三角函数性质整理

目录

1 基本性质

1.1 任意角的三角函数

1.1.1 任意角的概念

1) 以 x 轴正方向为角度的起始边，把终边按逆时针方向旋转所成的角叫做正角；按顺时针旋转的角叫做负角，没有旋转所成的角叫零角；

2) 终边相同的角：所有与 α 终边相同的角连同 α 在内可以构建一个集合 $S=\left\{\beta \middle| \beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

1.1.2 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度.

一般的，正角的弧度是正数，负角的弧度是负数，零角的弧度是 0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧的长为 l，那么角 α 的弧度数的绝对值是:

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

角度与弧度对应关系：

$$360^\circ=2\pi\ rad,\quad 180^\circ=\pi\ rad;$$
$$1^\circ=\frac{\pi}{180}rad\qquad 1\ rad=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.30^\circ$$

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.1.3 任意角的三角函数

$P(x,y)$ 是角 α 终边上异于原点的一点，$|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

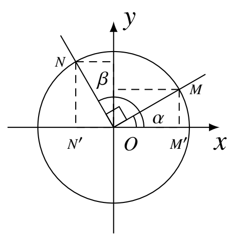
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

其中 x,y 都是带符号数，所以可以根据各象限内 x,y 的正负性得到三角函数的符号规律：一全正，二正弦，三两切 (余切高考不涉及)，四余弦.

1.1.4 同角三角函数关系

两个重要的三角函数关系式：① $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;　　② $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

1.1.5 诱导公式



如上图所示，当$\beta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$时, $\triangle OMM'$ 和 $\triangle ONN'$ 全等，根据三角函数定义，可以得到：

$$\cos\beta = \frac{ON'}{ON} = -\frac{MM'}{OM} = -\sin\alpha$$

即：

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

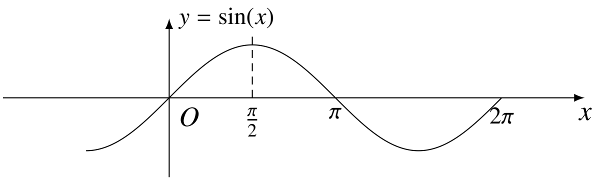
以此类推，可得：

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha\right) = \begin{cases} + \ -\sin\alpha & k\text{为偶数}, \\ + \ -\cos\alpha & k\text{为奇数}. \end{cases} \text{(奇变偶不变，符号看象限)}$$

此公式为自创精简写法，分析如下：当 k 为奇数时，正 (余) 弦仍对应正 (余) 弦，当 k 为偶数时，正 (余) 弦对应余 (正) 弦，右侧的正负号根据 $\dfrac{k\pi}{2} \pm \alpha$ 所在象限的正 (余) 弦值决定.

1.2 函数图象

1.2.1 正弦函数图象



(1) 定义域：$x \in \mathbf{R}$; 值域：$[-1, 1]$； 奇偶性：奇函数;

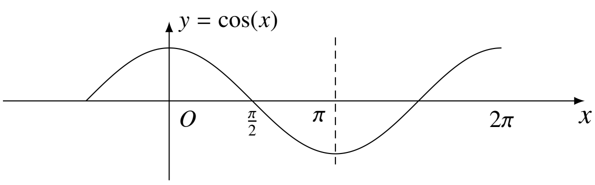
(2) 对称轴：$x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}\,(k \in \mathbf{Z})$; 对称中心：$(k\pi, 0)\,(k \in \mathbf{Z})$; 最小正周期：$T = 2\pi$;

(3) 单调区间：

(i) 单调递增区间：$\left[2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right](k \in \mathbf{Z})$;

(ii) 单调递减区间：$\left[2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right](k \in \mathbf{Z})$.

1.2.2 余弦函数图象



(1) 定义域：$x \in \mathbf{R}$; 值域：$[-1, 1]$; 奇偶性：偶函数;

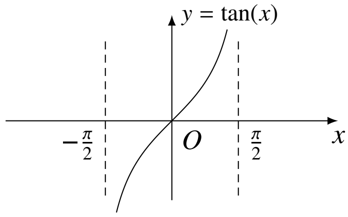
(2) 对称轴：$x = k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$; 对称中心：$\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 0\right)(k \in \mathbf{Z})$; 最小正周期：$T = 2\pi$;

(3) 单调区间：

(i) 单调递增区间：$[2k\pi - \pi, 2k\pi]\,(k \in \mathbf{Z})$;

(ii) 单调递减区间：$[2k\pi, 2k\pi + \pi]\,(k \in \mathbf{Z})$.

1.2.3 正切函数图象



(1) 定义域：$\left\{x \middle| x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbf{Z})$; 值域：$\mathbf{R}$； 奇偶性：奇函数;

(2) 对称中心：$(k\pi, 0)\,(k \in \mathbf{Z})$; 最小正周期：$T = \pi$;

(3) 单调区间：单调递增区间：$\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)(k \in \mathbf{Z})$;

1.3 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ **图象**

1) 用“五点法”作图：设 $z = \omega x + \varphi$，由 z 取 $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ 来求出相应的 x，通过描点连线的方法画出图象.

   (**注**：此处使用的 $z = \omega x + \varphi$ 的方法同样可以应用于求单调区间、最值等问题)

2) 由函数 $y = \sin(x)$ 的图象经过变换得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，有两种主要的途径：“先平移后伸缩”和“先伸缩后平移”

   i) 先平移后伸缩

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y = \sin(x + \varphi)$$
$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y = \sin(\omega x + \varphi)$$
$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y = A\sin(\omega x + \varphi)$$

   ii) 先伸缩后平移

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y = \sin \omega x$$
$$\xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y = \sin(\omega x + \varphi)$$
$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y = A\sin(\omega x + \varphi)$$

3) 由图象求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式一般步骤：

   i) 由函数的最值确定 A 的取值;

   ii) 由函数的周期确定 ω 的值, 周期：$T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$;

   iii) 由函数图象最高点 (最低点) 的坐标得到关于 φ 的方程，再由 φ 的范围求 φ 的值.

4) 最值：当 x 没有范围要求时，A 和 $-A$ 分别为最大值和最小值；当 x 有范围时，切忌将范围两端分别代入得到所谓取值范围.

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间问题

1) 对于选择填空题，可以直接作图得到单调区间 (不推荐);

2) 通用流程:

   1) 确定 ω 为正，若为负，则用诱导公式转化为正;
   2) 确定 A 为正，若为负，去掉负号反向取值 (求 ↗ 改成求 ↘，求 ↘ 改成求 ↗.)
   3) 令 $t = \omega x + \varphi$，得到 $y = \sin t$，根据 $y = \sin t$ 增区间和减区间得到 $\omega x + \varphi$ 的范围，进而得到 x 的取值范围.

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在给定区间最值问题

对于给定区间 $x \in [x_1, x_2]$，有:

1. 设 $t = \omega x + \varphi$;
2. 将 x 的取值代入 $\omega x + \varphi$ 中计算 t 的取值范围;
3. 根据 $y = \sin t$ 的图象 (标准图象) 得到 y 的最值及此时 x 的取值 x_0.

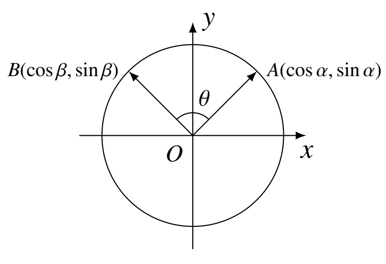
注: 对于类似 $y = f[g(x)]$ 类型的复合函数的相关计算问题 (定义域、单调区间、比较大小等)，一般可以分解为 $\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$，通过两个基本函数的性质解题.

例如: $y = sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ 可以分解为 $\begin{cases} y = sin(t) \\ t = 2x + \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$，根据 $y = sin(t)$ 单调增区间有 $t \in \left[2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$，代入 $t = 2x + \dfrac{\pi}{3}$ 即可以得到 y 关于 x 的单调区间.

1.4 三角恒等变换

1.4.1 和差公式

如下图，在半径为 1 的圆内，构建向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.



根据向量夹角公式 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}$，将 $\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \overrightarrow{OB} = (\cos\beta, \sin\beta)$ 代入解得:

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

分别令 $\alpha = -\alpha$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, 由诱导公式可得:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

在 $\sin(\alpha+\beta)$和 $\cos(\alpha+\beta)$ 中令 $\beta=\alpha$ 得到倍角公式:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha =&2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha =&\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ =&2\cos^2\alpha-1\\ =&1-2\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

1.4.2 半角公式

1) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

1.4.3 辅助角公式

对于 $y=a\sin x+b\cos x$ 类型的三角函数的性质需要先化简为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 形式，所以引入角 φ 使其正余弦和 a,b 对应，根据 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ 可得到如下形式:

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\quad\left(\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

由此公式可看出 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
可根据实际情况令 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 得到辅助角公式的余弦形式.

1.5 三角函数化简求值问题

1.5.1 化简“三看”原则

(1) 一看“角”, 通过看角之间的差别与联系 (比如出现了 α 和 2α 就会使用倍角公式), 正确的使用公式;

(2) 二看“函数名称”, 看函数名称之间的差异，从而确定使用的公式，例如：切化弦，正余弦互化;

(3) 三看“结构特征”, 分析结构特征可以帮助我们找到变形的方向，常见的有“遇到分式要通分”等.

1.5.2 求最值问题

(1) $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$，利用有界性处理 (参考**??**);

(2) $y=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+\cos^2 x\xrightarrow{\text{降次, 整理}}y=A\sin 2x+B\cos 2x+C=\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)+C$, 其中 $\tan\varphi=\dfrac{B}{A}$. 再利用有界性;

(3) $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$或$y=a\cos^2 x+b\cos x+c(a\neq 0)$, 通过 $t=\sin x$ 或 $t=\cos x$ 转化为求关于 t 的二次函数在区间 $[-1,1]$ 上的最值问题；

(4) $y=a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cdot\cos x$, 可令 $t=\sin x\pm\cos x$, 则 $\sin x\cdot\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}$, 把三角问题转化为代数问题解决；

(5) $y=\dfrac{a\sin x+c}{b\sin x+d}$ 或 $y=\dfrac{a\cos x+c}{b\cos x+d}$ 可转化为只有分母含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的函数式，还可以转化为 $\sin x=f(y)$ 或 $\cos x=f(y)$ 的形式，由正、余弦函数的有界性求解.

(6) $y=\dfrac{a\sin x+c}{b\cos x+d}\left(\text{或}y=\dfrac{a\cos x+c}{b\sin x+d}\right)$，其中 $ab\neq 0$，先化为 $y=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\sin x+\frac{c}{a}}{\cos x+\frac{d}{b}}$或$y=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\cos x+\frac{c}{a}}{\sin x+\frac{d}{b}}$, 则转化为求圆上的动点与定点连线斜率的最值问题.

2 解三角形

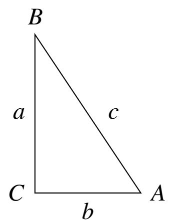
2.1 正弦、余弦定理

2.1.1 正弦定理

在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ (R\text{为外接圆半径, 高考没考过半径})$$

证明. 此处以直角三角形为例. 如下图, 设角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则有:



由直角三角形对应的三角函数定义知

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=\frac{c}{c}=1$$

即:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c=2R$$

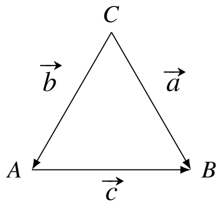
非直角三角形推导过程类似，通过构建高线得到直角三角形. □

正弦定理的主要作用是方程和分式中的边角互化. 其原则为关于边，或是角的正弦值是否具备齐次的特征. 如果齐次则可直接进行边化角或是角化边，否则不可行.

2.1.2 余弦定理

- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 或 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- 另外两个一样，我不想写了.

证明. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，如图所示，构建向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



由向量减法知:$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ 两边平方得到

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{c}^2$$

展开得到

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$$

(这里直接将向量模长写成边长了，代码太多了 ...) □

2.2　解三角形常用结论

1) $A + B + C = \pi$;　$\sin(A + C) = \sin B$;　$\cos(A + C) = -\cos B$.

2) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}bc\sin A$;

3) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin A \sin B = \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab = c^2$

4) $b\cos C + c\cos B = a \Rightarrow \sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin A$ (恒等式)

5) $A > B > C \Leftrightarrow a > b > c \Leftrightarrow \sin A > \sin B > \sin C \Leftrightarrow \cos A < \cos B < \cos C$

2.3　解三角形问题主要思路

2.3.1　公式适用类型

1) 已知两角一边，用正弦定理，有解时，只有一解；

2) 已知两边及一边对角，用正弦定理，有解的情况 (设已知 a, b 和角 A):

   a) A 为锐角，当 $a < b\sin A$ 时无解；若 A 为钝角，当 $a = b, a < b$ 时均无解；

   b) 若为求第三边问题，也可以通过余弦定理构造一元二次方程求解.

3) 已知三边，用余弦定理，有解时，只有一解；

4) 已知两边及夹角，用余弦定理，必有一解.

2.3.2　解三角形最值问题

(1) 利用正弦定理将边转化为角，通过三角恒等变换转化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$，在满足内角和为 π 的范围内求最值.

(2) 对于某些乘法的最值 (例如面积最大值) 利用余弦定理转化为边的形式，利用基本不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ 求最值.