

Lógica Proposicional-2

Conetivas Booleanas

Provas informais e formais com conetivas Booleanas

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011

Capítulos: 3-4-5-6

Conetivas lógicas

- ❑ Construir fórmulas arbitrárias a partir de fórmulas atômicas
- ❑ Conjunção, disjunção e negação: são funcionais da verdade
 - valor de verdade de afirmações complexas só depende do valor de verdade das frases atômicas
- ❑ Significado de conetiva: tabela de verdade
 - mostra como o valor de verdade de uma fórmula construída com ela depende dos valores de verdade dos seus constituintes
- ❑ Significado de conetiva: jogo de Henkin-Hintikka
 - Egas e Becas não concordam no valor de verdade de uma frase complexa
 - Egas: diz que é verdadeira; Becas: diz que é falsa
 - Jogadores desafiam-se a justificar as suas afirmações em termos de afirmações mais simples
 - Chegando às fórmulas atômicas, pode examinar-se o mundo e verificar o seu valor lógico

Jogar com o Mundo de Tarski

- ❑ Máquina faz papel de adversário e tenta ganhar mesmo quando o jogador faz uma afirmação verdadeira
- ❑ Se o jogador faz afirmação falsa:
 - Máquina ganha, pondo em evidência falhas no raciocínio
- ❑ Se o jogador faz afirmação verdadeira:
 - Máquina perde se o jogador é capaz de justificar as suas escolhas até às fórmulas atômicas
 - Máquina pode ganhar se alguma das justificações intermédias para a afirmação for mal escolhida

Negação

- ❑ Símbolo: \neg
- ❑ LN: *não... não se verifica que... nenhum... in- des-*
 - *A Rita não está na sala*
 - *Não se verifica o facto de a Rita estar na sala*
- ❑ \neg NaSala(rita)
 - Quando é verdade: quando NaSala(rita) é falso
- ❑ LN: dupla negativa tem sentido de negativa reforçada
 - Não faz diferença nenhuma
 - Interpretado como *Não faz diferença alguma*, e não como *Faz alguma diferença*
- ❑ LPO: $\neg\neg$ NaSala(rita) é V quando NaSala(rita) for V
- ❑ = tem abreviatura para negação: $a \neq b$ em vez de $\neg(a=b)$

\neg : Semântica e regra do jogo

- ❑ Fórmula P de LPO: existe sempre $\neg P$
- ❑ $\neg P$ é verdadeiro se e só se P é falso
- ❑ Tabela de verdade

P	$\neg P$
V	F
F	V

- Regra do jogo: não se faz nada :)
- Quando afirmamos a verdade de $\neg P$, comprometemo-nos com a falsidade de P e vice-versa
- Tarski's World: reduz a afirmação negativa à positiva e troca o valor lógico escolhido

Conjunção

- ❑ Símbolo: \wedge
- ❑ LN: *e... e também... mas...*
Rita e Luis estão na sala
- ❑ **NaSala(rita) \wedge NaSala(luis)**
 - Verdadeira se Rita está na sala e Luis está na sala
- ❑ LN: ‘e’ é mais expressivo que \wedge :
Rita entrou na sala e Luis saiu da sala
Luis saiu da sala e Rita entrou na sala

Entra(rita) \wedge Sai(luis)
Sai(luis) \wedge Entra(rita)

Verdadeiras nas
mesmas circunstâncias

\wedge : Semântica e regra do jogo

❑ **$P \wedge Q$ é verdadeiro sse P é verdadeiro e Q é verdadeiro**

❑ Tabela de verdade

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

■ Regra do Jogo:

- Se afirmamos V para $P \wedge Q$, afirmamos a verdade de P e de Q
 - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a verdade deste
 - Se um deles é falso: escolhe esse
 - Se são ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária
- Se afirmamos F para $P \wedge Q$: afirmamos que pelo menos um é falso
 - Máquina pede para nos comprometermos com o valor F para um deles

Disjunção

- ❑ Símbolo: \vee
- ❑ LN: *ou...* (entre frases ou entre componentes destas)
A Rita ou o Luis estão na sala
Significado corrente é inclusivo
- ❑ LPO: disjunção só entre frases
 $\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}$
Significado é inclusivo
- ~~$\text{NaSala(rita)} \vee \text{luis}$~~
- ❑ LN: significado exclusivo com *ou ... ou*
- ❑ Exclusivo em LPO:
 $[\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}] \wedge \neg [\text{NaSala(rita)} \wedge \text{NaSala(luis)}]$
- ❑ *nem ... nem*
 $\neg [- \vee -]$

\vee : Semântica e regra do jogo

- ❑ **$P \vee Q$ é verdadeiro se pelo menos um de P e Q é verdadeiro, senão é falso**

- ❑ Tabela de verdade:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Regra do Jogo:

- Se afirmamos V para $P \vee Q$
 - Máquina pede para nos comprometermos com o valor V para um deles
- Se afirmamos F para $P \vee Q$: afirmamos que ambos são falsos
 - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a falsidade deste
 - Se um só deles é verdadeiro: escolhe esse
 - Se ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária

Regras do jogo

Forma	Afirmação	Quem joga	Objetivo
$P \vee Q$	V	nós	Escolher um de P e Q verdadeiro
	F	Tarski's World	
$P \wedge Q$	V	Tarski's World	Escolher um de P e Q falso
	F	nós	
$\neg P$	V	-	Mudar de $\neg P$ para P e trocar valor lógico escolhido
	F		

Nota: podemos saber o valor lógico de $P \vee Q$ e não saber os valores lógicos de P nem de Q
O jogo assume conhecimento completo sobre o mundo

Ambiguidade e parênteses

- ❑ LN: ambiguidade é comum

A Rita está na sala ou o Luis está na sala e o Rui está distraído

- ❑ LPO:

$[NaSala(rita) \vee NaSala(luis)] \wedge Distraido(rui)$

$NaSala(rita) \vee [NaSala(luis) \wedge Distraido(rui)]$

- ❑ Negação: parêntesis delimitam alcance

$\neg NaSala(rita) \vee NaSala(luis)$

$\neg [NaSala(rita) \vee NaSala(luis)]$

- ❑ Critério dos parêntesis

- Conjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
- Disjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
- Parêntesis extra usados livremente para obter significado pretendido

VERDADE E CONSEQUÊNCIA

Equivalência lógica

- ❑ P e Q são logicamente equivalentes: verdadeiras exatamente nas mesmas circunstâncias

$$P \Leftrightarrow Q$$

- ❑ Tarski's World:
 - P e Q logicamente equivalentes: verdadeiras nos mesmos mundos
 - Existe um mundo no qual uma é verdadeira e outra falsa: não são logicamente equivalentes

Leis de DeMorgan

$$\neg (R \wedge S) \Leftrightarrow \neg R \vee \neg S$$

$$\neg (R \vee S) \Leftrightarrow \neg R \wedge \neg S$$

Equivalência lógica

❑ **Dupla negação** $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

❑ Frases logicamente equivalentes: cada uma é consequência lógica da outra

❑ Usando dupla negação e leis de DeMorgan: qualquer fórmula escrita com \wedge , \vee , \neg se transforma noutra com \neg aplicada apenas nas fórmulas atômicas - **forma normal com negação**

$$\begin{aligned}\neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C \\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C\end{aligned}$$

❑ **Literal**: fórmula atômica ou negação de uma fórmula atômica

❑ Notar: \Leftrightarrow não é símbolo da linguagem: é uma forma abreviada de dizer que duas fórmulas são logicamente equivalentes

Equivalências lógicas

- ❑ Idempotência do \wedge :

$$P \wedge Q \wedge P \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge Q$$

- ❑ Idempotência do \vee :

$$P \vee Q \vee P \quad \Leftrightarrow \quad P \vee Q$$

- ❑ Comutatividade do \wedge :

$$P \wedge Q \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad Q \wedge P \wedge R$$

- ❑ Comutatividade do \vee :

$$P \vee Q \vee R \quad \Leftrightarrow \quad Q \vee P \vee R$$

Leis distributivas

Distributividade de \wedge sobre \vee

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Distributividade de \vee sobre \wedge

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Equivalências úteis nas simplificações de fórmulas:
 - Idempotência
 - Leis distributivas
 - Leis de DeMorgan
 - Dupla negação
 - Princípios do 3º excluído ($P \vee \neg P \Leftrightarrow V$) e da não contradição ($P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$)
 - Comutatividade, associatividade
 - Elementos neutro ($\wedge: V, \vee: F$) e absorvente ($\vee: V, \wedge: F$)
 - Cancelamento, ...

Formas normais

- Forma normal disjuntiva (DNF):
 - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas \wedge e \vee :
reescrita como disjunção de conjunções de literais
 - $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \vee (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \vee \dots \vee (R_1 \wedge \dots \wedge R_n)$
- Forma normal conjuntiva (CNF):
 - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas \wedge e \vee :
reescrita como conjunção de disjunções de literais
 - $(P_1 \vee \dots \vee P_n) \wedge (Q_1 \vee \dots \vee Q_n) \wedge \dots \wedge (R_1 \vee \dots \vee R_n)$

Exemplo

Transformar em forma normal disjuntiva

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge (C \vee D) &\Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge D] \\&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee [(A \vee B) \wedge D] \\&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)\end{aligned}$$

Transformar em forma normal conjuntiva

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee C] \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C \\&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\&\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)\end{aligned}$$

Tradução de língua natural

- ❑ Frases em LN e em LPO: têm o mesmo significado se tiverem o mesmo valor lógico em todas as circunstâncias
- ❑ Se a fórmula A é tradução de uma frase então B, logicamente equivalente a A, também é tradução dessa frase
- ❑ Mas...

Algumas traduções são mais fiéis ao estilo da afirmação inicial

Ex: *Não é verdade que a Rita e o Luis estejam ambos na sala*

(1) $\neg(\text{NaSala}(\text{rita}) \wedge \text{NaSala}(\text{luis}))$

(2) $\neg\text{NaSala}(\text{rita}) \vee \neg\text{NaSala}(\text{luis})$

(1) é fiel ao estilo da frase em LN

(2) não é fiel ao estilo

Satisfação e verdade lógica

- ❑ Fórmula satisfazível (logicamente possível):
 - pode ser verdadeira, de um ponto de vista lógico
 - ou - há alguma circunstância logicamente possível na qual é verdadeira
- ❑ Conjunto de fórmulas é **satisfazível**

existe circunstância possível
na qual as fórmulas são
simultaneamente verdadeiras

Não basta cada uma ser satisfazível:

$\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}$

$\neg \text{NaSala(rita)}$

$\neg \text{NaSala(luis)}$

- Tarski's World:
 - frase é satisfazível se se pode construir um mundo em que é verdadeira
 - chama-se-lhe TW-satisfazível
- Mas...
 - há frases logicamente satisfazíveis que não podem tornar-se verdadeiras nos mundos do Tarski's World:
 - ❑ $\neg (\text{Tet(b)} \vee \text{Cube(b)} \vee \text{Dodec(b)})$ não é TW-satisfazível

Fórmula logicamente verdadeira

- ❑ Fórmula que é verdadeira qualquer que seja o mundo

$\text{NaSala(rita)} \vee \neg \text{NaSala(rita)}$

$\neg(\text{Atento(luis)} \wedge \neg \text{Atento(luis)})$

$\neg[(\text{Atento(luis)} \vee \text{Atento(rui)}) \wedge \neg \text{Atento(luis)} \wedge \neg \text{Atento(rui)}]$

- ❑ P logicamente verdadeiro: $\neg P$ não é satisfazível

- ❑ Averiguar satisfação e verdade lógica: tabela de verdade

- ❑ $(\text{Cube(a)} \wedge \text{Cube(b)}) \vee \neg \text{Cube(c)}$ $(A \wedge B) \vee \neg C$

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Decidir satisfação de fórmula

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$	
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$		
V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V

Tautologia

- ❑ **Linhas espúrias:** não representam possibilidades genuínas
 - Ex: A é fórmula atômica $a=a$
A segunda metade da 1ª coluna da tabela é espúria: $a=a$ não pode ser falso
 - Ex: A é Tet(c)
Linhas que têm V para A e para C são espúrias porque c não pode ser tetraedro e cubo
- ❑ Investigar **verdade lógica:** linhas espúrias são ignoradas
- ❑ Reconhecer linhas espúrias:
 - pelo significado das fórmulas atômicas
- ❑ Mais forte que verdade lógica: **tautologia**
 - fórmula verdadeira em todas as linhas, espúrias ou não
 - Tautologias são verdades lógicas, algumas verdades lógicas não são tautologias ($a=a$)

Tautologia e verdade lógica

F: fórmula construída a partir de fórmulas atômicas com conetivas

Tabela de verdade para F mostra como o seu valor lógico depende do das suas partes atômicas

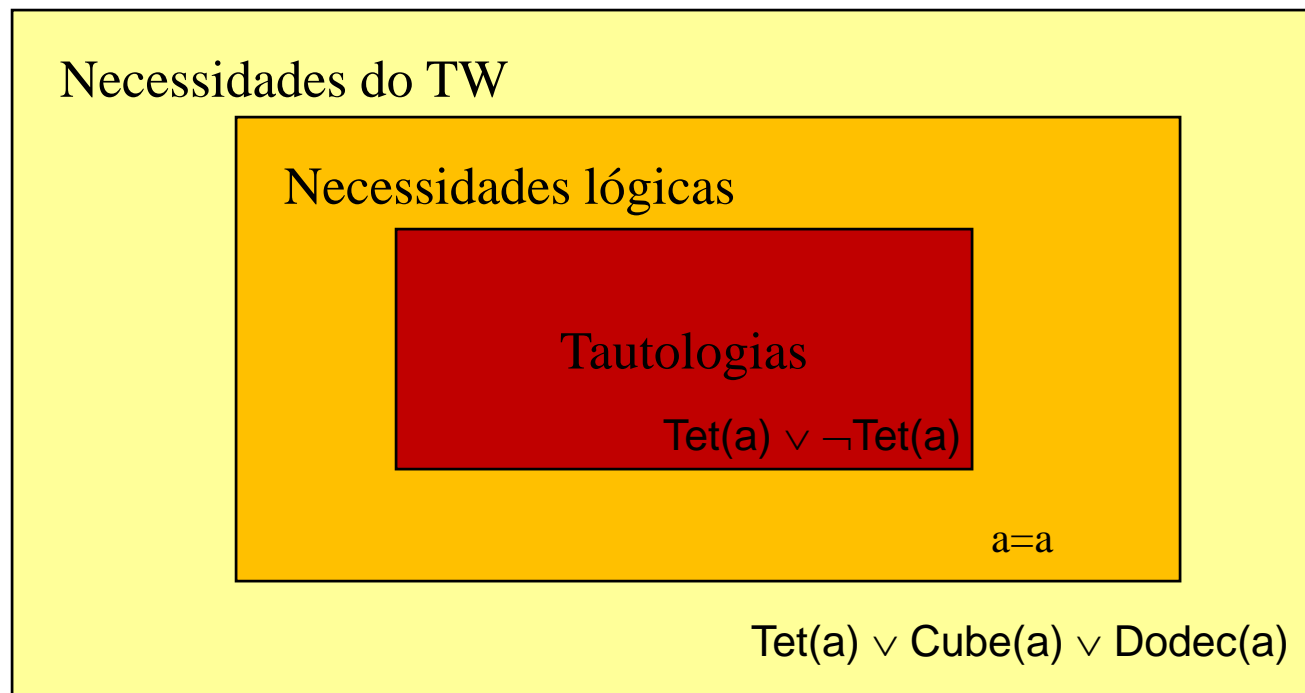
F é **tautologia** se e só se toda a linha lhe atribui V

F é **satisfazível** (possibilidade lógica) se e só se há pelo menos uma linha não espúria que lhe atribui V

F é **logicamente verdadeira** (necessidade lógica) se e só se todas as linhas não espúrias lhe atribuem V

F é TW-satisfazível (TW-possível) se existe um mundo TW que a torna verdadeira

Classificação de fórmulas



- ❑ Toda a tautologia é uma verdade lógica
- ❑ Há verdades lógicas que não são tautologias
- ❑ Prova de verdade lógica
 - se se pode provar P sem premissas, P é verdade lógica

Dois princípios

- ❑ **Tautologia** (equivale a V):
- ❑ $P \vee \neg P$ - *princípio do terceiro excluído*
 - P é verdade ou P é falso e não há outra hipótese
- ❑ **Não satisfazível** (equivale a F):
- ❑ $P \wedge \neg P$ - *princípio da não contradição*
 - P não pode ser verdade e falso simultaneamente

Úteis nas simplificações de fórmulas complexas

Equivalência lógica e tautológica

- ❑ Frases tautologicamente equivalentes
 - equivalentes atendendo apenas ao significado das conetivas
 - ... pode ser averiguado na tabela de verdade
 - S e S' são tautologicamente equivalentes se cada linha da tabela de verdade conjunta lhes atribui os mesmos valores
- ❑ Frases tautologicamente equivalentes são logicamente equivalentes
- ❑ Algumas equivalências lógicas não são equivalências tautológicas

Consequência lógica e tautológica

- ❑ Frase S' é consequência tautológica de S
 - consequência que atende apenas ao significado das conetivas
 - ... pode ser averiguada na tabela de verdade
 - S' é consequência tautológica de S se toda a linha da tabela de verdade que atribui V a S atribui o mesmo valor a S'
- ❑ As consequências tautológicas são também consequências lógicas
- ❑ Algumas consequências lógicas não são consequências tautológicas
 - Ex: $a=c$ é consequência de $a=b \wedge b=c$

Noções de consequência em Fitch

- ❑ Métodos na construção de provas formais com o Fitch
- ❑ Consequência Tautológica (Taut Con)
 - consequência que só atende ao significado das conetivas
 - ignora quantificadores e significado dos predicados
- ❑ Consequência de 1ª Ordem (FO Con)
 - consequência atende a conetivas, quantificadores e predicado =
- ❑ Consequência Analítica (Ana Con)
 - consequência atende a conetivas, quantificadores, predicado = e maioria dos predicados do TW

Quadrado da simulação

- ❑ Lógica como “simulação” para obter *novo* conhecimento
 - partir da realidade
 - representar em LPO
 - raciocinar, obter uma conclusão
 - regressar ao equivalente da conclusão na realidade.

