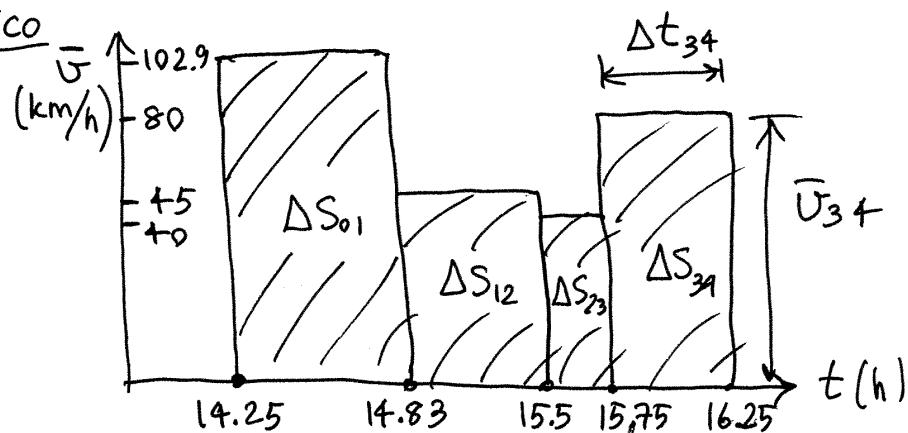
$\Delta s_{ij} = s_j - s_i$  é o deslocamento, a longo da trajetória, no intervalo  $[t_i, t_j]$ .

$\bar{v}_{ij}$  é o deslocamento por unidade de tempo.

No exemplo anterior,

$t$ (h)	$t_0 = 14.25$	$t_1 = 14.83$	$t_2 = 15.5$	$t_3 = 15.75$	$t_4 = 16.25$
$s$ (km)	$s_0 = 0$	$s_1 = 60$	$s_2 = 90$	$s_3 = 100$	$s_4 = 140$
$\bar{v}_{ij} (\text{km/h})$	$\bar{v}_{01} = 102.9$	$\bar{v}_{12} = 45$	$\bar{v}_{23} = 40$	$\bar{v}_{34} = 80$	

Gráfico

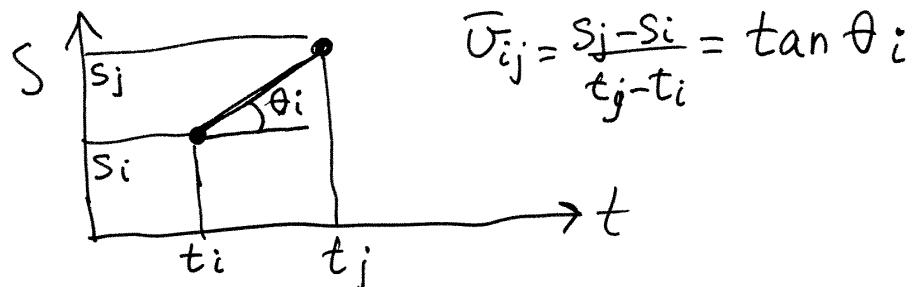


A área de cada retângulo é o deslocamento nesse intervalo:  $\Delta s_{ij} = \bar{v}_{ij} \Delta t_{ij}$

E o deslocamento total, desde o instante  $t_0$  até o instante  $t_4$ , é a soma dos 4 retângulos:

$$S_4 - S_0 = \sum_{i=0}^3 \Delta S_{i,i+1} = \sum_{i=0}^3 \bar{v}_{i,i+1} \Delta t_{i,i+1}$$

E no gráfico de  $s$  vs  $t$ , observe-se que  $\bar{v}_{ij}$  é o declive do segmento entre  $s_i$  e  $s_j$



Os gráficos do exemplo 1.1 são apenas uma aproximação. Os verdadeiros gráficos seriam obtidos se soubessemos  $s$  em qualquer instante  $t$ . Para aumentar a precisão, usamos muitos mais intervalos entre  $t_0$  e  $t_f$ , de forma que todos esses intervalos sejam  $\Delta t_{ij} \approx 0$ .

## VELOCIDADE INSTANTÂNEA

No instante  $t_i$

$$\text{velocidade} = v(t_i) = \lim_{\Delta t_{ij} \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{ij}}{\Delta t_{ij}} \quad \text{escreve-se } \left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_i}$$

ou simplesmente:

$$v(t_i) = \dot{s}(t_i)$$

$\dot{s}$  = derivada de  $s$  em ordem a  $t$ ,

$$\dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

O deslocamento desde a posição inicial ( $s_0$ ) até a posição final ( $s_f$ ) é:

$$s_f - s_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \bar{v}_{i,i+1} \Delta t_{i,i+1}$$

(com  $\Delta t_{ij} \rightarrow 0$ )

Escrive-se simplesmente:

$$s_f - s_0 = \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt$$

E chama-se integral da velocidade instantânea, entre  $t_0$  e  $t_f$  (área sob o gráfico de  $v(t)$ ).

Exemplo 2. Se soubermos que em qualquer instante  $t$  a posição é:

$$s = 3t^2$$

então:  $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6t\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 6t + 3\Delta t = 6t$$

Exemplo 3. Sabemos que a velocidade é dada pela expressão:  $v(t) = 3t^2$ . Para determinar o integral  $\int_{t_0}^{t_f} v dt$ , que será o deslocamento

$s_f - s_0$ , tentamos descobrir a primitiva de  $3t^2$ , ou seja uma função que derivada seja igual a  $3t^2$ , neste caso, como a derivada de  $t^3$  dá  $3t^2$ , podemos dizer:

$$s(t) = t^3$$

$$\int_{t_0}^{t_f} 3t^2 dt = s_f - s_0 = t_f^3 - t_0^3$$

Aula 2.2020-02-12

Posição na trajetória:  $s(t) \rightarrow$  função contínua de  $t$

Velocidade:  $v(t) = \dot{s}(t) \rightarrow$  derivada de  $s$  em ordem  $a_t$   
 ↑ também função contínua de  $t$

## ACELERAÇÃO TANGENCIAL

$$a_t = \ddot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

derivada de  $v$ , em ordem  $a_t$ ,  
 segunda derivada de  $s$ , em  
 ordem  $a_t$

valor médio de  $a_t$  no  
 intervalo  $\Delta t_{ij} = t_j - t_i$ :

$$\bar{a}_{tij} = \frac{v(t_j) - v(t_i)}{t_j - t_i}$$

$n$  intervalos entre  $t_0$  e  $t_f$ :

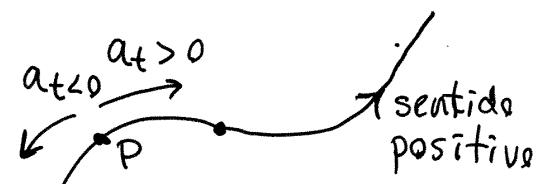
$$\Rightarrow v(t_f) - v(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_{tij} \Delta t_{ij}$$

= soma das áreas sob o gráfico de  $\bar{a}_t$

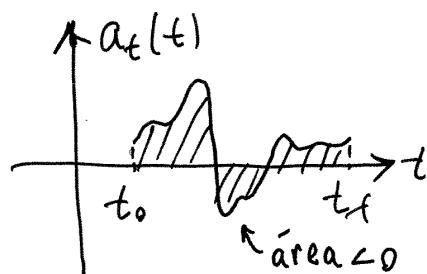
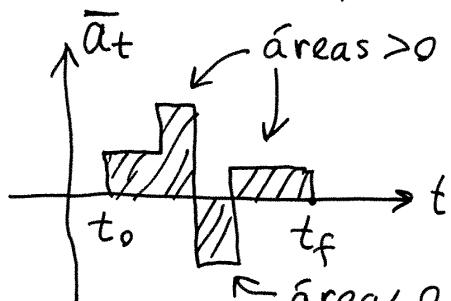
limite  $\Delta t_{ij} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ( $\bar{a}_t \rightarrow a_t$ )

$$v(t_f) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} a_t(t) dt$$

área sob a curva  $a_t(t)$



- se  $a_t > 0$   
 P anda mais devagar, se  $v > 0$   
 P abranda se  $v < 0$   
 P começa a andar no sentido+, se  $v = 0$
- (contrário se  $a_t < 0$ )



$$t \begin{array}{c} \nearrow s(t) \\ \swarrow v(t) \\ \searrow a_t(t) \end{array} \Rightarrow a_t \begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \\ \longleftrightarrow v \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \\ \longleftrightarrow s \end{array}$$

(estão relacionadas)  
por funções implícitas

$$\Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

Três equações cinemáticas

$v = \dot{s}$	$a_t = \ddot{v}$	$a_t = v \frac{dv}{ds}$	equações diferenciais
---------------	------------------	-------------------------	--------------------------

as relações inversas (equações integrais) podem obter-se assim: exemplo da inversa de  $v = \dot{s}$ :

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v dt = ds \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} v dt = \int_{s_0}^{s_f} ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} v dt = s_f - s_0 \Rightarrow \boxed{s_f - s_0 = \int_{t_0}^{t_f} v dt}$$

inversa de  $a_t = \ddot{v} \Rightarrow$

$$\boxed{v_f - v_0 = \int_{t_0}^{t_f} a_t dt}$$

inversa de  $a_t = v \frac{dv}{ds} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{v_f^2 - v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s_f} a_t ds}$$

Para poder calcular algum desses 3 integrais, há que saber a expressão de  $v$  em função de  $t$ , ou de  $a_t$  em função de  $t$  ou  $a_t$  em função de  $s$ .

Quando é conhecida alguma outra relação entre  $t, s, v, a_t$ , é útil o método seguinte

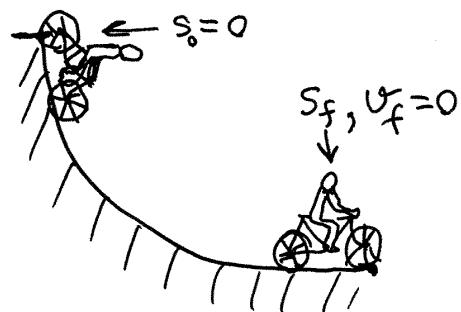
## MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Cada equação cinemática tem 3 variáveis das quatro ( $t, s, v, a$ )

Dada uma expressão de uma dessas variáveis em função de outra, pode ser substituída na equação com essas variáveis, ficando apenas 2 variáveis

- agrupa-se a cada lado da equação o que depende de cada variável.
- integra-se os dois lados, colocando limites para a respetiva variável de integração.

### Exemplo.



O ciclista trava, de forma a produzir velocidade que diminui assim:  
 $(S.I) \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}$

até parar em  $s_f$ .

Determine o tempo que demora até parar.

### Resolução.

Condições iniciais:  $s_0 = 0, v_0 = 5 \quad (v(0) = \frac{1}{2} \sqrt{100})$   
 $t_0 = 0$  (escolha arbitrária)

Condições finais:  $s_f = 10 \quad (0 = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}), v_f = 0$   
 $t_f = ?$

dados: expressão que relaciona  $v$  com  $s$ .

Para encontrar  $t_f$ , usa-se a equação cinemática que inclui as 3 variáveis  $v, s$  e  $t$ :

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{100-s^2} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_f} \frac{1}{2} dt = \int_0^{10} \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}}$$

Esta equação, escrita no Maxima, é:

$$(\%i1) \quad \text{integrate}(1/2, t, 0, t_f) = \text{integrate}(1/sqrt(100-s^2), s, 0, 10);$$

$$(\%o1) \quad \frac{t_f}{2} = \frac{\%pi}{2} \quad (\text{resultado dado por Maxima \%pi é o número } \pi)$$

$$(\%i2) \quad \text{solve}(\%o); \quad (\text{resolver a equação anterior})$$

$$(\%o2) \quad [t_f = \%pi] \quad (\text{resultado} \rightarrow \text{lista com apenas uma solução})$$

Para mostrar algumas casas decimais de  $\%pi$ :

$$(\%i3) \quad \text{float}(\%);$$

$$(\%o3) \quad [t_f = 3.141592653589793] \quad (\begin{matrix} \text{tempo em} \\ \text{segundos} \end{matrix})$$

Comentário: Observe-se que a equação:

$$\int_0^{t_f} \frac{1}{2} dt = \int_0^{10} \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}}$$

tem apenas uma variável ( $t_f$ ).  $t$  e  $s$  são variáveis "locais" nos integrais (podiam ter qualquer nome).

A mesma equação pode usar-se até um tempo  $t$ , qualquer, onde a posição será  $s$ :

$$\int_0^t \frac{1}{2} dt = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}} \quad (\begin{matrix} \text{expressão com 2} \\ \text{variáveis, } t \text{ e } s. \end{matrix})$$

(%i4)  $\text{integrate}(y_2, t, 0, t) = \text{integrate}(1/\sqrt(100 - s^2), s, 0, s);$   
 Is  $s$  positive, negative or zero?  
 positive; (a nossa resposta)

Is  $s-10$  positive, negative or zero?  
 negative; (porque interessa-nos  $s$  entre 0 e 10)

(%o4)  $\frac{t}{2} = \arcsin\left(\frac{s}{10}\right)$  (resultado com 2 variáveis)

(%i5)  $\text{solve}(\%, s);$  (há que dizer qual das duas variáveis podem evidenciar)

(%o5)  $[s = 10 \sin\left(\frac{t}{2}\right)]$  (função  $s(t) = 10 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ )

A velocidade  $v(t)$ , em qualquer  $t$  é então:

(%i6)  $\text{diff}(10 * \sin(t/2), t);$  (derivada em ordem a  $t$ )

(%o6)  $5 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  ( $v(t) = 5 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ )

Aceleração tangencial:

(%i7)  $\text{diff}(\%, t);$

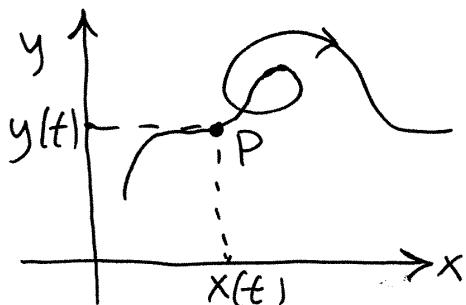
(%o7)  $- \frac{5 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2}$  ( $a_t(t) = -\frac{5}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ )

Aula 3. 2020-2-17

## CINEMÁTICA VETORIAL

Movimento de um ponto, com 2 ou 3 graus de liberdade.

Exemplo: movimento num plano.



$x(t), y(t)$ : projeções da posição nos eixos cartesianos

$$\dot{x} = v_x, \ddot{x} = a_x, a_x = v \frac{dv_x}{dx}$$

$$\dot{y} = v_y, \ddot{y} = a_y, a_y = v \frac{dv_y}{dy}$$

vetor posição:

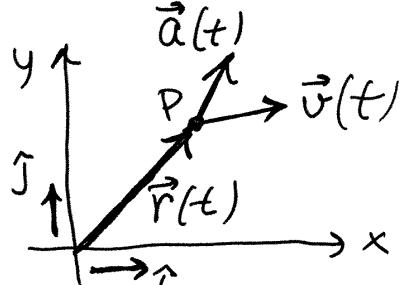
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

vetor velocidade:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

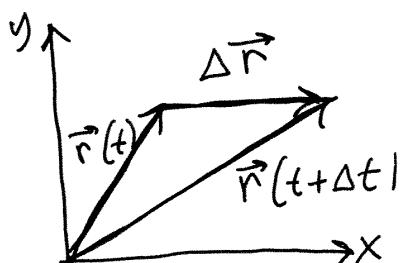
vetor aceleração

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}$$



$\hat{i}, \hat{j}$  = versores cartesianos

Vetor deslocamento. Num intervalo  $[t, t+\Delta t]$ :



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

velocidade média:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

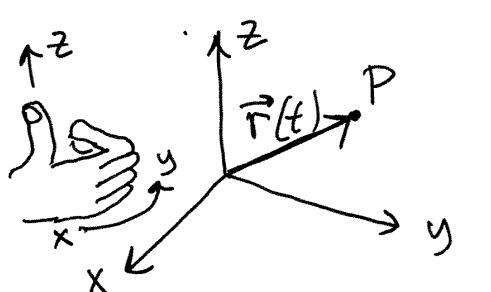
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

Equações inversas:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^t \vec{v} dt = \int_{t_0}^t v_x dt \hat{i} + \int_{t_0}^t v_y dt \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{a} dt = \int_{t_0}^t a_x dt \hat{i} + \int_{t_0}^t a_y dt \hat{j}$$

3 dimensões.



(regra da mão direita)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

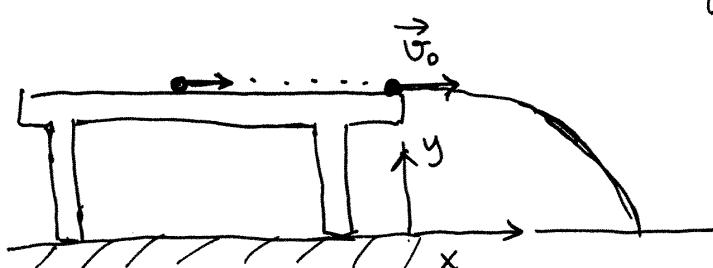
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

## ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

durante a queda:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{2} t^2$$



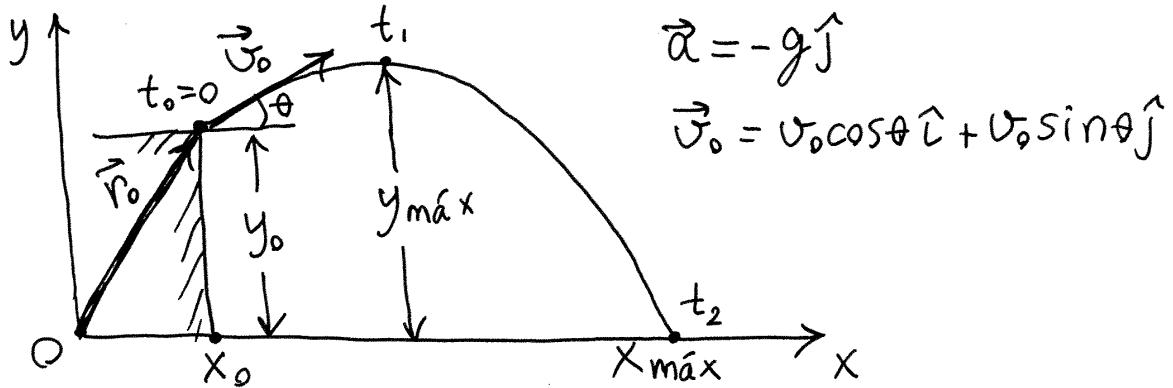
$$\Rightarrow v_x = \dot{x} = v_0, \quad a_x = 0 \quad (\text{movimento uniforme})$$

$$v_y = -gt, \quad a_y = -g \quad (\text{movimento uniformemente acelerado})$$

$$g \approx 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{aceleração da gravidade})$$

se  $y_0$  for elevada (vários metros) a resistência do ar faz diminuir  $|a_y|$ .

## Lançamento de projéteis.



$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 - \int_0^t g \hat{j} dt = \vec{V}_0 - gt \hat{j} = V_0 \cos \theta \hat{i} + (V_0 \sin \theta - gt) \hat{j}$$

em \$t\_1\$, \$\vec{v}\$ é horizontal \$\Rightarrow V\_0 \sin \theta - g t\_1 = 0\$

$$t_1 = \frac{V_0 \sin \theta}{g}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{V}_0 - gt \hat{j}) dt = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t - \frac{g}{2} t^2 \hat{j} \\ &= (x_0 + V_0 \cos(\theta)t) \hat{i} + (y_0 + V_0 \sin(\theta)t - \frac{g}{2} t^2) \hat{j}\end{aligned}$$

$$y(t_1) = y_{\max} = y_0 + \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{g}{2} \left( \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right) = y_0 - \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g}$$

$$y(t_2) = 0 = y_0 - V_0 \sin(\theta)t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 \quad (t_2 = \text{raiz positiva da equação})$$

$$x(t_2) = x_{\max} = x_0 + V_0 t_2 \cos \theta$$

Equação da trajetória:

$$t = \frac{x - x_0}{V_0 \cos \theta} \Rightarrow y = y_0 + \tan \theta (x - x_0) - \frac{g(x - x_0)^2}{2 V_0 \cos \theta} \quad (\text{parábola})$$

**Exemplo 2.2.**  $\vec{v} = (5 - t^2 e^{-t/5})\hat{i} + (3 - e^{-t/12})\hat{j}$  (S.I.)

$$\text{e em } t=0, \vec{r}_0 = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

Encontre as expressões de  $\vec{r}$  e  $\vec{\alpha}$  em função de  $t$ , os valores de  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{\alpha}$  em  $t=15$  s, e os seus limites em  $t \rightarrow \infty$ .

Resolução: No Maxima os vetores podem ser representados por listas:

$$(\%i1) v: [5-t^2*exp(-t/5), 3-exp(-t/12)]$$

$$(\%i2) a: diff(v,t);$$

$$(\%o2) \left[ \frac{t^2 \% e^{-t/5}}{5} - 2t \% e^{-t/5}, \frac{\% e^{-t/12}}{12} \right] \quad (\% e \text{ é o número de Euler})$$

$$(\%i3) assume(t > 0)$$

$$(\%i4) r:[2,5] + integrate(v,t,0,t);$$

$$[5t - 250 + (5t^2 + 50t + 250)\% e^{-t/5} + 2, 3t + 12\% e^{-t/12} - 7]$$

$$(\%i5) float(subst(t=15,[r,v,a]));$$

$$\underbrace{[-67.2, 41.44]}_{\vec{r}(15)}, \underbrace{[-6.202, 2.713]}_{\vec{v}(15)}, \underbrace{[0.7468, 0.02388]}_{\vec{\alpha}(15)}$$

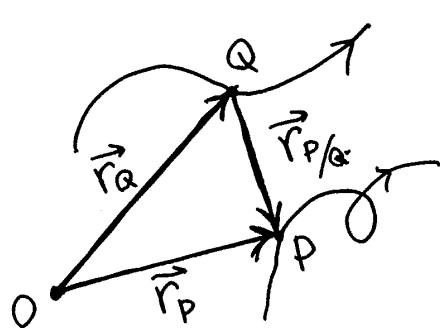
$$(\%i6) limit([r,v,a], t, inf);$$

$$[[inf, inf], [5, 3], [0, 0]];$$

$$\underbrace{\vec{r}(\infty)}_{\vec{r}(\infty)}, \underbrace{\vec{v}(\infty)}_{\vec{v}(\infty)}, \underbrace{\vec{\alpha}(\infty)}_{\vec{\alpha}(\infty)}$$

Aula 4. 2020-02-19

## MOVIMENTO RELATIVO



$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \text{velocidade de } P, \text{ relativa a } O.$$

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} = \text{velocidade de } Q, \text{ relativa a } O.$$

$$\vec{r}_{P/Q} = \vec{r}_p - \vec{r}_Q = \text{posição de } P, \text{ relativa a } Q.$$

$$\vec{v}_{P/Q} = \frac{d\vec{r}_{P/Q}}{dt} = \text{velocidade de } P, \text{ relativa a } Q.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_p - \vec{v}_Q}$$

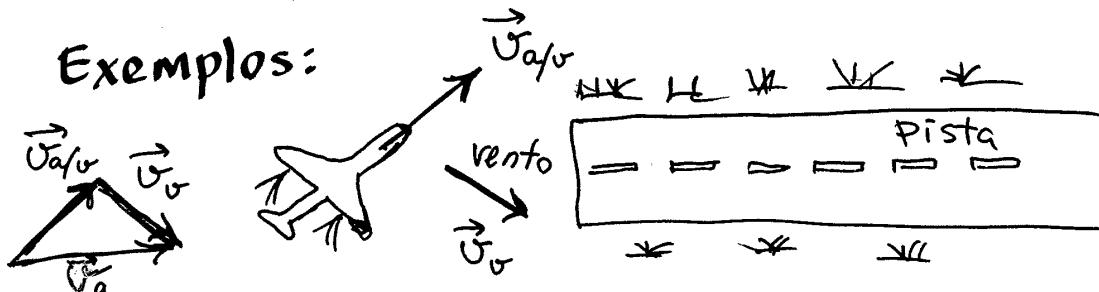
geral:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{P/Q} + \vec{v}_{Q/R} + \vec{v}_{R/S} + \dots$$

$$\vec{a}_{P/Q} = \frac{d\vec{v}_{P/Q}}{dt} = \text{aceleração de } P, \text{ relativa a } Q.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P/Q} = \vec{a}_p - \vec{a}_Q}$$

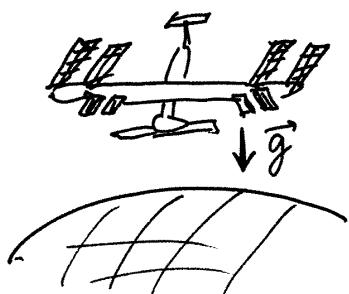
Exemplos:



$$\vec{v}_{a/u} = \text{velocidade do avião em relação ao ar}$$

$$\vec{v}_u = \text{velocidade do ar (vento; em relação à terra)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_{a/u} + \vec{v}_u = \text{velocidade do avião em relação à terra.}$$



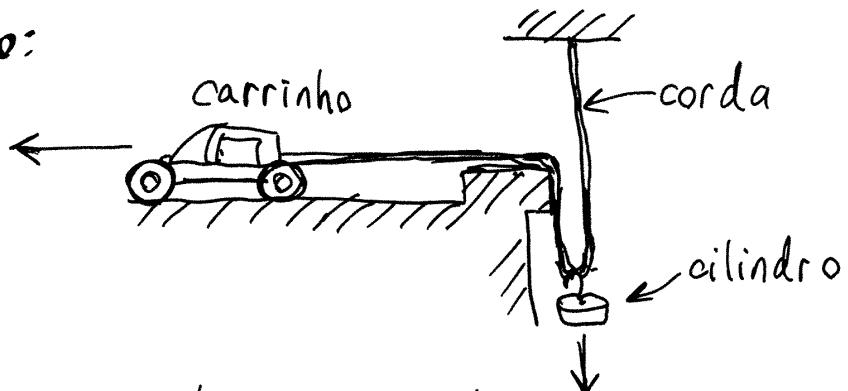
estação espacial.

408 km sobre a superfície da Terra, onde  $g = 8.66 \frac{m}{s^2}$   
(88% do seu valor na superfície).

Como a estação (e) e os astronautas (a) estão em queda livre,  $\vec{a}_e = -8.66\hat{j}$   $\vec{a}_a = -8.66\hat{j}$   
 $\Rightarrow \vec{a}_{a/e} = 0$  (os astronautas flutuam no interior da estação.)

## MOVIMENTOS DEPENDENTES

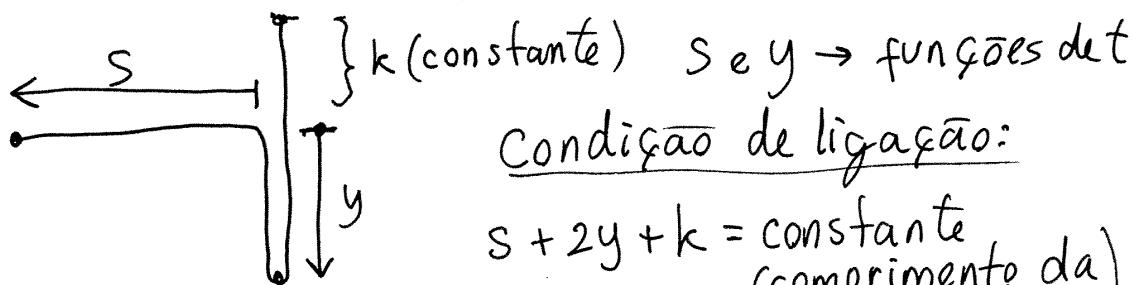
Exemplo:



Carrinho: trajetória horizontal (um grau de liberdade = s)

Cilindro: trajetória vertical (um grau de liberdade = y)

S e y estão relacionados porque o comprimento da corda permanece constante



$$s + 2y + k = \text{constante}$$

(comprimento da corda)

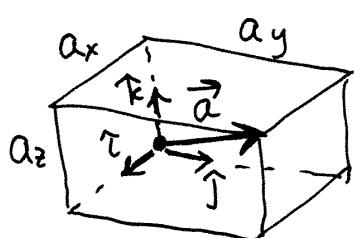
$\Rightarrow$  um único grau de liberdade (s ou y)

$$\Rightarrow \dot{s} + 2\dot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{carrinho} = -2v_{cilindro}}$$

se o carrinho anda para a esquerda ( $v_{carr.} > 0$ ), o cilindro anda para cima ( $v_{cil.} < 0$ ), e ao contrário.

Derivando novamente em ordem a  $t$ :  $\boxed{a_{carr.} = -2a_{cil.}}$   
 3 equações:  $v_{carr.} = \dot{s}$ ,  $a_{carr.} = \ddot{s}$ ,  $a_{carr.} = v_c \frac{dv_{carr.}}{ds}$

## VETORES



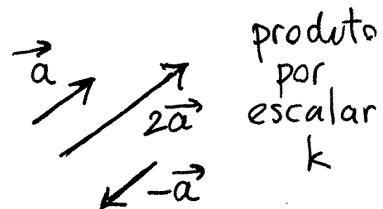
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ : deslocamentos unitários ao longo dos 3 eixos cartesianos

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k}$$

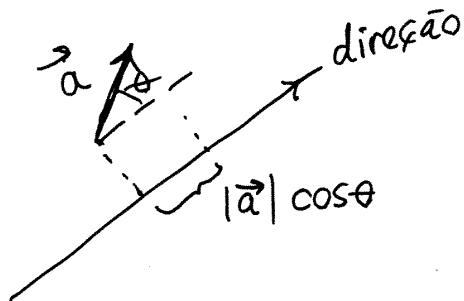
$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ : componentes cartesianas (positivas ou negativas)

$$|\vec{\alpha}| = \text{módulo de } \vec{\alpha} = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2} \quad (\text{raiz positiva})$$

$k\vec{\alpha}$  = vetor com módulo  $|k|$  vezes o módulo de  $\vec{\alpha}$ , na direção de  $\vec{\alpha}$ , no mesmo sentido, se  $k > 0$ , ou em sentido oposto se  $k < 0$



## Projeção dum vetor numa direção



$\theta$  = ângulo entre  $\vec{\alpha}$  e a direção.

$$|\vec{\alpha}| \cos \theta = \text{projeção}$$

$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \text{projeções nas direções } x, y \text{ e } z$ .

$a_t = \text{projeção da aceleração } \vec{\alpha} \text{ na direção da trajetória}$

## Produto escalar.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{projeção de } \vec{a} \text{ na direção de } \vec{b} \text{ vezes } |\vec{b}| \\ = |\vec{a}| \cos \theta \cdot |\vec{b}| \quad \theta = \text{ângulo entre } \vec{a} \text{ e } \vec{b}$$

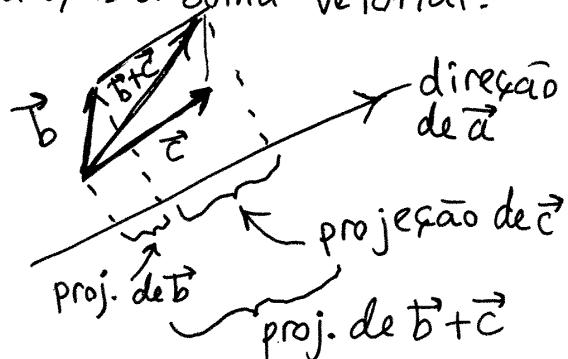
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \text{proj. de } \vec{b} \text{ na direção de } \vec{a} \text{ vezes } |\vec{a}|$$

também é distributivo em relação à soma vetorial:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

e em relação ao produto por escalar:

$$\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$



Produtos entre versores cartesianos:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

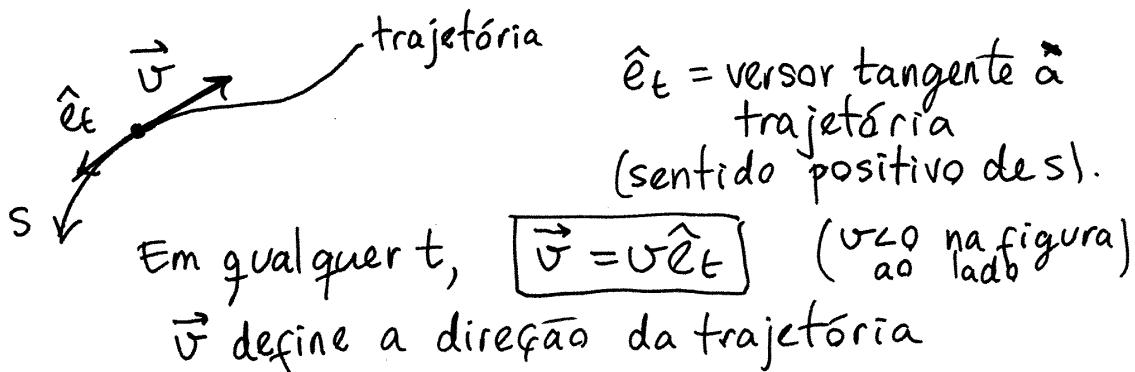
No Maxima, usa-se um ponto para o produto escalar entre vetores e \* para produto entre escalar e vetor

Exemplo:  $k = -2$ ,  $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 2\hat{i} - 5\hat{k}$

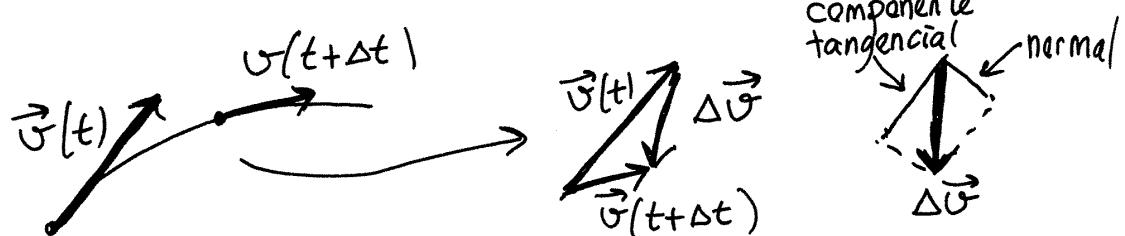
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} \rightarrow -2 * [3, -1, 4] \cdot [2, 0, -5];$$

Aula 5.2020-02-26

## MOVIMENTO CURVILÍNEO



$$\text{rapidez} = |\vec{v}| = |v| = |\dot{s}|$$



$\Delta \vec{v}$ : { componente tangencial  $\rightarrow$  modifica a rapidez  
componente normal  $\rightarrow$  altera a direção de  $\vec{v}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{e}_t)}{dt} = \dot{v}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

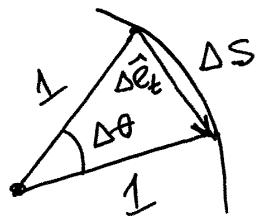
↑ componente tangencial      ↑ componente normal

### DERIVADA DO VERSOR TANGENCIAL

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t + \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0 \Rightarrow \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

$\frac{d\hat{e}_t}{dt}$  é um vetor perpendicular à direção tangencial



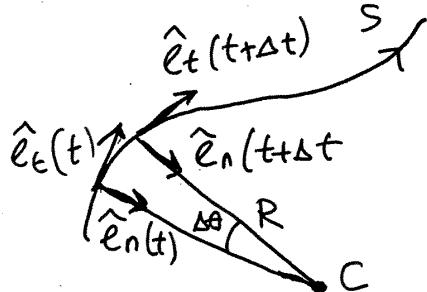


$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \hat{e}_t| = \Delta s = \Delta \theta \text{ (em radianos)}$$

direção de  $\Delta \hat{e}_t$ , se  $\Delta t \rightarrow 0 \rightarrow$  perpendicular a  $\hat{e}_t(t)$

$$\Rightarrow \frac{d \hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \dot{\theta} \hat{e}_n$$

$\hat{e}_n$  = versor normal. Perpendicular a  $\hat{e}_t$ , no sentido em que a trajetória se curva.



trajetória entre  $t$  e  $t + \Delta t$   
 ≈ arco de círculo de raio  $R$ ,  
 com ângulo  $\Delta \theta$  (o mesmo  
 ângulo que  $\hat{e}_t$  roda)

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$$

$$\frac{d \hat{e}_t}{dt} = \frac{v}{R} \hat{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$\vec{a}_t = a_t \hat{e}_t = \dot{v} \hat{e}_t \quad \text{aceleração tangencial}$$

$$\vec{a}_n = v \frac{d \hat{e}_t}{dt} = \frac{v^2}{R} \hat{e}_n \quad \text{aceleração normal}$$

$$a_t = \ddot{v} = \ddot{s} \quad a_n = \frac{v^2}{R} \quad (R = \text{raio de curvatura local})$$

**Exemplo 3.1.** O movimento dum ponto é definido por:

$$\vec{r}(t) = 5t \hat{i} + \frac{3t^2}{2} \hat{j} + 2(1-t^2) \hat{k} \text{ (SI)}$$

Determine: (a)  $v(t)$ , (b)  $R(t)$ , (c)  $\Delta s$  entre  $t=0$  e  $t=1$

Resolução: a)  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{i} + 3t\hat{j} - 4t\hat{k}$

$$|v| = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{25 + 9t^2 + 16t^2} = 5\sqrt{t^2 + 1}$$

arbitrando  $s > 0$  no sentido de  $\vec{v}$ :

$$v(t) = 5\sqrt{t^2 + 1}$$

b)  $a_t = \text{projeção de } \vec{a} \text{ na direção de } \hat{e}_t = \vec{a} \cdot \hat{e}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{5\hat{i} + 3t\hat{j} - 4t\hat{k}}{5\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$a_t = \frac{9t + 16t}{5\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{5t}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad \begin{array}{l} (\text{também pode ser obtida}) \\ (\text{derivando } v: a_t = \frac{dv}{dt}) \end{array}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{9 + 16 - \frac{25t^2}{t^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(t^2 + 1)}{\left(\frac{5}{\sqrt{t^2 + 1}}\right)} = 5(t^2 + 1)^{3/2}$$

c)  $v = \dot{s} \Rightarrow 5\sqrt{t^2 + 1} = \frac{ds}{dt}$  (EDO, variáveis separáveis)

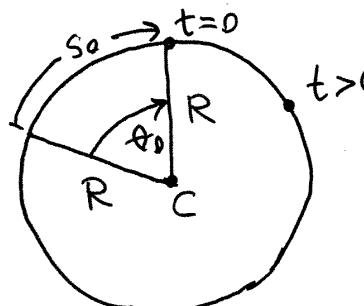
$$5 \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_{s_0}^{s_0 + \Delta s} ds$$

$$\Rightarrow \Delta s = \frac{5}{2}(\sqrt{2} + \operatorname{asinh}(1)) \approx 5.739 \text{ m}$$

(obtido no Maxima).

aula 6. 2020-03-02

## MOVIMENTO CIRCULAR



trajetória circular

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

$s(t) \rightarrow v = \dot{s}, a_t = \ddot{v}, a_t = v \frac{dv}{ds}$   
 ou:  $\theta(t) \rightarrow \omega = \dot{\theta}, \alpha = \ddot{\theta}, \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

velocidade angular      aceleração angular

$$s = R\theta, v = R\omega, a_t = R\alpha$$

(θ em radianos)

Movimento circular uniforme:  $\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$  (const.)

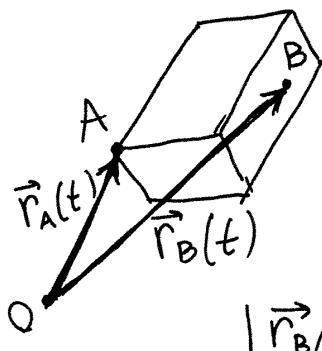
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t}$$

$$\text{Período (T): } \theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\text{Frequência (f): } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{hertz: } 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} \quad \text{rpm} = 1 \text{ min}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$$

## ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

 $B, A$  = qualquer ponto no corpo

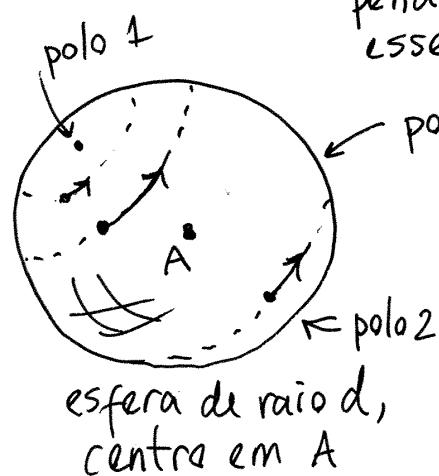
$$\vec{r}_{B/A}(t) = \vec{r}_B(t) - \vec{r}_A(t)$$

 $|\vec{r}_{B/A}(t)|$  = constante (direção apenas)

$$|\vec{r}_{B/A}|^2 = \vec{r}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \cdot \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{B/A} \cdot \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = 0$$

$$\vec{v}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A} = 0$$

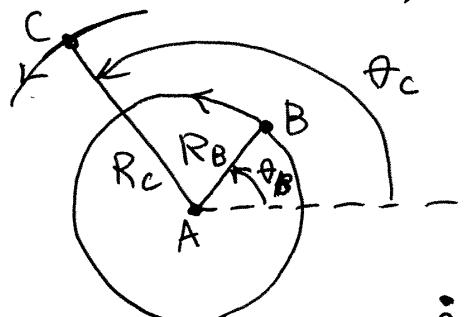


Em qualquer instante, a velocidade relativa entre dois pontos do corpo é sempre perpendicular ao segmento de reta entre esses pontos.

pontos à distância  $d$  de A  
 movimentos em arcos paralelos, sobre a esfera  
 dois polos (velocidade relativa) a A nula.

**Eixo de rotação:** reta passando por A e os polos

**Plano de rotação:** plano paralelo ao eixo de rotação



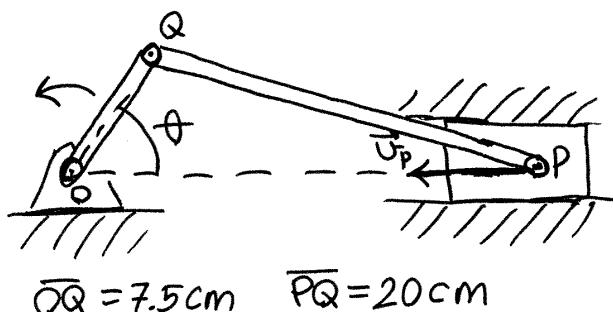
Movimento de todos os pontos do corpo ( $B, C, D, \dots$ ), relativo a A = movimento circular no plano de rotação

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_C = \dot{\theta}_D = \dots = \omega \quad \begin{matrix} \text{velocidade} \\ \text{angular} \\ \text{do corpo} \end{matrix}$$

$$v_{B/A} = R_B \omega, v_{C/A} = R_C \omega, \dots$$

Se em vez de A for escolhido qualquer outro ponto de referência,  $\omega$  é a mesma e o plano de rotação é o mesmo. Só mudam  $R_B, R_C, R_D, \dots$  e as velocidades relativas.

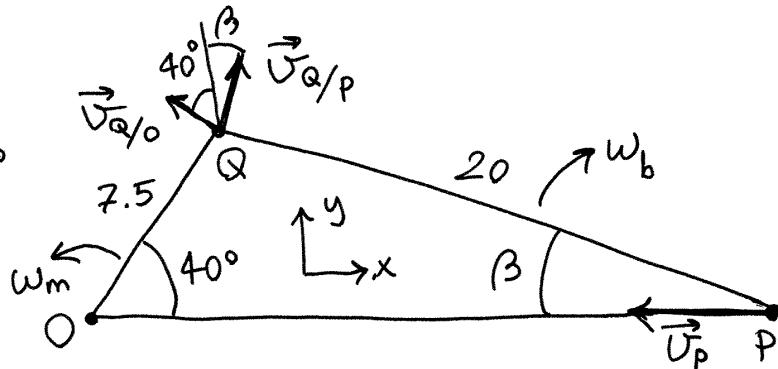
**Exemplo 3.2.** Sistema biela-manivela. Determine as velocidades angulares da biela ( $\overline{QP}$ ) e da manivela ( $\overline{OQ}$ ) no instante em que  $\theta = 40^\circ$  e  $|\vec{v}_P| = 60 \text{ cm/s}$



Resolução:

$$20 \sin \beta = 7.5 \cos 40^\circ \\ = 4.82$$

$$\Rightarrow \beta = 13.95^\circ$$



Duas formas de calcular  $\vec{v}_Q$ :

$$(i) \text{ relativa a } O: \vec{v}_Q = \vec{v}_{Q/O} + \overset{\text{zero}}{\vec{v}_O} = \vec{v}_{Q/O} \\ = (7.5 \omega_m)(-\sin 40^\circ \hat{i} + \cos 40^\circ \hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_Q = \omega_m (-4.82 \hat{i} + 5.75 \hat{j})$$

$$(ii) \text{ relativa a } P: \vec{v}_Q = \vec{v}_{Q/P} + \vec{v}_P \\ = (20 \omega_b)(\sin \beta \hat{i} + \cos \beta \hat{j}) - 60 \hat{i}$$

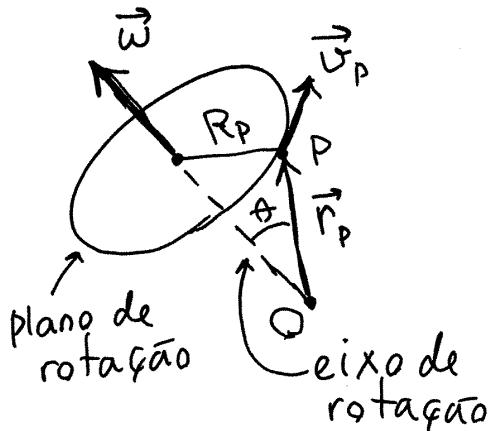
$$\Rightarrow \vec{v}_Q = (+4.82 \omega_b - 60) \hat{i} + 19.4 \omega_b \hat{j}$$

igualando os dois resultados,

$$\begin{cases} +4.82 \omega_b - 60 = -4.82 \omega_m \\ 19.4 \omega_b = 5.75 \omega_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_m = 9.603 \text{ Hz} \\ \omega_b = 2.843 \text{ Hz} \end{cases}$$

observe-se que:  $\dot{\theta} = \omega_m$ ,  $\dot{\beta} = \omega_b$

## VETOR VELOCIDADE ANGULAR

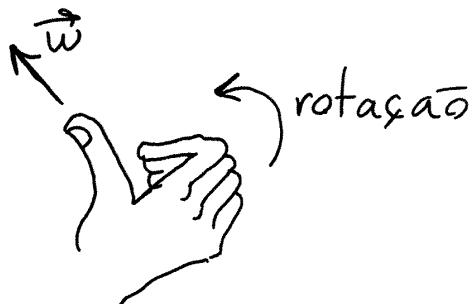


$$|\vec{v}_P| = R_P \omega \quad (\text{relativa a } O)$$

$$R_P = |\vec{r}_P| \sin \theta$$

$$|\vec{v}_P| = \omega |\vec{r}_P| \sin \theta$$

Definição:  $\vec{\omega} = \begin{cases} \text{módulo} = \omega = \text{velocidade angular do corpo} \\ \text{direção} = \text{eixo de rotação} \\ \text{sentido} = \text{regra da mão direita no sentido da rotação} \end{cases}$



Definição de produto vetorial

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P}$$

módulo igual a  $|\vec{\omega}| |\vec{r}_P| \sin \theta$   $\leftarrow$  ângulo entre  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}_P$

perpendicular aos dois vetores,  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}_P$ , e no sentido da regra da mão direita, de  $\vec{\omega}$  para  $\vec{r}_P$ .

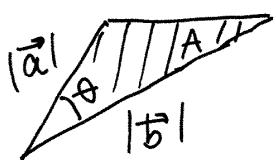
Aula 7. 2020-03-04

**Aceleração angular.**  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

### Produto vetorial.

$\vec{a} \times \vec{b}$  = vetor perpendicular a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ , no sentido da regra da mão direita, de  $\vec{a}$  para  $\vec{b}$  e com módulo igual à componente de um dos vetores, perpendicular ao outro, vezes o módulo desse outro vetor

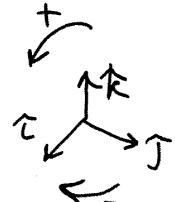


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2A$$

$A$  = área do triângulo com lados  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

### Propriedades:

- (a)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (b)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- (c)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- (d)  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- (e)  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$



$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

### ROTAÇÃO PLANA

(dum corpo rígido) o eixo de rotação aponta sempre na mesma direção.  $\Rightarrow$  plano de rotação fixo  
 $\Rightarrow \vec{\omega}$  muda apenas em módulo e/ou sentido, mas sempre na mesma direção

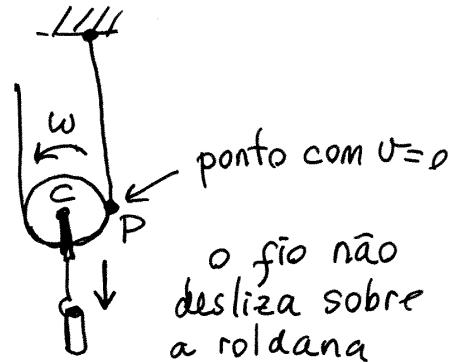
seja o plano de rotação o plano  $xy \Rightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{k}, \vec{a} = \alpha \hat{k}$

$$\vec{v}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ x_p & y_p \end{vmatrix} = -\omega(y_p \hat{i} - x_p \hat{j}) \quad (z_p \text{ não interessa})$$

$$\vec{a}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ awy_p + \omega x_p & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\vec{a}_t} = \underbrace{\alpha(y_p \hat{i} - x_p \hat{j})}_{\vec{a}_t} - \underbrace{\omega^2(x_p \hat{i} + y_p \hat{j})}_{\vec{a}_n}$$

## RODAS E ROLDANAS

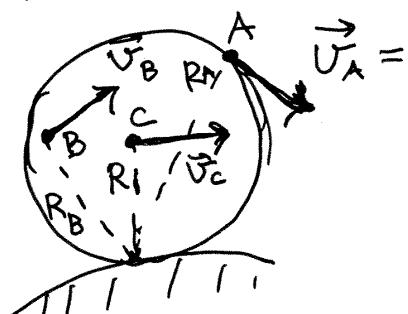
roda em movimento, sem deslizar na superfície



Nos dois casos há rotação plana, e  $\vec{v}_p = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A/P} = \vec{v}_A - \vec{v}_P = \vec{v}_A = \omega(Y_A \hat{i} - X_A \hat{j})$$

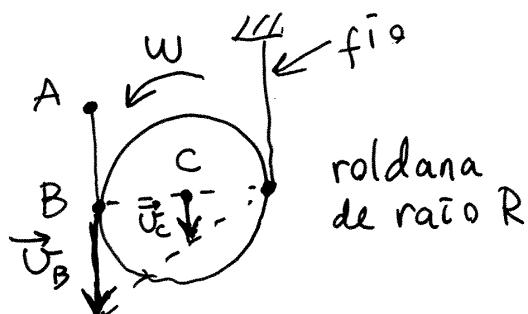
roda de raio  $R$



$$v_A = wR$$

$$v_C = wR$$

$$v_B = wR$$



$$v_C = wR$$

$$v_A = v_B = 2wR$$

## MECÂNICA VETORIAL

Newton 1687: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural

Quantidade de movimento =  $m\vec{v}$  ( $m$  = massa do objeto)  
(momento linear)

### 3 Leis de Newton

**1<sup>a</sup>. Lei da inércia.** Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, a menos que for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas.

Ou seja,  $\vec{v} = \text{constante}$  (pode ser zero  $\Leftrightarrow$  repouso), a menos que atuem forças.

**2<sup>a</sup>** A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada.

$\vec{F}$  = força total aplicada sobre o objeto

$$\Rightarrow \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \quad (= \text{"impulso"})$$

A forma diferencial desta equação integral é:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

caso particular:  $m = \text{constante} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}(t) = m \vec{a}(t)}$$

Isso explica porque  $\vec{a}$  pode ser descontínua.

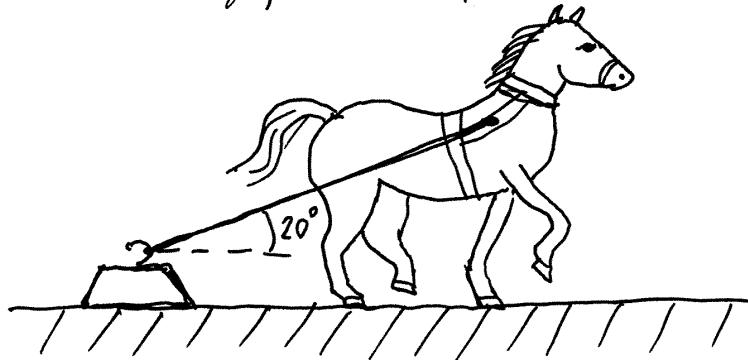
Aula 8. 2020-03-09

Unidades de força. SI:  $1\text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$  (1 newton)

### 3<sup>a</sup> Lei. De ação e reação.

A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas.

Exemplo: Um cavalo de 300 kg arrasta um bloco de 350 kg, numa superfície horizontal.



### Forças.

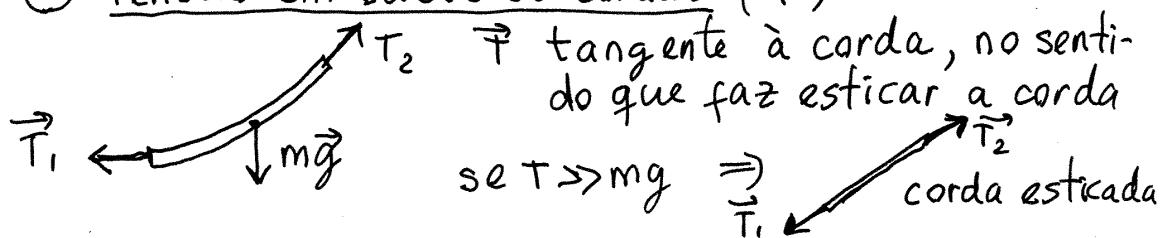
$$\textcircled{1} \quad \underline{\text{Peso}}: \quad g = \frac{P \leftarrow \text{peso em N}}{m \leftarrow \text{massa kg}} = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \text{Peso do cavalo: } P_c = 300 \cdot 9.8 = 2940 \text{ N}$$

$$\text{Peso do bloco: } P_b = 350 \cdot 9.8 = 3430 \text{ N}$$

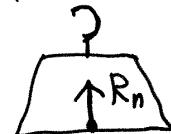
direção vertical, para baixo

### ② Tensão em cabos ou cordas ( $\vec{T}$ )



③ Reação normal. Componente da força de contacto entre duas superfícies, na direção normal às duas superfícies; sentido de forma a afastar as superfícies.

Reação normal do chão no bloco:



④ Forças de atrito. Componente tangencial da força de contacto entre duas superfícies.

a) Atrito estático. Quando as superfícies não deslizam uma sobre a outra; pode ter qualquer sentido (tangente à superfície), mas o seu módulo não pode ultrapassar o valor máximo:

$$F_{\text{máx}} = \mu_e R_n \quad R_n = \text{reação normal}$$

$$\mu_e = \text{coeficiente de atrito estático}$$

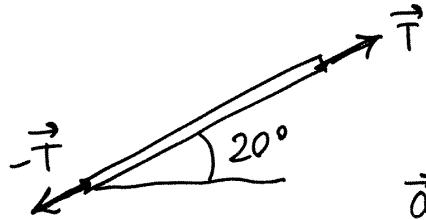
b) Atrito cinético. Há movimento relativo entre as superfícies:  $\vec{v}_{1/2} \neq 0 \Rightarrow$  direção e sentido opostos a  $\vec{v}_{1/2}$ . Módulo igual a:

$$F_{\text{cinético}} = \mu_c R_n \quad \mu_c = \text{coeficiente de atrito cinético.}$$

Exemplo 4.3. Sabendo que  $\mu_c$  entre o bloco e o chão é 0.4 e  $\mu_e$  entre o chão e as ferraduras do cavalo é 0.5, determine a tensão na corda, as reações normais e as forças de atrito no exemplo do cavalo (o cavalo desloca-se com velocidade uniforme).

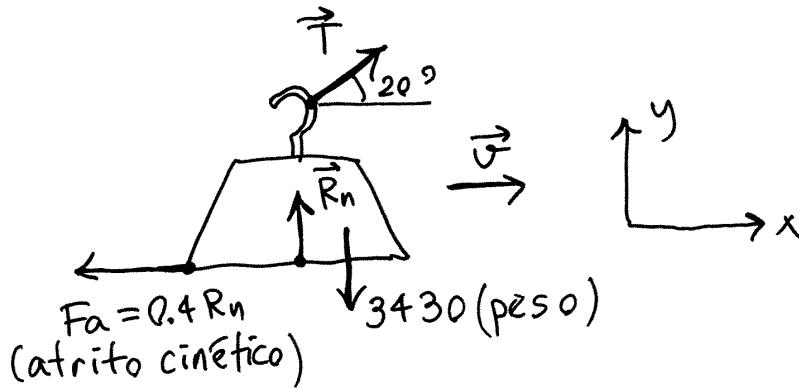
Resolução. Convém isolar os três objetos (corda, bloco, cavalo), identificando todas as forças que atuam neles (diagrama de corpo livre).

corda :



admitindo  $mg \approx 0$  (comparado com a tensão)  
 $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 = \vec{T}, \vec{T}_2 = -\vec{T}$

bloco :

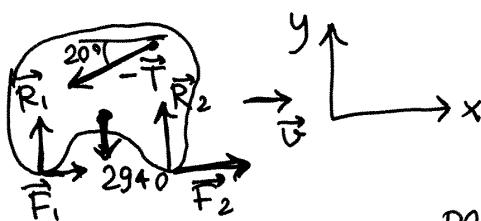


$$\sum F_x : T \cos 20^\circ - 0.4 R_n = 0 \quad (\alpha_x = 0)$$

$$\sum F_y : T \sin 20^\circ + R_n - 3430 = 0 \quad (\alpha_y = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 1274 \text{ N} \\ R_n = 2994 \text{ N} \end{cases}$$

cavalo :



$\vec{F}_1, \vec{F}_2$  = forças de atrito estático no sentido de  $\vec{v}$ , porque o cavalo empurra o chão para trás!

$$\sum F_x : F_1 + F_2 - 1274 \cos 20^\circ = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 = 1198 \text{ N} \end{cases}$$

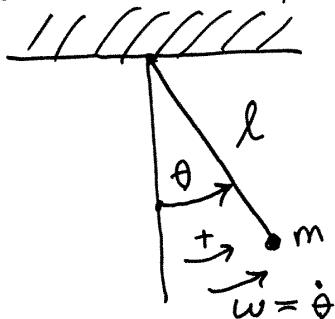
$$\sum F_y : R_1 + R_2 - 2940 - 1274 \sin 20^\circ = 0 \quad \begin{cases} R_1 + R_2 = 3376 \text{ N} \end{cases}$$

Não é possível determinar  $F_1, F_2, R_1$  e  $R_2$  por separado.

$$F_{\max.} = 0.5(R_1 + R_2) = 1688 \text{ N} > F_1 + F_2 \quad (\text{OK, as ferraduras não deslizam})$$

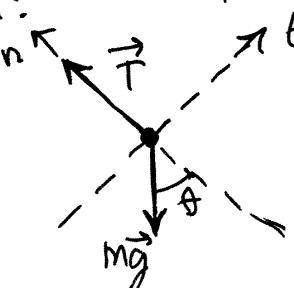
Aula 9. 2020-02-11

**Exemplo.** Pêndulo simples: pequena esfera de raio  $r$  e massa  $m$ , pendurada dum fio de comprimento  $l$  (muito maior que  $r$ )



um grau de liberdade,  $\theta(t)$

Diagrama de corpo livre da esfera:



$$\sum F_n: T - mg \cos \theta = ma_n$$

$$\sum F_t: -mg \sin \theta = ma_t$$

$$a_n = l\omega^2$$

$$a_t = l\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{g}{l} \sin \theta}$$

equação de movimento

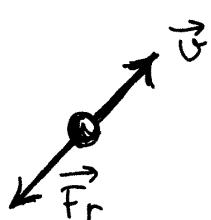
$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow -\frac{g}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$T = m(g \cos \theta + l\omega^2) = m(3g \cos \theta - 2g \cos \theta_0 + l\omega_0^2)$$

Em vez de tentar integrar a expressão de  $\omega$ , para encontrar  $\theta(t)$ , na segunda parte do programa veremos um método geral de análise do movimento a partir da equação de movimento (sistemas dinâmicos).

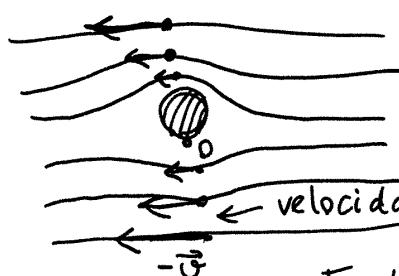
## FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS



$\vec{F}_r$ : oposta à velocidade  $\vec{v}$

$F_r$  depende da forma, tamanho do objeto, e de  $v$ .

(a)  $v$  baixa



escoamento laminar do fluido

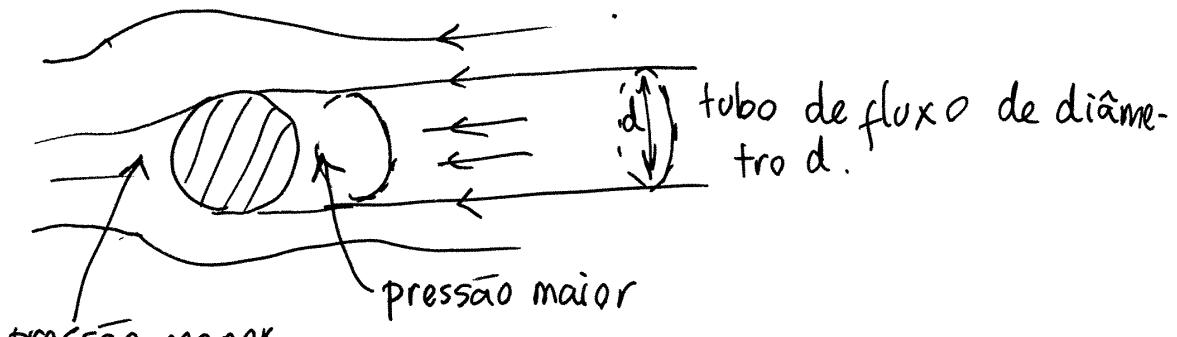
$$F_r \sim v$$

velocidade do fluido, relativa ao corpo

$F_r$  também proporcional a  $\eta$

$\eta$  = coeficiente de viscosidade do fluido ( atrito entre camadas com diferente  $v$ )

(b)  $v$  moderada

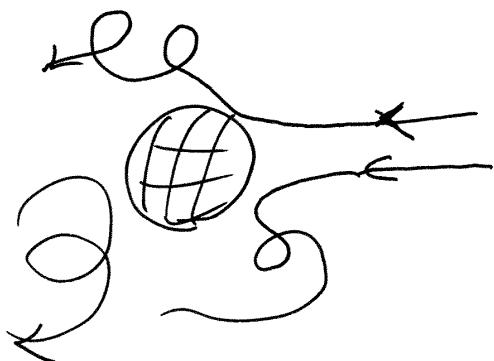


a diferença de pressões produz  $F_r$  proporcional

$$a: S (\pi d^2) v^2$$

massa volêmica  
do fluido

c)  $v$  elevada  $\rightarrow$  turbulência



$F_r$  é difícil de prever  
(caótica).

## NÚMERO DE REYNOLDS

$$N_R = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (\text{número sem unidades})$$

Permite prever a qual dos 3 casos (a, b ou c acima), pertence um valor de  $v$ .

$N_R < 1 \rightarrow @$ ,  $100 < N_R < 200 \rightarrow b$ ,  $N_R > 4000 \rightarrow c$   
entre 1 e 100, estão presentes as 2 forças, proporcionais a  $\pi v$  e a  $\frac{1}{2} v^2$

## Esferas.

No caso dumha esfera de raio  $R$ ,

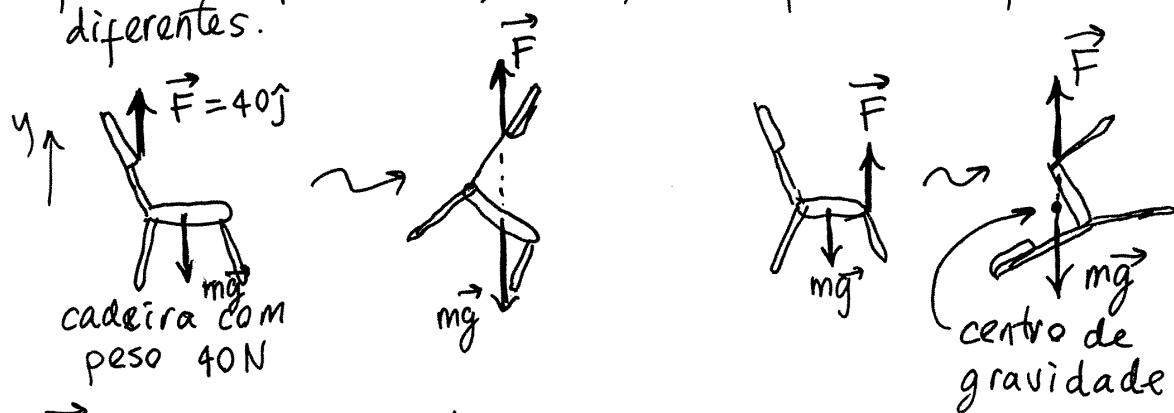
$$F_r = \begin{cases} 6\pi\eta R v, & \text{se } N_R < 1 \\ \frac{1}{2}\pi R^2 v^2, & \text{se } 100 < N_R < 2000 \end{cases}$$

para determinar  $N_R$ , há que saber  $v$  e para saber  $v$  há que saber qual expressão usar para  $F_r$ , que depende de  $N_R$ .

$\Rightarrow$  Admite-se uma das duas formas de  $F_r$ , calcula-se  $v$ , e determina-se se  $N_R$  é consistente com a escolha

## DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Uma força  $\vec{F}$ , com módulo, direção e sentido conhecidos, produz diferentes efeitos quando aplicada em pontos diferentes.



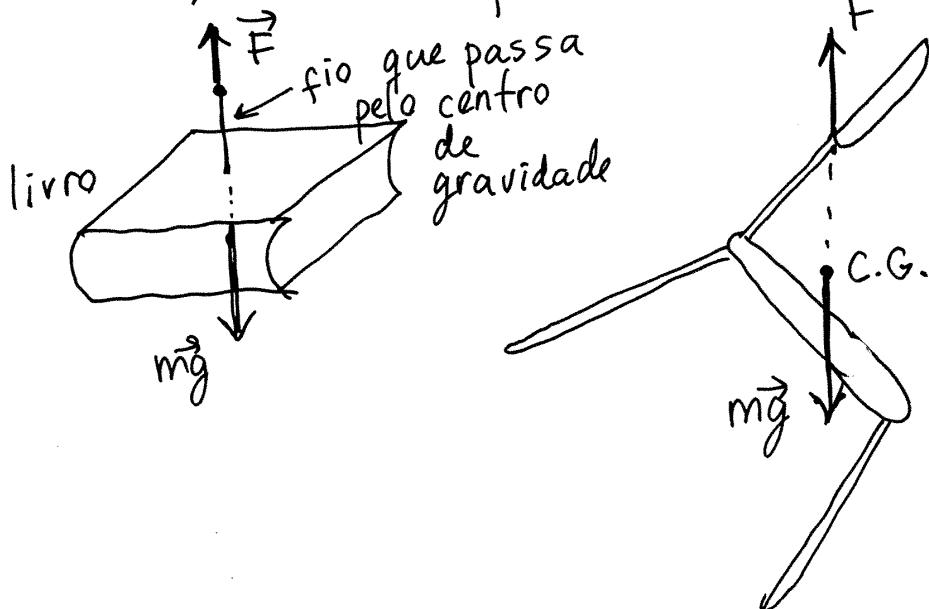
$\vec{F}$  nos corpos rígidos são

vetores deslizantes

- módulo
- direção
- sentido
- linha de ação

podem ser deslocados na sua linha de ação, mas não para outras linhas

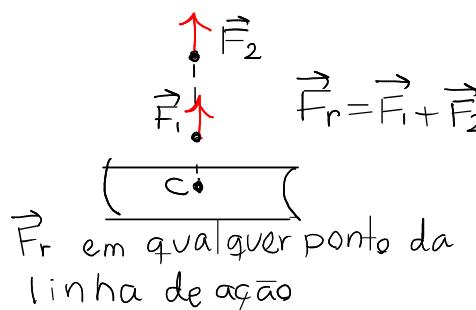
**Forças colineares.** Com a mesma linha de ação. Exemplos:



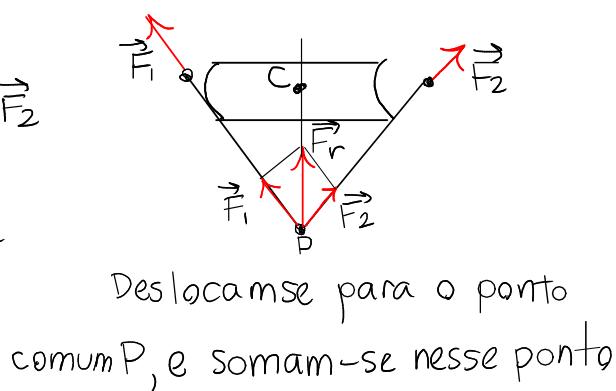
23-29 de março 2020

## 5.2 Sobreposição de forças

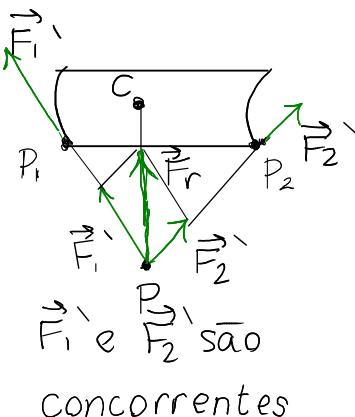
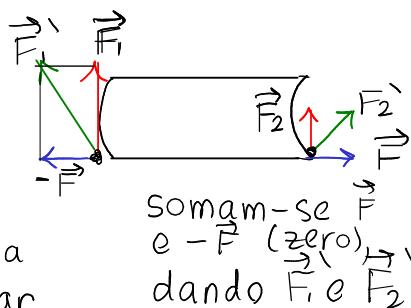
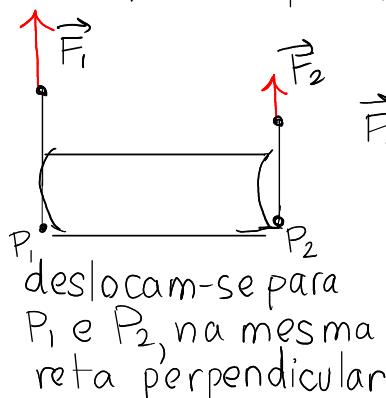
### ① forças colineares



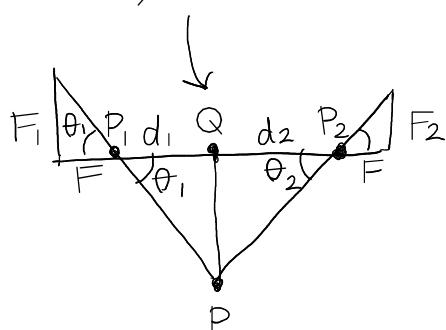
### ② forças concorrentes



### ③ forças paralelas



Posição de  $\vec{F}_r$  no segmento  $\overline{P_1 P_2}$



$$\overline{PQ} = d_1 \tan \theta_1 = d_2 \tan \theta_2$$

$$\tan \theta_1 = \frac{F_1}{F} \quad \tan \theta_2 = \frac{F_2}{F}$$

$$\Rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2$$

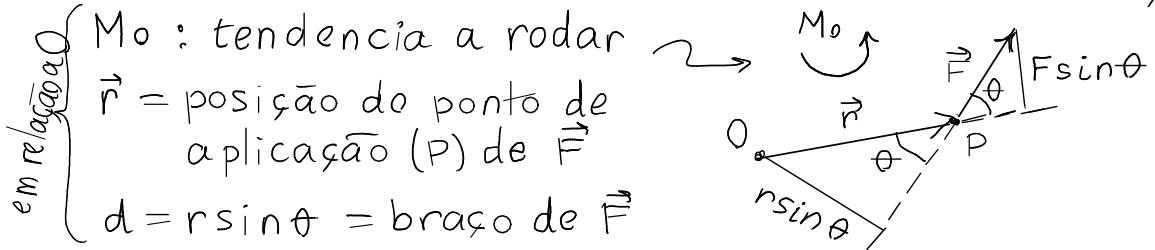
lei das alavancas

### 5.3 Momentos e binários

Definição: momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto O

$$M_o = F d$$

$F \rightarrow$  módulo de  $\vec{F}$   
 $d \rightarrow$  distância desde O até  
 a linha de ação de  $\vec{F}$   
 (braço)

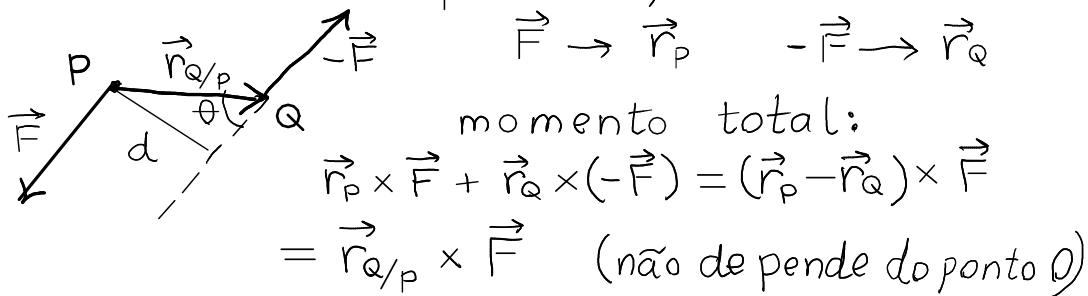


$$M_o = Fr \sin \theta \quad \theta = \text{ângulo entre } \vec{F} \text{ e } \vec{r}$$

vetor momento angular       $\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

$$|\vec{M}_o| = F (\underbrace{r \sin \theta}_{\text{braço}}) = r (\underbrace{F \sin \theta}_{\text{componente de } \vec{F} \text{ perpend. a } \vec{r}})$$

**Binário.** Duas forças iguais e opostas,  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  com linhas de ação paralelas, à distância d



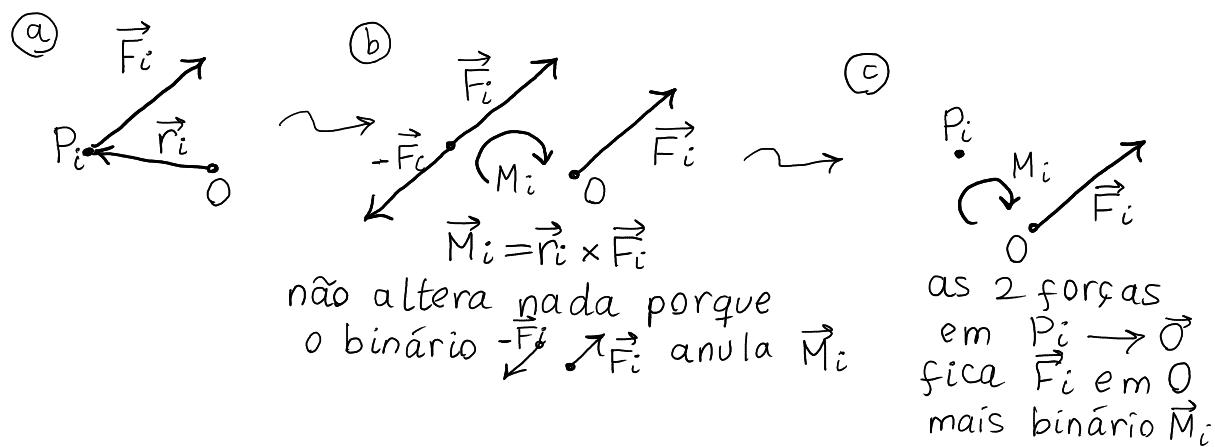
momento do binário       $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  ( $\vec{F} = \vec{0}$ )

$\vec{r} =$  do ponto onde atua  $\vec{F}$   
 até o ponto onde atua  $-\vec{F}$

$\vec{M} \rightarrow$  rotação sem translação, aplicada em qualquer ponto do corpo rígido

Método geral para somar várias forças

Cada força  $\vec{F}_i$ , num ponto  $P_i$ , desloca-se para um ponto comum usando o método seguinte



$n$  forças:  $(\vec{F}_1 \text{ em } P_1), (\vec{F}_2 \text{ em } P_2), \dots, (\vec{F}_n \text{ em } P_n)$   
 $\Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \text{ em } O$ , mais  $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n)$

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Força-binário resultante:  $\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ,  $\vec{M}_r = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$

forças num plano ( $x$   $y$ ):  $M_r = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ F_{ix} & F_{iy} \end{vmatrix}$

$$M_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ F_{ix} & F_{iy} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 & \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ x \end{array} M_i \\ < 0 & \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ x \end{array} M_i \end{cases}$$

## 5.4. Corpos rígidos em equilíbrio

Força-binário resultante nulos

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0} \quad \begin{pmatrix} \text{em relação a} \\ \text{qualquer ponto} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.1.

$$mg = 9000 \text{ N}$$

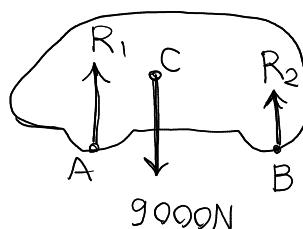
em repouso

Encontrar as

reações normais nos pneus



Diagrama de corpo livre



$$\sum M_A : 1.8 R_2 - 0.6 \cdot 9000 = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = 3000 \text{ N}$$

1500 N em cada pneu traseiro

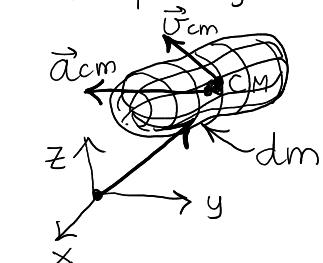
$$\sum M_B : 1.2 \cdot 9000 - 1.8 R_1 = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = 6000 \text{ N} \quad (R_1 + R_2 = 9000)$$

3000 N em cada pneu da frente

## 5.5. Centro de massa

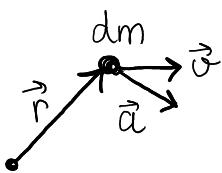
Corpo rígido



$$\int_{\text{corpo}} dm = m = \text{massa do corpo}$$

centro de massa

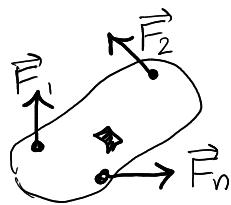
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \vec{r} dm$$



$$dm = \rho dx dy dz \quad (\rho = \text{massa volúmica})$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \vec{v} dm$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \vec{a} dm$$



$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n \rightarrow$  forças externas

$dm$   $d\vec{f}(\vec{r})$   $\vec{a}(r)$   $\rightarrow$  força interna sobre  $dm$

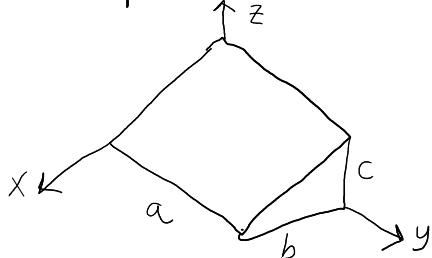
$$\vec{a} dm = d\vec{f} (+ \vec{F}_i \text{ se houver força externa})$$

$$m \vec{a}_{cm} = \int_{\text{corpo}} \vec{a} dm = \int_{\text{corpo}} d\vec{f} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \leftarrow \begin{matrix} \text{força resultante} \\ \text{zero} \end{matrix}$$

$$\vec{F}_r = m \vec{a}_{cm}$$

Ó movimento do centro de massa dum corpo rígido de massa  $m$  é igual ao movimento de uma partícula de massa  $m$ , sob a qual atua uma força  $\vec{F}_r$ , igual à soma vetorial das forças externas que atuam no corpo rígido.

## Exemplo 5.2



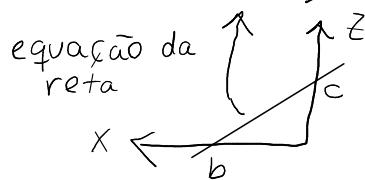
Determine a posição do centro de massa do prisma triangular com base de arestas  $a$  e  $b$ , e altura  $c$ , com massa distribuída uniformemente

Resolução. O volume define-se por:

$$0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq a \Rightarrow 0 \leq z \leq c(1 - \frac{x}{b})$$

massa volúmica

$$dm = \rho dx dy dz$$



$$\begin{aligned} m &= \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-\frac{x}{b})} \rho dz dx dy = \int_0^a \int_0^b \rho c \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx dy \\ &= \rho c \int_0^a \left(x - \frac{x^2}{2b}\right) \Big|_0^b dy = \rho c \left(b - \frac{b^2}{2b}\right) \int_0^a dy \\ &\Rightarrow m = \frac{abc\rho}{2} \end{aligned}$$

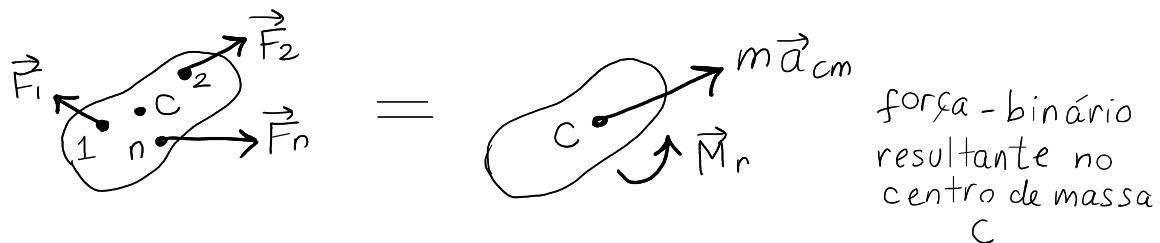
$$m x_{cm} = \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-\frac{x}{b})} x dz dx dy = \rho c \int_0^a \int_0^b \left(x - \frac{x^2}{b}\right) dx dy$$

$$m x_{cm} = \rho ac \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3b}\right) \Big|_0^b = \frac{\rho ab^2 c}{6} \Rightarrow x_{cm} = \frac{b}{3}$$

$$\begin{aligned} m y_{cm} &= \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-\frac{x}{b})} y dz dx dy = \rho c \int_0^a \int_0^b y \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx dy \\ &= \rho c \left(x - \frac{x^2}{2b}\right) \Big|_0^b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\rho a^2 b c}{4} \Rightarrow y_{cm} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m z_{cm} &= \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-\frac{x}{b})} z dz dx dy = \rho \int_0^a \int_0^b \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx dy \\ &= \frac{\rho ac^2}{2} \int_0^b \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2}\right) dx = \frac{\rho ac^2}{2} \left(b - \frac{b^2}{b} + \frac{b^3}{3b}\right) \Rightarrow z_{cm} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

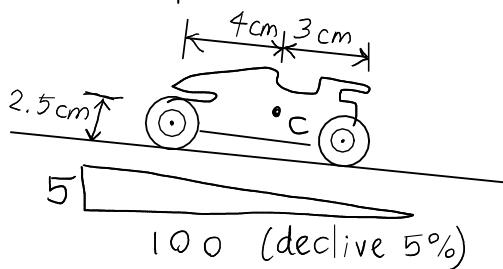
### 5.6. Translação sem rotação



$\vec{a}$  em qualquer ponto =  $\vec{a}_{cm}$   $\Rightarrow$  o corpo desloca-se como uma partícula de massa m, sem rodar

$\Rightarrow \vec{M}_r = \vec{0}$  (em relação ao centro de massa)

Exemplo.



tracção traseira

$$m = 129 \text{ g}$$

$$M_e = 0.5 \text{ (rodas e rampa)}$$

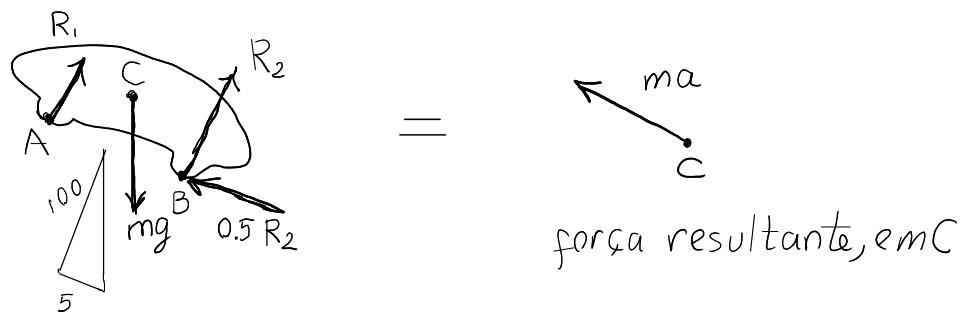
$$a_{\max} = ?$$

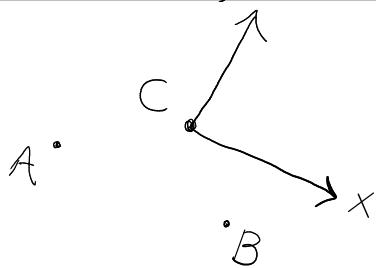
Resolução.

Condições para obter aceleração máxima:

- Força de atrito (estático) máxima  $\rightarrow F_a = M_e R_n$
- Rodas livres (à frente) sem atrito nos eixos e com massa  $\approx 0$
- $\omega = 0$  (no momento em que parte do repouso)  
 $\rightarrow$  resistência do ar nulla

Diagrama de corpo livre





$$C = (0, 0)$$

$$A = (-4, -2.5) \text{ (distâncias em cm)}$$

$$B = (3, -2.5)$$

comparando componentes das forças nos dois lados do diagrama de corpo livre:

$$\sum F_x : mg_x - 0.5R_2 = -ma \quad \left( g_x = \frac{9.8 \cdot 5}{\sqrt{10025}} \right)$$

$$\sum F_y : R_1 + R_2 - mg_y = 0 \quad \left( g_y = \frac{9.8 \cdot 100}{\sqrt{10025}} \right)$$

comparando momentos em relação a C:

$$\sum M_C : \begin{vmatrix} -4 & -2.5 \\ 0 & R_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2.5 \\ -0.5R_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{momentos} \\ \text{em N}\cdot\text{cm} \end{array} \right)$$

$$-4R_1 + 3R_2 - 1.25R_2 = 0$$

a resolução dessas 3 equações dá as 3 variáveis  $a, R_1, R_2$

$$a = 2.915 \frac{m}{s^2}$$

O problema pode também ser resolvido calculando momentos em relação a A, em vez de C (para que  $R_1$  não entre na equação).  $F_a = 0.5R_2$  não produz momento em relação a A, e  $C = (4, 2.5)$  em relação a A.

Comparam-se momentos nos dois lados do diagrama de forças:

$$\sum M_A : 7R_2 + \begin{vmatrix} 4 & 2.5 \\ mg_x & mg_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2.5 \\ -ma & 0 \end{vmatrix}$$

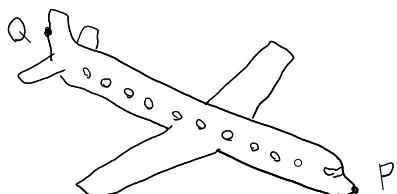
$$7R_2 + 4mg_y - 2.5mg_x = 2.5ma$$

Resolve-se junto com

$$\sum F_x : mg_x - 0.5R_2 = -ma \quad \text{para encontrar } a \text{ e } R_2$$

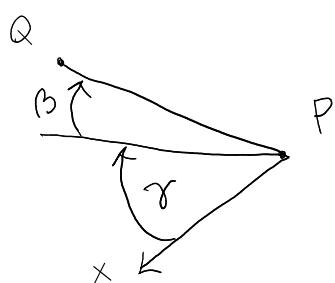
30 de março a 5 de abril

### 5.7. Movimento geral do corpo rígido



6 graus de liberdade:

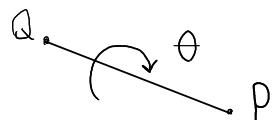
- 3 coordenadas dum ponto  $P (x_P, y_P, z_P)$
- 2 ângulos que definem a direção dum segmento  $\overline{PQ}$



$\gamma \rightarrow$  azimute de  $\overline{PQ}$

$\beta \rightarrow$  inclinação em relação ao plano horizontal

- um ângulo  $\theta$  de rotação em torno de  $\overline{PQ}$



Rotação com eixo fixo: todos os pontos num segmento  $\overline{PQ}$  permanecem em repouso.

$\Rightarrow x_P, y_P, z_P, \gamma, \beta$  constantes

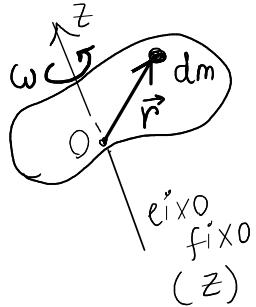
$\Rightarrow$  Um único grau de liberdade:

$\theta =$  rotação no plano de rotação  
(perpendicular ao eixo  $\overline{PQ}$  fixo)

todos os pontos no corpo estão em rotação plana.

Casos mais complicados são mais facilmente analisados pelo método do capítulo 8.

### 5.8. Rotação com eixo fixo



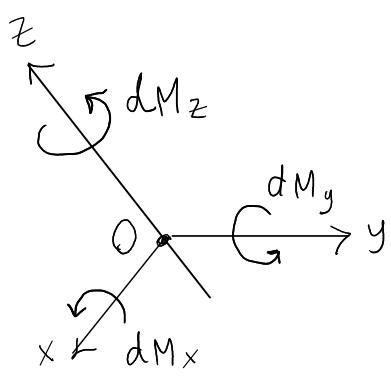
$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} &= \omega \hat{k} & \vec{\alpha} &= \alpha \hat{k} \\
 \vec{r} &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad (\text{do elemento } dm) \\
 \vec{\sigma} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega (-y \hat{i} + x \hat{j}) \\
 \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\sigma} \\
 &= \alpha (-y \hat{i} + x \hat{j}) - \omega^2 (x \hat{i} + y \hat{j}) \\
 &= (-\alpha y - \omega^2 x) \hat{i} + (\alpha x - \omega^2 y) \hat{j}
 \end{aligned}$$

força resultante no elemento  $dm$ :

$$d\vec{f} = \vec{a} dm = ((-\alpha y - \omega^2 x) \hat{i} + (\alpha x - \omega^2 y) \hat{j}) dm$$

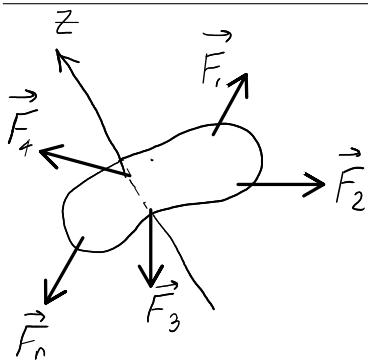
momento dessa força em relação à origem:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -\alpha y - \omega^2 x & \alpha x^2 - \omega^2 y & 0 \end{vmatrix} dm$$



$dM_x$  e  $dM_y$ , quando integrados em todo o corpo, deverão ser nulos, porque são contrariados por forças de contacto no eixo, que não permitem rotações nos planos  $yz$  ou  $xz$ .

$$dM_z = \cancel{x(\alpha x - \omega^2 y)} - \cancel{y(-\alpha y - \omega^2 x)} dm = \alpha (x^2 + y^2) dm$$



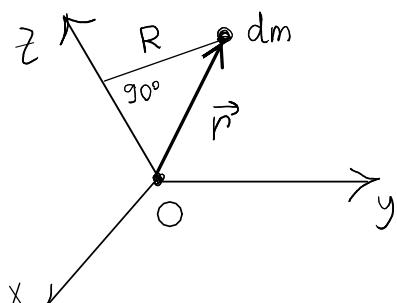
Forças externas:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$   
algumas ( $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ ) são forças de contacto no eixo, que contrariam as componentes x e y dos momentos  $d\vec{M}$  das forças internas, mas não produzem momento  $M_z$ .

Componente z do momento resultante:

$$M_z = \left( \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \right) \cdot \hat{k} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \hat{k}$$

$$\Rightarrow M_z = \int_{\text{volume}} dM_z \quad (\text{os momentos das forças internas anulam-se no integral})$$

$$M_z = \int_{\text{volume}} \alpha (x^2 + y^2) dm = \alpha \int_{\text{volume}} (x^2 + y^2) dm$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

R = distância de dm até o eixo de rotação

$$I_z = \int_{\text{volume}} R^2 dm$$

momento de inércia do corpo em relação ao eixo z

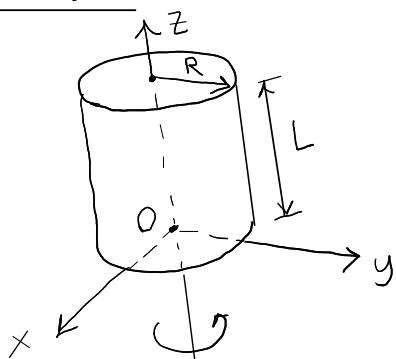
$\Rightarrow$  momento result. em relação ao eixo fixo

$$= M_z = I_z \alpha$$

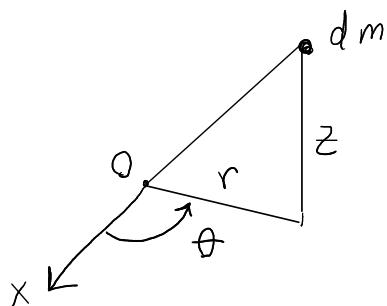
equação do movimento com eixo fixo

**Exemplo 5.4.** Determine a expressão do momento de inércia de um cilindro homogêneo, de raio  $R$ , altura  $L$  e massa  $m$ , rodando à volta do seu eixo.

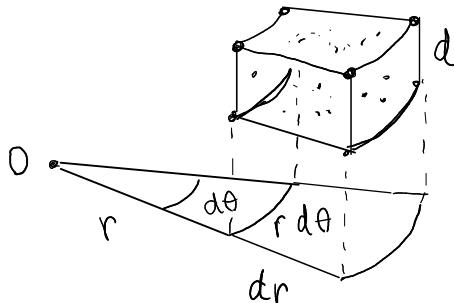
Resolução.



Convém usar coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$



$dm$  ocupa o volume infinitesimal entre  $r$  e  $r+dr$ , entre  $\theta$  e  $\theta+d\theta$  e entre  $z$  e  $z+dz$



volume  $\approx$  volume do paralelepípedo com arestas  $dr$ ,  $r d\theta$  e  $dz$   
 $= r dr d\theta dz$

$$\Rightarrow dm = \rho r dr d\theta dz \quad \rho = \text{constante (cil. homogêneo)}$$

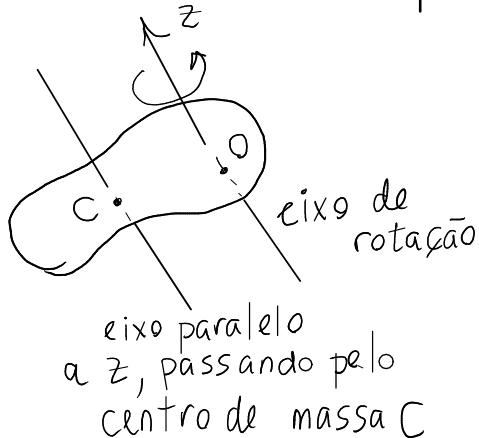
$$m = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz = \rho L (2\pi) \left(\frac{R^2}{2}\right) = \rho \pi R^2 L$$

$$I_z = \rho \int_{\text{volume}} r^2 dm = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta dz = \rho L (2\pi) \left(\frac{R^4}{4}\right)$$

$$= \frac{\rho \pi R^4 L}{2} \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

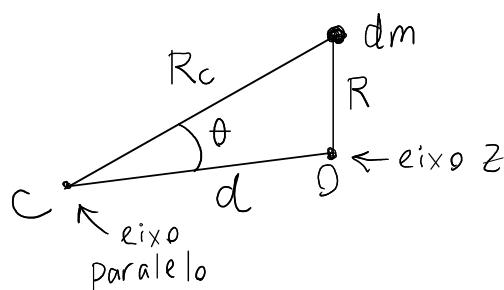
a altura  $L$   
não interessa

## Teorema dos eixos paralelos



O momento de inércia para um eixo (z) pode obter-se a partir do momento de inércia dum outro eixo, paralelo, que passa pelo centro de massa.

No plano de rotação (xy):



lei do cosseno:

$$R^2 = R_c^2 + d^2 - 2 R_c d \cos \theta$$

$d$  = distância entre os dois eixos

$$I_z = \int R^2 dm = \int R_c^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int R_c \cos \theta dm$$

$R_c \cos \theta = X_c$  = coordenadas x de dm, em relação ao centro de massa

$$\Rightarrow \int R_c \cos \theta dm = \int X_c dm = \text{coordenada x do C.M., em relação a C.M.} = 0$$

$$\Rightarrow I_z = I_{CM} + m d^2$$

$I_{CM}$  = momento de inércia em torno do eixo que passa pelo centro de massa

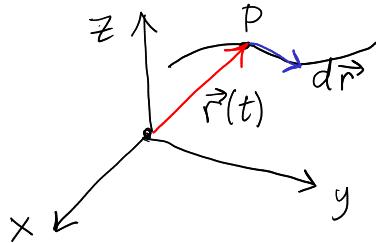
## 6. TRABALHO E ENERGIA

13-19 de abril, 2020

6.1. corpo rígido em translação, sem rotação

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_r = m\vec{a}$$

( qualquer ponto P )



$$d\vec{r} = \vec{v} dt = ds \hat{e}_t$$

$$\vec{F}_r \cdot d\vec{r} = F_t ds \quad m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{a}_t \cdot ds = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$\nwarrow$  componente tangencial da força res.

$$F_t ds = m v dv \Rightarrow \int_{S_1}^{S_2} F_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_2} F_t ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \begin{cases} \text{(trabalho)} \\ \text{da força resultante} \end{cases}$$

Teorema do trabalho e a energia cinética

trabalho da força resultante:  $W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \text{energia cinética}$$

Cada força  $\vec{F}_i$  realiza trabalho:

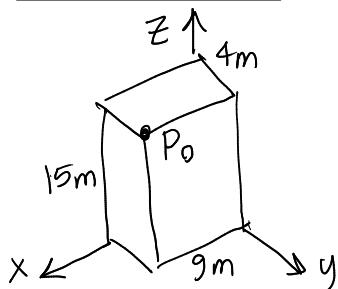
$$W_{12}(\vec{F}_i) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \quad (d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$\text{trabalho da força resultante} = \sum_{i=1}^n W_{12}(\vec{F}_i)$$

Unidade SI de trabalho e energia:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (\text{joule})$$

EXEMPLO 6.1. Esfera lançada desde um prédio



posição inicial (SI):

$$\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (9, 4, 15)$$

velocidade inicial (SI):

$$\vec{V}_0 = 13\hat{i} + 22.5\hat{j} + 15\hat{k}$$

Determine a altura máxima que a esfera atinge

Solução:  $\vec{F}_r = -mg\hat{k}$  (ignorando resist. do ar)

$$\text{impulso} = \int_{P_0}^P \vec{F}_r dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \Rightarrow -mg t \hat{k} = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

$$\vec{v} = 13\hat{i} + 22.5\hat{j} + (15 - 9.8t)\hat{k}$$

$$P_1 \text{ (altura máxima)} \rightarrow |\vec{v}_1| \text{ mínimo} \rightarrow \vec{v}_1 = 13\hat{i} + 22.5\hat{j}$$

$$W_{01} = \int_{P_0}^{P_1} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -mg \int_{P_0}^{P_1} \hat{k} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$\Rightarrow -mg(z_1 - z_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Maxima:

$$\text{solve } (-9.8)(z_1 - 15) = (13^2 + 22.5^2)/2 - (13^2 + 22.5^2 + 15^2)/2;$$

$$\rightarrow z_1 = 26.48 \text{ m}$$

## 6.2. Forças conservativas

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{não depende da trajetória}$$

Energia potencial  $U_p$  definida por:

$$U_p = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$P_0 \rightarrow$  ponto arbitrário  
( $U_{P_0} = 0$ )

$$\Rightarrow W_{12} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_{P_1} - U_{P_2}$$

$U_p$  depende da escolha de  $P_0$ , mas  $U_{P_1} - U_{P_2}$  não

EXEMPLO 6.2.  $\vec{F} = (3x+y)\hat{i}$   $(x_1, y_1) = (0,0)$

$(x_2, y_2) = (1,1)$  calcule  $W_{12}$  nos 3 percursos:

- Ⓐ reta de  $P_1$  até  $(1,0)$  + reta de  $(1,0)$  até  $P_2$
- Ⓑ reta de  $P_1$  até  $P_2$
- Ⓒ reta de  $P_1$  até  $(0,1)$  + reta de  $(0,1)$  até  $P_2$

Resolução: Ⓐ

$$W_{12} = \int_{P_1}^{(1,0)} \vec{F} \cdot (dx\hat{i}) + \int_{(1,0)}^{P_2} \vec{F} \cdot (dy\hat{j})$$

$$W_{12} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} 3x \, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^1$$

$$W_{12} = \frac{3}{2}$$

Ⓑ

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

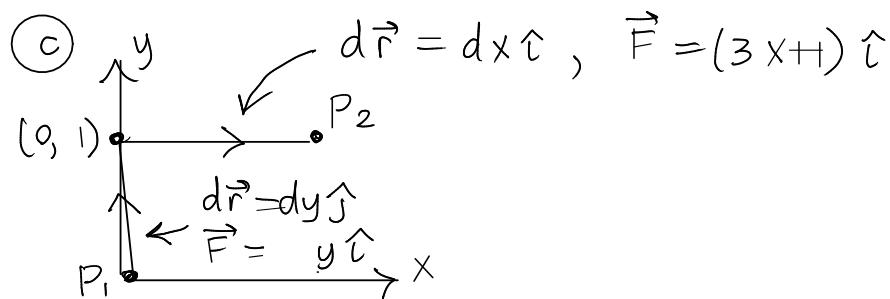
$$dy = dx$$

$$d\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j}) dx$$

$$\vec{F} = 4x\hat{i}$$

$$W_{12} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (4x\hat{i}) \cdot (\hat{i} + \hat{j}) dx = \int_0^1 4x \, dx = 2x^2 \Big|_0^1$$

$$W_{12} = 2$$

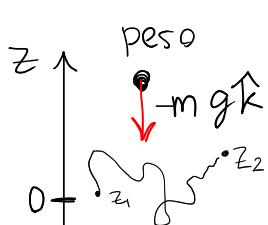


$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \int_{P_1}^{(0,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(0,1)}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 (3x+1) dx = \left(\frac{3}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\vec{F}$  não é conservativa

## ENERGIA POTENCIAL

① Gravítica



$$\int_{P_1}^{P_2} (-mg\hat{k}) \cdot d\vec{r} = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

o peso (e qualquer força constante) é conservativo.

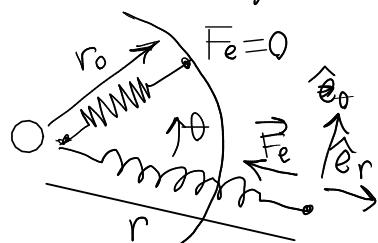
$$z_0 = 0 \Rightarrow U_g(z) = mg \int_0^z dz$$

$$U_g(z) = mgz$$

② Elástica

força elástica  $\rightarrow |F_e| = ks$  (lei de Hooke)

$s$  = elongação da mola  $k = \text{const. elástica}$



$$s = r - r_0 \quad \vec{F}_e = -k(r - r_0)\hat{e}_r$$

coordenadas polares  $(r, \theta)$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta \quad dr = ds$$

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -ks ds \quad \int_{P_1} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} k(s_2^2 - s_1^2)$$

$U_e(s) = \frac{1}{2} ks^2 \quad (s_0 = 0)$

③ Forças centrais: apontam na direção dum ponto

$$\vec{F}_c = f(r)\hat{e}_r \Rightarrow \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = f(r)dr \quad U_c = - \int_{r_0}^r f(r) dr$$

### 6.3 Energia mecânica

$$W_{12}(\vec{F}_r) = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n W_{12}(\vec{F}_i)}_{\text{conservativas}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m W_{12}(\vec{F}_j)}_{\text{não-conservativas}} = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$$U_1 - U_2 + W_{12}(\text{n.c.}) = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$$U = U_g + U_e + \dots \quad W_{12}(\text{n.c.}) = (E_{C_2} + U_2) - (E_{C_1} + U_1)$$

$$\text{Energia mecânica: } E_m = E_C + U \quad (\xrightarrow{\text{função de }} r \text{ e } \beta)$$

Teorema do trabalho e a energia mecânica

$W_{12}(\text{n.c.}) = E_{m_2} - E_{m_1}$

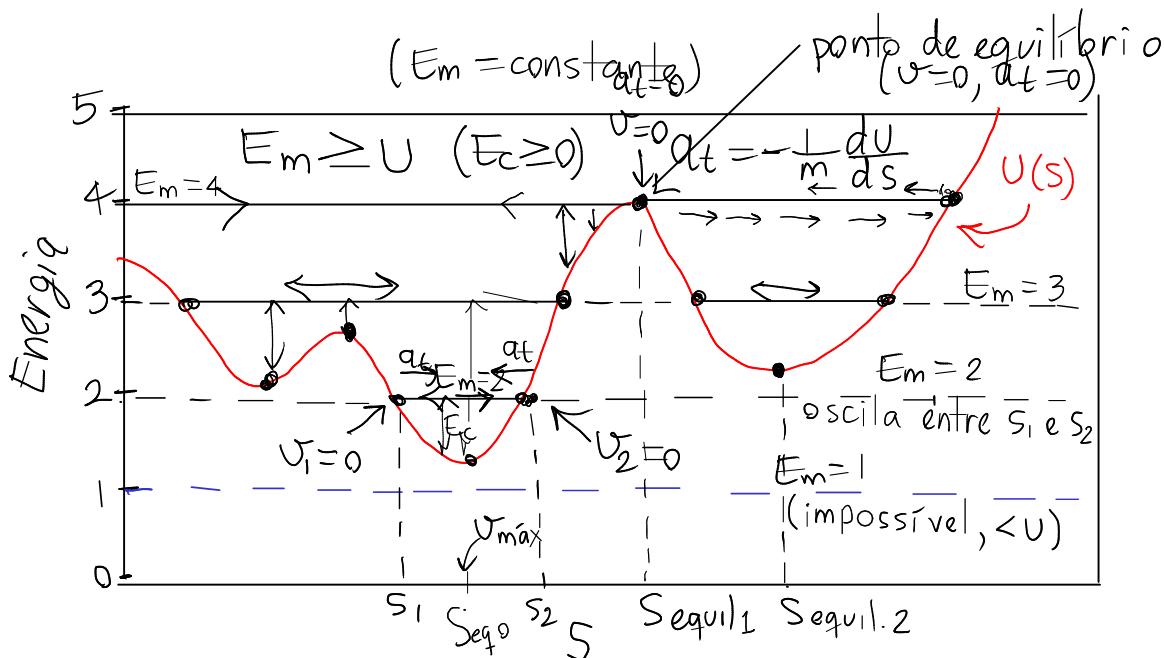
O trabalho das forças não conservativas, ao longo da trajetória, é igual ao aumento da energia mecânica.

**Sistemas conservativos.** Todas as forças são conservativas, ou há forças não conservativas mas não realizam trabalho.

$$U(s) = - \int_{s_0}^s F_t ds \quad \Rightarrow \quad E_m = \int_{s_0}^s F_t ds = - \frac{dU}{ds}$$

$E_m$  permanece constante

## GRÁFICOS DE ENERGIA



$E_m$  (constante) é uma reta horizontal que não pode estar debaixo de  $U$ .

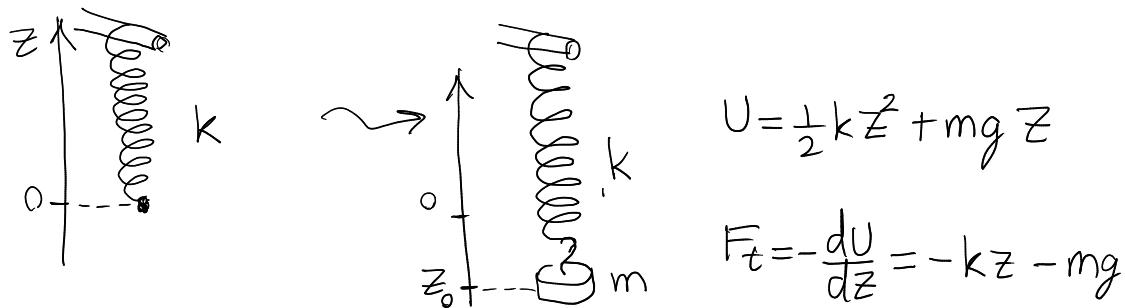
$E_m = 1 \rightarrow$  impossível

$E_m = 2 \rightarrow$  sistema oscila entre  $s_1$  e  $s_2$

máximos e mínimos de  $U \rightarrow$  pontos de equilíbrio:

Se  $E_m = U(\text{Sequil}) \rightarrow v=0, a_t=0$ , sist. em repouso

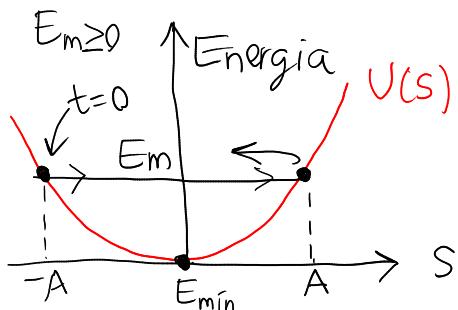
## 6.4. Movimento harmônico simples



ponto de equilíbrio ( $F_t = 0$ )

$$\Rightarrow z_0 = -\frac{mg}{k}$$

$$S = z - z_0 \Rightarrow z = S - \frac{mg}{k} \Rightarrow F_t = -ks \quad U(S) = \frac{1}{2}ks^2$$



$$\text{em } S = \pm A : E_C = 0 \\ (v = 0)$$

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{constante})$$

$$a_t = \frac{F_t}{m} = -\frac{k}{m} S$$

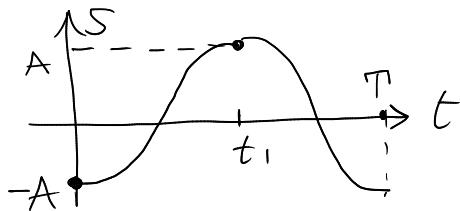
$$a_t ds = v dv \quad -\frac{k}{m} \int_{-A}^S s ds = \int_0^v v dv$$

$$v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - S^2) \quad v = \pm \Omega \sqrt{A^2 - S^2}$$

frequência angular  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \frac{N}{m \cdot kg} \rightarrow \frac{1}{s^2} \quad \sqrt{\frac{1}{s^2}} = Hz$

$$t=0, s=-A, v=0 \quad (t>0, v>0)$$

$$\omega \int_0^t dt = \int_{-A}^s \frac{ds}{\sqrt{A^2 - s^2}} \Rightarrow s = -A \cos(\omega t)$$



$$\omega t_1 = \pi \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

em  $t_1, s=A, v=0$   
 $t > t_1, v < 0$

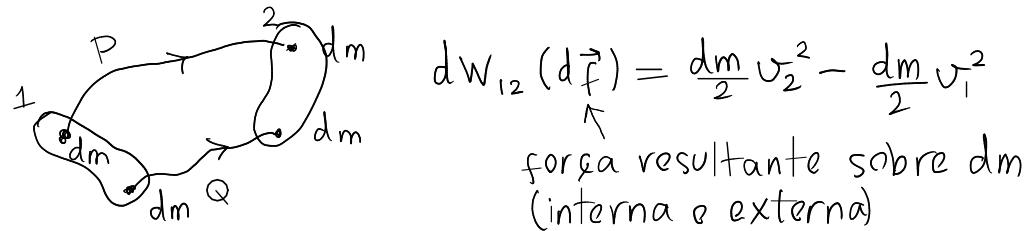
$$\omega \int_{T/2}^t dt = - \int_{-A}^s \frac{ds}{\sqrt{A^2 - s^2}} \Rightarrow s = -A \cos(\omega t)$$

período:  $T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$

Maxima:

```
(%i1)  $\Omega*t = \text{integrate}(1/\sqrt{A^2-s^2}, s, A-, s);$ 
Is  $s + A$  positive, negative or zero?
pos;
Is  $s - A$  positive, negative or zero?
pos;
Is  $A$  positive, negative or zero?
s %pi
(%o1)  $t \Omega = \text{asin}(-) + \dots$ 
A 2
(%i2)  $\text{solve}(\%, s);$ 
(%o2)  $[s = -A \cos(t \Omega)]$ 
(%i3)  $\Omega*t - \frac{\pi}{2} = -\text{integrate}(1/\sqrt{A^2-s^2}, s, A, s);$ 
Is  $s - A$  positive, negative or zero?
pos;
Is  $s + A$  positive, negative or zero?
pos;
Is  $A$  positive, negative or zero?
pos;
(%o3)  $t \Omega - \frac{\pi}{2} = \frac{s}{A} - \text{asin}(-)$ 
(%i4)  $\text{solve}(\%, s);$ 
(%o4)  $[s = -A \cos(t \Omega)]$ 
```

### 6.5. Energia cinética de rotação



$$W_{12}(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^n W_{12}(\vec{F}_i) = \int_{\text{volume}} dW_{12}(d\vec{f}) = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} v_2^2 dm - \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} v_1^2 dm$$

forças externas

$$W_{12}(\vec{F}_r) = E_{C_2} - E_{C_1} \quad E_C = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} v^2 dm$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \leftarrow \vec{v} \text{ da massa } dm$$

$\vec{r}$  = posição desde C.M.

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_{CM}^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 + 2 \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

escolhe-se eixo de rotação no instante  $t \rightarrow z$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(-y\hat{i} + x\hat{j}) \Rightarrow |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 = \omega^2(x^2 + y^2)$$

$$\vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (-y v_{CM_x} + x v_{CM_y}) \omega$$

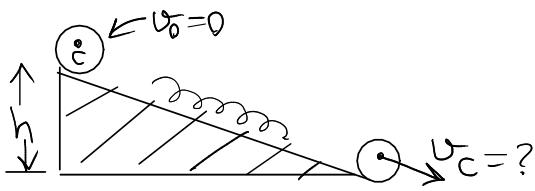
$$E_C = \underbrace{\frac{1}{2} \int v_{CM}^2 dm}_{\text{energia de translação}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int \omega^2(x^2 + y^2) dm}_{\text{energia de rotação}} + \underbrace{\int (-y v_{CM_x} + x v_{CM_y}) \omega dm}_{\cancel{\text{cancelado}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

$\uparrow$  energia de translacão       $\nwarrow$  energia de rotação

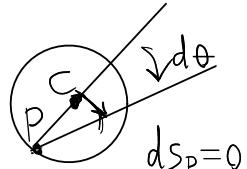
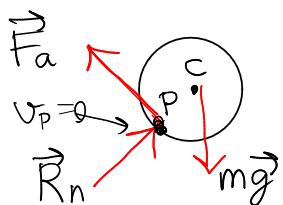
### Exemplo 6.3.

Esfera homogênea de raio  $R$  e massa  $m$  que roda sem deslizar



Resolução.

forças externas na esfera



$$v_c = \frac{dS_c}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Como  $dS_p = 0$ ,  $\vec{R}_n$  e  $\vec{F}_a$  não realizam trabalho  
(sist. conservativo)

$\Rightarrow E_m = \text{constante}$

posição inicial

$$E_i = 0 \quad U = mgh$$

$$E_f = \frac{m}{2} v_c^2 + \frac{I_c}{2} \omega^2$$

$$= \frac{m}{2} v_c^2 + \left( \frac{2mR^2}{10} \right) \left( \frac{v_c}{R} \right)^2$$

$$= \frac{7}{10} m v_c^2 \quad U = 0$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{7}{10} mv_c^2$$

$$v_c = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

posição final

20-26 de abril

## 7. SISTEMAS DINÂMICOS

### 7.1. Equações diferenciais (EDO)

Exemplo: variáveis separáveis.

$$\text{v}_x = \dot{x} = f(x)g(t) \rightarrow \int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt$$

$$a_t = f(s)g(v) = v \frac{dv}{ds}$$

Forma geral

$$g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0 \quad \begin{matrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \end{matrix}$$

$t \rightarrow$  variável independente

$x \rightarrow$  variável dependente

EDO de 1ª ordem

$$g(t, x, \dot{x}) = 0 \xrightarrow{1 \text{ ou mais}} \dot{x} = f(t, x)$$

Solução geral: família de funções  $x(t)$  com uma constante arbitrária.

Exemplo.  $\dot{x} - x - t = 0 \rightarrow \dot{x} = x + t$

$$\Rightarrow x(t) = C e^t - t - 1$$

Solução particular: verifica uma condição inicial  
( $t_0, x_0$ )

Exemplo.  $\dot{x} = x + t$ , em  $t=0, x=3$

$$\Rightarrow x(t) = 4 e^t - t - 1$$

## EDO autónomas

$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0$  a variável independente,  $t$ , não aparece de forma explícita.  
 $x(t)$

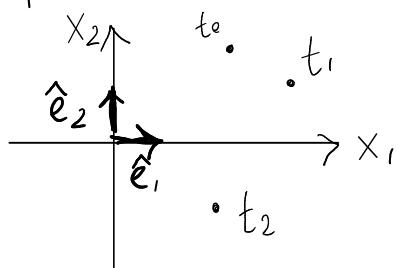
Exemplo.  $\ddot{x} = g \cdot x$  (SI) (veloc. em queda livre)

## 7.2 Sistemas de equações diferenciais autónomas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

caso com duas variáveis dependentes  $x_1(t), x_2(t)$  e de 1ª ordem

### Espaço de fase

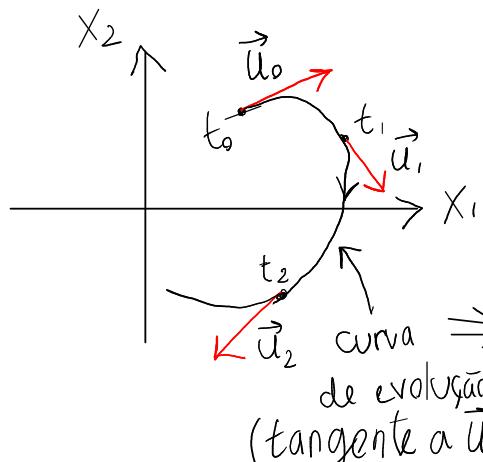


estado do sistema no instante  $t$  é  $(x_1(t), x_2(t))$

ponto do espaço de fase

### Velocidade de fase

$$\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\hat{e}_2 \quad (\vec{u}(t))$$



$f_1(x_1, x_2)$  = aumento de  $x_1$ , por unidade de  $t$

$f_2(x_1, x_2)$  = aumento de  $x_2$ , por unidade de  $t$

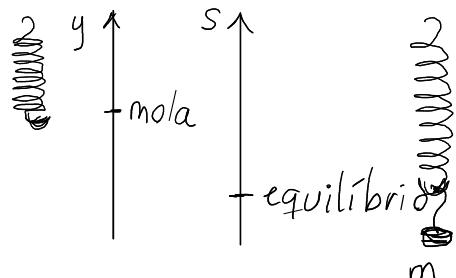
$\vec{u} = \text{deslocamento (vetorial)}$  do estado, por unidade de  $t$ .

Sistema dinâmico.  $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 \\ \dot{x}_2 = f_2 \end{cases} \rightarrow \vec{u} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2$

$\Rightarrow$  encontrar a evolução do sistema, a partir dum estado inicial  $x_0 \Leftrightarrow$  trajetória dum ponto, no espaço de fase, com velocidade  $\vec{u}(x_1, x_2)$  conhecida.

Oscilador harmônico simples

$$ma_t = -ks \quad (s = y + \frac{mg}{k})$$



equações de evolução

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\Omega^2 s \end{cases} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{freq. angular}$$

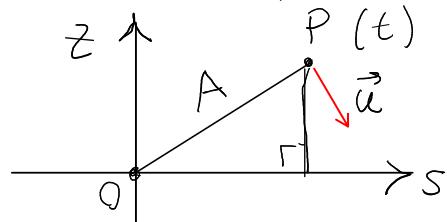
$$\text{substitui-se } v \text{ por } z = \frac{v}{\Omega} \quad v = \Omega z \quad \dot{v} = \Omega \dot{z}$$

$$\begin{cases} \dot{s} = \Omega z \\ \dot{z} = -\Omega s \end{cases} \quad \text{Estado} \rightarrow P = (s, z)$$

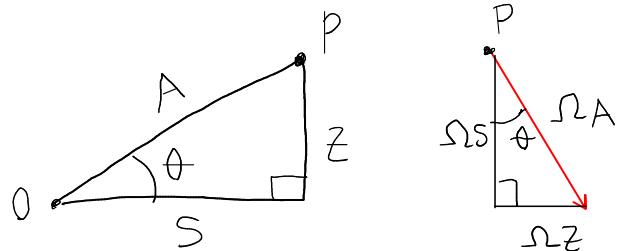
Espaço de fase

velocidade de fase

$$\vec{u} = (\Omega z, -\Omega s)$$



$$|\vec{u}| = \Omega \sqrt{z^2 + s^2} = \Omega A \quad (A = \sqrt{z^2 + s^2} = \overline{OP})$$



triângulos semelhantes

$\Rightarrow \vec{u}$  é perpendicular a  $\overline{OP}$  e tem módulo  $A\Omega$

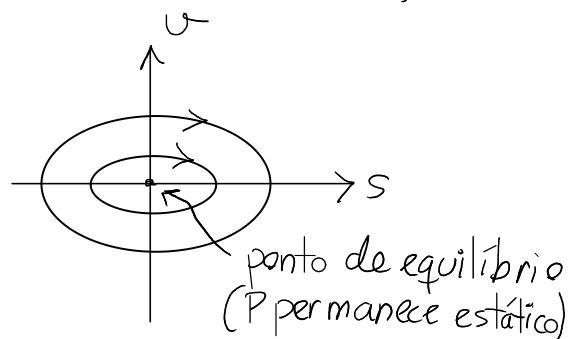
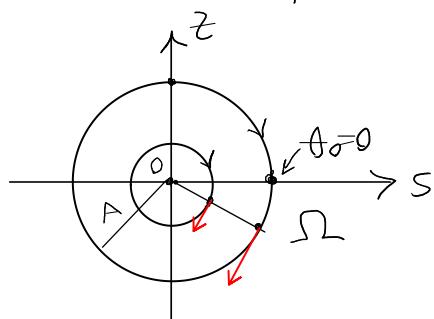
$\rightarrow$  trajetória de P (no espaço de fase) circular, com raio A, com velocidade constante  $A\Omega$

$\Rightarrow$  mov. de P = mov. circular uniforme, com velocidade angular  $\Omega$

$$\theta = \theta_0 - \Omega t \quad \theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\Omega s_0}\right) \quad (\text{em } t=0)$$

$$\begin{cases} s = A \cos \theta \\ z = A \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = A \cos(\Omega t - \theta_0) \\ v = -\Omega A \sin(\Omega t - \theta_0) \end{cases}$$

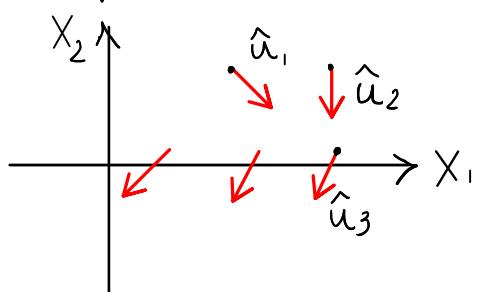
Retrato de fase (possíveis curvas de evolução)



As diferentes curvas de evolução caracterizam-se por diferentes valores da amplitude  $A = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2}$   
(condições iniciais)

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

## Campos de direções



Programa plotdf do Maxima  
(xmaxima)

$\text{plotdf}([u_1, u_2], [x_1, x_2], \underbrace{\text{domínio}}_{x_1, x_2})$

Exemplo:  $\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -0.8s \end{cases}$  (oscilador harmônico com)  $k/m = 0.8$

No Maxima:

$\text{plotdf}([v, -0.8*s], [s, v], [-6, 6], [-6, 6]);$   
mostra o campo de direções. Clicando num ponto do gráfico, aparece a curva de evolução que passa por esse ponto. O programa plotdf tem várias opções. Por exemplo:

$\text{plotdf}([v, -0.8*s], [s, v], [-6, 6], [-6, 6], [\text{vectors}, ""], [\text{trajectory-at}, 4, 0]);$   
não mostra os vetores do campo de direções, mas mostra a curva de evolução que passa por  $(s, v) = (4, 0)$

EQU de 2<sup>a</sup> ordem, autónoma

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema dinâmico} \\ \text{com duas} \\ \text{variáveis de} \\ \text{estado } (x, y) \end{array}$$

Exemplo

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s \rightarrow \begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}s \end{cases}$$

### 7.3. Pontos de equilíbrio

ponto do espaço de fase onde  $\vec{u} = \vec{0}$   
 estado inicial = ponto de equilíbrio  $\rightarrow$  o sistema permanece  
 sempre nesse estado.

Exemplo 7.2.  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1 \end{cases}$

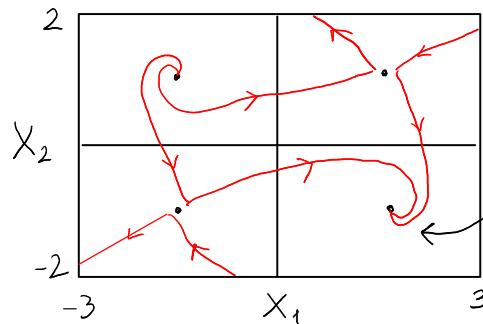
No Maxima:

$$u_1: 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \leq 0$$

$$u_2: x_2^2 - x_1^2 + 1 \leq 0$$

float(solve([u1, u2])); mostra 4 pontos de equilíbrio  
 (soluções reais)

plotdf([u1, u2], [x1, x2], [x1, -3, 3], [x2, -2, 2]);



mostra os quatro  
 pontos de equilíbrio  
 a maioria das curvas  
 de evolução aproximam-  
 se deste ponto

Exemplo 7.3. A componente tangencial da Força resultante  
 num objeto com 0.3 kg é:

$$F_t = -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \quad (SI) \quad (s = \text{pos. na trajetória})$$

Resolução:  $\begin{cases} \dot{s} = v \\ \ddot{v} = \frac{F_t}{m} = \frac{10}{3} \left( -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) \end{cases}$

pontos de equilíbrio:  $v=0$  e  $F_t=0$   
 (eixo das abscissas)

Maxima:

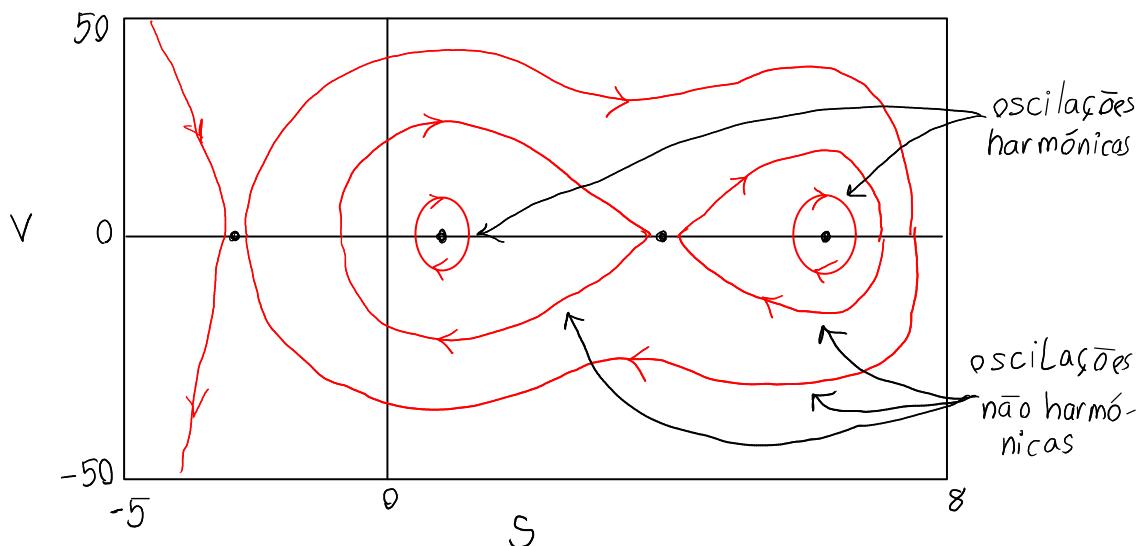
$$F_t: -S^4/2 + 4 \cdot S^3 - 3 \cdot S^2/2 - 32 \cdot S + 25 = 0$$

a posição  $S$  dos pontos de equilíbrio são as raízes reais de  $F_t$ :

`float(realroots(Ft));`  
mostra 4 raízes  $\rightarrow -2.65, 0.81, 3.95, 5.89$

Retrato de fase:

`plotdf([v, 10*Ft/3], [s, v], [s, -5, 8], [v, -50, 50]);`



Equilíbrio estável e instável

ponto de equilíbrio  $P$  {

- estável: o estado aproxima-se ou mantém-se próximo de  $P$
- instável: o estado afasta-se de  $P$

No exemplo 7.2, o retrato de fase mostra que os pontos de equilíbrio no 1º, 2º e 3º quadrantes do plano  $X_1X_2$  são instáveis, enquanto que o ponto de equilíbrio no 4º quadrante é estável.

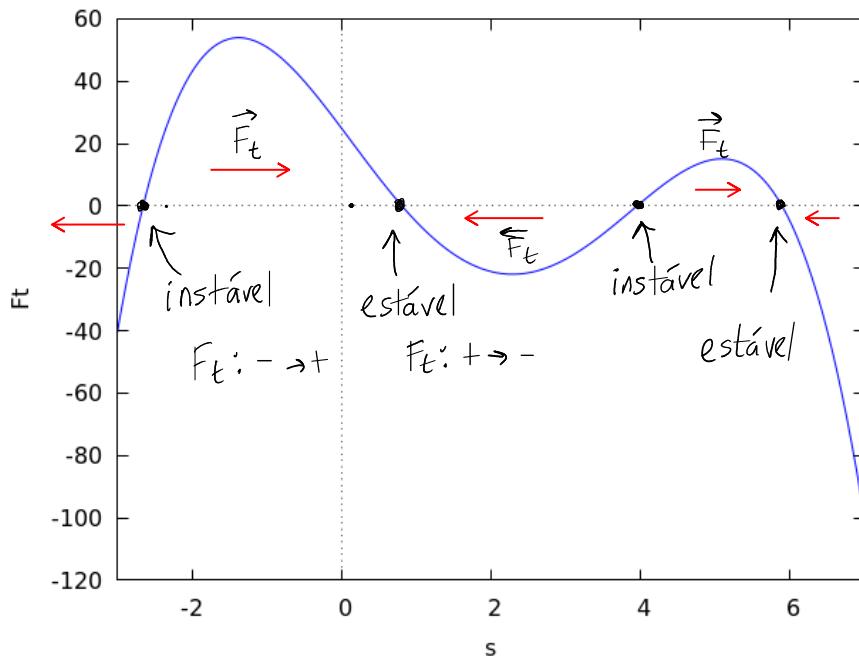
A maior parte de estados iniciais conduzem a que  $(X_1, X_2)$  se aproximem das coordenadas desse ponto.

No exemplo 7.3, os pontos de equilíbrio em  $s = -2.65$  e  $s = 3.95$

são instáveis, e os pontos em  $s = 0.81$  e  $s = 5.89$  são estáveis.

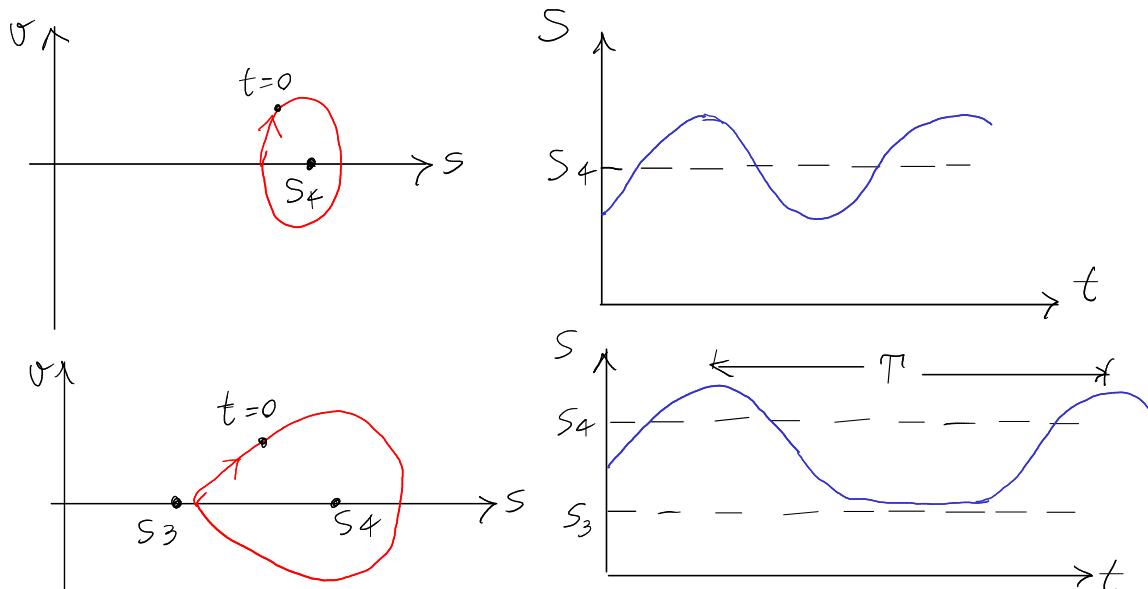
Nesse exemplo, a estabilidade do sistema também podia ser determinada observando o gráfico de  $F_t$ :

```
plot2d(Ft,[s,-3,7],[ xlabel,"s"], [ ylabel,"F_t"]);
```

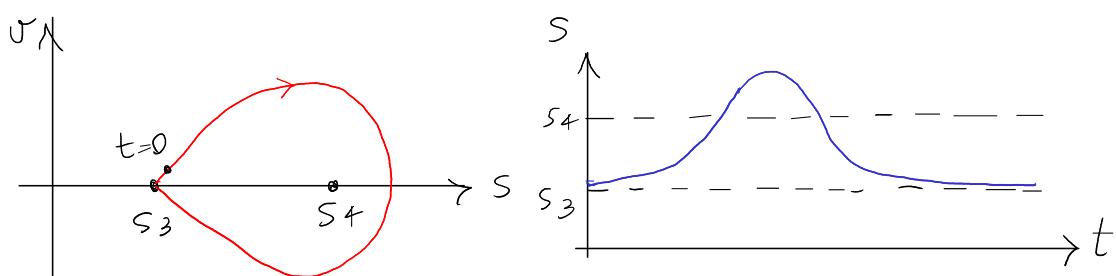


## Ciclos e órbitas

**Ciclo.** Curva de evolução fechada. O sistema oscila periodicamente



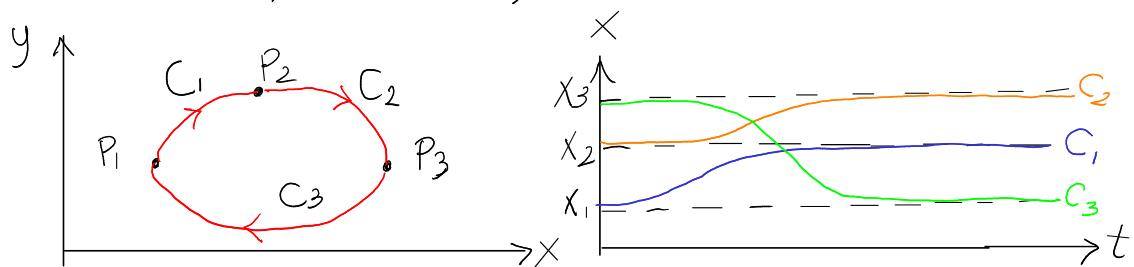
**Órbita homoclínica.** Curva de evolução fechada, com um ponto de equilíbrio instável.



oscilação não periódica (solitão)

**Órbita heteroclínica.** \$n\$ curvas de evolução (\$C\_i\$), e \$n\$ pontos de equilíbrio instável (\$P\_i\$) (\$n > 1\$)

$$C_1: P_1 \rightarrow P_2, C_2: P_2 \rightarrow P_3, \dots, C_n: P_n \rightarrow P_1$$



### 7.4. Sistemas conservativos (hamiltonianos)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{é conservativo se:} \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$

$$\vec{u} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \text{divergência da velocidade de fase}$$

É possível encontrar  $H(x_1, x_2)$  (hamiltoniana) tal que:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad f_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

observe que:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

Basta saber  $H(x_1, x_2)$  para saber quais as equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \quad \text{equações de Hamilton}$$

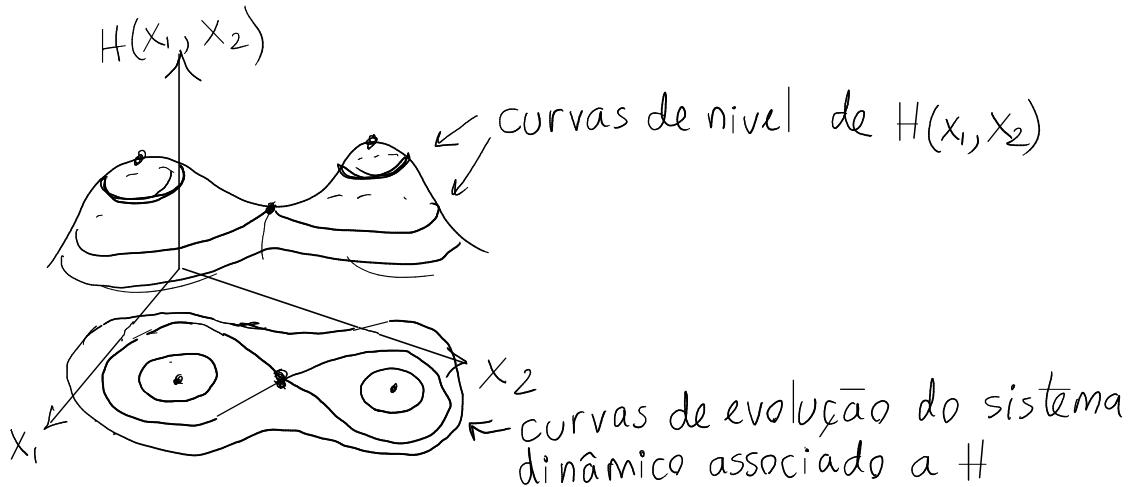
variação de  $H$  em ordem a  $t$ :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

nas curvas de evolução do sistema associado a  $H$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (H \text{ é constante})$$

$\Rightarrow$  As curvas de evolução do sistema dinâmico são as curvas são constantes (curvas de nível de  $H(x_1, x_2)$ )



Exemplo 7.3.

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = \frac{10}{3} \left( -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{10}{3} \left( -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) \right) = 0 + 0 = 0$$

$(s, v)$   $\Rightarrow$  sistema conservativo

$$\frac{\partial H}{\partial v} = v \Rightarrow H = \int v \, dv = \frac{v^2}{2} + f(s)$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = f'(s) = -\frac{10}{3} \left( -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right)$$

$$f(s) = - \int \frac{10}{3} \left( -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) ds \quad (= -\frac{1}{m} \int F_t \, ds)$$

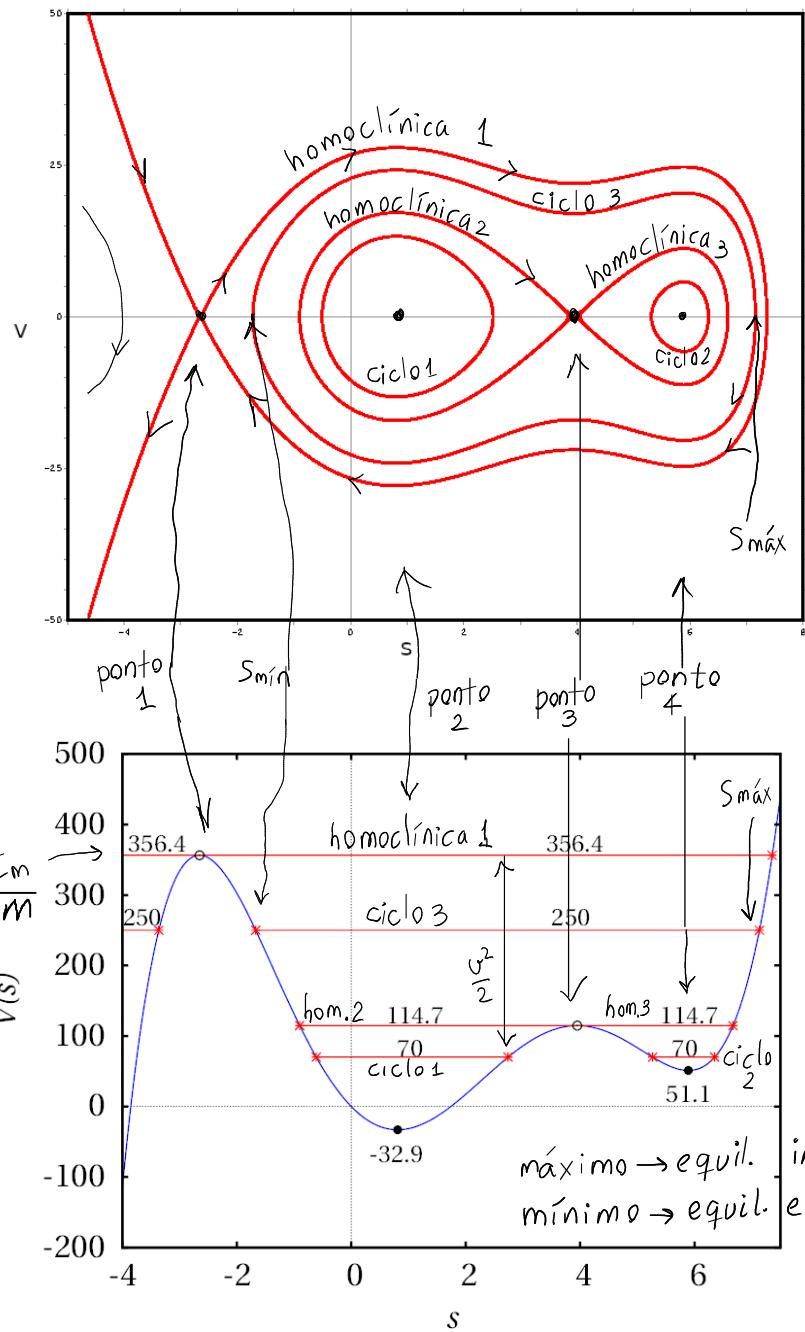
$$(f(s) = \frac{v(s)}{m} = V(s) = \text{potencial}) \quad (v = \text{energia potencial})$$

$$f(s) = \frac{s^5}{3} - \frac{10}{3}s^4 + \frac{5}{3}s^3 + \frac{160}{3}s^2 - \frac{250}{3}s = V(s)$$

$$H(s, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{U(s)}{m} = \frac{E_c + U}{m} = \frac{E_m}{M} \quad (\text{constante})$$

Gráficos no Maxima:

```
ploteq(H,[s,v],[s,-5,8],[v,-50,50]);
plot2d(V,[s,-4,7.5],[ylabel,"V(s)"]);
```

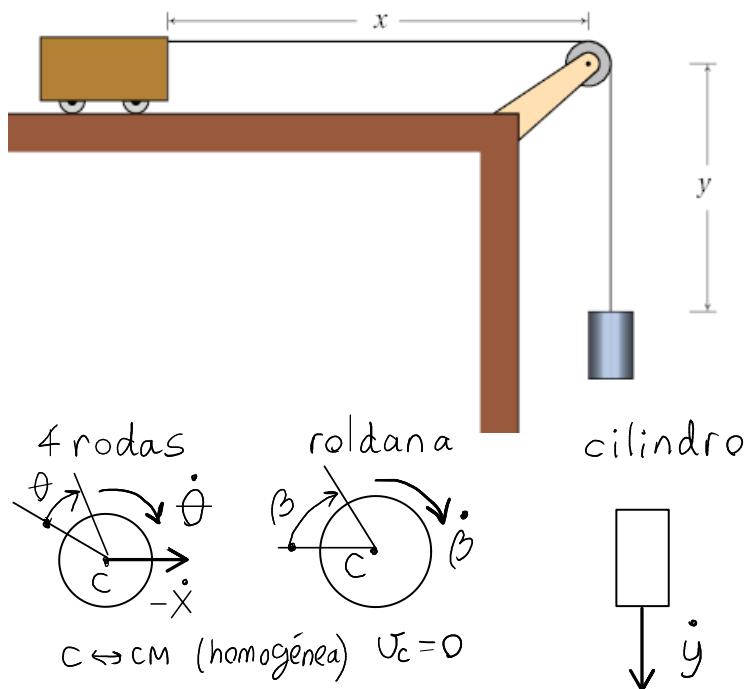


## 8. MECÂNICA LAGRANGIANA

### 8.1 Graus de liberdade e espaço de fase

Sistemas com varios corpos rígidos em movimento.

Exemplo:



4 variáveis dependentes de  $t \rightarrow x, y, \theta, \beta$

4 velocidades  $\rightarrow \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\beta}$

condições de ligação

① Comprimento do fio:  $x + y = \text{const.} \Leftrightarrow \dot{x} = -\dot{y}$

② as rodas rodam sem deslizar na mesa

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram: wheel rotating with } \dot{\theta}, \text{ center } C \text{ has } v=0. & -\dot{x} = r_1 \dot{\theta} & \Leftrightarrow r_1 \dot{\theta} + x = \text{const.} \end{array}$$

③ o fio não desliza na roldana

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram: pulley rotating with } \dot{\beta}, \text{ center } C \text{ has } v_C = 0. & \dot{y} = r_2 \dot{\beta} & \Leftrightarrow r_2 \dot{\beta} - y = \text{const.} \end{array}$$

Sistema com um grau de liberdade  $\rightarrow q$   
duas variáveis de estado  $\rightarrow (q, \dot{q})$   
uma equação de movimento  $\rightarrow \ddot{q} = f(q, \dot{q})$   
velocidade de fase  $\rightarrow \vec{u} = (\dot{q}, f(q, \dot{q}))$

Sistemas com  $n$  graus de liberdade

$n$  coordenadas generalizadas  $\rightarrow q_1, q_2, \dots, q_n$   
 $n$  velocidades generalizadas  $\rightarrow \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$

Espaço de fase com  $2n$  dimensões

estado  $\rightarrow (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

$n$  equações de movimento:

$$\ddot{q}_i = f_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad i=1, 2, \dots, n$$

velocidade de fase:

$$\vec{u} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, f_1, \dots, f_n)$$

esta expressão permite-nos construir o campo de direções e obter as curvas de evolução do sistema.

O objetivo deste capítulo é mostrar um método para determinar as equações de movimento.

## Equações de Lagrange

Energia cinética:  $E_c(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{j=1}^{\text{num.corpos}} E_{cj}$

Energia potencial:  $U(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^{\text{num.corr.}} U_j$

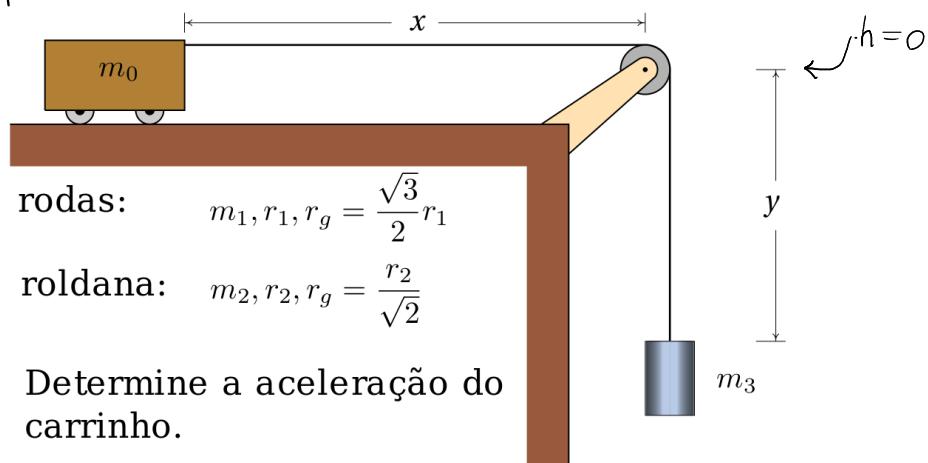
Por cada grau de liberdade há uma equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

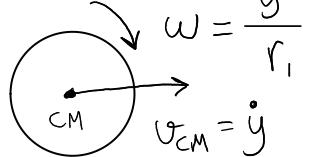
$Q_i$  = força generalizada: aumenta-se  $q_i$  em  $\delta q_i$   
 $\Rightarrow$  o ponto  $\vec{r}$  onde atua uma força não-conservativa  $\vec{F}$   
 deslocar-se-á em  $\delta \vec{r}$  (deslocamento virtual)  
 $\Rightarrow \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$  (trabalho virtual)

$$Q_i = \sum_{\text{não cons.}} \frac{\vec{F} \cdot \delta \vec{r}}{\delta q_i}$$

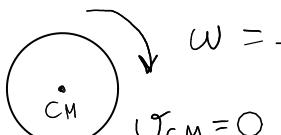
Exemplo.



1 grau de liberdade. Estado:  $(y, \dot{y})$

roda: 

$$\omega = \frac{\dot{y}}{r_1} \quad I_{CM} = m_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r_1 \right)^2 = \frac{3}{4} m_1 r_1^2$$

rodana: 

$$\omega = \frac{\dot{y}}{r_2} \quad I_{CM} = m_2 \left( \frac{r_2}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$E_c = \frac{m_0}{2} \dot{y}^2 + \frac{4}{2} m_1 \dot{y}^2 + \cancel{\frac{4}{2} \left( \frac{3}{4} m_1 r_1^2 \right) \left( \frac{\dot{y}^2}{r_1^2} \right)} + \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{2} r_2^2 \right) \left( \frac{\dot{y}^2}{r_2^2} \right) + \frac{m_3}{2} \dot{y}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left( m_0 + 4m_1 + 3m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \right) \dot{y}^2$$

$$U = -m_3 g y \text{ (t constantes)}$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} \text{(desprezando a resist.)} \\ \text{do ar e o atrito} \\ \text{cinético nos eixos} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \left( m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \right) \dot{y} \right) - m_3 g = 0$$

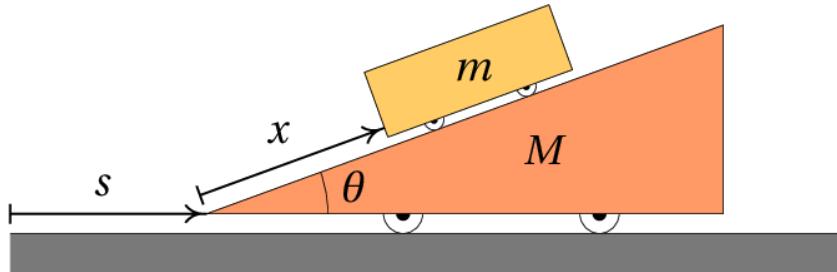
$$\left( m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \right) \ddot{y} = m_3 g$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{m_3 g}{m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3}}$$

constante

$$\lim_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ m_1 \rightarrow 0 \\ m_2 \rightarrow 0}} \dot{y} = g$$

### Exemplo 8.1



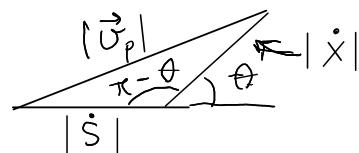
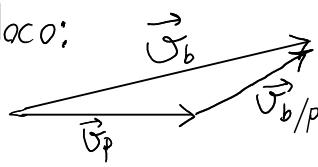
rodas com massa e atrito cinético no eixo desprezáveis.  
Encontre as equações de movimento do sistema.

2 graus de liberdade. Estado  $\rightarrow (s, x, \dot{s}, \dot{x})$

$$\text{velocidade do plano inclinado: } \vec{\omega}_p \rightarrow \omega_p^2 = \dot{s}^2$$

$$\text{veloc. do bloco, relativa ao plano: } \vec{\omega}_{b/p} \rightarrow |\vec{\omega}_{b/p}| = \dot{x}$$

veloc. do bloco:



$$\omega_p^2 = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{s}\dot{x}\cos(\pi - \theta) = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta$$

$$E_c = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta)$$

$$U = mg \times \sin\theta$$

$$1 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (M\ddot{s} + m\ddot{s} + m\dot{x}\cos\theta) = 0$$

$$(M+m)\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\theta = 0$$

$$2 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\ddot{x} + m\dot{s}\cos\theta) + mg\sin\theta = 0$$

$$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{m\ddot{s}\cos\theta} + \cancel{mg\sin\theta} = 0$$

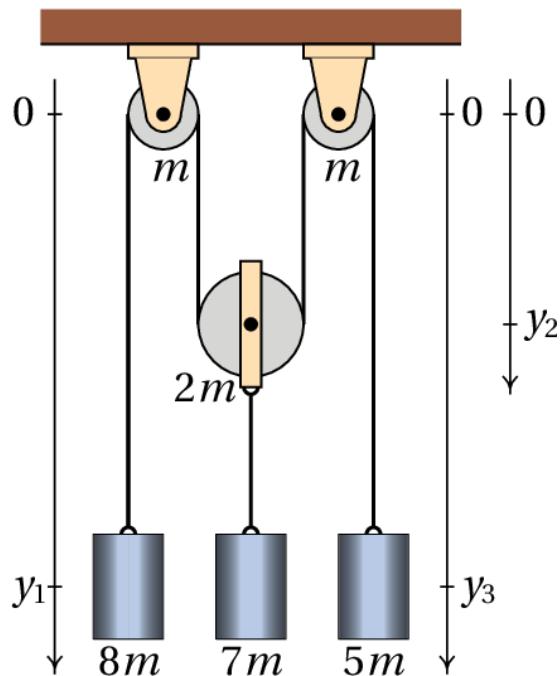
$$(M+m)\ddot{s} = m\cos\theta(\ddot{s}\cos\theta + g\sin\theta)$$

$$\ddot{s} = \frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \quad \text{constante} > 0$$

$$\ddot{x} = -g\sin\theta - \ddot{s}\cos\theta = -g\sin\theta - \frac{mg\cos^2\theta\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta}$$

$$\ddot{x} = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \quad \text{constante} < 0$$

### Exemplo 8.2



O fio tem massa desprezável e não desliza sobre as roldanas.

As roldanas são discos homogéneos com atrito no eixo desprezável.

$7m$  é a massa do cilindro do meio mais o suporte da roldana móvel.

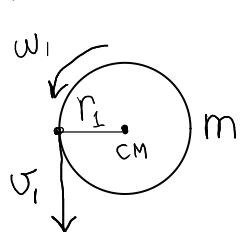
Determine as acelerações dos 3 cilindros.

Sistema com 2 graus de Liberdade:  $y_1, y_2$

comprimento do fio:  $y_1 + 2y_2 + y_3 = k$  (constante)

Estado  $\rightarrow (y_1, y_2, v_1, v_2)$  (tanto faz usar  $\dot{y}_i$  ou  $v_i$ )

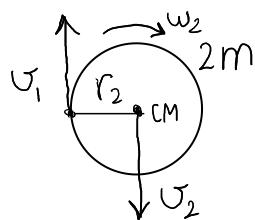
Roldana 1:



$$\omega_{CM} = 0 \quad \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} \quad I_1 = m \left( \frac{r_1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$I_1 = \frac{m}{2} r_1^2$$

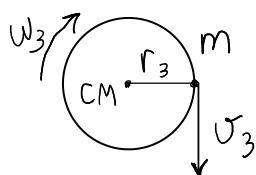
Roldana 2:



$$v_{CM} = v_2 \quad \omega_2 = \frac{v_1 + v_2}{r_2} \quad I_2 = 2m \left( \frac{r_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$I_2 = mr_2^2$$

Roldana 3:



$$v_{CM} = 0 \quad \omega_3 = \frac{v_3}{r_3} \quad I_3 = \frac{m}{2} r_3^2$$

Resolução no Maxima. Começa-se por definir as derivadas das variáveis de estado em ordem a t

```
(%i1) gradef(y1,t,v1)$
(%i2) gradef(y2,t,v2)$
(%i3) gradef(v1,t,a1)$
(%i4) gradef(v2,t,a2)$
```

Define-se a 3<sup>a</sup> variável e as suas derivadas em relação às variáveis de estado:

```
(%i5) y3: k-y1-2*y2$  

(%i6) v3: diff(y3,t);  

(%o6) (- 2 v2) - v1  

(%i7) a3: diff(v3,t);  

(%o7) (- 2 a2) - a1
```

Expressões das energias cinética e potencial:

```
(%i8) Ec: expand(8*m*v1^2/2+7*m*v2^2/2+5*m*v3^2/2+2*m*v2^2/2  

+ (m*r1^2/2)*(v1/r1)^2/2+(m*r2^2)*((v1+v2)/r2)^2/2  

+ (m*r3^2/2)*(v3/r3)^2/2);  

(%o8) 
$$\frac{16 m v2^2 + 12 m v1 v2 + \dots}{2}$$
  

(%i9) U: expand(-8*m*g*y1-7*m*g*y2-2*m*g*y2-5*m*g*y3);  

(%o9) 
$$\frac{g m y2^2 - 3 g m y1^2 - 5 g k m}{2}$$

```

Já podemos aplicar as 2 equações de Lagrange:

```
(%i10) e1: diff(diff(Ec,v1),t)-diff(Ec,y1)+diff(U,y1)=0;  

(%o10) (- 3 g m) + 12 a2 m + 15 a1 m = 0  

(%i11) e2: diff(diff(Ec,v2),t)-diff(Ec,y2)+diff(U,y2)=0;  

(%o11) g m + 32 a2 m + 12 a1 m = 0
```

E resolvé-las para encontrar as acelerações dos 3 cilindros:

```
(%i12) solve([e1,e2],[a1,a2]);  

(%o12) [[a1 =  $\frac{9 g}{28}$ , a2 =  $\frac{17 g}{112}$ ]]  

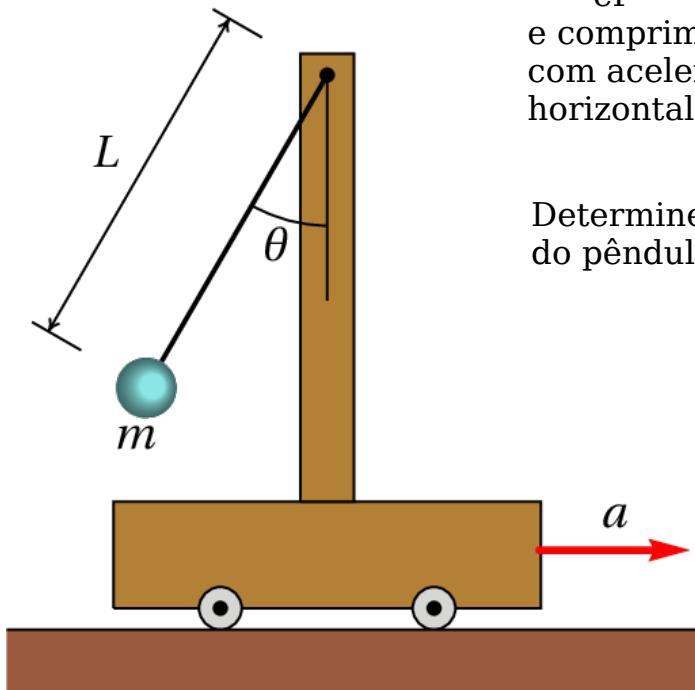
(%i13) subst(%,a3);  

(%o13) 
$$\frac{-\frac{g}{56}}{}$$

```

A aceleração do 1º cilindro é para baixo ( $a_1 > 0$ ) e as dos outros dois são para cima ( $a_2 < 0, a_3 < 0$ ).

## Exemplo 8.4



Pêndulo simples de massa  $m$  e comprimento  $L$ , num referencial com aceleração constante  $\vec{a}$ , horizontal.

Determine a posição de equilíbrio do pêndulo.

$$\text{Estado} \rightarrow (\theta, \omega) \quad \text{eq. de evolução} \rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \alpha \end{cases} \leftarrow f(\theta, \omega, t)$$

$$\vec{V}_{p/c} = (-\omega L \cos \theta, \omega L \sin \theta)$$

$$V_c = at \quad (t_0 = 0, V_0 = 0)$$

$$\vec{V}_c = (at, 0)$$

$$\vec{V}_p = \vec{V}_c + \vec{V}_{p/c}$$

$$|\vec{V}_{p/c}| = \omega L$$

Maxima:

```
(%i1) vc: [a*t, 0]$
(%i2) vpc: w*L* [-cos(q), sin(q)]$
(%i3) vp: vc+vpc;
(%o3) [a*t - L*cos(q)*w, L*sin(q)*w]
```

```
(%i4) Ec: m*trigsimp(vp.vp)/2;
          2   2
          m (L w - 2 L a cos(q) t w + a t )
(%o4)
          -----
          2

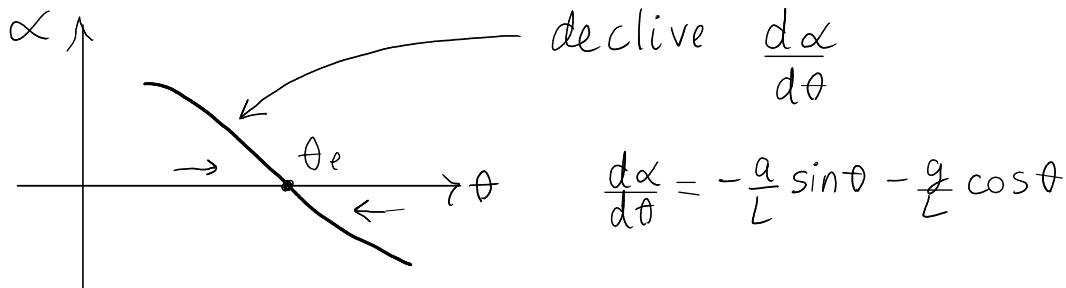
(%i5) U: -m*g*L*cos(q)$
(%i6) gradef(q,t,w)$
(%i7) gradef(w,t,alfa)$
(%i8) diff(diff(Ec,w),t) - diff(Ec,q) + diff(U,q) = 0$
(%i9) solve(%,alfa);
(%o9) [alfa = - -----]
                           g sin(q) - a cos(q)
                           L
```

$$\alpha = \frac{a}{L} \cos\theta - \frac{g}{L} \sin\theta$$

Pontos de equilíbrio:  $\omega=0, \alpha=0$

$$a \cos\theta_e - g \sin\theta_e = 0 \Rightarrow \tan\theta_e = \frac{a}{g} \Rightarrow \theta_e = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

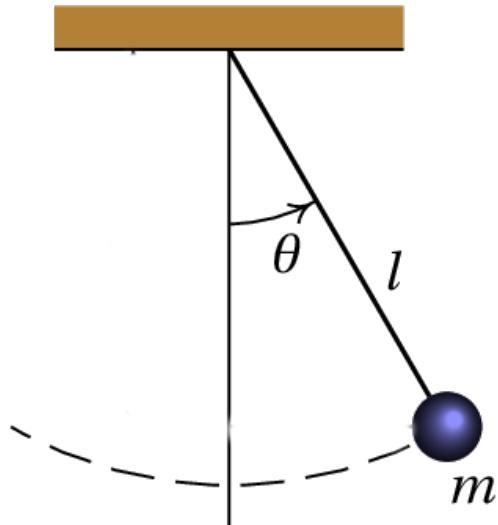
apenas um ponto,  $0 < \theta_e < \frac{\pi}{2}$ , porque se  $\pi < \theta_e < \frac{3\pi}{2}$ , com  $\omega=0$  o fio não ficava esticado.



Como  $0 < \theta_e < \pi/2 \Rightarrow \cos\theta_e > 0, \sin\theta_e > 0, \frac{d\alpha}{d\theta} < 0$   
 $\Rightarrow \theta_e$  é ponto de equilíbrio estável.

Um pêndulo simples pode ser usado para medir a aceleração dum referencial. Se nesse referencial o pêndulo fica em repouso com um ângulo  $\theta_e$  com a vertical  $\Rightarrow a = g \tan(\theta_e)$

## Exemplo 8.5



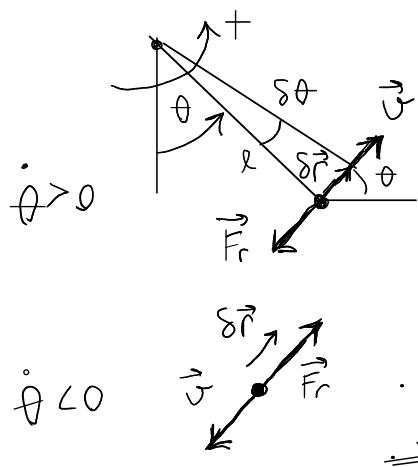
Pêndulo simples, incluindo a resistência do ar.

Determine a equação de movimento.

Estado  $\rightarrow (\theta, \dot{\theta})$

$$|\vec{v}| = \ell \dot{\theta}$$

$C$  constante aerodinâmica



$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$$

$$|\delta \vec{r}| = \ell \delta\theta$$

$$\frac{\vec{F}_r \cdot \delta \vec{r}}{\delta\theta} = \begin{cases} -C \ell^3 \dot{\theta}^2 & (\dot{\theta} > 0) \\ +C \ell^3 \dot{\theta}^2 & (\dot{\theta} < 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_\theta = -C \ell^3 |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2, U = -mg \ell \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mg \ell \sin \theta = -C \ell^3 |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{C \ell}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

## FORÇAS DE LIGAÇÃO

$n$  graus de liberdade  $\rightarrow q_1, q_2, \dots, q_n$

Força de ligação  $\lambda \rightarrow$  associada a uma condição de

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}) = \text{constante}$$

que permite substituir  $q_{n+1}$  pelas var. generalizadas

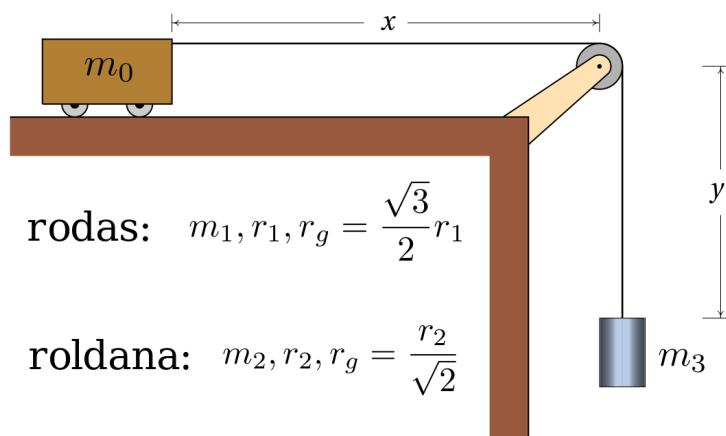
### Método dos multiplicadores de Lagrange

Determinar  $\lambda$ : admite-se mais uma variável  $q_{n+1}$  e acrescenta-se um termo  $-\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$  a cada eq. de Lagrange multiplicador

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

resolvem-se simultaneamente com  $f(q_1, \dots, q_{n+1}) = \text{const}$

Exemplo.

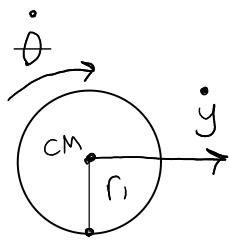


$$\text{rodas: } m_1, r_1, r_g = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1$$

$$\text{roldana: } m_2, r_2, r_g = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$$

um grau de liberdade  $\rightarrow y$

Força de atrito (estático) entre as rodas e a mesa =  $F_a$



$\vec{F}_a$  faz com que  $\dot{\vartheta}_p = 0 \Rightarrow \dot{y} = r_i \dot{\theta}$

$$f(y, \theta) = y - r_i \theta = \text{constante}$$

$$P \\ I_1 = \frac{3}{4} m_1 r_i^2$$

$\rightarrow 2$  variáveis:  $y, \theta$

$$E_c = \frac{1}{2} \left( m_0 + 4m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \right) \dot{y}^2 + \frac{3}{2} m_1 r_i^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = -m_3 g y$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - F_a \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} - F_a \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

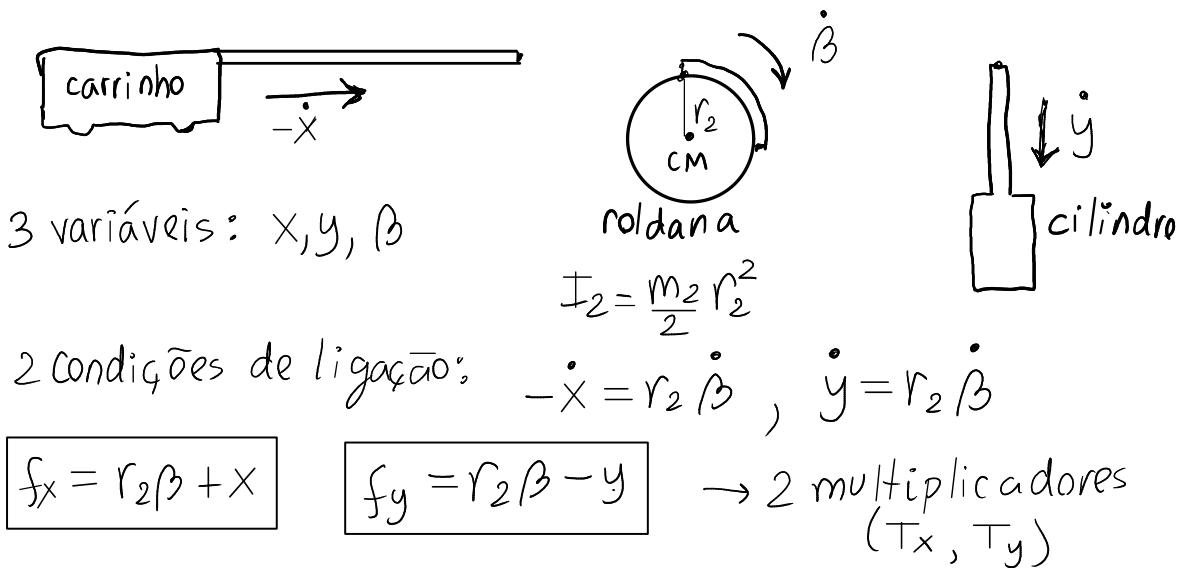
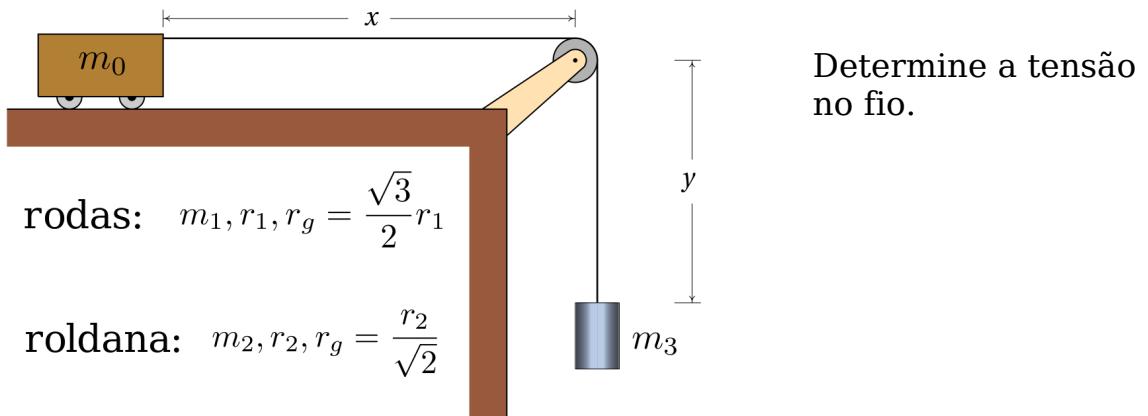
$$\begin{cases} (m_0 + 4m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3) \ddot{y} - m_3 g - F_a = 0 \\ 3m_1 r_i \ddot{\theta} + F_a \cancel{r_i} = 0 \\ \ddot{y} = r_i \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_0 + 4m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3) \ddot{y} + 3m_1 \ddot{\theta} = m_3 g \\ F_a = -3m_1 \ddot{y} \end{cases}$$

$$\ddot{y} = \frac{m_3 g}{m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3} \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{cilindro} \\ \xrightarrow{\vec{F}_a} \text{carrinho} \end{array}$$

$$F_a = - \frac{3m_1 m_3 g}{m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3} \quad \xleftarrow{\vec{F}_a}$$

## Exemplo com 2 multiplicadores de Lagrange



$$E_c = \frac{1}{2}(m_0 + 7m_1)\dot{x}^2 + \frac{m_2}{4}r_2^2\dot{\beta}^2 + \frac{m_3}{2}\dot{y}^2$$

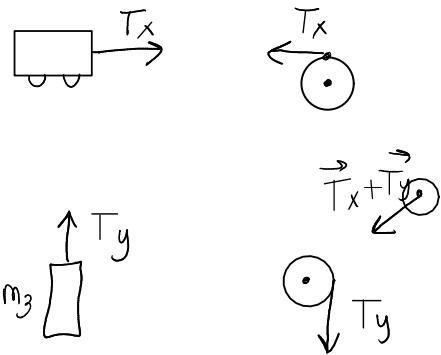
$$U = -m_3 g$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - T_x \frac{\partial f_x}{\partial x} - T_y \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - T_x \frac{\partial f_x}{\partial y} - T_y \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta} + \frac{\partial U}{\partial \beta} - T_x \frac{\partial f_x}{\partial \beta} - T_y \frac{\partial f_y}{\partial \beta} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_0 + 7m_1) \ddot{x} - T_x = 0 \quad -\ddot{x} = r_2 \ddot{\beta} \\ m_3 \ddot{y} - m_3 g + T_y = 0 \quad \ddot{y} = r_2 \ddot{\beta} \\ \frac{m_2}{2} r_2 \ddot{\beta} - T_x r_2 - T_y r_2 = 0 \quad (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\beta}, T_x, T_y) \end{array} \right.$$

$$T_x = - \frac{(m_0 + 7m_1) m_3 g}{m_3 + m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2}}$$

$$T_y = \frac{\left(m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2}\right) m_3 g}{m_3 + m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2}}$$



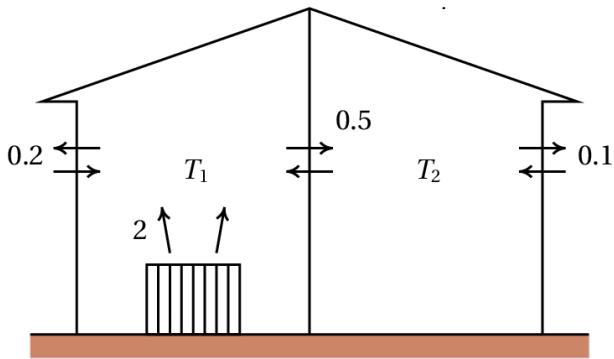
## 9. SISTEMAS LINEARES

4-10 de maio

## Exemplo 9.1

$T_1, T_2$ : temperaturas em 2 quartos.

Com as temperaturas em graus Celsius e o tempo em horas, os aumentos das temperaturas, por unidade de tempo, são:



$$\frac{dT_1}{dt} = 2 - 0.2(T_1 - 8) - 0.5(T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -0.1(T_2 - 8) - 0.5(T_2 - T_1)$$

Determine as temperaturas após um tempo elevado.

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = -0.7T_1 + 0.5T_2 + 3.6 \\ \dot{T}_2 = 0.5T_1 - 0.6T_2 + 0.8 \end{cases} \quad (\text{sistema Linear})$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \left( = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{velocidade} \\ \text{de fase} \end{array} \right)$$

pontos de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{solução única} \\ \downarrow \\ \text{um único ponto de equil.} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.42 - 0.25} \begin{bmatrix} -0.6 & -0.5 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.06 \\ 13.88 \end{bmatrix}$$

O retrato de fase,

$$\text{plotdf}([-0.7*T_1 + 0.5*T_2 + 3.6, 0.5*T_1 - 0.6*T_2 + 0.8], [T_1, T_2], [T_1, 10, 20], [T_2, 10, 20]);$$

mostra que o equil. é estável:  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_1 = 15.06$   $\lim_{t \rightarrow \infty} T_2 = 13.88$

Mudança de variáveis para deslocar a origem para

o ponto de equilíbrio:  $(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (T_1, T_2) = (15.06, 13.88)$

$$\begin{cases} x_1 = T_1 - 15.06 \\ x_2 = T_2 - 13.88 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{T}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{T}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## 9.1 Sistemas lineares em $\mathbb{R}^2$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec{r}} = \mathbb{A} \vec{r}} \quad \begin{array}{l} \vec{r} \rightarrow \text{vetor no} \\ \text{espaço de fase} \end{array}$$

$\uparrow \mathbb{A} \quad \uparrow \vec{r} \quad \mathbb{A} \rightarrow \text{operador linear}$

velocidade de fase:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \mathbb{A} \vec{r} = (A_{11}x_1 + A_{12}x_2, A_{21}x_1 + A_{22}x_2)$$

$(A_{11}, A_{21}) \rightarrow \vec{u}$  no ponto  $(1, 0)$

$(A_{12}, A_{22}) \rightarrow \vec{u}$  no ponto  $(0, 1)$

matriz inversa:  $\tilde{\mathbb{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \quad (\det \mathbb{A} \neq 0)$

$$\vec{r} = \vec{A}' \vec{u}$$

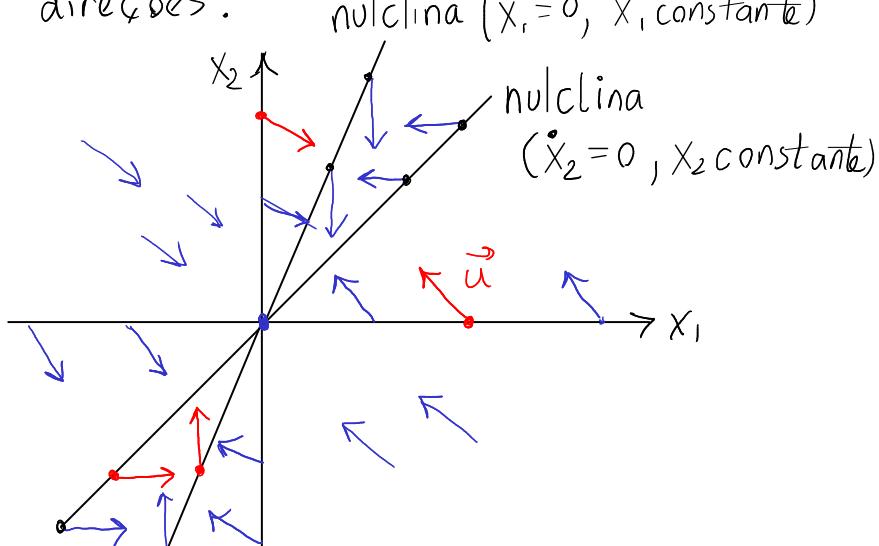
Propriedades:

- Existe um único ponto de equilíbrio,  $(0,0)$
- $\vec{u}$  é diferente em todos os pontos do espaço de fase.
- dado um vetor qualquer de  $\mathbb{R}^2$ , existe sempre um ponto no espaço de fase onde  $\vec{u}$  é igual a esse vetor.

$$\vec{u}(k\vec{r}) = \vec{A}(k\vec{r}) = k(\vec{A}\vec{r}) = k\vec{u}$$

- a direção de  $\vec{u}$  é a mesma em cada reta que passa pela origem.
- $\frac{(A_{22}, -A_{21})}{\det A}$  → ponto onde  $\vec{u} = (1,0)$
- $\frac{(-A_{12}, A_{11})}{\det A}$  → ponto onde  $\vec{u} = (0,1)$

Campo de direções:



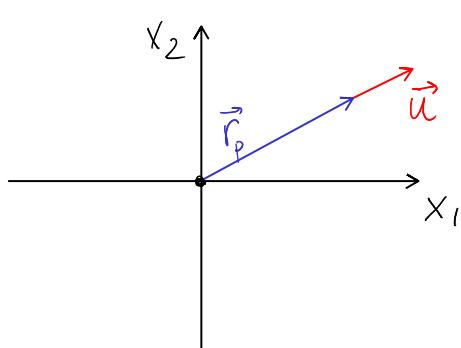
## 9.2 Estabilidade dos sistemas lineares

retas  $\lambda \vec{r}_p$  onde  $\vec{u}$  é na mesma direção de  $\vec{r}_p$ ?

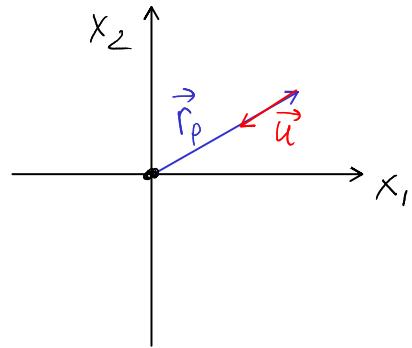
$$\Rightarrow \vec{u} = \mathbb{A} \vec{r}_p \Rightarrow \boxed{\mathbb{A} \vec{r}_p = \lambda \vec{r}_p} \quad \text{problema de valores próprios}$$

$\lambda$  = valor próprio de  $\mathbb{A}$ ,  $\vec{r}_p$  = vetor próprio de  $\mathbb{A}$

$$\lambda > 0$$



$$\lambda < 0$$

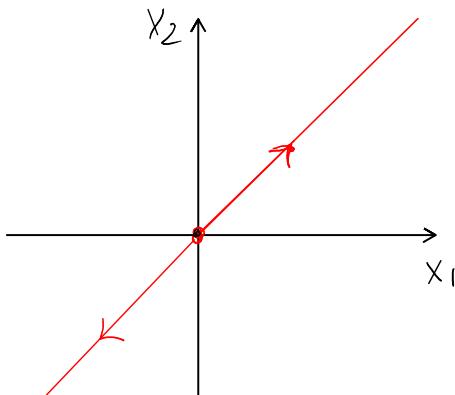


se  $\vec{r}_p$  for vetor próprio, com valor próprio  $\lambda$ ,  $k\vec{r}_p$  também é

$$\lambda > 0$$

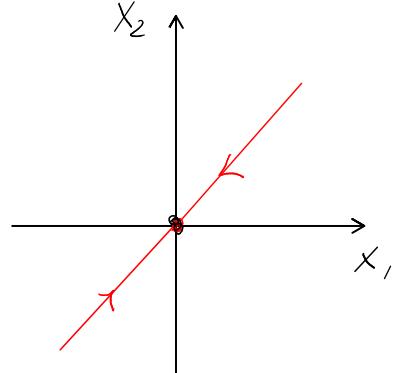
$$\lambda < 0$$

$$x_2$$



$$x_2$$

$$x_1$$



existem duas curvas de evolução retas, que se aproximam ( $\lambda < 0$ ) ou afastam ( $\lambda > 0$ ) do ponto de equilíbrio

**Exemplo 9.2**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.7x_1 + 0.5x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1 - 0.6x_2 \end{cases}$$

vetores/valores próprios:

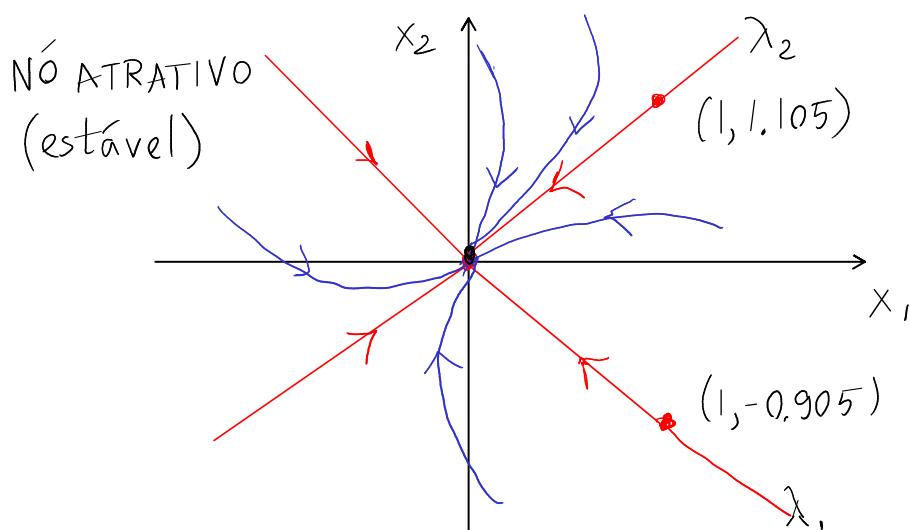
$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0.7-\lambda & 0.5 \\ 0.5 & -0.6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -0.7-\lambda & 0.5 \\ 0.5 & -0.6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

No Maxima, o comando eigenvectors encontra os vetores e valores próprios duma matriz:

```
(%i1) A: matrix([-0.7, 0.5], [0.5, -0.6]);
      [ - 0.7   0.5 ]
      [             ]
      [  0.5   - 0.6 ]
(%o1)
(%i2) float(eigenvectors(A));
(%o2) [[[[-1.152, -0.1475], [1.0, 1.0]], [[[1.0, -0.905]], [[1.0, 1.105]]]]]
```

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.152, \vec{r}_1 = k(1, -0.905) \\ \lambda_2 = -0.1475, \vec{r}_2 = k(1, 1.105) \end{cases}$$



### 9.3 Classificação dos pontos de equilíbrio

Problema de valores próprios:  $\mathbb{A}\vec{r}_p = \lambda\vec{r}_p$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - \text{tr}\mathbb{A}\lambda + \det\mathbb{A} = 0} \quad \text{polinômio característico de } \mathbb{A}$$

$$\text{traço de } \mathbb{A} = \text{tr}\mathbb{A} = A_{11} + A_{22}$$

$$\text{determinante de } \mathbb{A} = \det\mathbb{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

existem duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}\mathbb{A} \\ \lambda_1\lambda_2 = \det\mathbb{A} \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}\mathbb{A}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}\mathbb{A}}{2}\right)^2 - \det\mathbb{A}}$$

2 Valores próprios reais

$$\det\mathbb{A} < \left(\frac{\text{tr}\mathbb{A}}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ são dois números reais diferentes}$$

$\Rightarrow$  dois vetores próprios em  $\mathbb{R}^2$ :  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

$$A\vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_1, \quad A\vec{r}_2 = \lambda_2 \vec{r}_2$$

$$\begin{cases} A\vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r} \end{cases} \Rightarrow \text{solução particular} \quad \vec{r}(t) = k e^{\lambda_i t} \vec{r}_i$$

4 retas de evolução (soluções particulares):

$$\vec{r}(t) = k e^{\lambda_1 t} \vec{r}_1 \quad (k > 0)$$

$$\vec{r}(t) = k e^{\lambda_1 t} \vec{r}_1 \quad (k < 0)$$

$$\vec{r}(t) = k e^{\lambda_2 t} \vec{r}_2 \quad (k > 0)$$

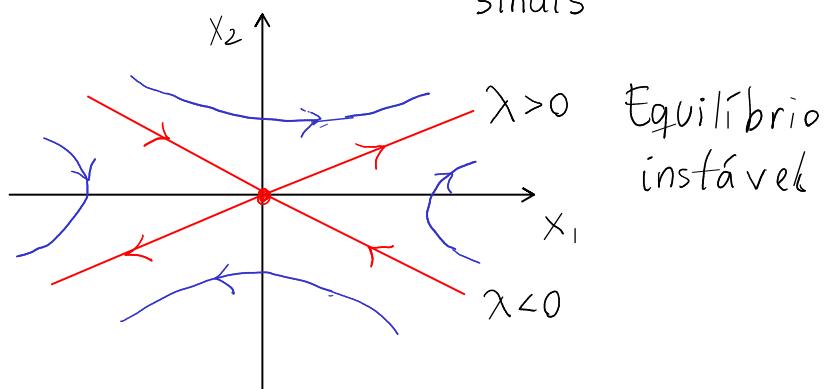
$$\vec{r}(t) = k e^{\lambda_2 t} \vec{r}_2 \quad (k < 0)$$

$$\text{Solução geral: } \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = C_1 \vec{r}_1 + C_2 \vec{r}_2 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

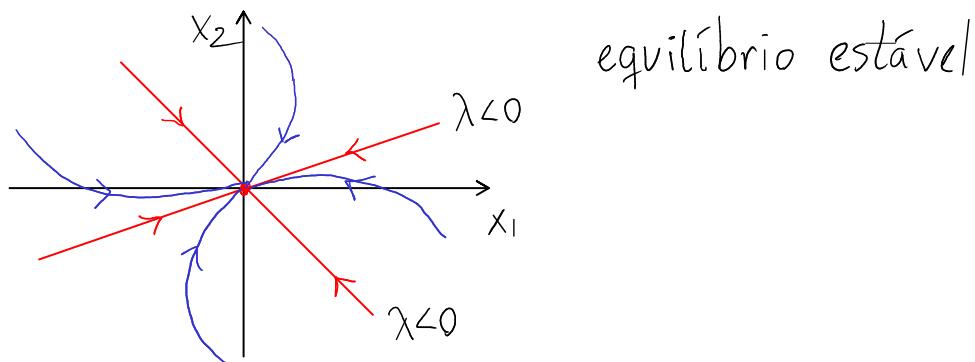
$$\boxed{\vec{r}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{r}_2}$$

① Pontos de sela. Se  $\det A < 0$

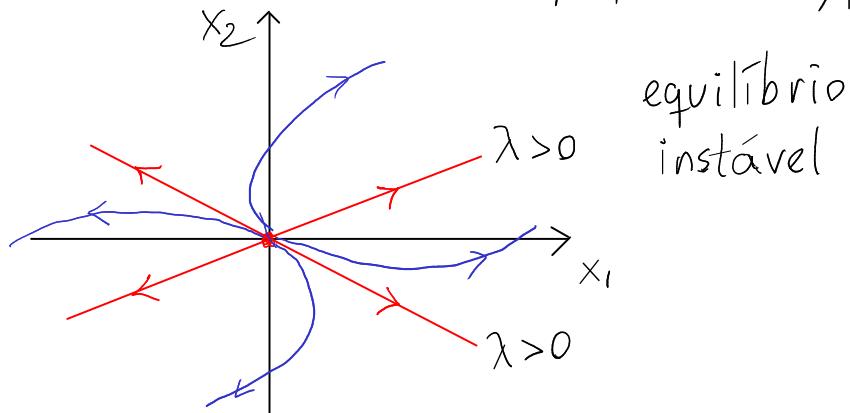
$\Rightarrow \lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e com diferentes sinais ( $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ )



- ② Nós atrativos.  $\det A > 0$ ,  $(\frac{\operatorname{tr} A}{2})^2 > \det A$   
 $\operatorname{tr} A < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$   
 dois valores próprios reais negativos.



- ③ Nós repulsivos.  $\det A > 0$ ,  $(\frac{\operatorname{tr} A}{2})^2 > \det A$   
 $\operatorname{tr} A > 0 \Rightarrow$  dois valores próprios reais, positivos



## 2 Valores próprios complexos

$$\det A > \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad \begin{cases} a = \frac{\operatorname{tr} A}{2} \\ b = \sqrt{\det A - \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2} \end{cases}$$

vetores próprios:  $\vec{r}_{1,2} = \vec{v}_1 \pm i\vec{v}_2$  ( $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  reais e independentes)  
solução (com valores complexos):

$$\vec{r}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{r}_2 = e^{at} (C_1 e^{ibt} \vec{r}_1 + C_2 e^{-ibt} \vec{r}_2)$$

para encontrar as soluções em  $\mathbb{R}^2$ : para um dado estado inicial  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2$  ( $k_1, k_2$  reais)

$$\text{usa-se } C_1 = \frac{1}{2}(k_1 - ik_2) \quad C_2 = \frac{1}{2}(k_1 + ik_2)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{e^{at}}{2} ((e^{ibt} + e^{-ibt})(k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2) - i(e^{ibt} - e^{-ibt})(k_2 \vec{v}_1 + k_1 \vec{v}_2))$$

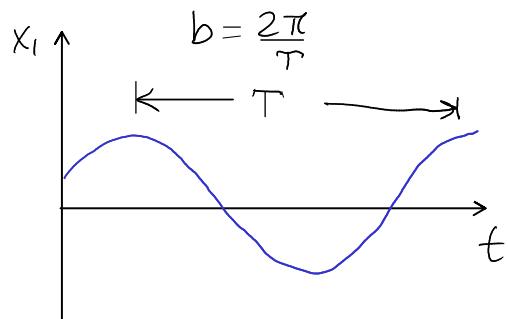
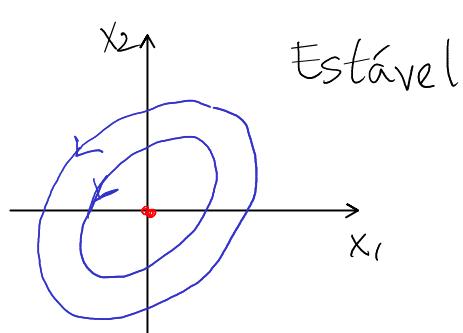
$$\boxed{\vec{r}(t) = e^{at} \cos(bt) \vec{r}_0 + e^{at} \sin(bt) \vec{g}} \quad \begin{matrix} \text{solução geral} \\ \text{nospaço de} \\ \text{fase} \end{matrix}$$

④ Centros  $\operatorname{tr} A = 0, \det A > 0$  ( $\det A > \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2$ )

$$\lambda_{1,2} = \pm ib \text{ (imaginários)} \quad b = \sqrt{\det A}$$

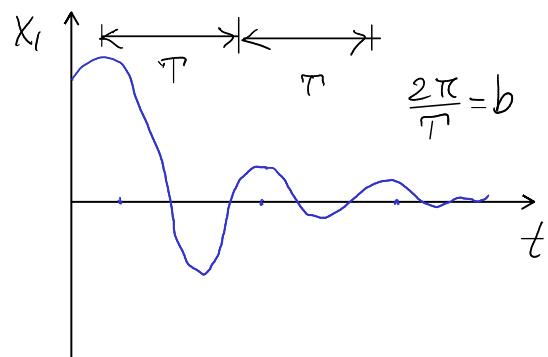
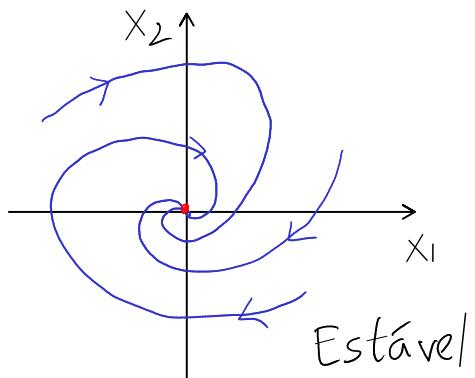
$$\vec{r}(t) = \cos(bt) \vec{r}_0 + \sin(bt) \vec{g}$$

$\Rightarrow$  todas as curvas de evolução são ciclos, com freq. angular  $b$  ( $b = \frac{2\pi}{T}$ )



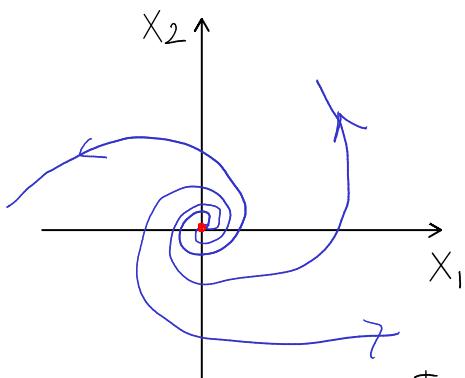
⑤ Focos atrativos  $\text{tr}A < 0, \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2 < \det A$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad a = \frac{\text{tr}A}{2} < 0$$

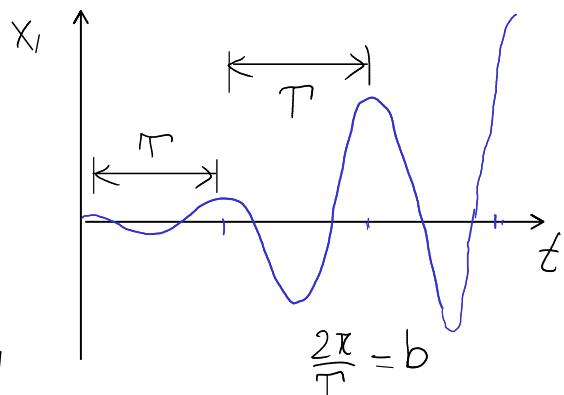


⑥ Focos repulsivos.  $\text{tr}A > 0, \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2 < \det A$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad a = \frac{\text{tr}A}{2} > 0$$



Instável



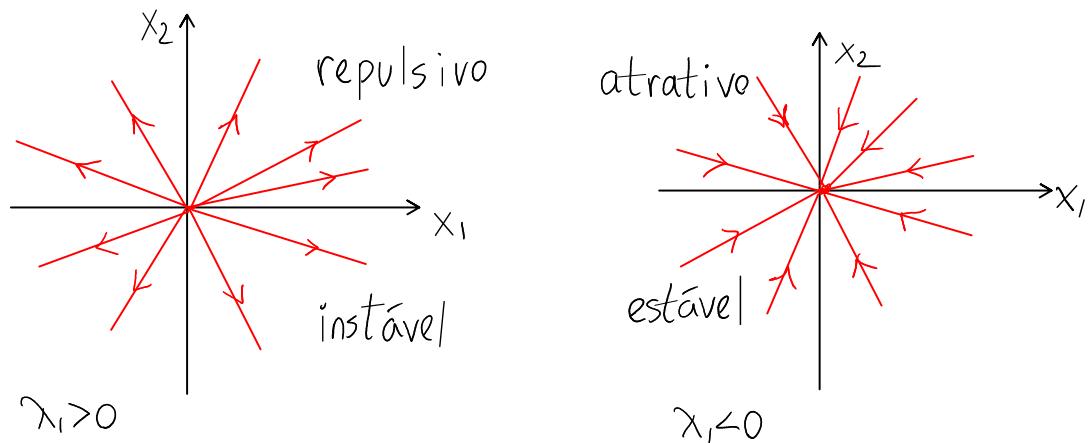
## Nós próprios e impróprios

$\det A = \left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2 \Rightarrow$  um único valor próprio:  $\lambda_1 = \frac{\text{tr } A}{2}$

polinómio característico:  $(\lambda - \frac{\text{tr } A}{2})^2 = 0$

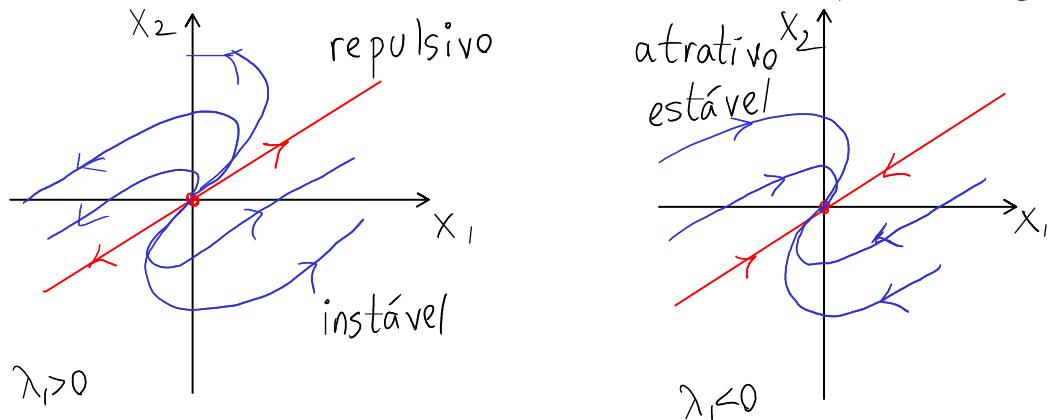
⑦ Nós próprios  $A \rightarrow$  matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{qualquer vetor} \\ \text{de } \mathbb{R}^2 \text{ é vetor próprio} \end{array}$$

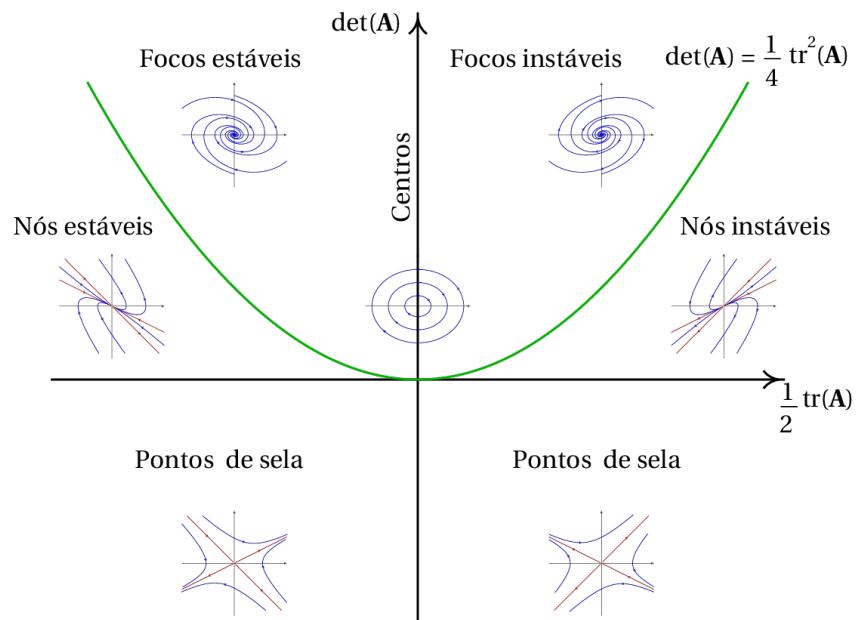


⑧ Nós impróprios  $A$  não é diagonal

$\Rightarrow$  um único vetor próprio  $\vec{r}_1$  com valor próprio  $\lambda_1 = \frac{\text{tr } A}{2}$



## Sumário



No eixo das ordenadas, estão os sistemas com  
 $\operatorname{tr} \mathbf{A} = A_{11} + A_{22} = 0$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_{11}\mathbf{x}_1 + A_{12}\mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = A_{21}\mathbf{x}_1 + A_{22}\mathbf{x}_2 \end{cases} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = A_{11} + A_{22} = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

São os sistemas lineares conservativos, em que o ponto de equilíbrio será ou ponto de sela, ou centro.

## 9.4 Osciladores lineares

$a_t$  diretamente proporcional a  $s$  (e proporcional a  $\dot{s}$ )

Exemplo 9.3. Oscilador invertido:  $a_t = Cs$  ( $C > 0$ )

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = Cs \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (\text{conservativo})$$

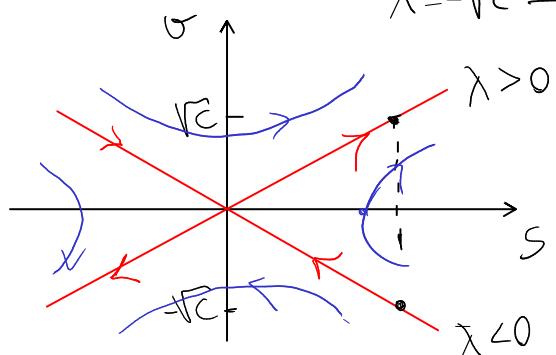
$$\lambda_{1,2} = \pm \lambda, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda^2 = -C \rightarrow \lambda^2 = C \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{C}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  reais com sinais opostos  $\rightarrow$  ponto de sela  
vetores próprios:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ C & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -\lambda s + v = 0 \quad v = \lambda s$$

$$\lambda = +\sqrt{C} \rightarrow \vec{r}_1 = (1, \sqrt{C})$$

$$\lambda = -\sqrt{C} \rightarrow \vec{r}_2 = (1, -\sqrt{C})$$



Exemplo 9.4 Oscilador harmônico simples:  $a_t = -\frac{k}{m}s$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \quad \text{conservativo} \quad (k > 0, m > 0)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \lambda$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\rightarrow$  centro  $\rightarrow$  ciclos com freq. angular  $\sqrt{\frac{k}{m}}$

Oscilador amortecido  $F_t = -ks - c\dot{\sigma}$  ( $k > 0, c > 0$ )

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m} \quad \alpha^2 = \frac{c}{m}$$

$\text{tr } A = -\alpha^2 < 0$ ,  $\det A = \Omega^2 > 0$  (atrativo)

a) amortecimento fraco

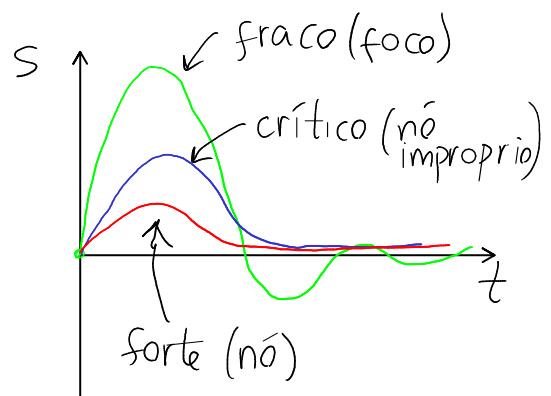
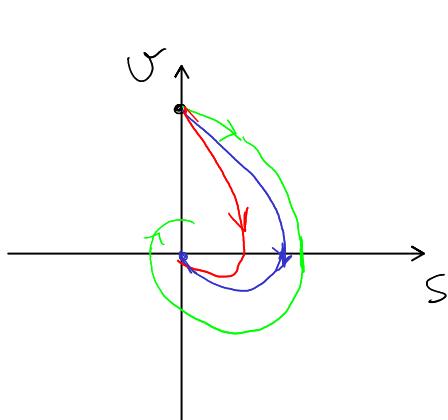
$$\left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2 < \det A \Leftrightarrow \alpha^4 < 4\Omega^2 \rightarrow \text{foco atrativo}$$

b) amortecimento crítico

$$\left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2 = \det A \Leftrightarrow \alpha^4 = 4\Omega^2 \rightarrow \text{nó improprio atrativo}$$

c) amortecimento forte

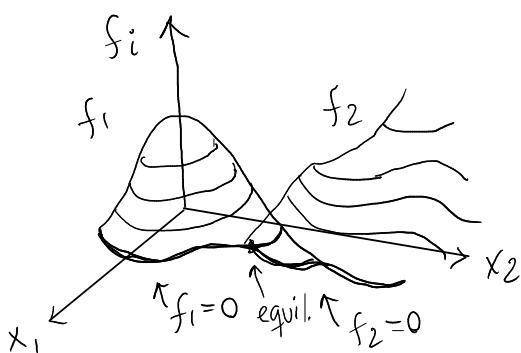
$$\left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2 > \det A \Leftrightarrow \alpha^4 > 4\Omega^2 \rightarrow \text{nó atrativo}$$



11-17 de maio

## 10. SISTEMAS NÃO LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{duas funções contínuas no plano } (x_1, x_2) \\ \text{podem não existir pontos de equilíbrio, ou existirem mais do que um.} \end{array}$$

Aproximação Linear num Ponto  $P \rightarrow (a, b)$ 

$$f_i(x_1, x_2) \approx f_i(a, b) + (x_1 - a) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a, b) + (x_2 - b) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(a, b) + \dots$$

é boa aproximação se  $(x_1, x_2) \rightarrow (a, b)$  $P$  ponto de equilíbrio  $\Rightarrow f_i(a, b) = 0$ e deslocando a origem do espaço de fase para  $P$   
( $x = x_1 - a$ ,  $y = x_2 - b$ )

$$f_i(x_1, x_2) \approx x \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a, b) + y \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(a, b)$$

Equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x} \approx x \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) + y \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a, b) \\ \dot{y} \approx x \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a, b) + y \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a, b) \end{cases} \quad \text{sistema linear}$$

$$\text{Matriz Jacobiana} = J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx J(a, b) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{matriz do sistema linear} \\ = J(a, b)$$

Exemplo 9.1  $\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1$

```
(%i1) f1: 4-x1^2-4*x2^2$  

(%i2) f2: x2^2-x1^2+1$  

(%i3) P: float(solve([f1,f2]));  

(%o3) [[x2 = -0.7746, x1 = -1.265], [x2 = -0.7746, x1 = 1.265],  

      [x2 = 0.7746, x1 = -1.265], [x2 = 0.7746, x1 = 1.265]]  

(%i4) J: jacobian([f1,f2],[x1,x2]);  

(%o4)  

[[ - 2 x1    - 8 x2 ]  

 [      [ ]  

 [ - 2 x1    2 x2 ]  

(%i5) A: makelist(subst(Q,J),Q,P)$  

(%i6) map(determinant,A);  

(%o6) [- 19.6, 19.6, 19.6, - 19.6]  

(%i7) map(mat_trace,A);  

(%o7) [0.9806, - 4.079, 4.079, - 0.9806]  

(%i8) (4.079/2)^2;  

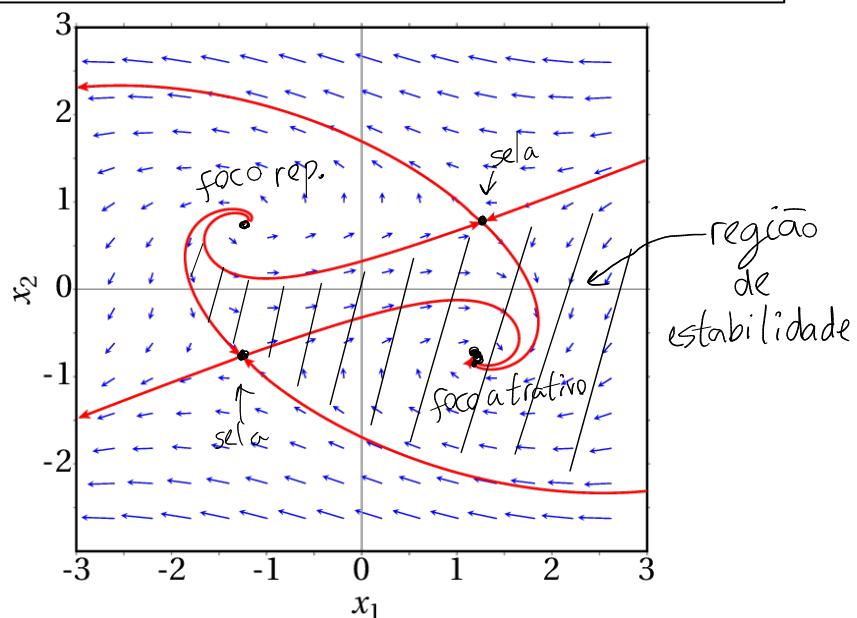
(%o8) 4.16
```

2 pontos de sela  $\rightarrow (-1.265, -0.7746), (1.265, 0.7746)$

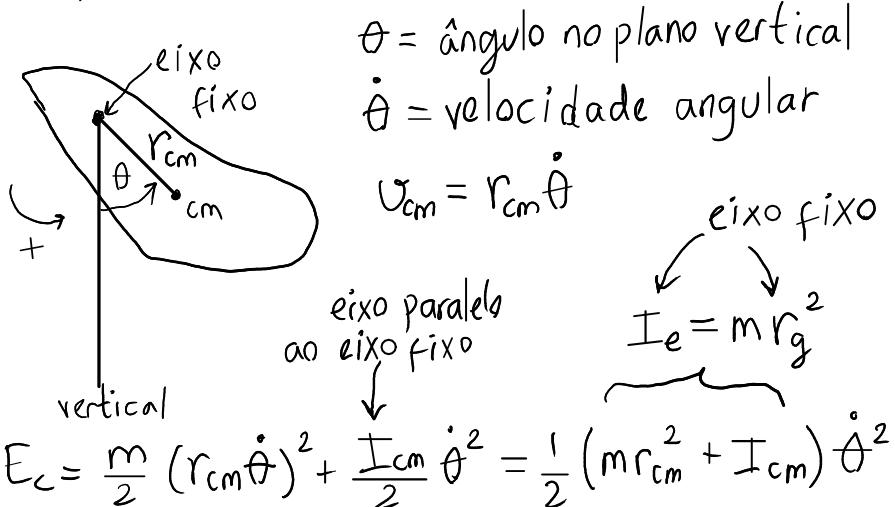
1 foco atrativo  $\rightarrow (1.265, -0.7746)$  4º quadrante

1 foco repulsivo  $\rightarrow (-1.265, 0.7746)$  2º quadrante

```
(%i9) plotdf([f1,f2],[x1,x2],[x1,-3,3],[x2,-3,3]);
```



O pêndulo físico. Corpo rígido que roda à volta dum eixo fixo horizontal



$$U_g = -mg r_{cm} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{desprezando forças dissipativas})$$

$$mr_g^2 \ddot{\theta} + mgr_{cm} \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$$\text{comprimento eficaz} = l = \frac{r_g^2}{r_{cm}}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases} \quad \text{espaço de fase} \rightarrow (\theta, \omega)$$

$-\infty < \theta < \infty$

Pontos de equilíbrio

$$\omega = 0, \sin \theta_e = 0 \Rightarrow \theta_e = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{l} \cos \theta \quad \theta_e = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad \frac{d\omega}{d\theta} < 0 \text{ estável}$$

$$\theta_e = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots \quad \frac{d\omega}{d\theta} > 0 \text{ instável}$$

### Aproximação linear do pêndulo

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow J(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$\theta$        $\omega$

a)  $\theta_e = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ,  $(\omega_e = 0)$   $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  oscilador harmônico simples.

$\text{tr } A = 0$ ,  $\det A = \frac{g}{l} > 0$   $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$   
 $\rightarrow$  centros. (freq. angular)

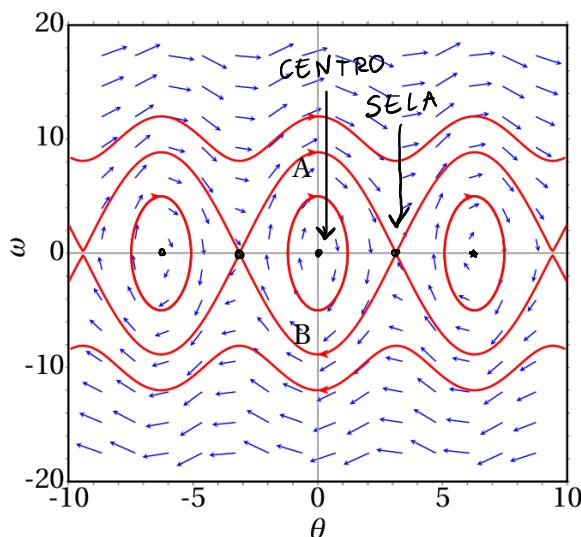
b)  $\theta_e = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ ,  $(\omega_e = 0)$   $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$  oscilador invertido

$\text{tr } A = 0$ ,  $\det A = -\frac{g}{l} < 0$

$\rightarrow$  pontos de sela

Retrato de fase (com  $l=0.5m$ ):

```
(%i1) plotdf([w, -9.8*sin(q)/0.5], [q,w], [q, -10, 10], [w, -20, 20]);
```



As curvas A e B constituem uma órbita heteroclinica. Dentro há ciclos. Há infinitas órbitas heteroclinicas. Na realidade correspondem a duas órbitas homoclinicas, no ponto mais alto do pêndulo, rodando num dos dois sentidos e regressando para esse ponto.

### Espaços de fase com várias dimensões

Sistemas de  $n$  equações ( $1 \leq$  ordem), não autónomas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \text{ é também variável de} \\ \text{estado.} \end{array}$$

Equação diferencial parat:

$$\dot{t} = 1$$

Espacço de fase com  $n+1$  dimensões  $(x_1, \dots, x_n, t)$   
 velocidade de fase  $\rightarrow \vec{u} = (f_1, f_2, \dots, f_n, 1)$

No Maxima, plotdf admite apenas 1 ou 2 variáveis.

Programa rk (Runge-Kutta) :

$$rk([f_1, f_2, \dots, f_n], [x_1, \dots, x_n], \underbrace{[x_{10}, \dots, x_{n0}], [t, t_0, t_f, \Delta t]}_{\text{valores iniciais (em } t_0\text{)}})$$

$$t_0 \rightarrow t_1 = t_0 + \Delta t \rightarrow t_2 = t_0 + 2\Delta t \rightarrow \dots \rightarrow t_f$$

resultado:

$$[[t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}], [t_1, x_{11}, \dots, x_{n1}], \dots, [t_f, x_{1f}, \dots, x_{nf}]]$$

ou até  $[t_j, x_{1j}, \dots, x_{nj}]$  se o estado em  $t_{j+1}$   
 for divergente

## Exemplo 10.2 Equação de Bessel (com $\alpha = \frac{1}{3}$ )

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)x = 0$$

trace o gráfico de  $X(t)$  com valores iniciais:

$$t_0 = 0.1, \quad X(0.1) = 1, \quad \dot{X}(0.1) = 1$$

Resolução: define-se  $y = \dot{x}$

$$\Rightarrow t^2 \ddot{y} + ty + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)x = 0 \quad \text{estado} \rightarrow (t, x, y)$$

3 equações de evolução: 
$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = \left(\frac{1}{9t^2} - 1\right) - \frac{y}{t} \end{cases}$$

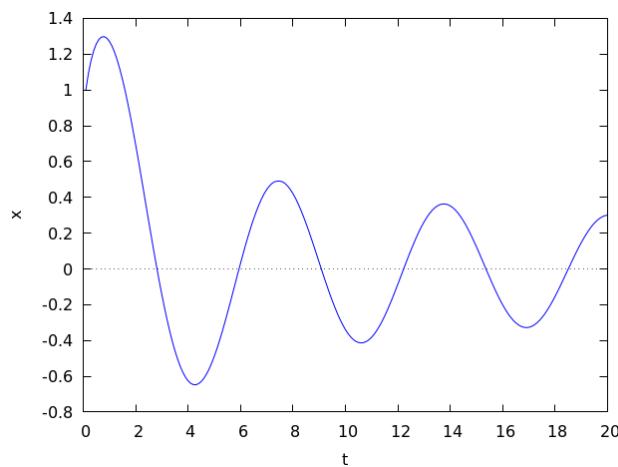
```
(%i1) B3: rk([y, (1/9/t^2-1)*x-y/t], [x,y], [1,1], [t,0.1,20,0.1])$  

(%i2) last(B3);  

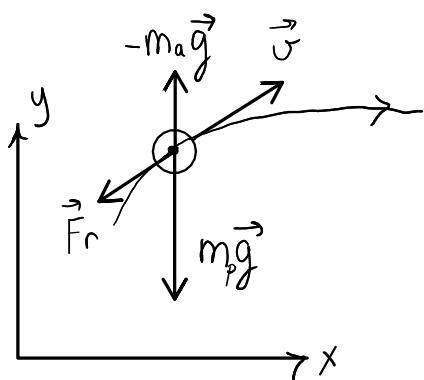
(%o2) [20.0, 0.3007, 0.0148]  

(%i3) plot2d([discrete,makelist([p[1],p[2]],p,B3)], [xlabel,"t"],  

[ylabel,"x"]);
```



## Lançamento de projéteis



$$\text{peso eficaz: } (M_p - M_a)g = m\vec{g}$$

Esfera de raio R:

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4} S_{ar} R^2 V^2 \vec{e}_t = -\frac{\pi}{4} S_{ar} R^2 |V| \vec{V}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_r - m\vec{g}}{m} = -\frac{\pi}{4m} S_{ar} R^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} (v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) - g\hat{j}$$

$$\dot{v}_x = -\frac{\pi}{4m} S_{ar} R^2 v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \dot{v}_y = -\frac{\pi}{4m} S_{ar} R^2 v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$$

**Exemplo:** esfera lançada da origem, com  $v_0 = 12 \frac{m}{s}$ , inclinada  $45^\circ$  sobre a horizontal.

Considerem-se 3 casos:

$$\textcircled{1} \quad S_{ar} = 0 \text{ (no vácuo)} \quad \dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_y = -g$$

$$\textcircled{2} \quad S_{ar} = 1.2 \frac{kg}{m^3}, \text{ bola de ténis: } R = 3.25cm, m = 62g$$

$$\textcircled{3} \quad S_{ar} = 1.2 \frac{kg}{m^3}, \text{ bola de ténis de mesa: } R = 1.9cm, m = 2.4g$$

Solução para o caso 1, entre  $t=0$  e  $t=2$ :

```
(%i1) [vx0, vy0]: float (12* [cos(%pi/4), sin(%pi/4)])$  

(%i2) tr1:=rk([vx,vy,0,-9.8],[x,y,vx,vy],[0,0,vx0,vy0],[t,0,2,0.01])$  

(%i3) last(tr1);  

(%o3) [2.0, 16.97, - 2.629, 8.485, - 11.11]
```

O seguinte comando mostra a partir de que posição na lista  $\text{tr1}$  os valores de  $y$  são negativos:

```
(%i4) first (sublist_indices(tr1, lambda([p], p[3]<0)));  

(%o4) 175
```

Lista com as posições  $\vec{r}_i$ , enquanto a bola esteve no ar ( $y \geq 0$ ):

```
(%i5) r1: makelist([tr1[i][2],tr1[i][3]],i,1,174)$
```

Para as bolas 2 e 3 faz-se o mesmo. Para simplificar os comandos, definimos a expressão para  $|v|$  e uma função auxiliar  $C(R,m)$ :

```
(%i6) c(R,m) := -%pi*1.2*R^2/4/m$  

(%i7) v: sqrt(vx^2+vy^2)$  

(%i8) tr2:=rk([vx,vy,c(0.0325,0.062)*vx*v,c(0.0325,0.062)*vy*v-9.8],[x,y,vx,vy],[0,0,vx0,vy0],[t,0,2,0.01])$  

(%i9) first (sublist_indices(tr2, lambda([p], p[3]<0)));  

(%o9) 167  

(%i10) r2: makelist([tr2[i][2],tr2[i][3]],i,1,166)$  

(%i11) tr3:=rk([vx,vy,c(0.019,0.0024)*vx*v,c(0.019,0.0024)*vy*v-9.8],[x,y,vx,vy],[0,0,vx0,vy0],[t,0,2,0.01])$  

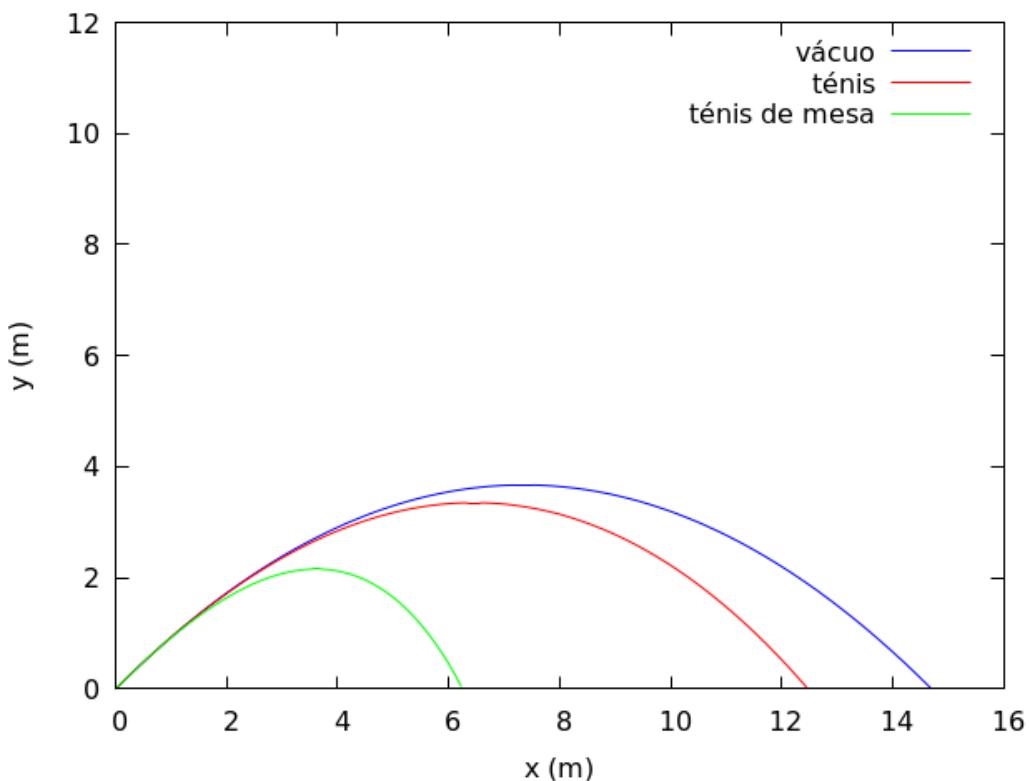
(%i12) first (sublist_indices(tr3,lambda([p],p[3]<0)));  

(%o12) 133  

(%i13) r3: makelist([tr3[i][2],tr3[i][3]],i,1,132)$
```

O seguinte gráfico mostra as trajetórias das 3 bolas:

```
(%i14) plot2d ([[discrete,r1],[discrete,r2],[discrete,r3]],
              [xlabel,"x (m)"],[ylabel,"y (m)"],[y,0,12],
              [legend, "vácuo", "ténis", "ténis de mesa"]));$
```



As trajetórias dos projéteis no ar não são parábolas, devido à resistência do ar.

A resistência do ar é afeta mais a bola de ténis de mesa do que a bola de ténis, devido a que a primeira tem massa volúmica menor.

## Pêndulo de Wilberforce

estado  $\rightarrow (z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 \quad (\text{sem forças dissipativas})$$

$$U = \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} a \theta^2 + b z \theta$$

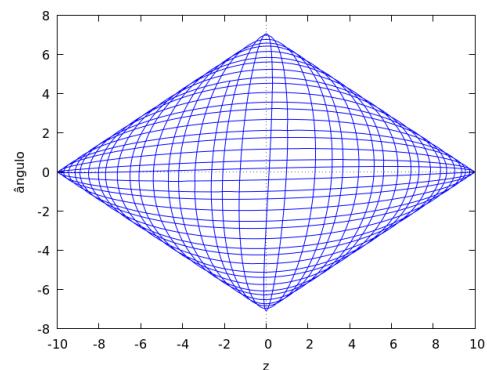
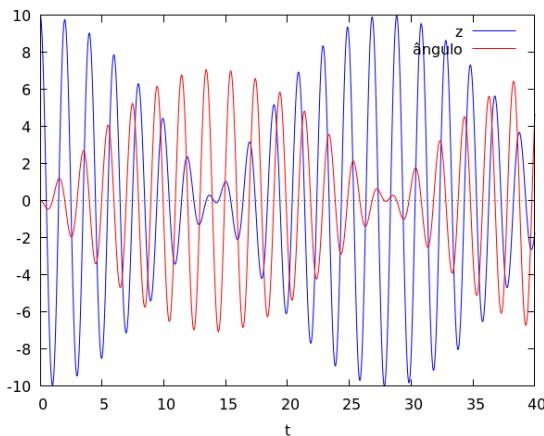
$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} z - \frac{b}{m} \theta \quad \ddot{\theta} = -\frac{a}{I_{cm}} \theta - \frac{b}{I_{cm}} z$$

Usando os valores dos parâmetros dum pêndulo (SI) resolvem-se as equações, com valores alguns valores iniciais.

```
(%i1) [m, I, k, a, b]: [0.5, 1e-4, 5, 1e-3, 0.5e-2]$
(%i2) sol:rk([v,w,-(k*z+b*q)/m,-(a*q+b*z)/I],[z,q,v,w],[0.1,0,0,0],
[t,0,40,0.01])$
```

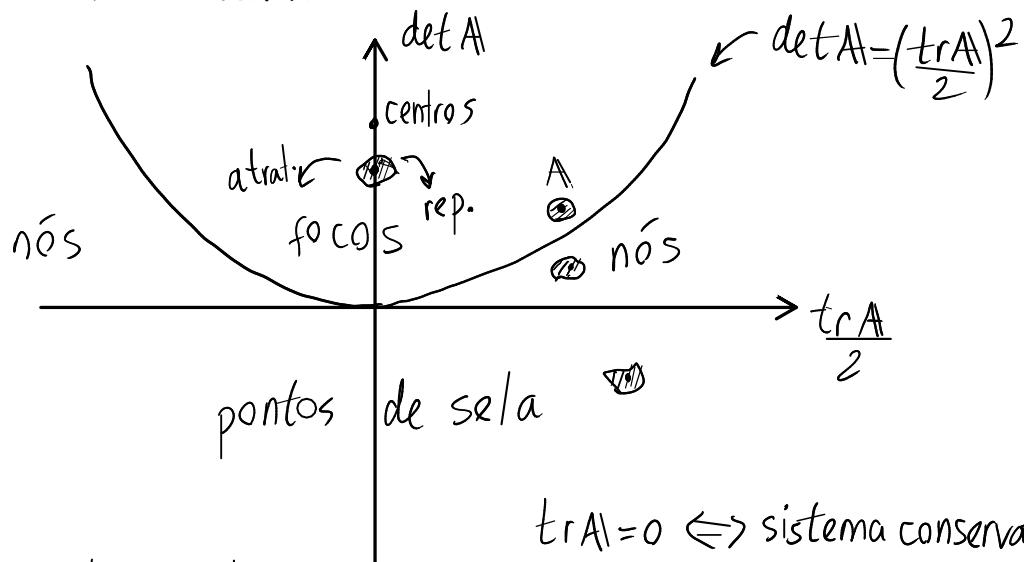
(%i3) plot2d([[discrete,makelist([p[1],100\*p[2]],p,sol)],
[discrete,makelist([p[1],p[3]],p,sol)]], [xlabel,"t"],
[legend,"z","ângulo"])\$

(%i4) plot2d([discrete,makelist([100\*p[2],p[3]],p,sol)],
[xlabel,"z"], [ylabel,"ângulo"])\$



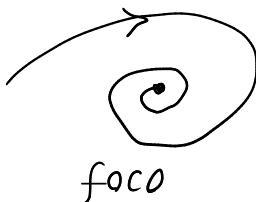
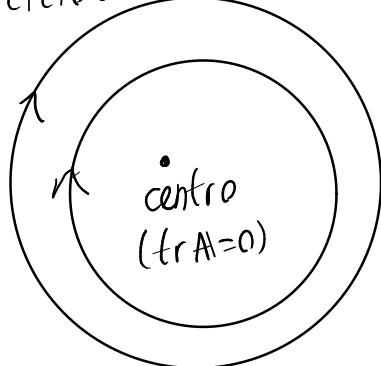
18-24 de maio

## III.1 CICLOS LIMITE

 $\text{tr } A = 0 \Leftrightarrow \text{sistema conservativo}$ 

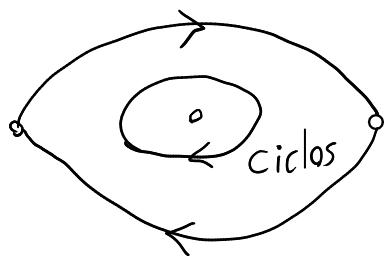
só existem centros  
e ciclos nos sist. conservativos

Não conservativo

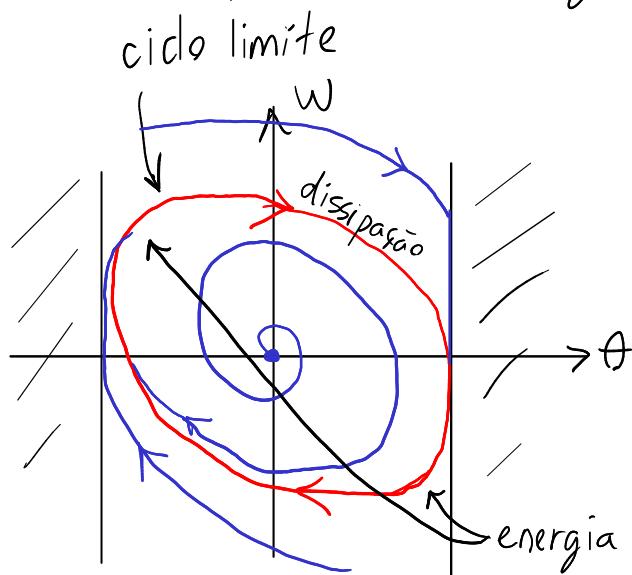


Pêndulo(ideal): conservativo

Pêndulo real



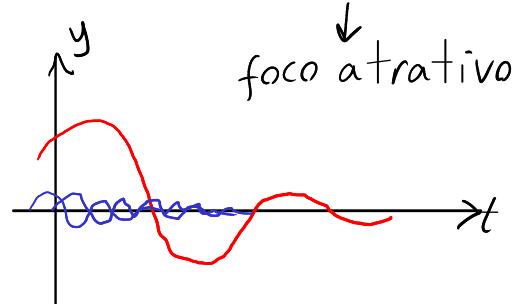
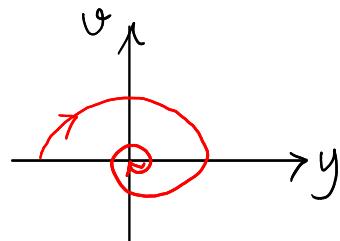
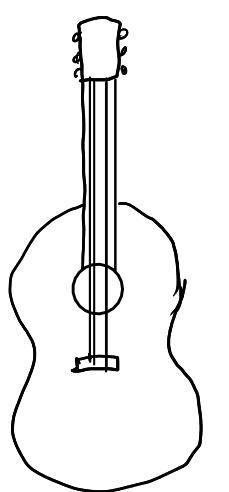
Exemplo: pêndulo num relógio de pêndulo



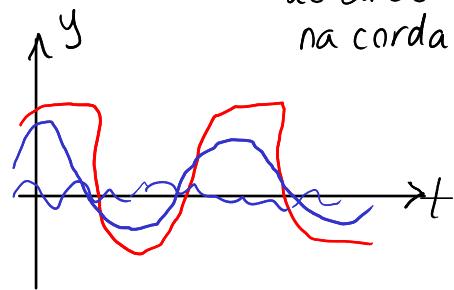
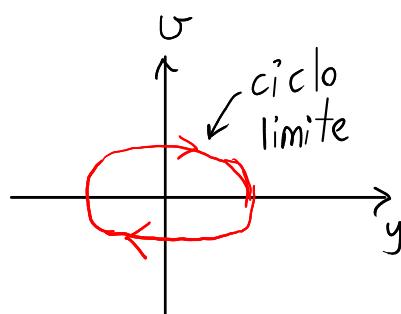
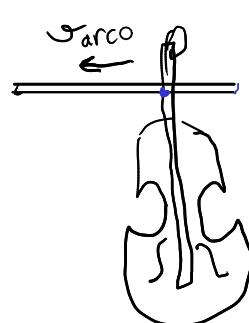
círculo límite atrativo  
foco repulsivo na origem

energia adicional (roda dentada movida)  
pelo mecanismo do relógio

Outro exemplo: oscilação dumha corda. Numa guitarra



Num violino  $\rightarrow$  ciclo limite. depende de varco e da força do arco na corda



## Equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + 2\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\epsilon > 0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\epsilon(1-x^2)y - x \end{cases}$$

oscilador harmônico  
termo não conservativo

$$\begin{cases} |x| > 1 \rightarrow \text{diminuição da energia} \\ |x| < 1 \rightarrow \text{aumento da energia} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Espera-se um ciclo limite próximo de  $x = \pm 1$

Pontos de equilíbrio:  $y=0, x=0 \rightarrow$  unicamente a origem

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\epsilon xy - 1 & 2\epsilon(1-x^2) \end{bmatrix}$$

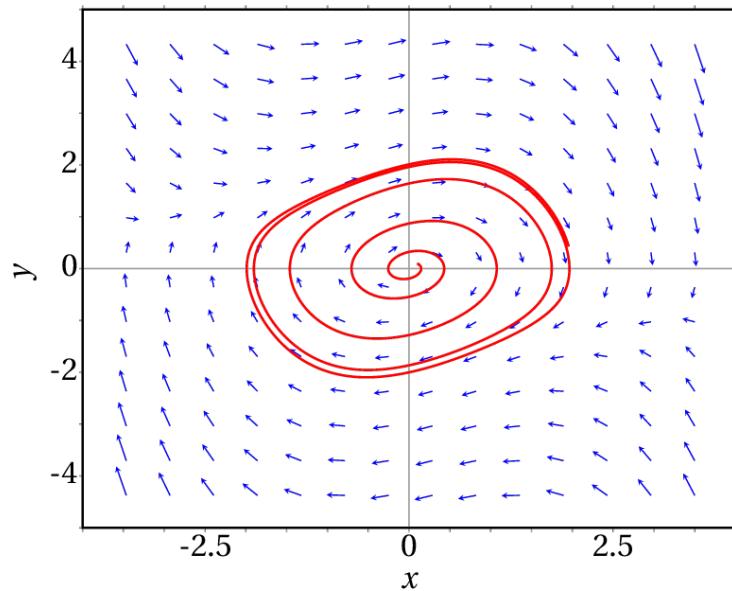
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\epsilon \end{bmatrix} \quad \lambda = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

a origem é

$$\begin{cases} \text{foco repulsivo, se } \epsilon < 1 \\ \text{nó impróprio repulsivo, se } \epsilon = 1 \\ \text{nó repulsivo, se } \epsilon > 1 \end{cases}$$

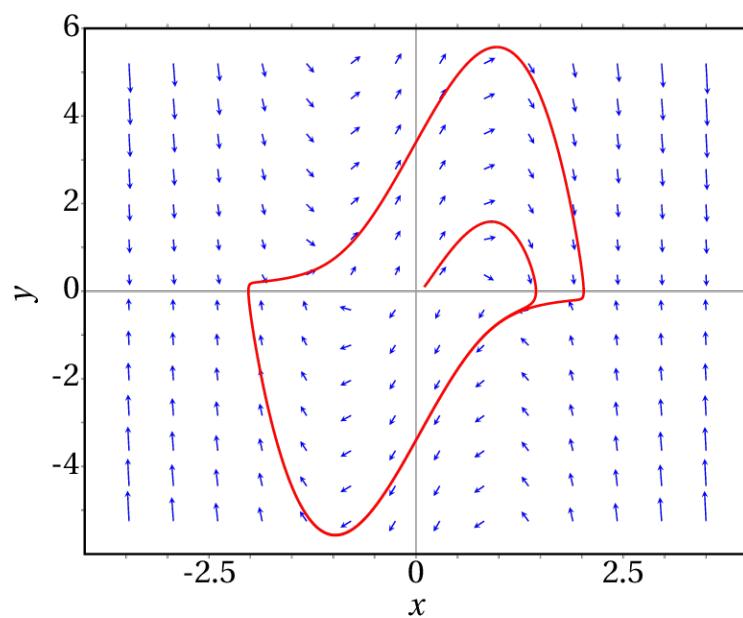
Retrato de fase no caso  $\epsilon = 0.17$ :

```
(%i1) plotdf([y,2*0.17*(1-x^2)*y-x], [x,y], [x,-4,4], [y,-5,5],
[trajectory_at,0.1,0.1],[direction,forward],[nsteps,900])$
```

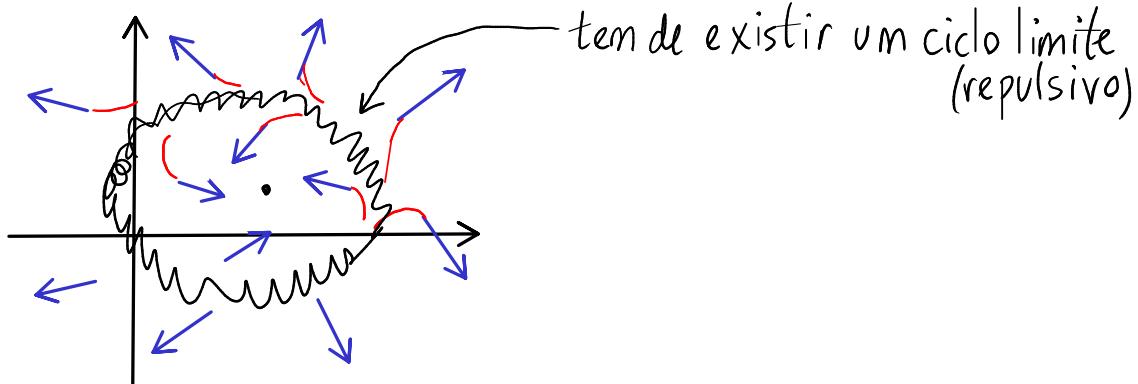


Retrato de fase no caso  $\mathcal{E}=1.7$ :

```
(%i2) plotdf([y,2*1.7*(1-x^2)*y-x], [x,y], [x,-4,4], [y,-6,6],
[trajectory_at,0.1,0.1],[direction,forward],[nsteps,900])$
```



## Existência de ciclos limite

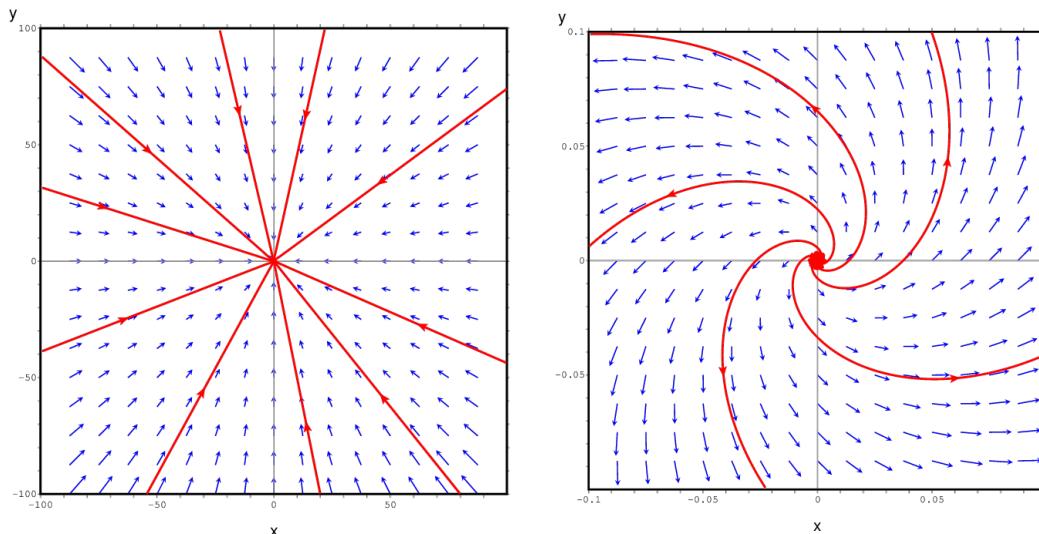


**Exemplo 11.1**

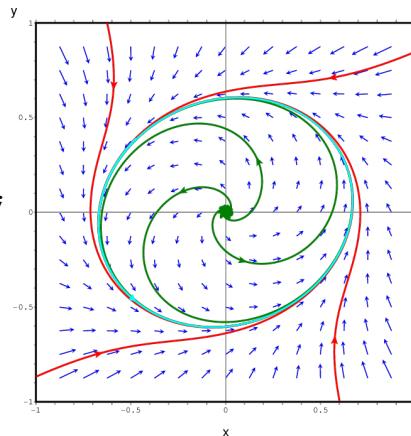
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-2x^2-3y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-2x^2-3y^2) \end{cases}$$

```
(%i1) f1: -y+x*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i2) f2: x+y*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i3) solve([f1,f2]);
(%o3) [[x = 0, y = 0]]
(%i4) plotdf([f1,f2], [x,y], [x, -100, 100], [y, -100, 100])$
```

```
(%i5) plotdf([f1,f2], [x,y], [x, -0.1, 0.1], [y, -0.1, 0.1])$
```



Um ponto de equilíbrio, na origem. Longe da origem, esta parece ser nó próprio atrativo. Mas na vizinhança da origem descobre-se que é foco repulsivo.  
 $\Rightarrow$  Existe um ciclo limite atrativo.



```
(%i6) plotdf([f1,f2],[x,y],[x,-1,1],[y,-1,1]);
```

Coordenadas polares:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$

```
(%i7) [x,y]: r*[cos(q),sin(q)]$  

(%i8) gradef(r,t,RP)$  

(%i9) gradef(q,t,QP)$  

(%i10) eq1: diff(x,t) = ev(f1);  

(%o10) cos(q) RP - sin(q) QP r = cos(q) r  

          2      2      2      2  

          ((- 3 sin (q) r ) - 2 cos (q) r + 1) - sin(q) r  

(%i11) eq2: diff(y,t) = ev(f2);  

(%o11) sin(q) RP + cos(q) QP r = sin(q) r  

          2      2      2      2  

          ((- 3 sin (q) r ) - 2 cos (q) r + 1) + cos(q) r  

(%i12) solve([eq1,eq2],[RP,QP]);  

          2      2      3  

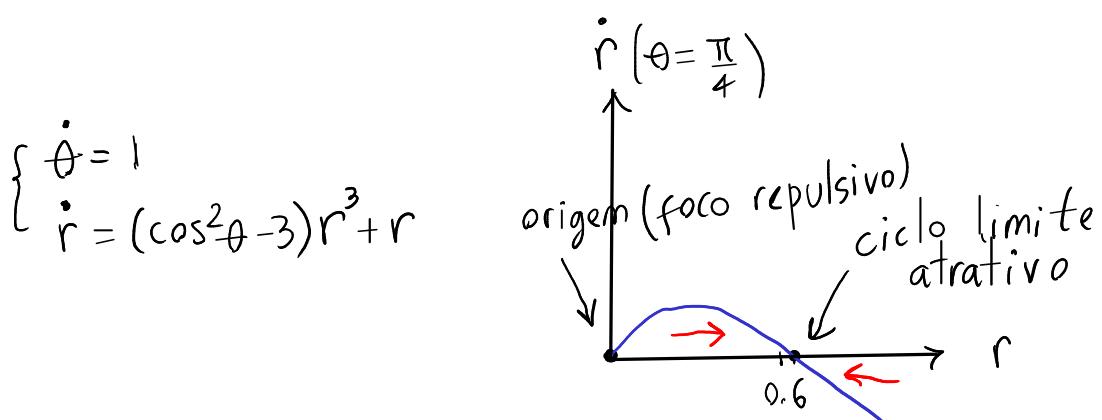
(%o12) [[RP = ((- 3 sin (q)) - 2 cos (q)) r + r, QP = 1]]  

(%i13) trigsimp(%[1][1]);  

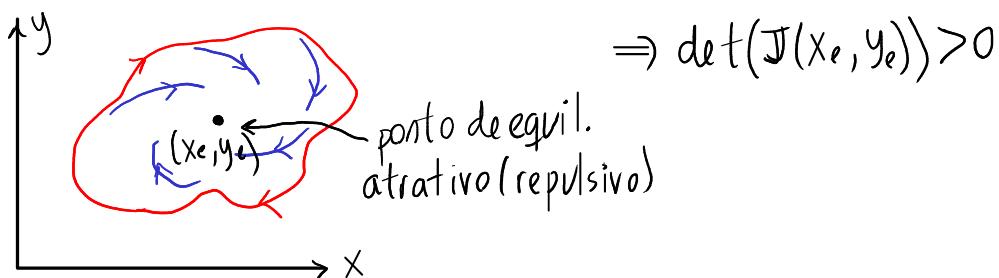
          2      3  

(%o13) RP = (cos (q) - 3) r + r  

(%i14) plot2d(subst(q=%pi/4,rhs(%)),[r,0,1]);
```



## Inexistência de ciclos limite



Exemplo 11.2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = y + x^2 + yx^3 \end{cases}$$

```
(%i1) [f1,f2]: [y^2-x, y+x^2+y*x^3]$
(%i2) solve([f1,f2]);
(%o2) [[y = 0.6428 %i + 0.766, x = 0.9848 %i + 0.1736],
[y = 0.766 - 0.6428 %i, x = 0.1736 - 0.9848 %i],
[y = 0.342 %i - 0.9397, x = 0.766 - 0.6428 %i],
[y = (- 0.342 %i) - 0.9397, x = 0.6428 %i + 0.766],
[y = 0.9848 %i + 0.1736, x = 0.342 %i - 0.9397],
[y = 0.1736 - 0.9848 %i, x = (- 0.342 %i) - 0.9397], [y=0, x=0]]
(%i3) J: jacobian([f1,f2],[x,y]);
(%o3)
[ [- 1      2 y      ]
 [      2            3      ]
 [ 3 x  y + 2 x  x  + 1 ]
(%i4) subst([x=0,y=0],J);
(%o4)
[ [- 1  0 ]
 [      ]
 [ 0   1 ]]
```

um único ponto de equilíbrio,  $(x, y) = (0, 0)$  e  
 $\det(J(0, 0)) = -1 \Rightarrow$  não podem existir ciclos limite

## Dinâmica populacional

$x(t)$  = população no instante  $t \geq 0$

$\dot{x} = f(x)$  = aumento/diminuição da população, por unidade de tempo

$f$  deverá ter a propriedade:  $f(0) = 0$

$\Rightarrow x=0$  é sempre ponto de equilíbrio

### Modelo de Malthus

$\dot{x} = ax$  ( $a > 0$ )  $a$  = taxa de natalidade - taxa de mortalidade = constante

$$\downarrow \\ x(t) = x_0 e^{at}$$

aumento exponencial

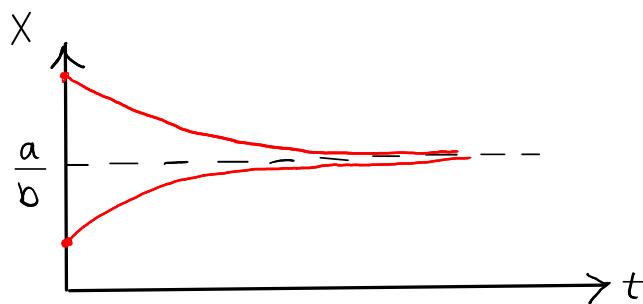
### Modelo logístico (Verhulst)

taxa de natalidade =  $a$  = constante

taxa de mortalidade =  $bx$  = proporcional à população

$$\dot{x} = ax - bx^2 = x(a - bx)$$

$\Rightarrow$  2 pontos de equilíbrio:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{a}{b}$



## Sistemas de duas espécies

$x_1(t)$  = população da espécie 1  $\geq 0$

$x_2(t)$  = população da espécie 2  $\geq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) & \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) & \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Matriz jacobiana

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

crescimento próprio de cada espécie

influência da espécie 2 na 1

influência da espécie 1 na 2

## 3 tipos de sistemas

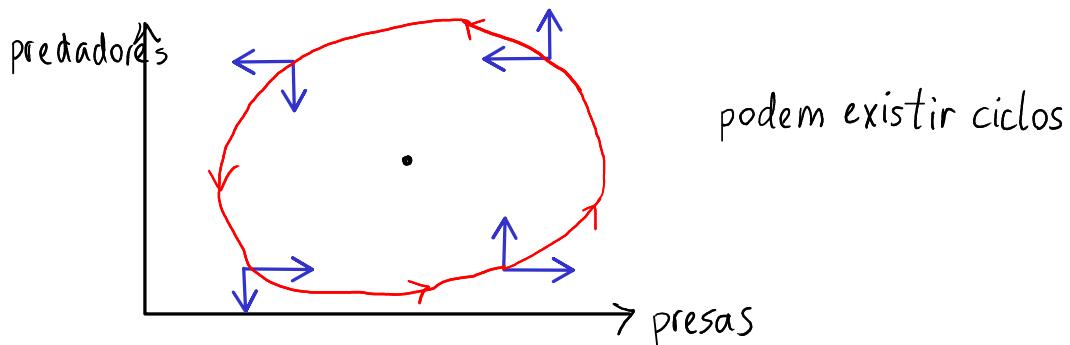
① sistema com cooperação:  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$

② sistema com competição:  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$

③ sistema predador presa:  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$  com sinais opostos

exemplo:  $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$        $x_1 \rightarrow$  predadores  
 $x_2 \rightarrow$  presas

### Sistemas predador presa



### Exemplo 11.3. Modelo de Lotka-Volterra

$$\dot{x} = x(a - cy) \quad \dot{y} = y(bx - d) \quad (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0)$$

$(x \geq 0, y \geq 0)$

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ by & bx - d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow \text{presas} \\ y \rightarrow \text{predadores} \end{array}$$

pontos de equilíbrio

$$\begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(bx - d) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \forall y \\ y = 0, \forall x = \frac{d}{b} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  2 pontos de equilíbrio  $(0,0)$ ,  $(x,y) = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = a > 0, \lambda_2 = -d < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$  é ponto de sela

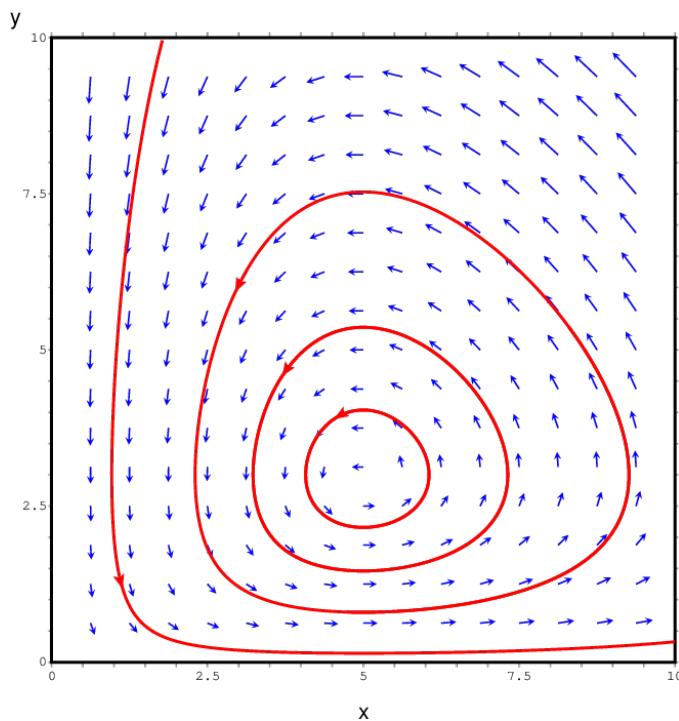
$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tr } \mathbb{A}_2 = 0, \det \mathbb{A}_2 = ad > 0$$

$\lambda = \pm i\sqrt{ad}$

oscilações com freq. angular  $\Omega = \sqrt{ad}$

Retrato de fase com  $a=6$ ,  $b=3$ ,  $c=2$  e  $d=15$

```
(%i1) plotdf([x*(6-2*y), y*(3*x-15)], [x,y], [x,0,10], [y,0,10])$
```



O 2º ponto de equilíbrio é centro, e as duas populações oscilam de forma repetitiva

#### Exemplo II.4 Modelo de Holling-Tanner

$$\dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \quad \dot{y} = \frac{y}{5} \left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

```
(%i1) u: [x*(1-x/7) - 6*x*y/(7+7*x), y*(1-y/2/x)/5]$
(%i2) solve(u);
(%o2) [[y=0, x=0], [y=0, x=-1], [y=0, x=7], [y=-14, x=-7],
[y=2, x=1]]
```

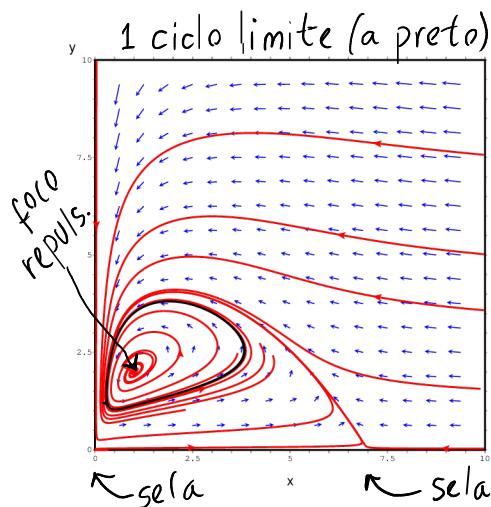
3 pontos de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $(7, 0)$  e  $(1, 2)$

```
(%i3) J: jacobian(u, [x,y]);
[      6 y      42 x y      2 x      6 x
[ ( - ----- ) + ----- - ----- + 1 - -----
[      7 x + 7          2           7           7 x + 7
[                               (7 x + 7)
(%o3)
[                               2
[                               y
[ -----           y
[                               2
[                               2 x   y
[ ----- - ----- - -----
[                               5           10 x
```

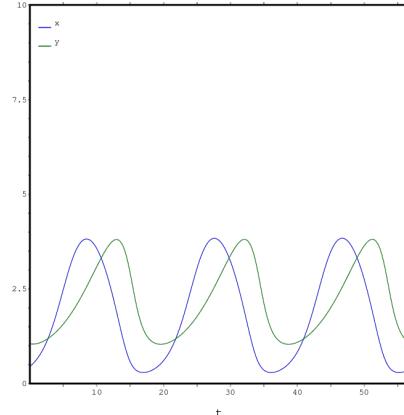
⇒ sistema predador presa.  $x \rightarrow$  presas,  $y \rightarrow$  predadores

Retrato de fase:

```
(%i4) plotdf(u, [x,y], [x,0,10], [y,0,10])$
```



$x$  e  $y$  vs  $t$ , no ciclo limite





# Bibliografia

- Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática*. Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.
- Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir: Moscovo, Rússia.
- Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods*. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.
- Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México, DF, México: International Thomson Editores.
- Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective*. México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.
- Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. USA: Westview Press.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.
- Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução*. São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.
- French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics*. New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.
- Galilei, G. (1638). *Dialogue Concerning Two New Sciences*. Itália: Publicado em: [http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns\\_draft/](http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/). (Tradução de 1914,

- por H. Crew e A. de Salvio)
- Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.
- Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.
- Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology*. The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.
- Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.
- Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE*. Boston, MA, USA: Birkhaüser.
- Maxima Development Team. (2019). *Maxima Manual* (5.43.0 ed.). Disponível em: <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.pdf>
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física.
- Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics*. Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.
- Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)
- Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macsyma ODE lab book*. Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.
- Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA:

- Addison-Wesley.
- Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics*. Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis*. New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.
- Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books.
- Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. Sausalito, CA, USA: University Science Books.
- Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.
- Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima*. Porto, Portugal: Edição do autor.
- Villate, J. E. (2019). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (5a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.