
PROVA COM CONETIVAS BOOLEANAS

Passos válidos usando \neg , \wedge e \vee

Para cada conetiva: padrões de inferência

- ❑ A P pode seguir-se qualquer fórmula que seja sua consequência
 - Ex: (dupla negação) $\neg\neg P$ dá origem a P, e vice-versa
 - **eliminação da negação**
- ❑ Q é verdade lógica: pode introduzir-se em qualquer ponto
- ❑ De $P \wedge Q$ infere-se P e infere-se Q
 - **eliminação da conjunção**
- ❑ Tendo provado P e Q pode inferir-se $P \wedge Q$
 - **introdução da conjunção**
- ❑ Tendo provado P pode inferir-se $P \vee Q \vee \dots R$
 - **introdução da disjunção**

Métodos de prova

❑ Prova por casos (eliminação da disjunção)

- Fórmula a provar: S
- Disjunção já provada: $P \vee Q$
- Mostra-se que se obtém S se se assumir P , e que se obtém S se se assumir Q ; como um deles tem de verificar-se, conclui-se S
- Generaliza-se a qualquer número de elementos na disjunção

❑ Prova por contradição (introdução da negação)

- Fórmula a provar: $\neg S$
- Premissas: P, Q, R, \dots
- Assumir S e mostrar que se obtém uma contradição
- $\neg S$ é consequência lógica das premissas

Prova por casos

- ❑ Mostrar que existem números irracionais b e c tais que b^c é racional
- ❑ Considera-se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$: é racional ou é irracional
 - Se é racional: temos $b = c = \sqrt{2}$
 - Se é irracional: fazemos $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $c = \sqrt{2}$
 - $b^c = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$
 $= \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})}$
 $= \sqrt{2}^2 = 2$
- ❑ Quer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja racional ou irracional, existem b e c irracionais tais que b^c é racional

Prova por casos 2

Provar que $\text{Small}(c)$ é consequência de
 $(\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)) \vee (\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c)) :$

□ Prova:

$(\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)) \vee (\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c))$ é premissa

Vamos analisar 2 casos, para os 2 componentes da disjunção

I- Assume-se $\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)$

Então $\text{Small}(c)$ (por eliminação da conjunção)

II- Assume-se $\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c)$

Então $\text{Small}(c)$ (por eliminação da conjunção)

□ Em qualquer dos casos: obtém-se $\text{Small}(c)$

Prova por casos 3

De $(\text{NaSala}(\text{rita}) \wedge \text{Feliz}(\text{rui})) \vee (\text{NaSala}(\text{ana}) \wedge \text{Feliz}(\text{luis}))$
pretendemos provar $\text{Feliz}(\text{rui}) \vee \text{Feliz}(\text{luis})$

□ Assumindo a disjunção da premissa temos que

- $(\text{NaSala}(\text{rita}) \wedge \text{Feliz}(\text{rui}))$ ou
- $(\text{NaSala}(\text{ana}) \wedge \text{Feliz}(\text{luis}))$

No primeiro caso temos $\text{Feliz}(\text{rui})$ e portanto

$\text{Feliz}(\text{rui}) \vee \text{Feliz}(\text{luis})$ por introdução de disjunção

No segundo caso temos $\text{Feliz}(\text{luis})$ e portanto

$\text{Feliz}(\text{rui}) \vee \text{Feliz}(\text{luis})$ por introdução de disjunção

□ Em qualquer dos casos, tem-se a conclusão pretendida

Prova indireta

❑ Exemplo:

- Premissas: $\text{BackOf}(a,b)$
- $\text{BackOf}(b,c)$
- i) se assumir $\text{Cube}(a)$
 - Não se consegue extrair mais informação
- ii) se assumir $\neg \text{BackOf}(a,b)$
 - Contradição direta com uma premissa
 - Pode-se concluir o contrário, embora sem valor acrescentado
- iii) se assumir $\text{BackOf}(c,a)$
 - De $\text{BackOf}(a,b)$ e $\text{BackOf}(b,c)$ conclui-se $\text{BackOf}(a,c)$ e daí $\neg \text{BackOf}(c,a)$
 - Contradição indireta com uma conclusão das premissas
 - Em geral, se há contradição é porque de algum modo a conclusão contrária já está implícita nas premissas e portanto pode ser explicitada

Prova por contradição

- ❑ Premissas: $\text{Cube}(c) \vee \text{Dodec}(c)$ e $\text{Tet}(b)$
- ❑ Concluir: $b \neq c$
- ❑ Prova:
 - Supondo $b=c$
 - Da 1ª premissa: $\text{Cube}(c)$ ou $\text{Dodec}(c)$
 - Se $\text{Cube}(c)$, então $\text{Cube}(b)$ (indiscernibilidade dos idênticos)
o que contradiz $\text{Tet}(b)$
 - Se $\text{Dodec}(c)$ então $\text{Dodec}(b)$ (indiscernibilidade dos idênticos)
o que contradiz $\text{Tet}(b)$
- ❑ Obtemos contradição nos 2 casos, logo a suposição $b=c$ conduz a contradição
- ❑ Então, conclui-se $b \neq c$

Prova por contradição 2

❑ Provar: $\sqrt{2}$ é irracional

– Factos acerca dos racionais

- n° racional pode ser expresso como p/q , com pelo menos 1 de p e q ímpar
- elevando ao quadrado um número ímpar, obtém-se outro ímpar; se n^2 é par, n é par e n^2 é divisível por 4

❑ Prova:

– Suposição: $\sqrt{2}$ é racional

$$\sqrt{2} = p/q \quad (\text{um de } p \text{ e } q \text{ é ímpar})$$

$$p^2 / q^2 = 2 \quad \text{ou} \quad p^2 = 2 q^2 : p^2 \text{ é par e } p^2 \text{ é divisível por 4}$$

p^2 é divisível por 4, q^2 é divisível por 2; q é par

p e q ambos pares: contradiz a afirmação inicial

❑ Então $\sqrt{2}$ não é racional

O que é contradição?

- ❑ Afirmação que não pode ser verdadeira

$\text{NaSala(rita)} \wedge \neg \text{NaSala(rita)}$

$b \neq b$

- ❑ Conjunto de afirmações que não podem ser verdadeiras simultaneamente

$\text{Cube}(c) \text{ e } \text{Tet}(c)$

- ❑ Conjunto de frases é contraditório se não puder ser satisfeito

- ❑ Para provar F usando contradição:

Assume-se $\neg F$

Constrói-se $\neg \neg F$

Conclui-se $\neg \neg F$ e portanto F

Premissas inconsistentes

- ❑ Conjunto de frases é inconsistente: não existe um mundo no qual possam ser satisfeitas simultaneamente
- ❑ Consequência lógica: qualquer fórmula é consequência de um conjunto inconsistente de premissas
 - Argumento é válido trivialmente por não haver nenhuma circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras

$\text{NaSala}(\text{rita}) \vee \text{NaSala}(\text{luis})$

$\neg \text{NaSala}(\text{rita})$

$\neg \text{NaSala}(\text{luis})$

- Argumentos com premissas inconsistentes: pouco úteis
 - se não há circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras, não temos indicação quanto ao valor lógico da conclusão – **argumento não é sólido**

Estilo

- ❑ Nas provas informais, os passos mencionados devem ser
 - Relevantes, para não aborrecer nem distrair o leitor
 - De fácil compreensão, para serem convincentes

- ❑ Significa que as provas devem levar em consideração a quem se destinam

PROVAS FORMAIS

Regras de inferência para \wedge

Eliminação da conjunção
(\wedge Elim)

$$\begin{array}{|l} P_1 \wedge \dots \wedge P_i \wedge \dots \wedge P_n \\ \dots \\ \triangleright P_i \end{array}$$

Introdução da conjunção
(\wedge Intro)

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \Downarrow \\ P_n \\ \dots \\ \triangleright P_1 \wedge \dots \wedge P_i \wedge \dots \wedge P_n \end{array}$$

P_1
 \Downarrow
 P_n significa que todos os elementos P_1 a P_n têm de aparecer na prova antes de se introduzir a conjunção

\wedge nas provas formais

1. $A \wedge B \wedge C$	
2. B	\wedge Elim: 1
3. C	\wedge Elim: 1
4. $C \wedge B \wedge C$	\wedge Intro: 3,2,3

Parêntesis: introduzir quando puder haver ambiguidade

1. $P \vee Q$		1. $P \vee Q$	
2. R		2. R	
3. $(P \vee Q) \wedge R$	\wedge Intro: 1,2	3. $P \vee Q \wedge R$	\wedge Intro: 1,2

Regras de inferência para \vee

Introdução da disjunção
(\vee Intro)

		P_i
		\dots
\triangleright		$P_1 \vee \dots \vee P_i \vee \dots \vee P_n$

Eliminação da disjunção
(\vee Elim)

		$P_1 \vee \dots \vee P_i \vee \dots \vee P_n$
		\dots
		P_1
		\dots
		F
		\Downarrow
		P_n
		\dots
		F
		\dots
\triangleright		F

Prova por casos

\vee nas provas formais

1. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$	
2. $(A \wedge B)$	
3. B	\wedge Elim: 2
4. $B \vee D$	\vee Intro: 3
5. $(C \wedge D)$	
6. D	\wedge Elim: 5
7. $B \vee D$	\vee Intro: 6
8. $B \vee D$	\vee Elim: 1, 2-4, 5-7

Objetivo: $B \vee D$

Exemplo

1.	$P \vee (Q \wedge R)$	
2.	P	
3.	$P \vee Q$	$\boxed{?}$ Intro: 2
4.	$P \vee R$	\vee Intro: $\boxed{?}$
5.	$\boxed{?}$	\wedge Intro: 3,4
6.	$Q \wedge R$	
7.	Q	\wedge Elim: $\boxed{?}$
8.	$P \vee Q$	\vee Intro: 7
9.	R	$\boxed{?}$ Elim: 6
10.	$\boxed{?}$	\vee Intro: 9
11.	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	\wedge Intro: 8,10
12.	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	\vee Elim: $\boxed{?}$, 2-5, 6- $\boxed{?}$

Propriedade distributiva da
disjunção relativamente à
conjunção

Regras de Inferência para \neg

Eliminação da negação
(\neg Elim)

$\neg\neg P$

...

 $\triangleright P$

Introdução da negação
(\neg Intro)

P
 \neg
...
 \perp

 $\triangleright \neg P$

Prova por contradição

\perp Contradição

Introdução da contradição

(\perp Intro)

\triangleright $\begin{array}{|l} P \\ \dots \\ \neg P \\ \dots \\ \perp \end{array}$

Eliminação da contradição

(\perp Elim)

\triangleright $\begin{array}{|l} \perp \\ \dots \\ P \end{array}$

Teorema 3

Lei de DeMorgan

$\begin{array}{|l} 1. \neg P \vee \neg Q \\ \begin{array}{|l} 2. P \wedge Q \\ \begin{array}{|l} 3. \neg P \\ 4. P \\ 5. \perp \\ 6. \neg Q \\ 7. Q \\ 8. \perp \\ 9. \perp \end{array} \end{array} \end{array}$

\wedge Elim: 2

\perp Intro: 4,3

\wedge Elim: 2

\perp Intro: 7,6

\vee Elim: 1, 3-5, 6-8

\neg Intro: 2-9

$\neg(P \wedge Q)$

Estratégia geral de prova por contradição
com prova por casos lá dentro

\neg nas provas formais

1. A
2. $\neg A$
3. \perp
4. $\neg\neg A$

\perp Intro: 1,2

\neg Intro: 2-3

Teorema 1

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

com a eliminação da \neg

1. P
2. $\neg P$
3. $\neg Q$
4. \perp
5. $\neg\neg Q$
6. Q

\perp Intro: 1,2

\neg Intro: 3-4

\neg Elim: 5

Prova-se fórmula arbitrária a partir
de premissas inconsistentes

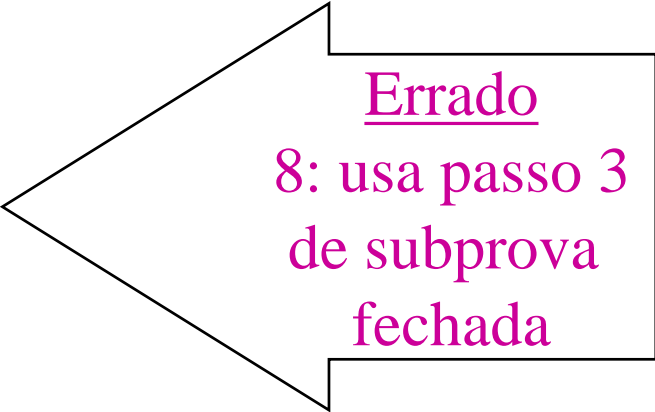
Exemplo

Prova de verdade lógica: não tem premissas

		1. $P \wedge Q \wedge \neg P$	
		2. P	\wedge Elim: 1
		3. $\neg P$	\wedge Elim: 1
		4. \perp	\perp Intro: 2,3
	5. $\neg (P \wedge Q \wedge \neg P)$		\neg Intro: 1-4

Uso de subprovas

1.	$(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$	
2.	$B \wedge A$	
3.	B	\wedge Elim: 2
4.	A	\wedge Elim: 2
5.	$(A \wedge C)$	
6.	A	\wedge Elim: 5
7.	A	\vee Elim: 1, 2-4, 5-6
8.	$A \wedge B$	\wedge Intro: 7,3



Errado
8: usa passo 3
de subprova
fechada

- Quando uma subprova é fechada:
- Suposições são descarregadas
- Subprova pode ser usada como um todo para justificar outros passos

Exemplo

1. $\neg(P \wedge R)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg R)$	
3. $\neg P$	\vee Intro: 3
4. $\neg P \vee \neg R$	\perp Intro: 4,2
5. \perp	\neg Intro: 3-5
6. $\neg\neg P$	\neg Elim: 6
7. P	
8. $\neg R$	\vee Intro: 8
9. $\neg P \vee \neg R$	\perp Intro: 9,2
10. \perp	\neg Intro: 8-10
11. $\neg\neg R$	\neg Elim: 11
12. R	\wedge Intro: 7,12
13. $P \wedge R$	Reit: 1
14. $\neg(P \wedge R)$	\perp Intro: 13,14
15. \perp	\neg Intro: 2-15
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg R)$	\neg Elim: 16
17. $\neg P \vee \neg R$	

$\neg P \vee \neg R$

Teorema 2

Lei de DeMorgan

Exercício

Teorema do Cancelamento

1.	$P \vee Q$
2.	$\neg P$
3.	P
4.	$\neg Q$
5.	\perp
6.	$\neg\neg Q$
7.	Q
8.	Q
9.	Q
10.	Q

\perp Intro: 3,2

\neg Intro: 4-5

\neg Elim: 6

Reit: 8

\vee Elim: 1,3-7,8-9

Q

Estratégia seguida:

- prova por casos incluindo uma prova por contradição no 1º caso

Experimentar:

- prova por contradição com prova por casos

Citar teoremas

- Para encurtar a prova em F : usar resultados prévios

1. $\neg(P \wedge Q)$

2. P

3. $\neg P \vee \neg Q$ Teor Prev (Teorema 2): 1

4. $\neg\neg P$ Teor Prev (Teorema 1): 2

5. $\neg Q$ Teor Prev (Cancelamento): 3,4

- Símbolos usados nas provas: podem ser substituídos
 - por outros símbolos
 - por fórmulas arbitrárias

Completude para as funções da verdade

- ❑ Uma conetiva arbitrária pode ser expressa com \neg , \wedge e \vee ?
- ❑ Conetivas binárias: tabela de verdade tem 4 linhas
 - cada linha pode ter V ou F
 - número de conetivas possíveis: 2^4

P	Q	P * Q
V	V	valor1
V	F	valor2
F	V	valor3
F	F	valor4

$$C_1 = P \wedge Q$$

$$C_2 = P \wedge \neg Q$$

$$C_3 = \neg P \wedge Q$$

$$C_4 = \neg P \wedge \neg Q$$

Representação de *:
disjunção dos C_i
correspondentes a
linhas com valor V

Todas as funções binárias funcionais da verdade
podem ser descritas com \neg , \wedge e \vee

Exemplo do NAND

- NAND é a conjunção seguida de negação

P	Q	$P \otimes Q$
V	V	F
V	F	T
F	V	T
F	F	T

- $P \otimes Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
- $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$
- $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee \neg P$
- $\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

Completude para as funções da verdade

❑ Conetivas unárias

P	#P
V	valor1
F	valor2

Ambos os valores F: $P \wedge \neg P$
Outros casos: disjunção de
 $C_1 = P$ e $C_2 = \neg P$

■ Conetivas de outras aridades

P	Q	R	@(P,Q,R)
V	V	V	F
V	V	F	V
⋮	⋮	⋮	⋮

Expressar conetiva em DNF:

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \dots$

■ Bastam, e.g., \neg e \wedge : $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$