

Funções

Funções.

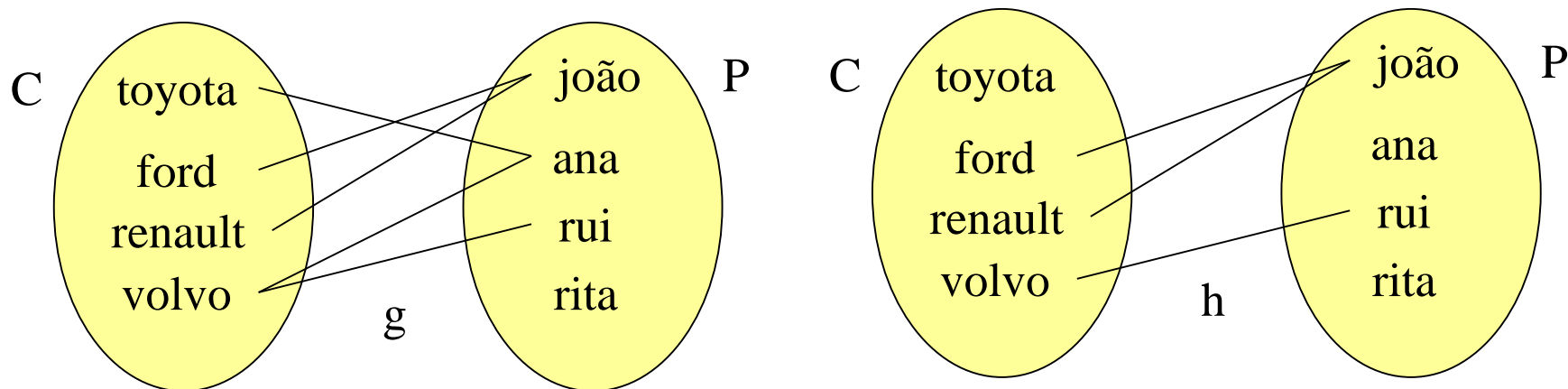
Cardinalidade de conjuntos.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006
Capítulo: 3

FUNÇÕES

Definição de função

- ❑ Uma **função** de um conjunto A para um conjunto B é uma relação binária f de A para B com a propriedade de que, para cada $a \in A$, existe exatamente um $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$
- Portanto f é um subconjunto do produto cartesiano
 - f está definida em **todos** os elementos do domínio A
 - Cada a está associado a um único b



g não é função: $\{ \dots, (\text{volvo}, \text{ana}), (\text{volvo}, \text{rui}), \dots \}$

h não é função: $(\text{toyota}, ?)$

Exemplo de função

❑ $f = \{(toyota, ana), (ford, jo\tilde{a}o), (renault, jo\tilde{a}o), (volvo, rui)\}$

❑ $f: C \rightarrow P$

❑ $f: a \mapsto b$ sse $b = f(a)$ *b é a imagem de a*

❑ $f: toyota \mapsto ana$

– $ford \mapsto jo\tilde{a}o$

– $renault \mapsto jo\tilde{a}o$

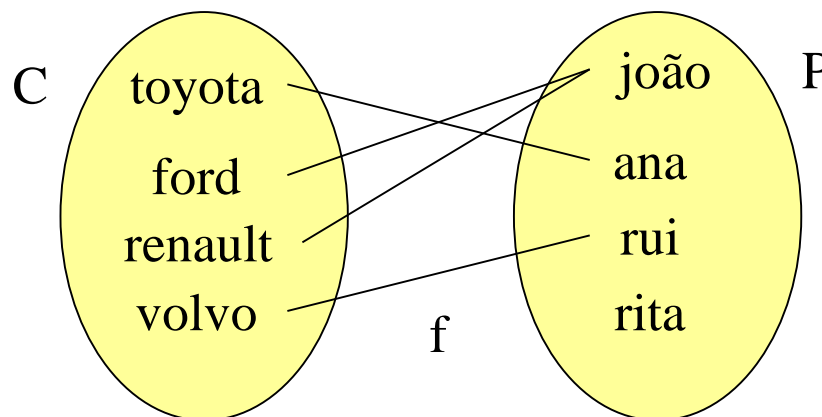
– $volvo \mapsto rui$

❑ **Domínio** de f : $\text{dom } f = C$

❑ **Conjunto de chegada**: P

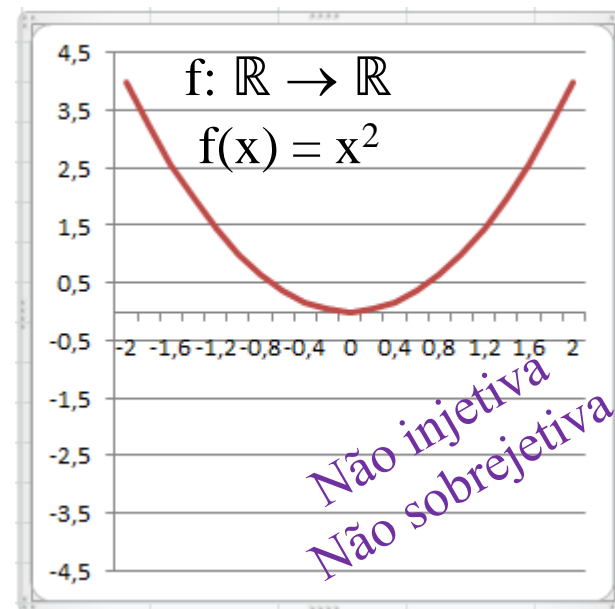
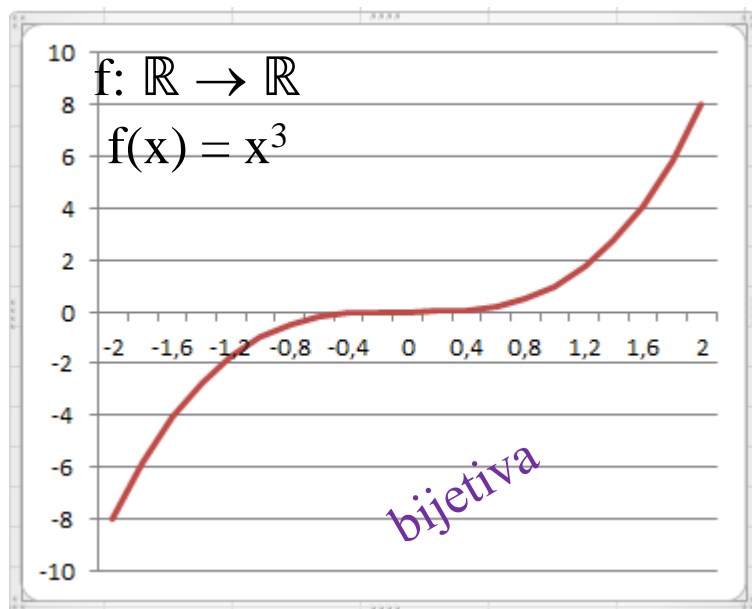
❑ **Contradomínio ou imagem** de f :

$$\begin{aligned} \text{rng } f &= \{b \in P \mid (a, b) \in f \text{ para algum } a \in C\} \\ &= \{b \in P \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in C\} \end{aligned}$$



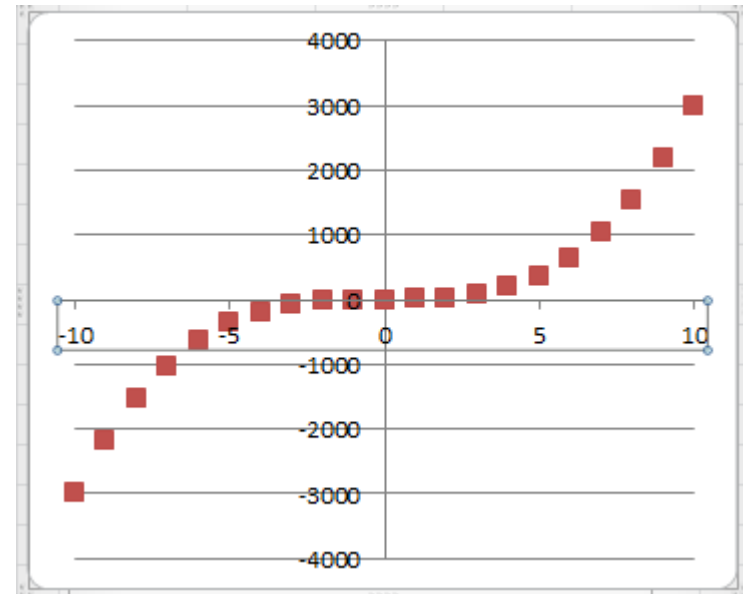
Propriedades de uma função

- ❑ Função $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva** sse $\text{rng } f = B$
 - Contradomínio coincide com o conjunto de chegada
 - Todo $b \in B$ é imagem de pelo menos um $a \in A$
- ❑ Função é **injetiva** ou um-para-um sse $f(a_1)=f(a_2) \rightarrow a_1=a_2$
 - Elementos diferentes de A têm imagens diferentes
- ❑ Função é **bijetiva** sse for sobrejetiva e injetiva



Exemplo

- ❑ Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x^3 - x$. Determine se f é injetiva ou sobrejetiva.
- ❑ Resolução:
 - **Injetiva:** uma linha horizontal só pode interseotar o gráfico uma vez
 - Aparentemente isso acontece mas na zona da origem pode haver dúvidas
 - Por contradição, supor $f(x_1) = f(x_2)$
 - $3x_1^3 - x_1 = 3x_2^3 - x_2$
 - $3(x_1^3 - x_2^3) = x_1 - x_2$
 - $3(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = x_1 - x_2$
 - Se $x_1 \neq x_2$ então $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1/3$
 - Impossível pois x_1 e $x_2 \in \mathbb{Z}$



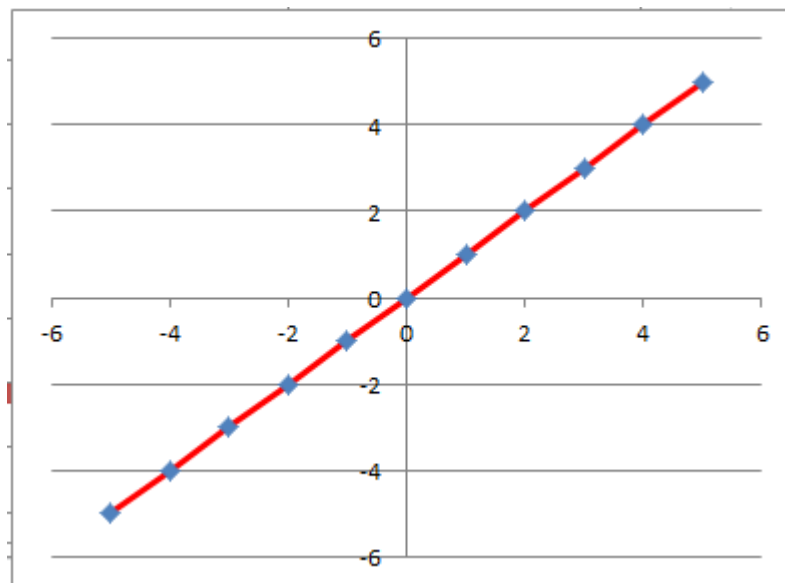
Exemplo (cont.)

- ❑ **Sobrejetiva:** todos os elementos do conjunto de chegada têm que ser imagens
 - Testando para o caso de $b=1$
 - $1=3x^3-x = x(3x^2-1)=1$
 - Não tem solução, pelo que 1 não é imagem e portanto a função não é sobrejetiva

Função identidade

- ❑ A função identidade num conjunto A é a função $\iota_A: A \rightarrow A$ definida por $\iota_A(a)=a$
- ❑ Em termos de pares ordenados, $\iota_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

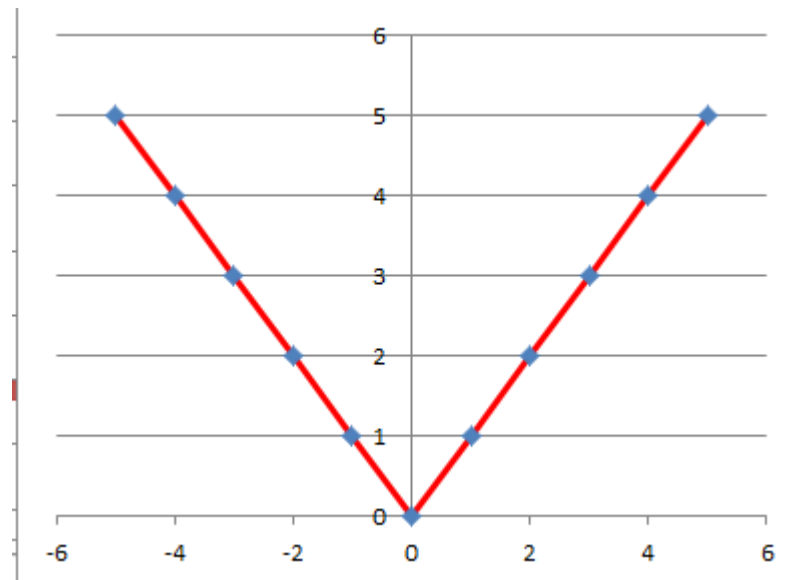
- ❑ A azul $A=\mathbb{Z}$
- ❑ A vermelho $A=\mathbb{R}$
- ❑ Não é só a regra de cálculo da imagem que interessa, também os conjuntos de partida e chegada



Função valor absoluto

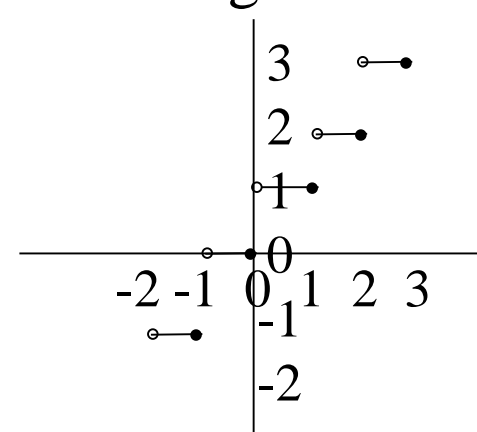
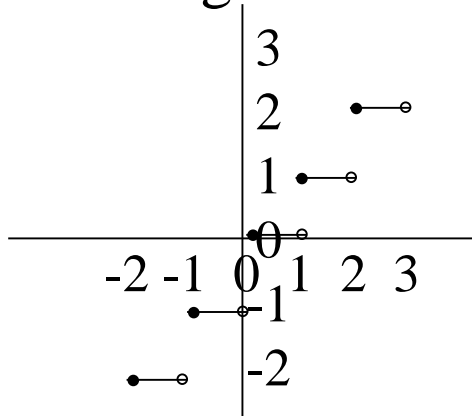
❑ O valor absoluto de um número x , denotado $|x|$ é definido

❑ $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Funções chão e teto

- ❑ Para qualquer número real x , o **chão de x** , escrito $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro inferior ou igual a x .
- ❑ A função chão $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se $f(x) = \lfloor x \rfloor$
 - A imagem de f é \mathbb{Z}
- ❑ Para qualquer número real x , o **teto de x** , escrito $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro superior ou igual a x .
- ❑ A função teto $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se $f(x) = \lceil x \rceil$
 - A imagem de f é \mathbb{Z}



Funções com vários argumentos

- ❑ Da mesma forma que uma função (de um argumento) é uma relação binária em que existe um e um só par para cada valor do primeiro elemento (domínio da função), uma função de $n-1$ argumentos é uma relação de ordem n em que existe uma e uma só sequência de ordem n para cada sequência dos primeiros $n-1$ elementos
 - Diz-se que a relação é funcional no último argumento
- ❑ Visão relacional
 - Resultados(aluno, disciplina, ano, nota)
- ❑ Visão funcional
 - $\text{nota} = \text{resultado}(\text{aluno}, \text{disciplina}, \text{ano})$
 - É esta a visão das funções na lógica, em que cada termo denota um objeto, a imagem da função

Inversa de uma função

- ❑ Dada uma função $f: A \rightarrow B$, define-se a função inversa, se existir, como $f^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in f\}$, $f^{-1}: B \rightarrow A$.
- ❑ É sempre possível inverter a ordem dos pares de uma relação binária. Porque se salvaguarda na definição a possibilidade de não existir a função?
- ❑ Uma função $f: A \rightarrow B$ tem inversa se e só se for bijetiva
$$a = f^{-1}(b) \text{ sse } b = f(a)$$
- ❑ Exemplo: Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, verifique se f tem inversa e, em caso afirmativo, obtenha essa inversa
- ❑ Para obter $y = f^{-1}(x)$ fazer $x = f(y)$: $x = 2y - 3$; $y = \frac{x+3}{2}$
- ❑ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

Composição de funções

- ❑ Sejam as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. A composição de g e f é a função $g \circ f: A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todo $a \in A$.
 - Atenção à ordem da composição: em geral $g \circ f \neq f \circ g$ (ler g após f é diferente de f após g).
- ❑ Duas funções f e g são iguais sse tiverem o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e $f(a)=g(a)$ para todo a no domínio comum.
- ❑ A composição de funções é associativa
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

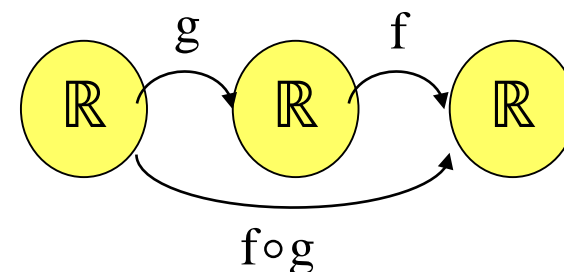
Exemplo de composição

❑ **Exemplo 1:** $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

❑ $f(x) = 2x-3 \quad g(x) = x^2+1$

❑ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = 2(x^2+1)-3$

❑ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^2+1$



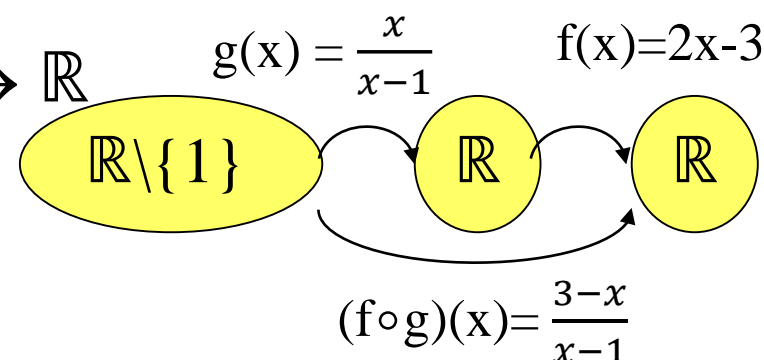
❑ **Exemplo 2:** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

❑ $f(x) = 2x-3 \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$

❑ Para $g \circ f$ existir $\text{rng } f \subseteq \text{dom } g$

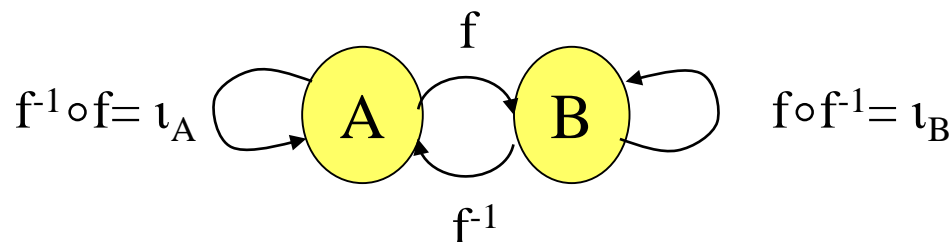
- Como $\text{rng } f = \mathbb{R}$ não está contido no $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a função não está definida

❑ Já $f \circ g$ está definida $(f \circ g)(x) = 2 \frac{x}{x-1} - 3 = \frac{3-x}{x-1}$



Composição com a inversa

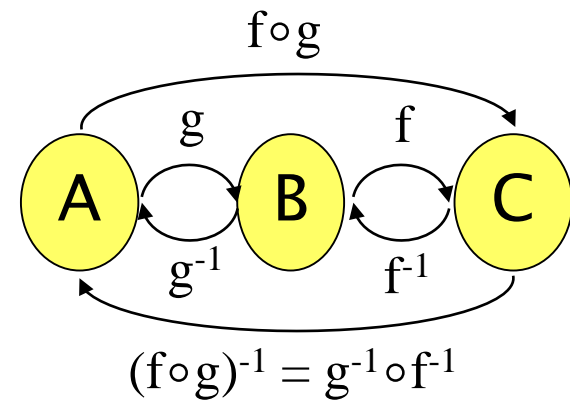
- ❑ Se $f: A \rightarrow B$ tiver inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$
 $f^{-1}(b)=a$ sse $b=f(a)$
- ❑ Então, para todo $a \in A$
 $a = f^{-1}(f(a)) = (f^{-1} \circ f)(a)$
- ❑ Portanto $f^{-1} \circ f = \iota_A$ (função identidade em A)
- ❑ E também $f \circ f^{-1} = \iota_B$ (função identidade em B)



Inversa da composta

□ Dadas $g: A \rightarrow B$ e $f: B \rightarrow C$, exprima a inversa da composta $(f \circ g)^{-1}$ em termos das inversas das componentes f^{-1} e g^{-1} .

□ R: $(f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = \text{id}_C$
 $f^{-1} \circ (f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ \text{id}_C$
 $(f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = \text{id}_B$
 $\text{id}_B \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1}$
 $g \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1}$
 $g^{-1} \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ \text{id}_A$
 $\text{id}_A \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

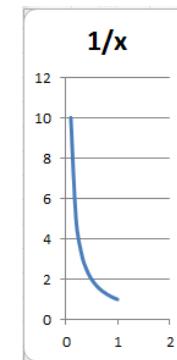
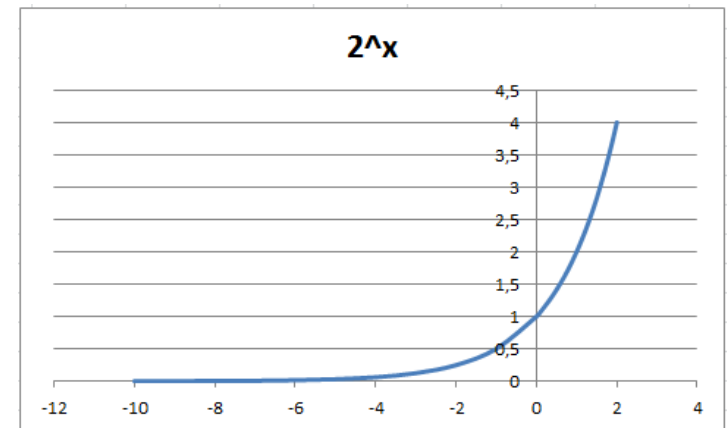
Conjuntos finitos e infinitos

- ❑ A cardinalidade de um conjunto A é o número de elementos desse conjunto, $|A|$
- ❑ $|\emptyset| = 0$
- ❑ Um conjunto A é **finito** se for vazio ou se se conseguir estabelecer uma correspondência biunívoca (função bijetiva) com $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, para um $n \in \mathbb{N}$. Define-se **cardinalidade** de A como n , $|A|=n$. Se A não for finito, é **infinito**.
- ❑ Exemplos:
 - $a \mapsto x, b \mapsto y$ é uma correspondência biunívoca entre $\{a, b\}$ e $\{x, y\}$
 - A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida por $f(n) = n-1$ é uma correspondência biunívoca entre \mathbb{N} e $\mathbb{N} \cup \{0\}$
 - A função $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 2n$ é uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e o dos inteiros pares $2\mathbb{Z}$

Cardinalidade de conjuntos

❑ Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade $|A|=|B|$ sse existir uma correspondência biunívoca entre ambos.

- $|\{a,b\}| = |\{x,y\}|$
 - o $a \mapsto x, b \mapsto y$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$
 - o $1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, \dots, n \mapsto n-1, \dots$
- $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$
 - o $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, -1 \mapsto -2,$
 - o $2 \mapsto 4, -2 \mapsto -4, \dots, n \mapsto 2n, \dots$
- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^+|$
 - o $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = 2^x$
- $]0,1[=]1,+\infty[$
 - o $f:]0,1[\rightarrow]1,+\infty[\quad f(x) = 1/x$



❑ Quaisquer dois intervalos de números reais têm a mesma cardinalidade

Cardinalidade de \mathbb{Z}

- ❑ \aleph_0 (aleph zero) denota a cardinalidade dos números naturais
- ❑ Mostre que $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$
- ❑ Para responder basta conseguir enumerar os elementos de \mathbb{Z} , isto é, estabelecer uma correspondência biunívoca com os naturais
 - $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$
 - $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{1}{2}(n-1) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$
 - ou
 - $f(n) = \frac{1}{4}[1 + (-1)^n(2n-1)]$

Cardinalidade de \mathbb{N}^2

- ❑ Mostre que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$
- ❑ Enumere os pares da figura pela ordem das setas

(1,4) ←	(2,4)	(3,4)	(4,4)	...
(1,3) ←	(2,3) ←	(3,3)	(4,3)	...
(1,2) ←	(2,2) ←	(3,2) ←	(4,2)	...
(1,1) →	(2,1) →	(3,1) →	(4,1)	(5,1) ...

- ❑ Esta mesma construção serve para mostrar que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Cardinalidade de \mathbb{R}

- ❑ Mostre que $]0,1[$ é não enumerável.
- ❑ Prova por contradição: suponhamos que o conjunto é enumerável. Então existe uma lista de **todos** os reais entre 0 e 1, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ que se pode escrever na forma decimal

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$$

$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots$$

$$a_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots$$

...

**Argumento diagonal
George Cantor**

- Construir um número $b = 0.b_1b_2b_3\dots : b_i = \begin{cases} 2 & \text{se } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{se } a_{ii} \neq 1 \end{cases}$
- O número b está entre 0 e 1 mas é diferente de cada a_i precisamente no dígito a_{ii} e portanto não está na lista, contradizendo a hipótese. Então o conjunto $]0,1[$ é não enumerável e \mathbb{R} também não.

- ❑ Cardinalidade de \mathbb{R} é \aleph_1 (aleph 1)

Hipótese do contínuo

- ❑ Conclui-se que há conjuntos com a cardinalidade dos naturais e conjuntos muito maiores com a cardinalidade dos reais
- ❑ **Hipótese do contínuo:** não existe nenhum conjunto A tal que $\aleph_0 < |A| < |\mathbb{R}| = \aleph_1$
 - Esta afirmação não se consegue provar a partir dos axiomas normais da teoria de conjuntos de forma que é adicionada como axioma
- ❑ Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável
- ❑ O conceito de “mesma cardinalidade” estabelece uma relação de equivalência nos conjuntos, a qual é, em particular, transitiva.

Conjuntos infinitos

- ❑ A noção de cardinalidade particiona os conjuntos finitos em classes (de conjuntos com o mesmo número de elementos) e também particiona os conjuntos infinitos em classes (de conjuntos com a mesma cardinalidade)
 - $E_0 = \{C \mid |C| = 0\} = \{\emptyset\}$ classe de equivalência cardinalidade 0
 - $E_1 = \{C \mid |C| = 1\} = \{\{a\}, \{1\}, \{(a,b)\}, \dots\}$ cl. eq. card. 1
 - $E_2 = \{C \mid |C| = 2\} = \{\{a,b\}, \{1,2\}, \{(a,b),(c,d)\}, \dots\}$ cl. eq. card. 2
 - $E_{\aleph_0} = \{C \mid |C| = \aleph_0\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \dots\}$ cl. eq. card. \aleph_0
 - $E_{\aleph_1} = \{C \mid |C| = |\mathbb{R}|\} = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^+,]0,1[, \dots\}$ cl. eq. card. $|\mathbb{R}|$
- ❑ Um conjunto A é **infinito enumerável** sse $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
Um conjunto é **enumerável** sse for finito ou infinito enumerável. Caso contrário é **não enumerável** (como \mathbb{R} e qualquer seu intervalo).