Ficha de Exercícios de Indução

Resoluções/soluções para os exercícios selecionados: 1, 2, 3, 4

1.

Hipótese: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

Caso base: $n=0$: $1 = (0+1)^2=1$ ✓

Passo indutivo: n+1

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) + (2(n+1)+1) = ((n+1)+1)^2$

por hipótese:

$(n+1)^2 + (2n+2+1) = (n+2)^2$

$n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$

$n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4n + 4$ *qed*

2.

Definição:

1. Nó simples é árvore
2. T1, T2, …,Tk árvores, estrutura com novo nó N e T1, T2, …, Tk como filhos é árvore
3. Mais nada é árvore

Hipótese: número de nós é superior em 1 unidade ao de arestas E

$\forall a\,(Arvore(a) \rightarrow (N(a) = E(a) + 1))$

Prova por indução:

Caso base: quando T é um nó simples, N=1 e E=0, portanto verifica-se que N=E+1.

Passo indutivo:

Seja T uma árvore construída pelo passo indutivo (2) da definição.

Por hipótese, S(Ti) verifica-se, isto é, todas as sub-árvores Ti têm Ni=Ei+1.

Os nós de T são o N e os nós de todas as Ti's. Há portanto 1+N1+N2+…+Nk nós em T.

As arestas de T são as k arestas adicionadas no passo de definição indutiva mais as arestas das Ti's. Portanto, T tem k+E1+E2+…+Ek arestas.

Substituindo Ni por Ei+1 temos que T tem

$1 + (E1+1) + (E2+1) + \ldots + (Ek+1)$

nós. Como há k termos "+1" na expressão, ficamos com:

$1 + k + E1 + E2 + \ldots + Ek$

que corresponde a 1 unidade a mais do que o número de arestas de T.

Portanto, T tem um nó a mais do que arestas.

3.

Definição:

1. Letra é pal
2. Se α é pal, resultado de lαl é pal, com l letra
3. Mais nada é pal senão o resultado de 1. e 2.

Hipótese: todo o pal é um palíndromo

$\forall x\ (Pal(x) \rightarrow Palíndromo(x))$

Prova por indução:

Caso base: cada letra do alfabeto é um pal, e é um palíndromo: uma letra lê-se da mesma forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

Passo indutivo:

Seja p um pal de comprimento c. Por hipótese, p é palíndromo. Para obter um pal de comprimento maior que c, é preciso usar a regra 2: acrescentar a mesma letra no início e no fim de p:

$p_{c+2} = lpl$

Se p é um palíndromo, também p_{c+2} é palíndromo.

Um palíndromo começa e acaba com o mesmo carácter. Portanto, se w for um pal (e, por hipótese, um palíndromo) e a partir dele criarmos, por 2., XwX (em que X representa uma letra), obtemos também um palíndromo (tendo em conta que uma letra é um carácter).

O converso não é verdadeiro:

- Palíndromos com um número par de caracteres não são pal; a definição teria que incluir ε (vazio) como pal[1].
- Nem todos os caracteres são letras: a definição teria que abrir o contexto de aplicação para incluir caracteres, não apenas letras.

4.

Caixa Multibanco: só tem notas de 20 e 50

Mostrar que pode fornecer quantia múltipla de 10, ≥40

Estrutura: das quantias múltiplas de 10 e ≥40

1. 40 é quantia
2. Se q é quantia, q+10 é quantia
3. Mais nada é quantia

Hipótese: toda a quantia pode ser composta com notas de 20 e 50

$\forall q\ (Quantia(q) \rightarrow \exists x \geq 0, y \geq 0\ q = x*20+y*50)$

[1] considerando que a *string* vazia, ε, é um palíndromo. No caso de não considerarmos ε um palíndromo então poderemos adicionar a regra seguinte: duas letras iguais são pal.

<u>**Prova por indução**</u>:

<u>Caso base</u>: <u>quantia</u> é 40

40 = 2*20 + 0*50 ✓

Como não há <u>quantias</u> inferiores a 40:

- x e y não podem ser simultaneamente 0

- se y for 0, x é ≥2

[Podia aqui usar-se o "inventor": tornar a propriedade mais forte, incluindo estas 2 condições.]

<u>Passo indutivo</u>:

<u>Quantia</u> q verifica a propriedade

q = k1*20 + k2*50

<u>Quantia</u> q+10 é

q+10 = k1*20 + k2*50 + 10

Casos:

- k2 ≠ 0

Então k2 é pelo menos 1 e pode reescrever-se q+10:

q+10 = k1*20 + (k2-1)*50 + 60 =

= (k1+3)*20 + (k2-1)*50

Propriedades extra conservam-se: se k1 era 0 deixou de ser (passando a ≥3); se k2 passou a 0 k1 deixou de ser 0.

- k2 = 0

Então k1 é pelo menos 2

q+10 = (k1-2)*20 + 1*50

Em ambos os casos, q+10 é também descrito com notas de 20 e 50.

Como todas as quantias usam a regra 2, a propriedade está provada.
