

T2013-4-P5

❑ Resolva a congruência $743x \equiv 25 \pmod{9991}$.

❑ R:

		m	n	q
a	9991	1	0	
b	743	0	1	13
r1	332	1	-13	2
r2	79	-2	27	4
r3	16	9	-121	4
r4	15	-38	511	1
r5	1	47	-632	15
r6	0	-743	9991	#DIV/0!

❑ Euclides: $1 = 47(9991) - 632(743)$

❑ $743^{-1} \pmod{9991} \equiv 9991 - 632 \equiv 9359$

❑ $x \equiv (9359)(25) \equiv 4182 \pmod{9991}$

T2014-4-P6

❑ Resolva a congruência $7033x \equiv 1323 \pmod{11639}$.

❑ R: Euclides:

❑ $1 = -3318(11639) + 5491(7033)$

❑ $7033^{-1} \pmod{11639} \equiv 5491$

❑ $x \equiv (5491)(1323)$

❑ $\equiv 1857 \pmod{11639}$

		a	b	q
a	11639	1	0	
b	7033	0	1	1
r1	4606	1	-1	1
r2	2427	-1	2	1
r3	2179	2	-3	1
r4	248	-3	5	8
r5	195	26	-43	1
r6	53	-29	48	3
r7	36	113	-187	1
r8	17	-142	235	2
r9	2	397	-657	8
r10	1	-3318	5491	2
r11	0	7033	-11639	#DIV/0!

T2013-4-P6

- ❑ O número de identificação fiscal em Portugal é constituído por 9 dígitos $NIF=(a_1, a_2, \dots, a_9)$, sendo que o último é calculado de modo a que $NIF \cdot w \pmod{11} = 0$, em que $w=(9,8,7,6,5,4,3,2,1)$, isto é

$$9a_1 + 8a_2 + 7a_3 + \dots + 2a_8 + a_9 \equiv 0 \pmod{11}$$

- ❑ No caso de $a_9=10$ escreve-se 0.

- ❑ Verifique se o seguinte NIF está correto: 511413190.

NIF	5	1	1	4	1	3	1	9	0	
Pesos	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
									10	1

- ❑ R: está correto mas $a_9=10$.
- ❑ Qual o dígito de verificação do NIF 16174816C?
- ❑ R: C=3. $C=11-\text{MOD}(\text{SUMPRODUCT}(B3:I3;B4:I4);11)$

T2014-4-P7

- ❑ O número de identificação bancária (NIB) em Portugal é constituído por 21 dígitos com o seguinte formato BBBBAAAACCCCCCCCCCCCCVV.
 - BBBB – banco
 - AAAA – agência
 - CCCCCCCCCC – conta
 - VV – dígitos de verificação.
- ❑ Um NIB é válido se for congruente com 1 módulo 97.
- ❑ a) Dado o banco 0018, agência 0249, conta 00200011528, determine os dígitos de verificação.

NIB

□ R:

$$\square a_{20}a_{19}\dots a_2a_1a_0 \equiv a_{20}a_{19}\dots a_2 * 100 + a_1a_0 \pmod{97} \equiv$$

$$\square \equiv a_{20}a_{19}\dots a_2 \pmod{97} * 100 \pmod{97} + a_1a_0 \equiv$$

$$\square \equiv a_{20}a_{19}\dots a_2 \pmod{97} * 3 + a_1a_0 \equiv 1 \pmod{97}$$

$$\square a_1a_0 \equiv - a_{20}a_{19}\dots a_2 \pmod{97} * 3 + 1 \pmod{97}$$

$$\square a_1a_0 = 98 - a_{20}a_{19}\dots a_2 \pmod{97} * 3 \pmod{97}$$

$$\square a_1a_0 = 98 - 18024900200011528 \pmod{97} * 3 \pmod{97}$$

$$\square a_1a_0 = 98 - 68 * 3 \pmod{97} = 98 - 204 \pmod{97} = 98 - 10 = 88$$

T2013-4-P8

- ❑ Um grupo de 10 piratas encontra um saco de moedas de ouro. Um deles é encarregado de dividir igualmente as moedas por todos os piratas. Ao terminar verifica que ficou uma moeda no saco. Incapaz de cumprir a tarefa rigorosamente, deixa ficar todas as moedas no saco e abandona o grupo. Intrigado, o chefe dos piratas manda então dois homens proceder à divisão completa das moedas pelos homens restantes. Desta vez, sobram duas moedas. Os dois piratas abandonam tudo e desaparecem ainda mais depressa que o anterior. O chefe dos piratas vai então ele próprio dividir as moedas pelos piratas restantes e no final verifica que o saco ficou vazio! Quantas moedas tinha o saco, assumindo a solução menor possível?

Teorema chinês dos restos

- ❑ R:
- ❑ $x \equiv 1 \pmod{10}$
- ❑ $x \equiv 2 \pmod{9}$
- ❑ $x \equiv 0 \pmod{7}$
- ❑ Começando com as duas primeiras congruências e usando o algoritmo de Euclides
- ❑ $1 = 1(10) - 1(9)$
- ❑ $y \equiv 2(10) - 1(9) \equiv 11 \pmod{90}$
- ❑ $1 = -1(90) + 13(7)$
- ❑ $x \equiv 0(-1)(90) + 11(13)(7) \equiv 1001 \equiv 371 \pmod{630}$
- ❑ O número de moedas é 371.

T2014-4-P9

- ❑ Três crianças de uma família decidem medir o perímetro do seu jardim usando unicamente os seus pés e uma régua de 10 cm. Sabendo que as crianças têm pés de comprimento de 23, 25 e 27 cm, e que a cada uma delas ficou a faltar respectivamente 5, 9 e 8 cm no final da medição, calcule o menor perímetro do jardim. Justifique a sua resposta.

Teorema chinês dos restos

- ❑ R:
- ❑ $x \equiv 5 \pmod{23}$
- ❑ $x \equiv 9 \pmod{25}$
- ❑ $x \equiv 8 \pmod{27}$
- ❑ Do algoritmo de Euclides, $1 = 12(23) - 11(25)$
- ❑ $y \equiv 9(12)(23) + 5(-11)(25) \equiv 574 \pmod{575}$
- ❑ Do algoritmo de Euclides, $1 = -10(575) + 213(27)$
- ❑ $x \equiv 8(-10)(575) + 574(213)(27) \equiv 325507410 \equiv 10260 \pmod{15525}$
- ❑ O menor perímetro do jardim é de 102,60 metros

T2013-4-P9

- ❑ Obtenha todas as soluções no espaço modular que satisfazem o seguinte sistema de congruências módulo 28:
- ❑
$$\begin{cases} 3x + 5y \equiv 14 \pmod{28} \\ 5x + 9y \equiv 6 \end{cases}$$
- ❑ R: Vamos resolver por adição ordenada. Para isso, multiplica-se a primeira congruência por 5 e a segunda por 3. Isto é possível porque 5 e 3 são primos com 28.
- ❑
$$\begin{cases} 15x + 25y \equiv 14 \\ 15x + 27y \equiv 18 \end{cases} \pmod{28}$$

Adição ordenada

- ❑ Subtraindo a primeira congruência da segunda
- ❑
$$\begin{cases} 2y \equiv 4 \\ 15x + 27y \equiv 18 \end{cases} \pmod{28}$$
- ❑ Aqui já não é possível dividir a primeira congruência por 2 porque 2 e 28 não são primos entre si: $d = \text{mdc}(2, 28) = 2$
- ❑ Mas podemos dividir a congruência, incluindo o módulo, pelo máximo divisor comum d e resolver o problema de solução única $y \equiv 2 \pmod{14}$.
- ❑ Esta congruência tem a solução $y \equiv 2 \pmod{14}$
- ❑ A congruência $2y \equiv 4 \pmod{28}$ tem assim as soluções $y \equiv 2 + k \frac{m}{d} \pmod{28}$ ($k = 0..d - 1$), isto é, $y \equiv 2$ ou $y \equiv 2 + 14 \equiv 16$

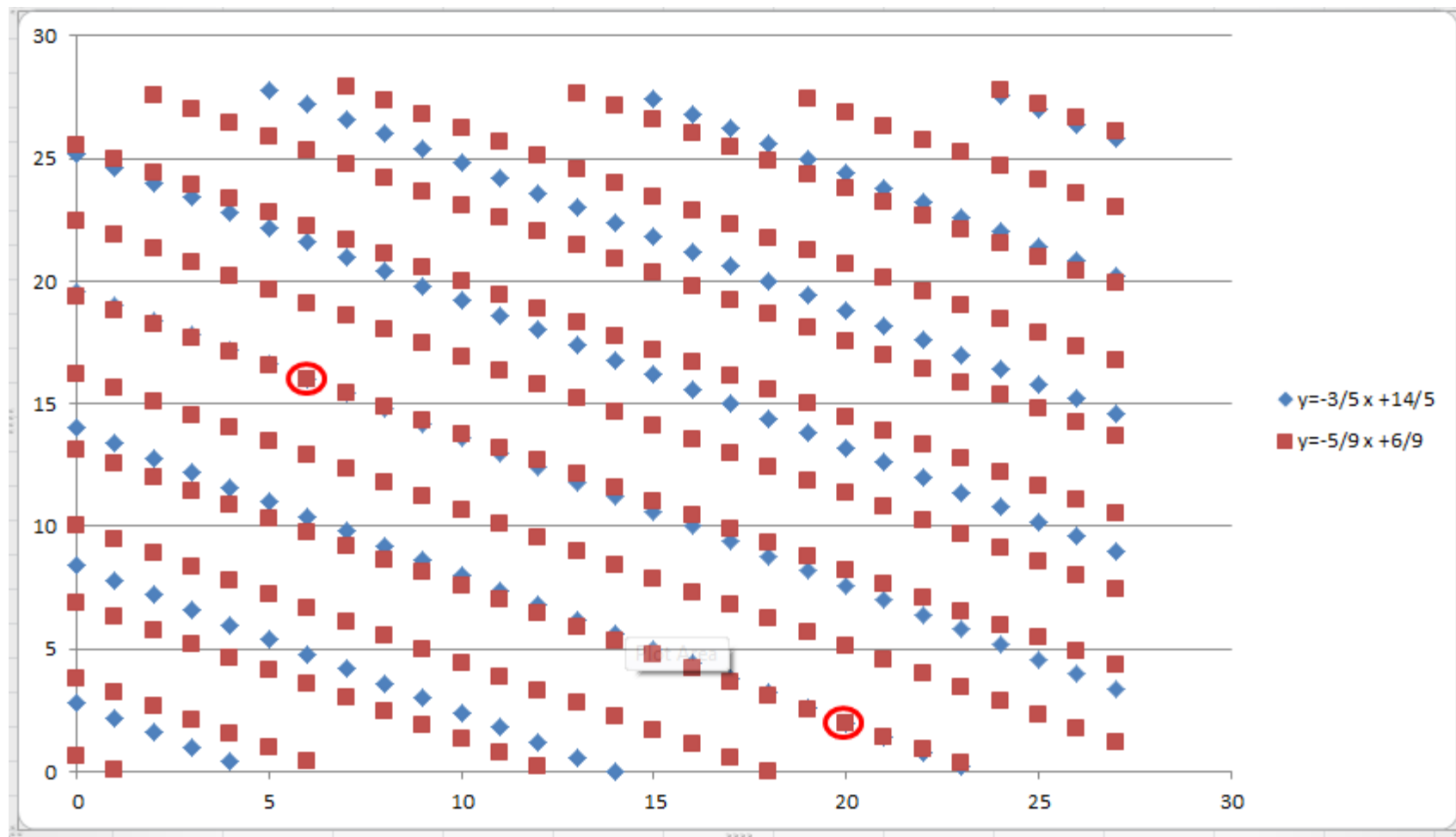
Adição ordenada

- $\begin{cases} y \equiv 2 \\ 3x + 5(2) \equiv 14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \equiv 16 \\ 3x + 5(16) \equiv 14 \end{cases} \pmod{28}$
- $\begin{cases} y \equiv 2 \\ 3x \equiv 4 \end{cases} \pmod{28} \text{ ou } \begin{cases} y \equiv 16 \\ 3x \equiv 18 \end{cases} \pmod{28}$

Inverso

- ❑ Para resolver a equação em x pode-se calcular o inverso de 3, que existe porque 3 e 28 são primos entre si. Com o algoritmo de Euclides $\text{mdc}(3,28)=1=1(28)-9(3)$. Reduzindo o -9 ao espaço modular, obtém-se que $3^{-1} \pmod{28}=19$
- ❑
$$\begin{cases} y \equiv 2 \\ x \equiv 4(19) \equiv 20 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \equiv 16 \\ x \equiv 18(19) \equiv 6 \end{cases}$$
- ❑ Há duas soluções, (20,2) e (6,16).
- ❑

Resolução gráfica



T2014-4-P10

- ❑ Obtenha todas as soluções no espaço modular que satisfazem o seguinte sistema de congruências módulo 103:
- ❑ $61x+54y \equiv 14$
- ❑ $75x+9y \equiv 37$
- ❑
- ❑ $61x+54y \equiv 14$
- ❑ $38x+54y \equiv 16$
- ❑
- ❑ $23x \equiv 101$
- ❑ $38x+54y \equiv 16$

Continuação

- ❑ Euclides: $1 = -2(103) + 9(23)$
- ❑ $x \equiv 9(101) \equiv 85$
- ❑ $38(85) + 54y \equiv 16$
- ❑
- ❑ $x \equiv 85$
- ❑ $37 + 54y \equiv 16$
- ❑
- ❑ $x \equiv 85$
- ❑ $54y \equiv 82$
- ❑ Euclides: $1 = -11(103) + 21(54)$
- ❑ $x \equiv 85$
- ❑ $y \equiv 21(82) \equiv 74$