Congruências

Congruências.

Referência:	Discrete Mathematics with Graph Theory Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006
Capítulo: 4	

Aritmética horária

	0-24	0-12
5	5	5
17	17	5
8+6	14	2
16+3*7	13	1
10+3*8	10	10

		Registo com 8 bits							
250		1	1	1	1	1	0	1	0
251		1	1	1	1	1	0	1	1
252		1	1	1	1	1	1	0	0
253		1	1	1	1	1	1	0	1
254		1	1	1	1	1	1	1	0
255		1	1	1	1	1	1	1	1
0		0	0	0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0	1

Congruência

- **Definição**: seja n>1 um número natural fixo. Dados inteiros a e b, diz-se que a é congruente com b módulo n e escreve-se $a \equiv b(mod\ n)$ se e só se n|(a-b). O número n é o módulo da congruência.
- Exemplos:
  - $3 \equiv 17(mod\ 7)$ porque 3-17=-14 é divisível por 7
  - $-2 \equiv 13(mod\ 3)$ porque -2-13=-15 é divisível por 3
- Propriedades da congruência em $\mathbb{Z}$
  - Reflexiva $a \equiv a(mod\ n)$ para todo o a
  - Simétrica se $a \equiv b(mod\ n)$ então $b \equiv a(mod\ n)$
  - Transitiva se $a \equiv b(mod\ n)$ e $b \equiv c(mod\ n)$ então $a \equiv c(mod\ n)$
  - Portanto: **relação de equivalência**

Classes de congruência

- **Definição**: a classe de congruência $mod\ n$ de um inteiro a é o conjunto de todos os inteiros com que a é congruente $mod\ n$ e denota-se $\bar{a}$

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} | a \equiv b (mod\ n)\}$$

- Ex: seja n=5; como -8-17=-25 é divisível por 5, -8 e 17 estão na mesma classe de congruência $-8 \in \overline{17}$, da mesma forma que $17 \in \overline{-8}$. Verifique que $\overline{-8} = \overline{17}$.

Exemplo

- Ex: determine todas as classes de congruência mod 5
- $\bar{0} = \{b \in \mathbb{Z} | b \equiv 0 \ (mod 5)\} = \{b \in \mathbb{Z} |\ 5\ | (b-0)\} = \{b \in \mathbb{Z} | b = 5k, k\ \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}$
- $\bar{1} = \{b \in \mathbb{Z} | b \equiv 1 \ (mod 5)\} = \{b \in \mathbb{Z} | b = 5k + 1, k\ \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}+1$
- $\bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} | b = 5k + 2, k\ \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}+2$
- $\bar{3} = \{b \in \mathbb{Z} | b = 5k + 3, k\ \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}+3$
- $\bar{4} = \{b \in \mathbb{Z} | b = 5k + 4, k\ \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}+4$

- Estas classes formam uma **partição** em $\mathbb{Z}$

a (mod n)

- **Proposição**: para inteiros a, b, e n,
$$a \equiv b \ (mod\ n) \leftrightarrow \ \bar{a} = \bar{b}$$
- **Definição**: se n $>$ 1 é um natural e a um inteiro, então $a\ (mod\ n)$ é o resto r, 0≤r<n, da divisão de a por n
- **Proposição**: qualquer inteiro é congruente mod n com o seu resto da divisão por n. Assim, há n possíveis classes de congruência mod n correspondendo a cada um dos n possíveis restos
  - $\bar{0} = n\mathbb{Z}$
  - $\bar{1} = n\mathbb{Z} + 1$
  - $\bar{2} = n\mathbb{Z}+2$
  - …
  - $\overline{n-1} = n\mathbb{Z} + (n-1)$

Substituir um inteiro fora da gama 0 a n-1 pelo resto da divisão por n e trabalhar só dentro da gama com a (mod n)

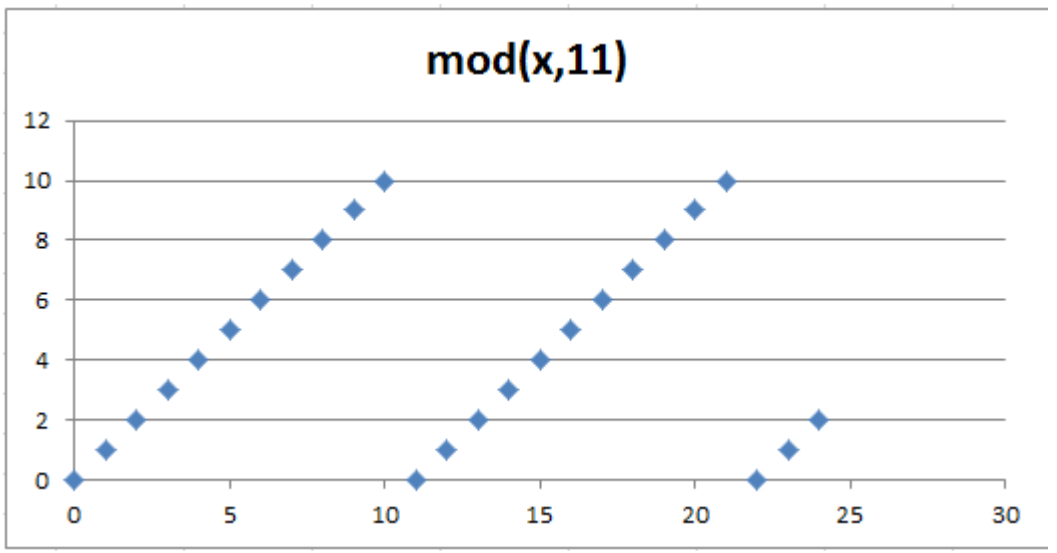
Exemplos

- Calcular
  - 28 (mod 6) 4
  - -17 (mod 5) 3
  - -30 (mod 9) 6
  - 3958 (mod 18) 16
  - -3958 (mod 18) 2

- Esboce a função

  $y = x \pmod n$

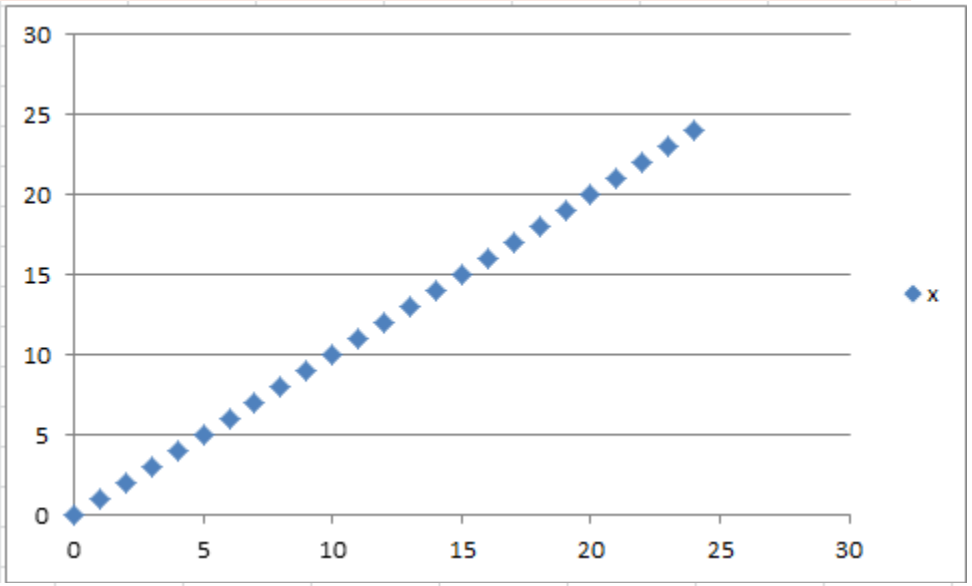
  [Excel: y= mod(x,n)]
  - n=11, $0 \leq x \leq 24$

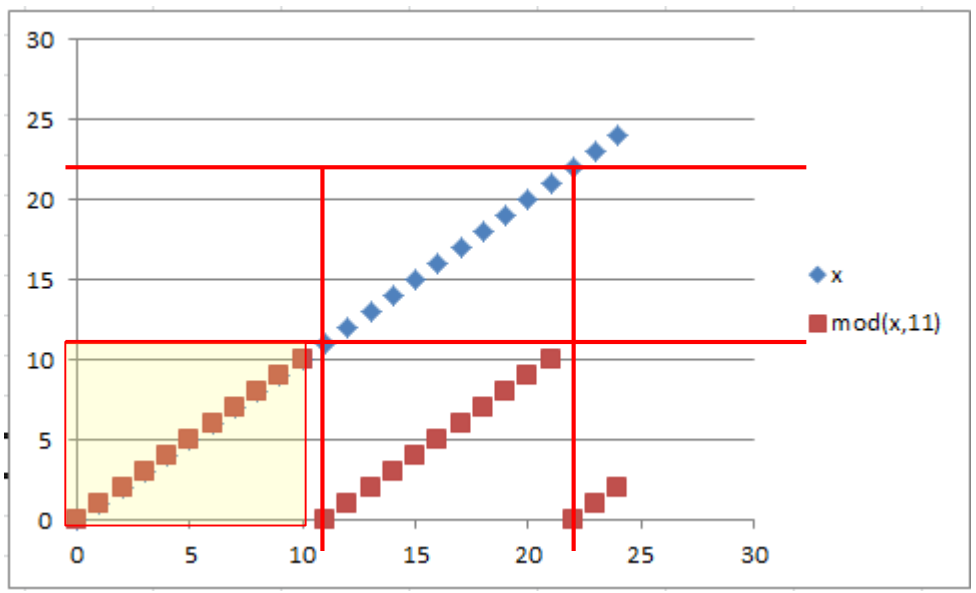


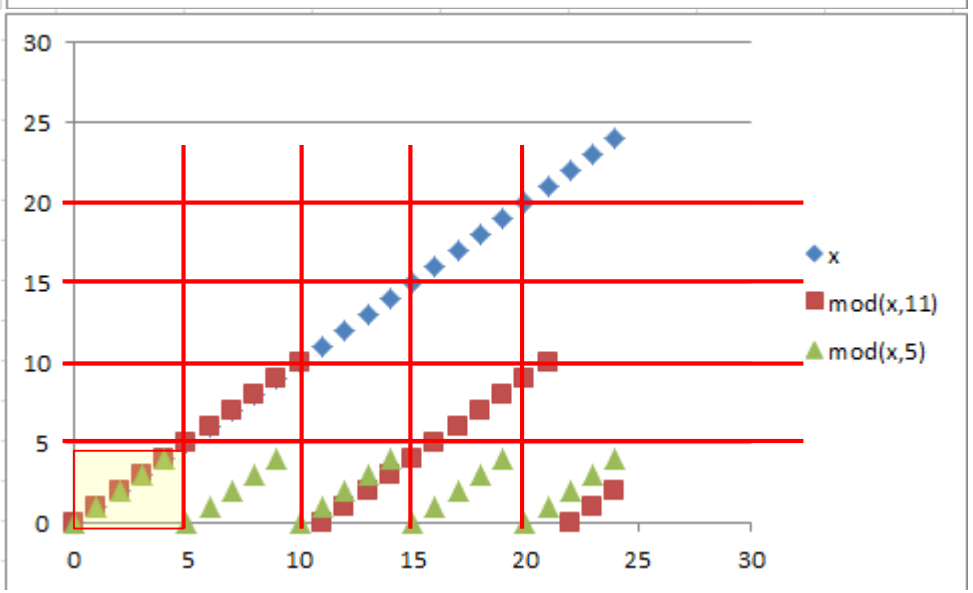
Exemplos

- Esboce as funções
  - $y = x$
  - $y \equiv x \pmod{11}$
  - $y \equiv x \pmod{5}$

O espaço como que se enrola e volta a zero ao atingir o módulo ficando confinado a n×n (relógio)

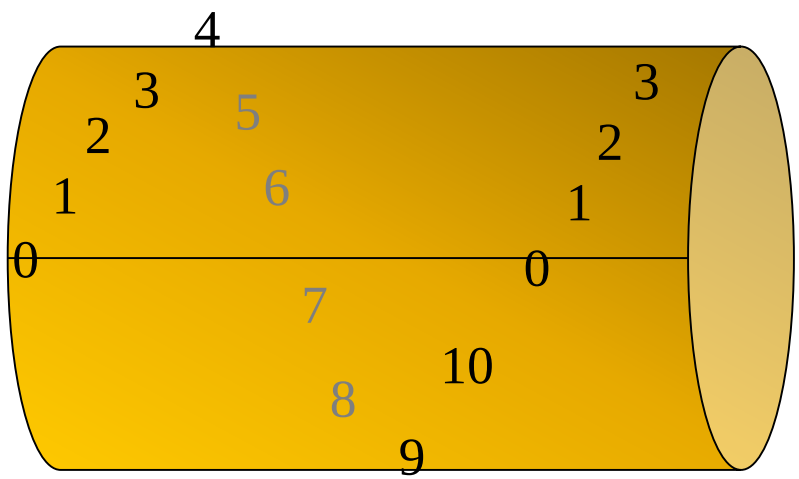




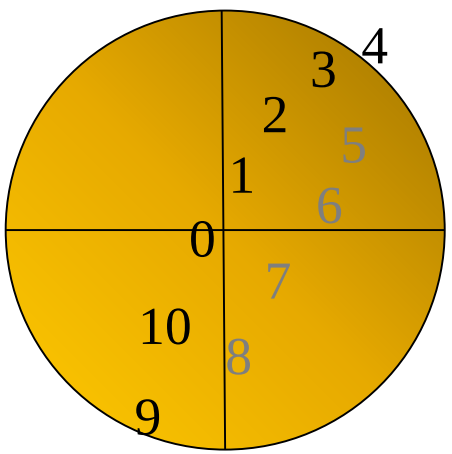


Aplicar o módulo

- No eixo dos yy



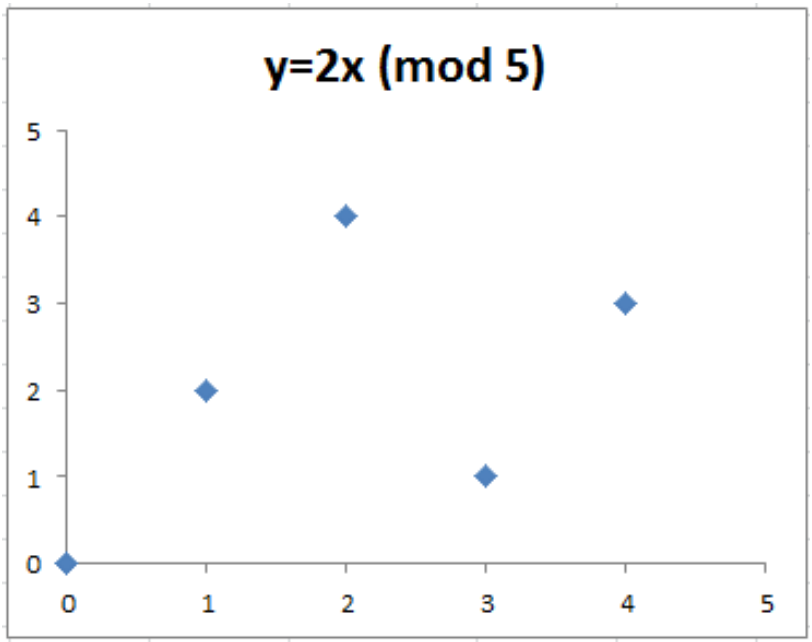
Nos eixos dos xx e dos yy

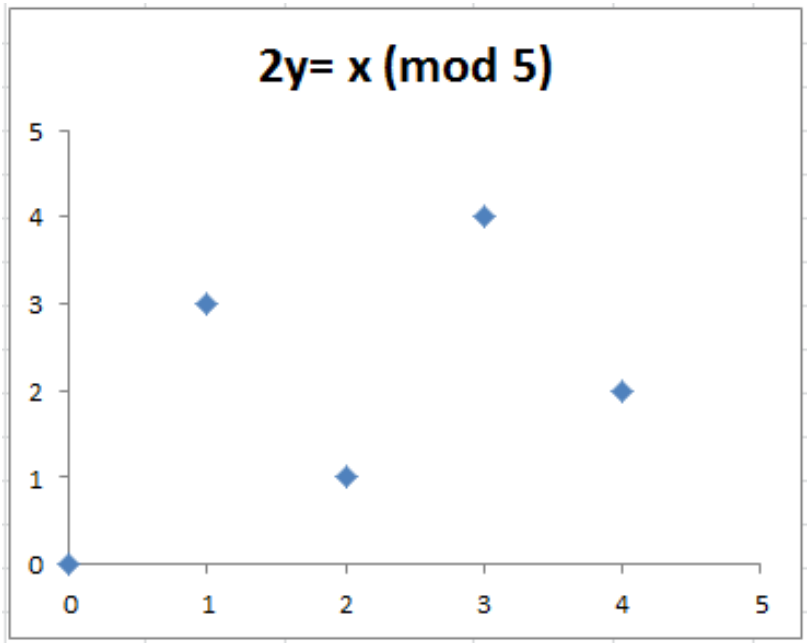


- Ao atingir o módulo volta a zero

Redução ao espaço modular

- Esboce $y \equiv 2x \pmod 5$ e $2y \equiv x \pmod 5$ mas colocando no eixo horizontal $x \pmod 5$

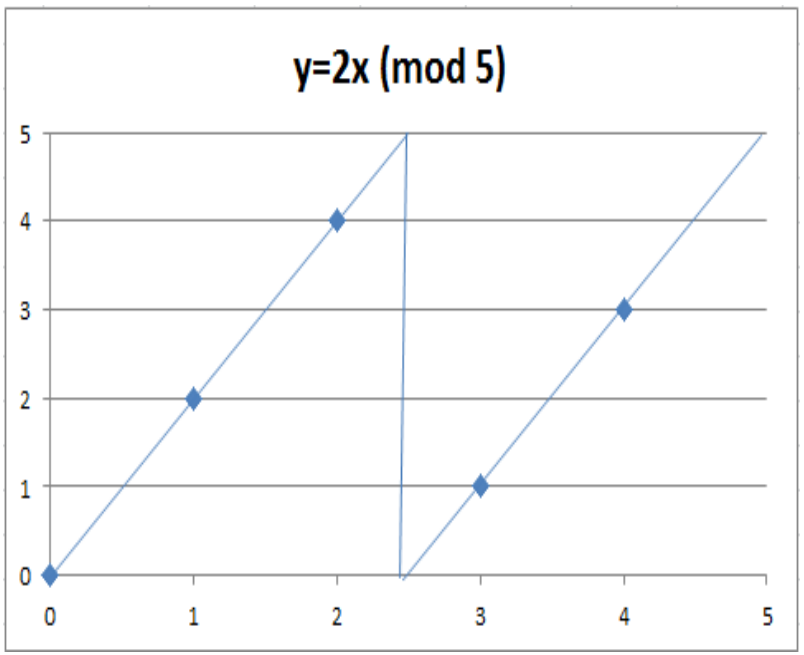


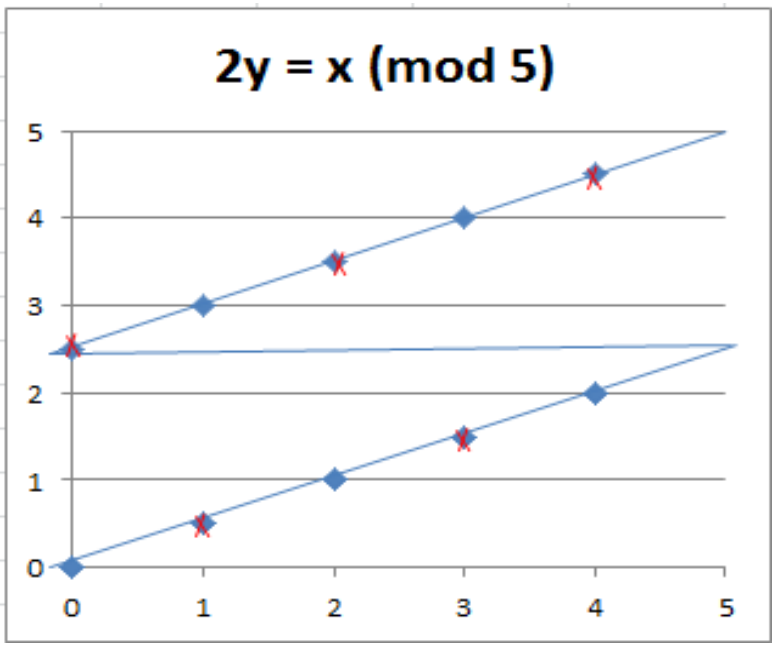


  - A distribuição de pontos é um pouco obscura

Redução ao espaço modular

- Esboce $y \equiv 2x \pmod 5$ e $2y \equiv x \pmod 5$ mas colocando no eixo horizontal $x \pmod 5$

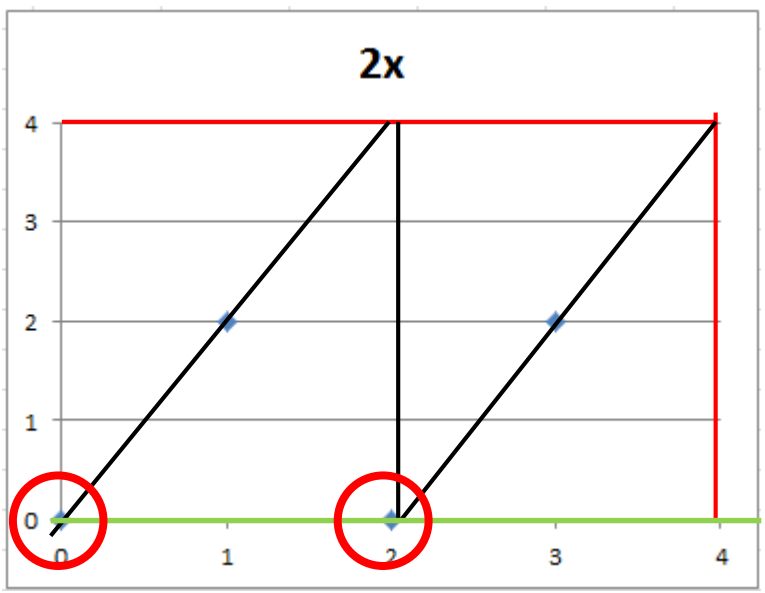




  - Nota ao 2º caso: os pontos marcados com x não fazem parte da função porque não são inteiros; é necessário ir até x=10 para marcar os pontos todos

Equações

- $2x \equiv 0 \pmod 4$
  - R: 0, 2, 4, 6, 8, …
  - [$2(0) \equiv 0 \pmod 4$, $2(2) \equiv 0 \pmod 4$, $2(4) \equiv 0 \pmod 4$, …]
  - Só se apresentam as soluções 0 e 2 porque são as únicas entre 0 e 4-1
  - Resultado: x=0 ou x=2 soluções múltiplas convenção



y=0

Equações

- $3x \equiv 1 \pmod 5$
  - x=0 $3x=0 \equiv 0 \pmod 5$
  - x=1 $3x=3 \equiv 3 \pmod 5$
  - x=2 $3x=6 \equiv 1 \pmod 5$
  - x=3 $3x=9 \equiv 4 \pmod 5$
  - x=4 $3x=12 \equiv 2 \pmod 5$
  - Resultado: x=2

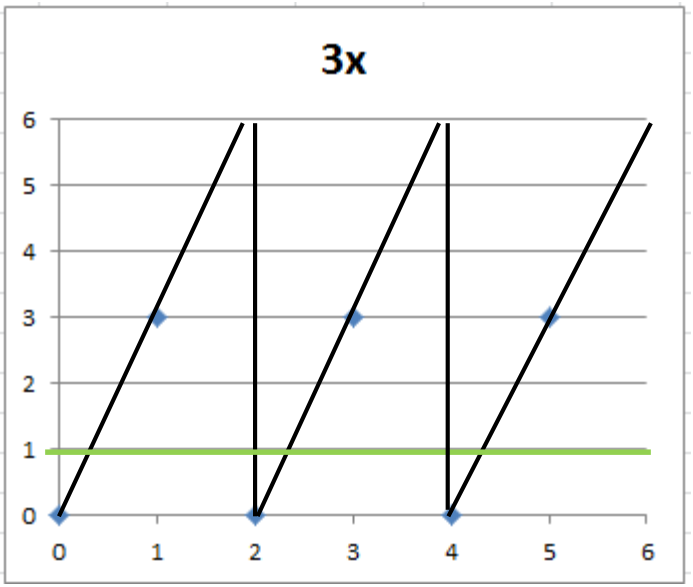
solução simples

- De cada vez que a linha atinge o limite do módulo, dá a volta e recomeça em 0
- O cruzamento de linhas 3x (mod 5) e $y \equiv 1 \pmod 5$ só é solução se coincidir com um ponto

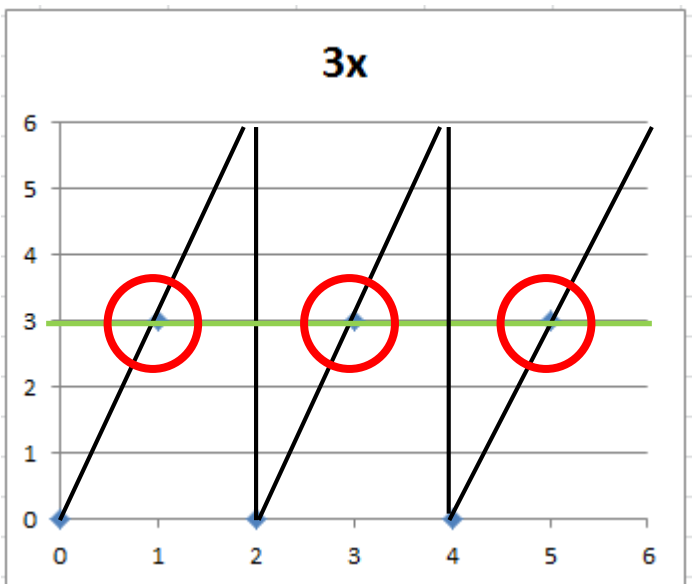
y=1

Mais equações

- $3x \equiv 1 \pmod 6$
  - $3(0)=0$ $3(1)=3$
  - $3(2)=6 \equiv 0$ $3(3)=9 \equiv 3$
  - $3(4)=12 \equiv 0$ $3(5)=15 \equiv 3$
  - Impossível
  - Mudar o **n** muda a equação



- $3x \equiv 3 \pmod 6$
  - R: x=1, x=3, x=5
  - Múltipla



Aritmética modular

- **Proposição**: Se $a \equiv x \pmod{n}$ e $b \equiv y \pmod{n}$, então
  - $a+b \equiv x+y \pmod{n}$
  - $ab \equiv xy \pmod{n}$

- **Problema**: suponha que a e b são inteiros e que $3 \mid (a^2+b^2)$. Mostre que 3|a e 3|b.
- R: pretende-se mostrar que $a \equiv 0 \pmod{3}$ e $b \equiv 0 \pmod{3}$. Prova por contradição: se afirmação falsa então $a \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$; daí que $a^2 \equiv 1$ ou $a^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$; da mesma forma $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$; portanto $a^2+b^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{3}$, o que contradiz o pressuposto.

Redução ao espaço modular

- $1017+2876 \pmod 7 = 3893 \equiv 1 \pmod 7$
- $1017+2876 \equiv 2 + 6 \equiv 1 \pmod 7$
- $(1017)(2876) \equiv (2)(6) = 12 \equiv 5 \pmod 7$
- $(1017)^2 \equiv 2^2 = 4$
- $(1017)^3 = (1017)^2(1017) \equiv 4(2) \equiv 1$

- Simplificação das operações tirando partido da modularidade quer nos operandos quer nos resultados intermédios

Cuidado com divisão e multiplicação

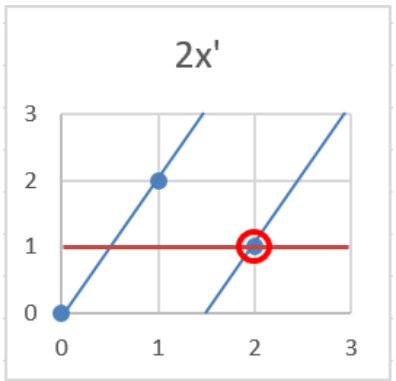
- Dividir a congruência, verdadeira, $30 \equiv 12 \pmod 9$ por 3 dá $10 \equiv 4 \pmod 9$ o que é falso.
- **Proposição (divisão da congruência)**: se $ac \equiv bc \pmod n$ e $mdc(c,n)=1$, então $a \equiv b \pmod n$.
  - Prova: dado que $mdc(c,n)=1$ existem inteiros x e y tais que $cx+ny=1$. A congruência significa que $ac-bc=kn$, para algum inteiro k. Portanto $(a-b)cx=knx$ e $(a-b)(1-ny)=knx$. De onde se conclui que $a-b=n(kx+y(a-b))$. Portanto $n|(a-b)$ e então $a \equiv b \pmod n$.
- No exemplo acima o problema está em $mdc(3,9)=3$.
- Dividir $28 \equiv 10 \pmod 3$ por 2 não tem problema dado que $mdc(2,3)=1$. O resultado é $14 \equiv 5 \pmod 3$
- **Exercício**: resolver $2x \equiv 1 \pmod 9$ e $6x \equiv 3 \pmod 9$
  - As congruências são equivalentes? As soluções são as mesmas?

Solução de uma congruência linear

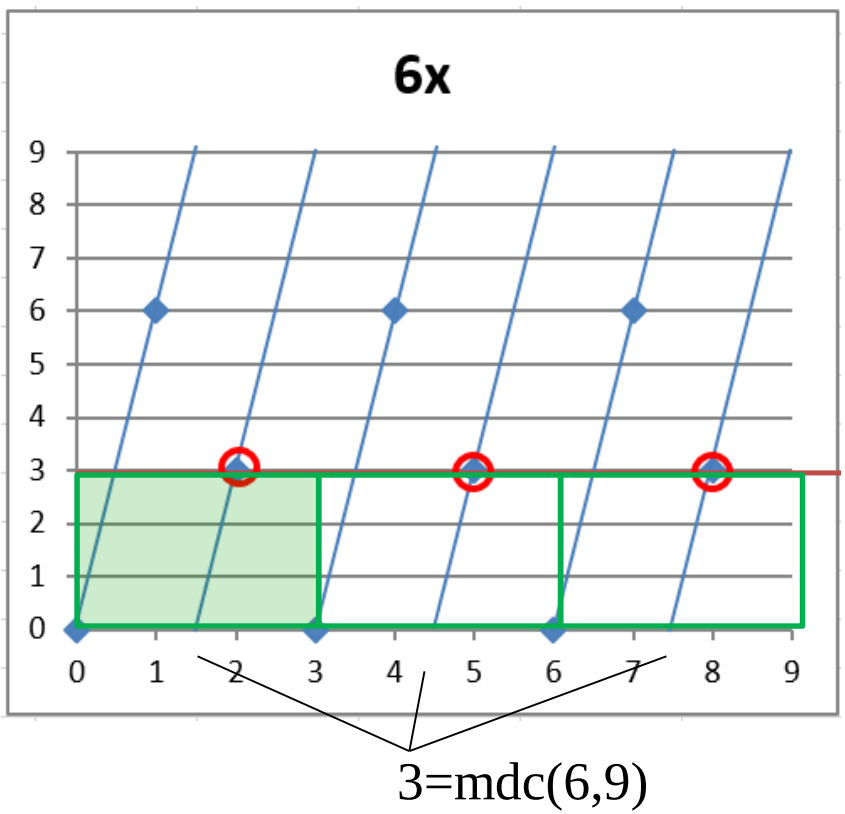
- **Proposição (congruência linear)**: Se ax ≡ b (mod n) e mdc(a,n)=d, então a congruência tem d soluções sse d|b. Seja x' a solução de $\frac{a}{d}x' \equiv \frac{b}{d}\left(mod\ \frac{n}{d}\right)$. As soluções da primeira congruência são $x = x' + k\frac{n}{d}$, com k=0, …, d-1.
- Voltando ao exemplo 6x ≡ 3 (mod 9)
  - d=mdc(6,9)=3
  - $\frac{6}{3}x' \equiv \frac{3}{3}\left(mod\ \frac{9}{3}\right)$
  - 2x' ≡ 1 (mod 3) tem exatamente uma solução x'=2, porque 2 e 3 são primos entre si
  - As soluções da congruência dada são assim
    - x=2+0*3=2
    - x=2+1*3=5
    - x=2+2*3=8

Solução gráfica

- $2x' \equiv 1 \pmod 3$
- $x'=2$



- $6x \equiv 3 \pmod 9$
- $x=2, x=5, x=8$



Quando mdc(a,n)=d > 1, o espaço modular pode ser subdividido em d subespaços modulares no eixo dos xx e a solução é única no primeiro e repetida nos seguintes.

Prova

- Se $ax \equiv b \pmod{n}$ então $ax = b + kn$ para algum inteiro k. Como $d = mdc(a,n)$, $b = ax - kn = a'dx - kn'd = (a'x - kn')d$ e, portanto, b é um múltiplo de d, $d|b$.
- Do algoritmo de Euclides, d é uma combinação linear de a e n, $d = ra + sn$. Se b for múltiplo de d, então $b = ax + ny$. Daqui conclui-se que $ax \equiv b \pmod{n}$ e portanto existe uma solução quando b é um múltiplo de d.

Prova (cont.)

- Supondo que ax ≡ b (mod n) tem solução, então d|b e $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d}\left(mod\ \frac{n}{d}\right)$ também tem solução. Seja x' essa solução. Então $\frac{a}{d}x' = \frac{b}{d} + k\frac{n}{d}$, para algum inteiro k, e ax'=b+kn.
- As solução de ax≡b (mod n) são da forma $x = x' + l\frac{n}{d}, l = 0..(d-1)$. Para isso, ax-b=jn, para algum inteiro j.
- $a\left(x' + l\frac{n}{d}\right) - b = jn$
- $ax' + al\frac{n}{d} - b = jn$
- $b + kn + al\frac{n}{d} - b = jn$
- $\left(k + a\frac{l}{d}\right)n = jn$
- Como d|a, j é um inteiro para cada valor de l de 0 a d-1

Solução única

- Todos os inteiros têm um **simétrico** módulo n
  - Isto é, existe sempre um x tal que $a+x \equiv 0 \pmod{n}$, eg. x=n-a
  - Então todas as congruências da forma $a+x \equiv b \pmod{n}$ têm solução
- Nem todas as congruências da forma $ax \equiv b \pmod{n}$ têm solução (o inverso módulo n nem sempre existe)
- **Proposição**: seja n>1 um número natural e a um inteiro tal que mdc(a,n)=1
  - Existe um inteiro s tal que $sa \equiv 1 \pmod{n}$, a que se chama **inverso** de a (mod n).
  - Para qualquer inteiro b, a congruência $ax \equiv b \pmod{n}$ tem solução.
  - A solução de $ax \equiv b \pmod{n}$ é **única** mod n, no sentido de que $ax_1 \equiv b \pmod{n}$ e $ax_2 \equiv b \pmod{n}$ implica $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$

Determinação do inverso mod n

- O resultado anterior permite resolver uma congruência

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

como se fosse uma equação fazendo $x \equiv a^{-1}b \pmod{n}$

- Para determinar o inverso note-se que, sendo a e n primos entre si, gcd(a,n) = 1
  - Já sabemos que existem s e t tais que sa+tn=1
  - Então $sa \equiv 1 \pmod{n}$, dado que $tn \equiv 0 \pmod{n}$
  - Conclui-se que $s=a^{-1}$
- Exemplo: resolva a congruência $20x \equiv 101 \pmod{637}$
  - Do algoritmo de Euclides, -7(637)+223(20)=1
  - $223(20) \equiv 1 \pmod{637}$ e portanto $223 = 20^{-1} \pmod{637}$
  - Multiplicando ambos os lados por 223,

$$x \equiv 223(101) = 22523 \equiv 228 \pmod{637}$$

Sistemas de equações

- Resolver os seguintes pares de congruências

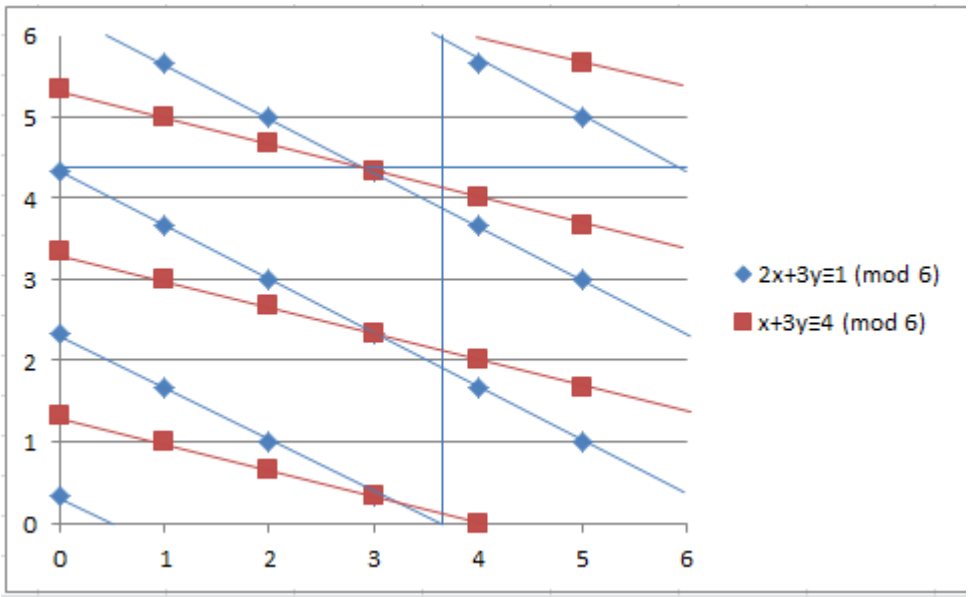
$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 1 \ (mod\ 6) \\ x + 3y \equiv 4 \ (mod\ 6) \end{cases}$$

  - Somar as duas equações dá $3x+6y \equiv 5 \pmod 6$
  - Como $6y \equiv 0 \pmod 6$, fica $3x \equiv 5 \pmod 6$; esta equação não tem solução

$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 1 \ (mod\ 6) \\ x + 3y \equiv 5 \ (mod\ 6) \end{cases}$$

  - Neste caso somar as equações dá $3x \equiv 0 \pmod 6$ que tem como soluções $x \equiv 0$, $x \equiv 2$, $x \equiv 4 \pmod 6$
  - Se $x \equiv 0$ a segunda equação fica $3y \equiv 5 \pmod 6$ sem solução
  - Se $x \equiv 2$ fica $2+3y \equiv 5$ ou $3y \equiv 3$ com solução $y \equiv 1$, $y \equiv 3$, $y \equiv 5$
  - Se $x \equiv 4$ tem-se $4+3y \equiv 5$, sem solução
  - Resultado: há três pares de soluções: $x \equiv 2$ e $y \equiv 1$, $y \equiv 3$, $y \equiv 5$

Resolução gráfica



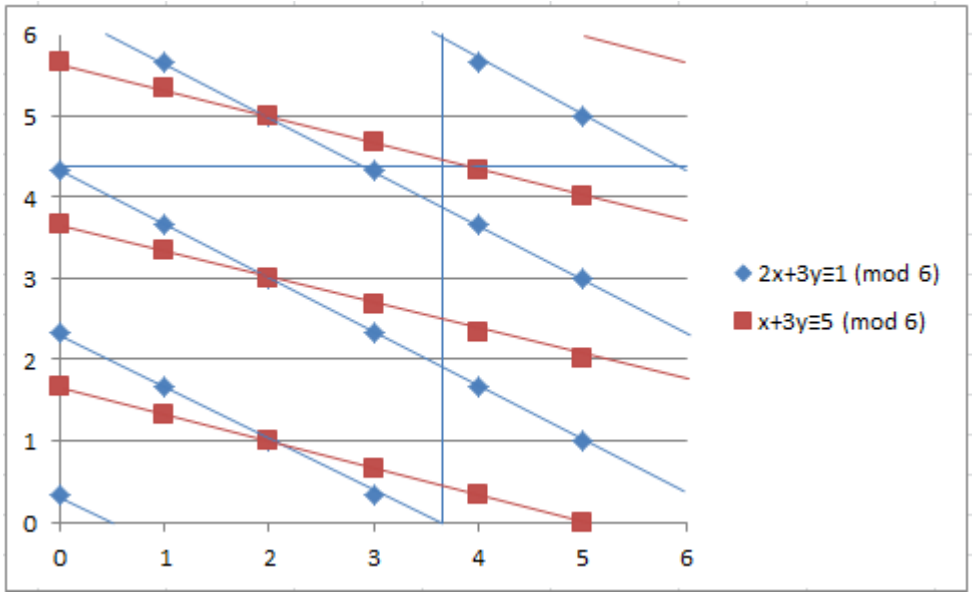
- Azul: $2x+3y \equiv 1 \pmod 6$
  - $y=-(2/3)x+(1/3) \pmod 6$
  - $x=2 \quad y=5,1,3$
  - $x=5 \quad y=3,5,1$
- Castanho: $x+3y \equiv 4 \pmod 6$
  - $y=-(1/3)x+(4/3) \pmod 6$
  - $x=1 \quad y=1,3,5$
  - $x=4 \quad y=0,2,4$

Só interessam os pontos de ambas as coordenadas inteiras

- Não há nenhum ponto de ambas as coordenadas inteiras comum às duas retas, logo não há solução

Resolução gráfica (cont.)

- $2x+3y \equiv 1 \pmod 6$
  - $y=-(2/3)x+(1/3) \pmod 6$
  - $x=2$ $y=5,1,3$
  - $x=5$ $y=3,5,1$
- $x+3y \equiv 5 \pmod 6$
  - $y=-(1/3)x+(5/3) \pmod 6$
  - $x=2$ $y=1,3,5$
  - $x=5$ $y=0,2,4$



- Aqui já há coincidência em $x=2$, $y=1,3,5$
- Três soluções (2,1), (2,3), (2,5)

Ainda o Fermat

- **Pequeno Teorema de Fermat**: se p é um primo e p não divide c, então $c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
  - Prova: como c e p são primos entre si, pela proposição da divisão de uma congruência por uma constante, pode concluir-se que nenhum par dentre os números c, 2c, …, (p-1)c são congruentes mod p
    - em qualquer potencial congruência, a proposição permite simplicar o c e fica-se com dois números de classes de congruência mod p diferentes
  - Também nenhum desses números é congruente com 0 (mod p), pela mesma razão
  - Então, módulo p, os p-1 inteiros c, 2c, …, (p-1)c têm que ser exatamente 1, 2, …, p-1 por uma ordem qualquer. Portanto

$$c.2c.3c.\ldots(p-1)c \equiv 1.2.3.\ldots(p-1)(mod\ p)$$

$$(p-1)!\,c^{p-1} \equiv (p-1)!\,(mod\ p)$$

$$c^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$ porque mdc(p, (p-1)!)=1

Aplicação

- O pequeno teorema de Fermat permite concluir que
  - $2^2 \equiv 1 \pmod 3$
  - $4^6 \equiv 1 \pmod 7$
  - $9^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
  - $4^{13331} \equiv 4 \pmod{13331}$
  - $20^{40} \equiv 20^{4+3*12} \equiv 20^4(20^{12})^3 \equiv 7^4(1)^3 \equiv 49^2 \equiv 10^2 \equiv 9 \pmod{13}$
    - No Excel não é possível calcular diretamente o resultado mas pode-se fazer a operação de multiplicar módulo 13 por 20, 40 vezes

Aplicação: ISBN

- Muitos números de identificação incluem um ou mais dígitos de verificação: ISBN (International Standard Book Number), cartão de cidadão, referência Multibanco, etc.
- ISBN-10 é um código de 10 dígitos de identificação dos livros (em vigor até 2007)
- O livro do Goodaire tem o código ISBN 0-13-167995-3
  - O primeiro grupo identifica o país ou o grupo linguístico
  - O segundo grupo identifica a editora
  - O terceiro grupo identifica o título
  - O quarto grupo é um dígito de verificação

Dígito de verificação (no ISBN)

- Estando os primeiros 9 determinados, o 10º é calculado de forma a que

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+9a_9+10a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

- **Verificação**: tendo o número, calcula-se se a soma pesada pela posição do dígito é congruente com 0 (mod 11)
- **Geração**: tendo os primeiros 9 dígitos, resolve-se a equação acima para a variável a_{10}
  - Se a_{10} for 10, então representa-se por X

Exercício

- Verificação ISBN 0-13-167995-3:
  - $1(0)+2(1)+3(3)+4(1)+5(6)+6(7)+7(9)+8(9)+9(5)+10(3) \equiv 0 \pmod{11}$
  - Qualquer erro de transcrição de um dos dígitos faz com que a congruência não seja 0; o software de verificação emite um alerta
  - Erros em mais do que um dígito podem cancelar os efeitos, embora seja pouco provável
- Geração:
  - Determine o dígito de verificação para o ISBN 0-914894-36-?
  - $1(0)+2(9)+3(1)+4(4)+5(8)+6(9)+7(4)+8(3)+9(6)+10a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$
  - $6+ 10a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$
  - $a_{10} \equiv 6 \pmod{11}$

Interesse da soma pesada

- A soma é pesada pela posição do dígito para detetar um erro comum na transcrição que é a troca de dois dígitos
  - Se a soma não fosse pesada, só interessava quais os dígitos, independentemente da ordem
- ISBN-13
  - Fazer a soma pesada dos 12 primeiros dígitos, usando o coeficiente 1 para os ímpares e 3 para os pares, módulo 10

Congruências com módulos diferentes

- Exercício
  - Qual é o número entre 100 e 500 que quando dividido por 12 dá resto 4 e quando dividido por 25 dá resto 15?
- Resposta
  - A questão colocada é determinar os números que satisfazem o sistema de congruências
    - $x \equiv 4 \pmod{12}$
    - $x \equiv 15 \pmod{25}$

    Notar que este sistema tem módulos diferentes
  - Força bruta: $x = 4+12k = 15+25j$ k, j inteiros
  - Outra solução
    - Uma vez que 12 e 25 são primos entre si, existem s e t tais que
    - $12s+25t=1$ (usar o algoritmo de Euclides)
    - $12(-2)+25(1)=1$
    - $x \equiv 15(12)(-2)+4(25)(1) \pmod{12*25} = -260, 40, \mathbf{340}, 640, \ldots$

Teorema Chinês dos Restos

- Suponha que m e n são números primos entre si.

  Então, para quaisquer inteiros a e b, o par de congruências
  - $x \equiv a \pmod{m}$
  - $x \equiv b \pmod{n}$

  tem uma solução única módulo mn.
- **Prova:**
- sm+tn=1 (algoritmo de Euclides) (*)
- x = a(tn) + b(sm) é uma solução das congruências
  - $x \pmod{m} \equiv a(tn) \pmod{m}$ dado que $b(sm) \equiv 0 \pmod{m}$
  - $\equiv a \pmod{m}$ dado que $tn \equiv 1 \pmod{m}$ ver (*)
  - $x \pmod{n} \equiv b(sm) \pmod{n}$ dado que $a(tn) \equiv 0 \pmod{n}$
  - $\equiv b \pmod{n}$ dado que $sm \equiv 1 \pmod{n}$ ver (*)

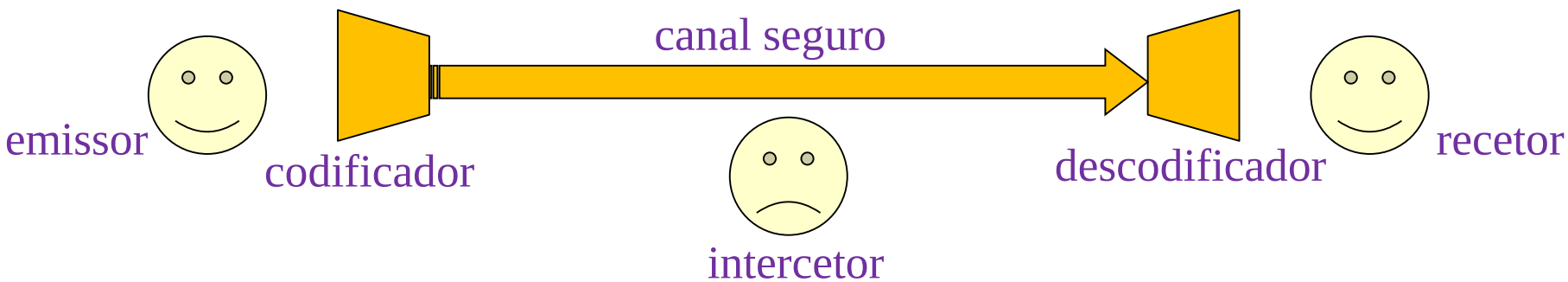
Representação de números grandes

- O resultado anterior pode ser generalizado para t congruências, desde que $m_1, \ldots, m_t$ sejam primos par a par
  - $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$
  - $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$
  - …
  - $x \equiv a_t \pmod{m_t}$

  tem solução única módulo $m_1 m_2 \ldots m_t$.
- Escolhendo $m_i = {p_i}^{\alpha_i}$ em que cada p_i é um primo, consegue-se representar de forma única um número grande à custa de t restos
- Se a e b forem representados por $a_1, \ldots, a_t$ e $b_1, \ldots, b_t$ então o **produto** ab é congruente com a representação $a_1b_1, \ldots, a_tb_t$
  - Determinar a escala por estimativa

Criptografia

- É o estudo das formas de encriptação (codificação) das mensagens entre um emissor e um recetor de forma a impedir que terceiros tenham acesso ao seu conteúdo



Problemas do método da tabela

- Há muitas técnicas de codificação
  - Exemplo: estabelecer uma tabela de conversão dos carateres

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W		X	Y	Z
T	H	E	Q	U	I	C	K	B	R	O	W	N	F	X	J	M	P	S		V	L	A	Z	Y	D	G

  - Mensagem: FCP GANHOU
  - Encriptada: IEJZCTFKXV
  - Problema: enviar antes a tabela ao recetor
  - Usar uma frase de um livro comum para fazer a conversão
- As línguas naturais têm uma distribuição de carateres própria e construções de vocabulário e sintáticas específicas
  - Com texto suficiente, consegue-se reconstruir a tabela de conversão, usando a comparação de frequências
- Estes métodos baseiam-se na confidencialidade da chave, conhecida pelos dois interlocutores

Codificação numérica

- A correspondência pode ser para números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Código de César: E = f(M) = M+3 (mod 26)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

- Generalizando: E = f(M) = M+k (mod n)
  - f(M) é o algoritmo, k é a chave, n o comprimento do alfabeto

Quantas chaves?

- Transformação afim: E = f(M) = aM+b (mod n)
  - Aqui a chave é o par (a,b) Ex: (~~4~~,7) **(3,7) mdc(a,n)=1**

Quantas chaves?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	K	N	Q	T	W	Z	C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G	J	M	P	S	V	Y	B	E

Cifra de Hill

- Em vez de encriptar símbolo a símbolo, encriptar segmentos de texto de comprimento l, com transformação linear A_{l*l}
  - Evita a correspondência biunívoca entre símbolo e sua encriptação
  - A transformação linear deve ser feita com aritmética modular, limitada ao comprimento do alfabeto n
- Encriptação: $E_k = AM_k \ (mod\ n)$
  - $E_{kl+1..(k+1)l} = A_{l*l} M_{kl+1..(k+1)l}$
- Desencriptação: $M_k = A^{-1} E_k \ (mod\ n)$
- Condição a respeitar para garantir unicidade
  - mdc(|A|, n) = 1
- Evita a criptanálise baseada em frequências de ocorrência
- Fácil de quebrar se for conhecido um par (mensagem em claro, mensagem cifrada)

Exemplo de cifra de Hill

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_	?	.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- M= “EUCLID” $M = [4 \quad 20 \quad 2 \quad 11 \quad 8 \quad 3]$
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $M_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix}$ $M_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$
- **Encriptar** $E_0 = AM_0 = \begin{bmatrix} 34 \\ 52 \\ 68 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 10 \end{bmatrix} \ (mod\ 29)$
- $E_1 = AM_1 = \begin{bmatrix} 39 \\ 76 \\ 41 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix} \ (mod\ 29)$
- E= “FXKKSM”

Matriz inversa em aritmética modular

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) \equiv |A|^{-1} adj(A) \pmod{n}$
- $|A| = -11 \equiv 18 \pmod{29}$
- $|A|^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv -8 \equiv 21$
- $A^{-1} \equiv 21 \begin{bmatrix} -22 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 11 & -5 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 2 & 18 \\ 0 & 21 & 3 \\ 28 & 11 & 16 \end{bmatrix} \pmod{29}$
- **Desencriptar** $M_0 = A^{-1}E_0 = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 10 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix} \pmod{29}$
- $M_1 = A^{-1}E_1 = A^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{29}$
- M = “EUCLID”

Em $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -1 & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -22 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 11 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sistema RSA de chave pública

- Ideia na base dos sistemas usados para encriptar as comunicações na Internet e os dados nos computadores
  - Rivest, Shamir e Adleman (1977)
- Este sistema baseia-se na existência de pares de chaves para cada interlocutor
  - Chave pública de A, disponível num servidor de chaves público, serve para qualquer pessoa encriptar a mensagem M para A
  - Chave privada de A, só conhecida por A, serve para desencriptar M

Processo

- Preparação:
  - Escolher dois números primos diferentes p e q e um número natural s primo com (p-1) e com (q-1); calcular r=pq
  - Calcular a e b pelo algoritmo de Euclides, dado que mdc(s,p-1)=1, mdc(s,q-1)=1
    - as + x(p-1) = 1
    - bs + y(q-1) = 1
  - Publicitar r e s
- Encriptação:
  - Calcular $E \equiv M^s \pmod{r}$ e enviar E
- Desencriptação
  - $M \equiv E^a \pmod{p}$ e $M \equiv E^b \pmod{q}$
  - Calcular M pelo Teorema Chinês dos Restos

Exemplo

- Preparação: p= 17, q=59, r=1003, s=3
  - as+x(p-1) = a(3)+x(16) = 1 11(3)+(-2)(16)=1 a=11
  - bs+y(q-1) = b(3)+y(58) = 1 39(3)+(-2)(58)=1 b=39
- Encriptação
  - Mensagem: GO M=715 $E \equiv M^s \equiv 715^3 \equiv 579 \pmod{1003}$
  - Transmite E
- Desencriptação
  - $E^a = 579^{11} \equiv 1^{11} \equiv 1 \pmod{17}$
  - $E^b = 579^{39} \equiv 7 \pmod{59}$
  - 17n+59m=1 17(7)+59(-2)=1
  - M = 7(17)(7) + (1)(59)(-2) = 715

Justificação

- Como $E \equiv M^s \pmod r$ temos que $E \equiv M^s \pmod p$ e $E \equiv M^s \pmod q$
- Como $as+x(p-1) = 1$
  - $M = M^{as+x(p-1)} = (M^s)^a(M^{p-1})^x \equiv E^a \pmod p$ pelo Pequeno Teorema de Fermat
  - $M = M^{bs+x(q-1)} = (M^s)^b(M^{q-1})^x \equiv E^b \pmod q$ idem
- Então, pelo Teorema Chinês dos Restos, M é determinado unicamente módulo r

- Isto só é verdade para mensagens $M<r$
- Para mensagens maiores, segmenta-se a mensagem em blocos que correspondam a um inteiro menor que $r=pq$