数列知识点汇总

Contents

1 数列基本概念

按照一定的顺序排列的数叫做数列，数列中的每一个数叫做数列的项. 排在第一位的数称作数列的首项，排在第二位的称为数列的第 2 项 $\cdots\cdots$ 排在第 n 位的称为这个数列的第 n 项. 数列的一般形式为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$. 项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列.

1.1 数列与函数

1.2 通项公式

1.2.1 通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

1.2.2 递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项 (或前几项)，且从第二项 (或某一项) 开始任何一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项) 间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做数列 $\{a_n\}$ 的递推公式.

1.3 数列的分类

类比函数的性质及其分类，对数列进行恰当的分类可以更深刻的理解和认识数列.

1) 根据项数是有限还是无限分类：
   i) 有穷数列：项数有限的数列；
   ii) 无穷数列：项数无限的数列；
2) 根据项的增减规律分类：
   i) 递增数列：从第二项起每一项都大于它的前一项；
   ii) 递减数列：从第二项起每一项都小于它的前一项；

   递增数列和递减数列统称单调数列；
3) 根据任何一项的绝对值是否都小于某一个正数 (常数) 来分类：
   i) 有界数列：$\forall x \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leqslant M$ (M为常数)；
   ii) 无界数列：$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{N}^*,$ 使得 $|a_n| > M$.

1.4 数列通项求法

1.4.1 数列的前 n 项和与通项公式的关系

1) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$;
2) $a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$

注意：一定要验证 $n = 1$ 的情况.

1.4.2 利用递推关系通项

已知数列 $\{a_n\}$ 的递推关系求通项时，通常用累加法、累乘法和构造法求解.

1. 形如 $a_n = a_{n-1} + m\ (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 时，构造等差数列求解，形如 $a_n = xa_{n-1} + y\ (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 时，构造等比数列求解；

2. 形如 $a_n = a_{n-1} + f(n)\ (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 时，用累加法；

3. 形如 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)\ (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 时，用累乘法求解.

2 等差数列

2.1 基本性质

2.1.1 定义

一般地，如果一个数列从第二项开始，每一项都与前一项的差为一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个数列的公差，通常用字母 d 表示.
注：目前大部分等差数列考题都可以通过转化为 a_1 和 d 求出.

2.1.2 通项公式

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，那么使用累加法 可得它的通项公式是 $a_n = a_1 + (n-1)d, n \in \mathbb{N}^*$

Proof. 由给定条件可得:

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d.$$

等号两边累加可得: $a_n - a_1 = (n-1)d$. 即:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

□

2.1.3 等差中项

1) 如果 $A = \dfrac{a+b}{2}$, 则称 A 为 a 和 b 的等差中项 (考试常用);

2) 等差数列中，等间隔的三项 a_{n-p}, a_n, $a_{n+p}(n, p \in \mathbb{N}^*$ 且 $n < p)$ 满足:$2a_n = a_{n-p} + a_{n+p}$;

3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若有 $k + l = m + n\,(k, l, m, n \in \mathbb{N}^*)$，则有 $a_k + a_l = a_m + a_n$.

2.1.4 前 n 项和公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则其前 n 项和 $S_n = \dfrac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Proof. 在等差数列中，根据性质 $a_k + a_l = a_m + a_n\ (k + l = m + n)$ 可得

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_k + a_{n-k+1}\ \left(k \leqslant \frac{n}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_k + a_{n-k+1}) \\
&= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
&= \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.
\end{aligned}
$$

□

2.2 性质扩充

2.2.1 等差数列的常用性质

(1) 通项公式的推广：$a_n = a_m + (n-m)\,d\,(n, m \in \mathbb{N}^*)$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，则 $\{a_{2n}\}$ 也是等差数列，公差为 $2d$;

(3) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列，则 $\{pa_n + qb_n\}$ $(p, q\text{是常数})$ 也是等差数列;

(4) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，则 a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，$a_{k+3m}, \cdots (k, m \in \mathbb{N}^*)$ 组成公差为 md 的等差数列.

2.2.2 与和有关的性质

(1) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\dfrac{S_n}{n}$ 也是等差数列，其首项与 $\{a_n\}$ 的首项相同，公差是 $\{a_n\}$ 的公差的 $\dfrac{1}{2}$；

(2) 若 S_m, S_{2m}, S_{3m} 分别是 $\{a_n\}$ 的前 m 项，前 $2m$ 项，前 $3m$ 项的和，则 S_m, $S_{2m} - S_m$, $S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列；

(3) 关于非零等差数列奇数项和与偶数项和的性质

i) 若项数为 $2n$，则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$, $\dfrac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

ii) 若项数为 $2n-1$，则 $S_{\text{偶}} = (n-1)a_n$, $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$, $\dfrac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \dfrac{n}{n-1}$.

iii) 若两个等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n、 T_n，则 $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

2.2.3 等差数列前 n 项和的最值问题

1) 二次函数法：当公差 $d \neq 0$ 时，将 S_n 看作关于 n 的二次函数，运用配方法，借助函数的单调性及数形结合，使问题得解；

2) 通项公式法：求使 $a_n \geqslant 0 \left(\text{或} a_n \leqslant 0\right)$ 成立的最大 n 值即可得到 S_n 的最大 (或最小) 值；

3) 不等式法：借助 S_n 最大时，有 $\begin{cases} S_n \geqslant S_{n-1}, \\ S_n \geqslant S_{n+1}. \end{cases}$ $(n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$，解此不等式组确定 n 的范围，进而确定 n 的值和对应 S_n 的值.

3 等比数列

3.1 基本性质

3.1.1 定义

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于一个常数，那么这个数列就叫做等比数列. 这个常数叫做这个数列的公比，通常用字母 q 表示.

3.1.2 通项公式

如果等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，则它的通项公式为 $a_n = a_1q^{n-1}$ $(q \neq 0)$.

Proof. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，有 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$ $(q \neq 0)$.
则有

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{a_1} =& q\\ \frac{a_3}{a_2} =& q\\ &\vdots\\ \frac{a_n}{a_{n-1}} =& q\end{aligned}$$

左右两侧累乘即得到：$\dfrac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$ 即:

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

□

3.1.3 等比中项

(1) 如果三个数 a, G, b 成等比数列，则 G 叫做 a 和 b 的等比中项，且 $\dfrac{G}{a} = \dfrac{b}{G}$, 即 $G^2 = ab$;

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 中，等间隔的三项 a_{n-s}, a_n, a_{n+s} $(s \in \mathbb{N}^*, 且 s < n)$ 有 $a_{n-s}a_{n+s} = a_n^2$;

(3) 等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m + n = p + q$，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$.

3.1.4 前 n 项和

$$S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

Proof. 给定等比数列 $\{a_n\}$.
① 当 $q = 1$ 时，有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1$.
② 当 $q \neq 1$ 时，有：

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ =& a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}; \end{aligned} \tag{1}$$

两边同时乘以公比 q, 有：

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \tag{2}$$

(1)-(2) 得到：

$$\begin{aligned} S_n - qS_n =& \left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}\right) - \left(a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n\right) \\ =& a_1 + (a_1q - a_1q) + \left(a_1q^2 - a_1q^2\right) + \cdots + \left(a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}\right) - a_1q^n \\ =& a_1 - a_1q^n \end{aligned}$$

化简得：$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q \neq 1)$ □

3.1.5 等比数列的性质

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 数列 $\{c\cdot a_n\}$ $(c\neq 0)$，$\{|a_n|\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$ $\big(\{b_n\}$是等比数列$\big)$，$\{a_n^2\}$，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 等也是等比数列;

(2) 数列 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \cdots$ 仍是等比数列;

(3) $a_1a_n = a_2a_{n-1} = \cdots = a_ma_{n-m+1}$;

(4) 当数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq -1$(或 $q=-1$且m为奇数) 时，数列 S_m, $S_{2m}-S_m$, $S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 是等比数列;

(5) 当 n 是偶数时，$S_{偶} = S_{奇}\cdot q$;
当 n 是奇数时，$S_{奇} = S_{偶}\cdot q$.

4 数列求和相关问题

4.1 求前 n 项和的方法

1. 公式法

   (a) 等差数列的前 n 项和公式：$S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

   (b) 等比数列的前 n 项和公式：$S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$

2. 分组求和：把一个数列分成几个可以直接求和的数列;

3. 拆项相消：有时把一个数列的通项公式分成两项差的形式，相加过程中消去中间项，只剩下有限项再求和;

4. 错位相减：适用于一个等差数列和一个等比数列对应项相乘构成的数列求和;

5. 倒序相加：把数列正着写和倒着写再相加，例如等差数列前 n 项和公式的推导方法.

4.2 裂项相消法

1. 对于裂项后明显有能够相消的项的一类数列，在求和时常用“裂项相消法”，分式数列的求和多用此法;

2. 利用裂项相消法求和时，应注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也可能有前面两相和最后两项，有些情况下，裂项时需要调整前面的系数，使裂开的两项之差和系数之积与原通项相等.

3. 常用的拆项公式：

   (a) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;

   (b) $\dfrac{1}{n(n+d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+d}\right)$;

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

   (d) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

   (e) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 $d(d\neq 0)$, 则 $\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Proof. 对于分式数列，通常会考虑裂项相消法进行消项，对于 $\dfrac{1}{n(n+d)}$ 式数列，可以使用待定系数法得到展开式, 假设:

$$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{k}{n}-\frac{k}{n+d}\ (k\text{为待定系数})$$

右边通分有

$$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{k}{n}-\frac{k}{n+d}=\frac{kd}{n(n+d)}$$

即有 $kd=1$，算得 $k=\dfrac{1}{d}$. 即得证 □

4.3 错位相减法

1. 一般地，如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和时，可以采用错位相减法.

2. 应用等比数列求和公式时，必须注意公比 $q\neq 1$ 这一前提条件，如果不能确定公比 q 是否为 1，应分两种情况进行讨论.

Proof. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 d，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 $q\ (q\neq 1)$，数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_n\cdot b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 有：

$$\begin{aligned}
S_n =&c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n\\
=&a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n\\
qS_n =&a_1b_1q+a_2b_2q+\cdots+a_nb_nq\\
=&a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\cdots+a_nb_{n+1}\\
S_n-qS_n =&a_1b_1+b_2\left(a_2-a_1\right)+b_3\left(a_3-a_2\right)+\cdots++b_n\left(a_n-a_{n-1}\right)-a_nb_{n+1}\\
=&a_1b_1+db_2+db_3+\cdots+db_n-a_nb_{n+1}\\
=&a_1b_1+d\left(b_2+b_3+\cdots+b_n\right)-a_nb_{n+1}\\
=&a_1b_1-a_nb_{n+1}+\frac{b_2\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q}d.
\end{aligned}$$

故而有:

$$S_n=\frac{a_1b_1-a_nb_{n+1}+\dfrac{b_2\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q}d}{1-q}$$

□

5 高考真题汇编

5.1 等差数列与等比数列

（1）等差数列、等比数列基本运算问题

1. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_2=\dfrac{1}{3}$, $a_nb_n+b_{n+1}=nb_n$.

   (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

   (2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=8$，且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项.

   (1) 求 $\{a_n\}$ 的首项、公差；

   (2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$a_1=-1$, $b_1=1$, $a_2+b_2=2$.

   (1) 若 $a_3+b_3=5$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

   (2) 求 $T_3=21$，求 S_3.

4. 已知两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = a(a > 0)$, $b_1 - a_1 = 1$, $b_2 - a_2 = 2$, $b_3 - a_3 = 3$.

(1) 若 $a_1 = 1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 唯一，求 a 的值.

5. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n^2 - (2a_{n+1} - 1)a_n - 2a_{n+1} = 0$.

(1) 求数列 a_2, a_3；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 = a_7$，问 b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等？

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 + a_4 = 10$, $b_2 b_4 = a_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求和：$b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n-1}$.

（2）等差数列、等比数列的证明

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 1 + \lambda a_n$，其中 $\lambda \neq 0$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求其通项公式；

(2) 若 $S_5 = \dfrac{31}{32}$，求 λ.

9. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式；

(2) 设 $q \neq 1$，证明数列 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列.

10. 对于给定的正整数 k，若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_n+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$ 对任意正整数 $n(n>k)$ 总成立，则称数列 $\{a_n\}$ 是“$P(k)$ 数列”.

(1) 证明：等差数列 $\{a_n\}$ 是“$P(3)$ 数列”;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是“$P(2)$ 数列”，又是“$P(3)$ 数列”，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列.

11. 成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 2, 5 13 后成为等比数列 $\{b_n\}$ 中的 b_3, b_4, b_5.

(1) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证 $\left\{S_n+\dfrac{5}{4}\right\}$ 是等比数列.

12. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 S_n，并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否成等差数列.

13. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 a_5, a_3, a_4 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的公比；

(2) 证明：对任意 $k \in \mathbb{N}^*, S_{k+2}$, S_k, S_{k+1} 成等差数列.

（3）等差、等比数列的条件探究

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1 = 1$, $a_n \neq 0$, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$，其中 λ 为常数.

(1) 证明：$a_{n+2} - a_n = \lambda$；

(2) 证明：是否存在 λ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列？并说明理由.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1 = a(a \neq 0)$, $a_{n+1} = rS_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$，使得 S_{k+1}, S_k, S_{k+2} 成等差数列，试判断：对于对于任意的 $m \in \mathbb{N}^*$，且 $m \geqslant 2$, a_{m+1}, a_m, a_{m+2} 是否成等差数列？证明你的结论.

16. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a，公差为 d 的等比数列 $(d \neq 0)$，S_n 是其前 n 项和. 记 $b_n = \dfrac{nS_n}{n^2+c}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$，其中 c 为实数.

(1) 若 $c=0$，且 b_1, b_2, b_4 成等比数列，证明：$S_{nk} = n^2 S_k$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$；

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列，证明：$c=0$.

17. 已知 $\{x_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $x_1+x_2=3$, $x_3-x_2=2$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(2) 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，依次连接点 $P_1(x_1,1)$, $P_2(x_2,2)$, $\cdots$, $P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$ 得到折线 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$，求由该折线与直线 $y=0$, $x=x_i$ $(x \in \{x_n\})$ 所围成的区域的面积 T_n.

6 练习

1. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{m-1}=-2, S_m=0, S_{m+1}=3$，则 $m=$ ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_8=4S_4$，则 $a_{10}=$ ( )

(A) $\dfrac{17}{2}$ (B) $\dfrac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_3+a_5=3$，则 $S_5=$ ( )

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_3+a_5+a_7=$ ( )

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_3a_5=4(a_4-1)$，则 $a_2=$ ( )

(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{8}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n\ (a_n\neq 0, n\in\mathbb{N}^*)$，且 a_2 与 a_4 的等差中项是 5，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 等于 ( )

(A) 2^n (B) 2^n-1 (C) 2^{n-1} (D) $2^{n-1}-1$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 27，$a_{10}=8$，求 $a_{100}=$ ( )

(A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 97

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2a_2\ (n=1,2,3,\cdots)$，则 ( )

(A) $a_1<0$ (B) $a_1>0$ (C) $a_1\neq a_2$ (D) $a_2=0$

9. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的 ( )

(A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题：

p_1: 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列； p_2: 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列；

p_3: 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列； p_4: 数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.

其中的真命题为 ( )

(A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4

11. 已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$，$a_1a_2a_3=5$, $a_7a_8a_9=10$, 则 $a_4a_5a_6=$ ( )

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) $4\sqrt{2}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n=2a_{n+1}$, 则 $S_n=$ ( )

(A) 2^{n-1} (B) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ (C) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ (D) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $|q|\neq 1$. 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则 $m=$ ( )

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

14. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，下列结论中正确的是 ( )

(A) 若 $a_1+a_2>0$, 则 $a_2+a_3>0$

(B) 若 $a_2+a_3>0$, 则 $a_1+a_2<0$

(C) 若 $0<a_1<a_2$, 则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$

(D) 若 $a_1<0$, 则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^na_n=2n-1$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为 ( )

(A) 3690 (B) 3660 (C) 1845 (D) 1830

16. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{5}{9}$, 则 $\dfrac{S_9}{S_5}=$ ( )

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$

17. 已知某等差数列共有 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

18. 在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1}+a_n^2+a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，则 $S_{2n-1}-4n=$ ( )

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

19. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， 已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$, $S_{2m-1}=38$, 则 $m=$ ( )

(A) 38 (B) 20 (C) 10 (D) 9

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，下面结论中正确的是 ( )

(A) $a_1+a_3\geqslant 2a_2$

(B) $a_1^2+a_3^2\geqslant 2a_2^2$

(C) 若$a_1=a_3$, 则$a_1=a_2$

(D) 若$a_3>a_1$, 则$a_4>a_2$

21. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}=16^n$, 则公比 $q=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

22. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则 $S_6=$ ( )

(A) 31 (B) 32 (C) 63 (D) 64

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 ( )

(A) $\dfrac{15}{8}$或 5 (B) $\dfrac{31}{16}$或 5 (C) $\dfrac{31}{16}$ (D) $\dfrac{15}{8}$

24. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 $n=$______ 时 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

25. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_4=-4$，则公比 $q=$ ______;$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$______.

26. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为______.

27. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=$______.

28. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3+a_5=40$, 则公比 $q=$______; 前 n 项和 $S_n=$______.

29. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_5^2=a_{10}$, $2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，则数列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$______.

30. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，若 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 成等差数列，则 q 的值为______.

31. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$______.

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_n \neq 0\,(n \in \mathbb{N}^*)$，$a_n a_{n+1} = S_n$. 则 $a_3 - a_1 =$______.

33. 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，若 $a_1 + b_1 = 7$, $a_3 + b_3 = 21$，则 $a_5 + b_5 =$______.

34. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2$，且对于任意的 $m, n \in \mathbb{N}^*$，都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$，则 $a_3 =$ ______; 数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} =$ ______.

35. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_1 = 1, a_2 = -2$，且 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$，则 $a_5 =$______; 数列 $\{a_n\}$ 的前 2016 项的和为______.

36. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+1$，其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明 $\{a_n+\frac{1}{2}\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

37. 数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，$a_{11}=8$，设 $b_n=\log_2 a_n$，且 $b_4=17$.

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是以 -2 为公差的等差数列；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 S_n 的最大值.

38. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

39. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1 = 10$, a_2 为整数，且 $S_n \leqslant S_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

40. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = a_n 3^n$ $(x \in \mathbb{R})$，求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

41. 已知正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $B_n = \dfrac{1}{4}(b_n + 1)^2$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

42. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 b_n 满足 $b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

43. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$.

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

44. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，$a_1 = 25$，且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2}$.

45. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$, 前 n 项和 S_n，且 a_2 是 $3S_2-4$ 与 $2-\frac{5}{2}S_1$ 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=(n+1)a_n$，T_n 是数列 b_n 的前 n 项和，$n\in\mathbb{N}^*$, 求 T_n.

46. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=10, a_4-a_3=2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_3$, $b_3=a_7$，问：b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等？

47. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$, $b_4 = 20$，且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

48. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3 + a_4 = 4$, $a_5 + a_7 = 6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = [a_n]$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9] = 0$, $[2.6] = 2$.

49. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + \lambda a_n$，其中 $\lambda \neq 0$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求其通项公式；

(2) 若 $S_5 = \dfrac{31}{32}$，求 λ.

50. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n > 0$，$a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$，其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

51. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，a_2，a_4 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

52. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0$, $S_5=-5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$ 的前 n 项和

53. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$, $a_3^2=9a_2a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

54. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$, $a_2+a_4=10$, $b_2b_4=a_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求和:$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.