2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) $12-13\mathrm{i}$　(D) $12+13\mathrm{i}$

2. 记 $\cos(-80^\circ)=k$, 那么 $\tan 100^\circ=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(C) $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(D) $-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 1 \\ x+y\geqslant 0 \\ x-y-2\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最大值为 （ ）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1a_2a_3=5$, $a_7a_8a_9=10$, 则 $a_4a_5a_6=$ （ ）

(A) $5\sqrt{2}$　(B) 7　(C) 6　(D) $4\sqrt{2}$

5. $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 （ ）

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4

6. 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选修课 4 门, 一位同学从中共选 3 门. 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 （ ）

(A) 30 种　(B) 35 种　(C) 42 种　(D) 48 种

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8. 设 $a=\log_3 2$, $b=\ln 2$, $c=5^{-\frac{1}{2}}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $b<c<a$　(C) $c<a<b$　(D) $c<b<a$

9. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2-y^2=1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 P 到 x 轴的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{6}$

10. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a+2b$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(2\sqrt{2},+\infty)$　(B) $[2\sqrt{2},+\infty)$　(C) $(3,+\infty)$　(D) $[3,+\infty)$

11. 已知圆 O 的半径为 1, PA、PB 为该圆的两条切线, A、B 为两切点, 那么 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 （ ）

(A) $-4+\sqrt{2}$　(B) $-3+\sqrt{2}$　(C) $-4+2\sqrt{2}$　(D) $-3+2\sqrt{2}$

12. 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点, 若 $AB=CD=2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 （ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{2x^2+1}-x\leqslant 1$ 的解集是______.

14. 已知 α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=$______.

15. 直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点, 则 a 的取值范围是______.

16. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点, 线段 BF 的延长线交 C 于点 D, 且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$, 则 C 的离心率为______.

三、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B 及其对边 a, b 满足 $a+b=a\cot A+b\cot B$, 求内角 C.

18. 投到某杂志的稿件, 先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审, 则予以录用; 若两位初审专家都未予通过, 则不予录用; 若恰能通过一位初审专家的评审, 则再由第三位专家进行复审, 若能通过复审专家的评审, 则予以录用, 否则不予录用. 设稿件能通过各初审专家评审的概率均为 0.5, 复审的稿件能通过评审的概率为 0.3. 各专家独立评审.

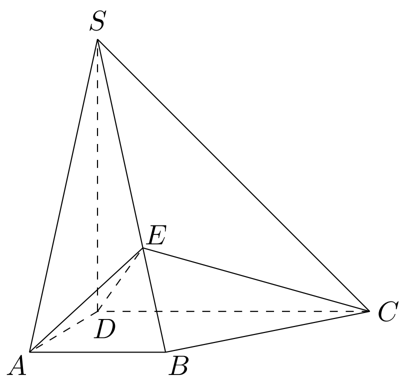
(1) 求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;

(2) 记 X 表示投到该杂志的 4 篇稿件中被录用的篇数, 求 X 的分布列及期望.

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\parallel DC$, $AD\perp DC$, $AB=AD=1$, $DC=SD=2$, E 为棱 SB 上的一点, 平面 $EDC\perp$ 平面 SBC.

(1) 证明: $SE=2EB$;

(2) 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

(1) 若 $xf'(x)\leqslant x^2+ax+1$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $(x-1)f(x)\geqslant 0$.

21. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $K(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D.

(1) 证明: 点 F 在直线 BD 上;

(2) 设 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\dfrac{8}{9}$, 求 $\triangle BDK$ 的内切圆 M 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=c-\dfrac{1}{a_n}$.

(1) 设 $c=\dfrac{5}{2}$, $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使不等式 $a_n<a_{n+1}<3$ 成立的 c 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

文科数学

一、选择题

1. $\cos 300^\circ =$ ( )

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $M=\{1,4\}$, $N=\{1,3,5\}$, 则 $N\cap(\complement_U M)=$ ( )

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{1,5\}$ (C) $\{3,5\}$ (D) $\{4,5\}$

3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 1 \\ x+y\geqslant 0 \\ x-y-2\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1a_2a_3=5$, $a_7a_8a_9=10$, 则 $a_4a_5a_6=$ ( )

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) $4\sqrt{2}$

5. $(1-x)^4(1-\sqrt{x})^3$ 的展开式中 x^2 的系数是 ( )

(A) -6 (B) -3 (C) 0 (D) 3

6. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=AA_1$, 则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于 ( )

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

7. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$. 若 $a\neq b$ 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a+b$ 的取值范围是 ( )

(A) $(1,+\infty)$ (B) $[1,+\infty)$ (C) $(2,+\infty)$ (D) $[2,+\infty)$

8. 已知 F_1、F_2 为双曲线 C: $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为( )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

10. 设 $a=\log_3 2$, $b=\ln 2$, $c=5^{-\frac{1}{2}}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $b<c<a$ (C) $c<a<b$ (D) $c<b<a$

11. 已知圆 O 的半径为 1, PA、PB 为该圆的两条切线, A、B 为两切点, 那么 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 ( )

(A) $-4+\sqrt{2}$ (B) $-3+\sqrt{2}$ (C) $-4+2\sqrt{2}$ (D) $-3+2\sqrt{2}$

12. 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点, 若 $AB=CD=2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 ( )

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

13. 不等式 $\frac{x-2}{x^2+3x+2}>0$ 的解集是______.

14. 已知 α 为第二象限的角, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$______.

15. 某学校开设 A 类选修课 3 门, B 类选修课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有______种. (用数字作答)

16. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点, 线段 BF 的延长线交 C 于点 D, 且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$, 则 C 的离心率为______.

三、解答题

17. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n, 设 $S_3=12$, 且 $2a_1, a_2, a_3+1$ 成等比数列, 求 S_n.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B 及其对边 a, b 满足 $a+b=a\cot A+b\cot B$, 求内角 C.

19. 投到某杂志的稿件, 先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审, 则予以录用; 若两位初审专家都未予通过, 则不予录用; 若恰能通过一位初审专家的评审, 则再由第三位专家进行复审, 若能通过复审专家的评审, 则予以录用, 否则不予录用. 设稿件能通过各初审专家评审的概率均为 0.5, 复审的稿件能通过评审的概率为 0.3. 各专家独立评审.

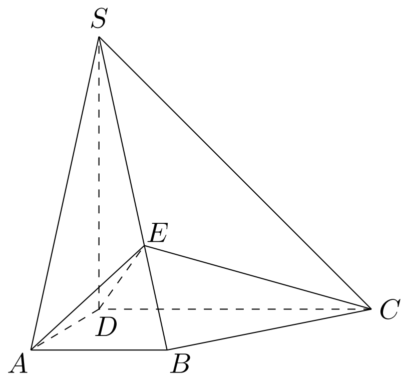
(1) 求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;

(2) 求投到该杂志的 4 篇稿件中, 至少有 2 篇被录用的概率.

20. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\,/\!/\,DC$, $AD\perp DC$, $AB=AD=1$, $DC=SD=2$, E 为棱 SB 上的一点, 平面 $EDC\perp$ 平面 SBC.

(1) 证明: $SE=2EB$;

(2) 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.



21. 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $[-3,3]$ 上的最值.

22. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $K(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D.

(1) 证明: 点 F 在直线 BD 上;

(2) 设 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\dfrac{8}{9}$, 求 $\triangle BDK$ 的内切圆 M 的方程.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$ （ ）

(A) $-3-4\mathrm{i}$ (B) $-3+4\mathrm{i}$ (C) $3-4\mathrm{i}$ (D) $3+4\mathrm{i}$

2. 函数 $y=\dfrac{1+\ln(x-1)}{2}\ (x>1)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\mathrm{e}^{2x+1}-1\ (x>0)$ (B) $y=\mathrm{e}^{2x-1}+1\ (x>0)$

(C) $y=\mathrm{e}^{2x+1}-1\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $y=\mathrm{e}^{2x-1}+1\ (x\in\mathbf{R})$

3. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$（ ）

(A) 14 (B) 21 (C) 28 (D) 35

5. 不等式 $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}>0$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x\,|x<-2$ 或 $x>3\}$ (B) $\{x\,|x<-2$ 或 $1<x<3\}$

(C) $\{x\,|-2<x<1$ 或 $x>3\}$ (D) $\{x\,|-2<x<1$ 或 $1<x<3\}$

6. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中，若每个信封放 2 张，其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封，则不同的放法共有 （ ）

(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 36 种 (D) 54 种

7. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需把函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像 （ ）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个长度单位 (B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个长度单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个长度单位 (D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个长度单位

8. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分 $\angle ACB$. 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\overrightarrow{CD}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$ (B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ (C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$ (D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$

9. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=2\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为 （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

10. 若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $\left(a,a^{-\frac{1}{2}}\right)$ 处的切线与两个坐标轴围成的三角形的面积为 18，则 $a=$ （ ）

(A) 64 (B) 32 (C) 16 (D) 8

11. 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点 （ ）

(A) 有且只有 1 个 (B) 有且只有 2 个

(C) 有且只有 3 个 (D) 有无数个

12. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 $k\ (k>0)$ 的直线与 C 相交于 A、B 两点. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$（ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

二、填空题

13. 已知 α 是第二象限的角，$\tan(\pi+2\alpha)=-\dfrac{4}{3}$，则 $\tan\alpha=$______.

14. 若 $\left(x-\dfrac{a}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是 -84，则 $a=$______.

15. 已知抛物线 C: $y^2=2px\ (p>0)$ 的准线为 l，过 $M(1,0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于点 A，与 C 的一个交点为 B. 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则 $p=$______.

16. 已知球 O 的半径为 4，圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆，AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦，$AB=4$. 若 $OM=ON=3$，则两圆圆心的距离 $MN=$______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上的一点，$BD=33$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，求 AD.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(n^2+n)\cdot 3^n$.

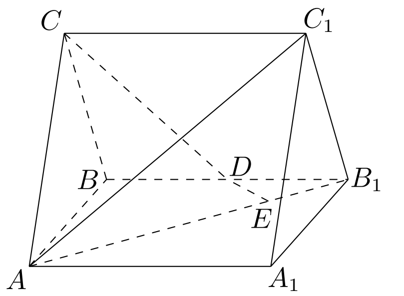
(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$；

(2) 证明：$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}>3^n$.

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$.

(1) 证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

(2) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.

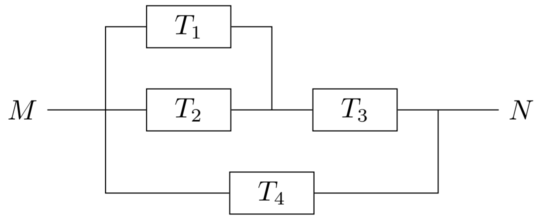


20. 如图, 由 M 到 N 的电路中有 4 个组件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4, 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 p, 电流能通过 T_4 的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.

(1) 求 p;

(2) 求电流能在 M 与 N 之间通过的概率;

(3) ξ 表示 T_1, T_2, T_3, T_4 中能通过电流的组件个数, 求 ξ 的期望.



21. 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ 相交于 B、D 两点, 且 BD 的中点为 $M(1, 3)$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 设 C 的右顶点为 A, 右焦点为 F, $|DF| \cdot |BF| = 17$, 证明: 过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

22. 设函数 $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

(1) 证明: 当 $x > -1$ 时, $f(x) \geqslant \dfrac{x}{x+1}$;

(2) 设当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant \dfrac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}^*|x<6\}$, 集合 $A=\{1,3\}$, $B=\{3,5\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

   (A) $\{1,4\}$ (B) $\{1,5\}$ (C) $\{2,4\}$ (D) $\{2,5\}$

2. 不等式 $\dfrac{x-3}{x+2}<0$ 的解集为 ( )

   (A) $\{x\mid -2<x<3\}$ (B) $\{x\mid x<-2\}$

   (C) $\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$ (D) $\{x\mid x>3\}$

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos(\pi-2\alpha)=$ ( )

   (A) $-\dfrac{\sqrt5}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{9}$ (C) $\dfrac{1}{9}$ (D) $\dfrac{\sqrt5}{3}$

4. 函数 $y=1+\ln(x-1)\ (x>1)$ 的反函数是 ( )

   (A) $y=\mathrm{e}^{x+1}-1\ (x>0)$ (B) $y=\mathrm{e}^{x-1}+1\ (x>0)$

   (C) $y=\mathrm{e}^{x+1}-1\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $y=\mathrm{e}^{x-1}+1\ (x\in\mathbf{R})$

5. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为( )

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4+a_5=12$, 那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$( )

   (A) 14 (B) 21 (C) 28 (D) 35

7. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(0,b)$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$, 则( )

   (A) $a=1, b=1$ (B) $a=-1, b=1$

   (C) $a=1, b=-1$ (D) $a=-1, b=-1$

8. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 底面 ABC 为边长等于 2 的等边三角形, SA 垂直于底面 ABC, $SA=3$, 那么直线 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值为( )

   (A) $\dfrac{\sqrt3}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt5}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt7}{4}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

9. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的放法共有 ( )

   (A) 12 种 (B) 18 种 (C) 36 种 (D) 54 种

10. $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$. 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{CD}=$ ( )

    (A) $\dfrac13\boldsymbol{a}+\dfrac23\boldsymbol{b}$ (B) $\dfrac23\boldsymbol{a}+\dfrac13\boldsymbol{b}$ (C) $\dfrac35\boldsymbol{a}+\dfrac45\boldsymbol{b}$ (D) $\dfrac45\boldsymbol{a}+\dfrac35\boldsymbol{b}$

11. 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点 ( )

    (A) 有且只有 1 个 (B) 有且只有 2 个

    (C) 有且只有 3 个 (D) 有无数个

12. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt3}{2}$, 过右焦点 F 且斜率为 $k\ (k>0)$ 的直线与 C 相交于 A、B 两点. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$, 则 $k=$( )

    (A) 1 (B) $\sqrt2$ (C) $\sqrt3$ (D) 2

二、填空题

13. 已知 α 是第二象限的角, $\tan\alpha=-\dfrac12$, 则 $\cos\alpha=$______.

14. $\left(x+\dfrac1x\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是______.

15. 已知抛物线 C: $y^2=2px\ (p>0)$ 的准线为 l, 过 $M(1,0)$ 且斜率为 $\sqrt3$ 的直线与 l 相交于点 A, 与 C 的一个交点为 B. 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 则 $p=$______.

16. 已知球 O 的半径为 4, 圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆, AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦, $AB=4$. 若 $OM=ON=3$, 则两圆圆心的距离 $MN=$______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上的一点, $BD=33$, $\sin B=\dfrac{5}{13}$, $\cos\angle ADC=\dfrac35$, 求 AD.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_1+a_2=2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\right)$, $a_3+a_4+a_5=64\left(\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)$.

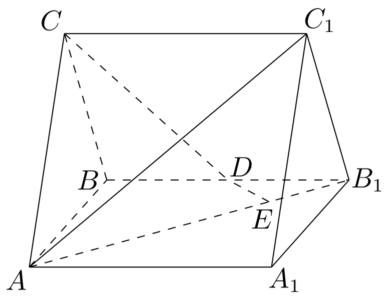
    (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

    (2) 设 $b_n=\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC$, $AA_1=AB$, D 为 BB_1 的中点, E 为 AB_1 上的一点, $AE=3EB_1$.

    (1) 证明: DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线;

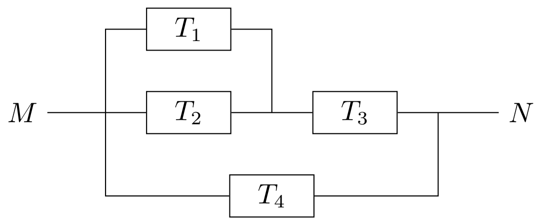
    (2) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°, 求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.



20. 如图, 由 M 到 N 的电路中有 4 个组件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4, 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 p, 电流能通过 T_4 的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.

(1) 求 p;

(2) 求电流能在 M 与 N 之间通过的概率.



21. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+3x+1$.

(1) 设 $a=2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $(2,3)$ 中至少有一个极值点, 求 a 的取值范围.

22. 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 相交于 B、D 两点, 且 BD 的中点为 $M(1,3)$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 设 C 的右顶点为 A, 右焦点为 F, $|DF|\cdot|BF|=17$, 证明: 过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,||x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $[0,2]$ (C) $\{0,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

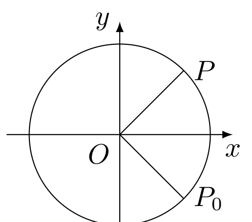
2. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}$，$\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot\overline{z}=$ （ ）

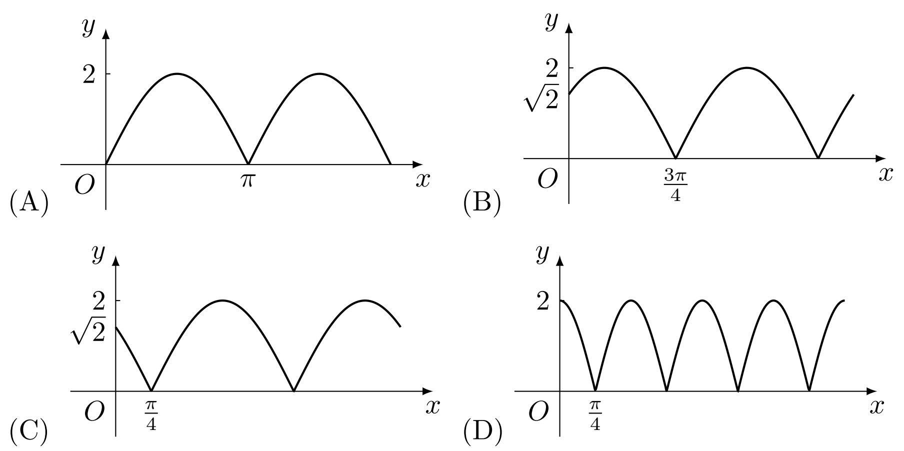
(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

3. 曲线 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $y=2x+1$ (B) $y=2x-1$ (C) $y=-2x-3$ (D) $y=-2x-2$

4. 如图，质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动，其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，角速度为 1，那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 （ ）





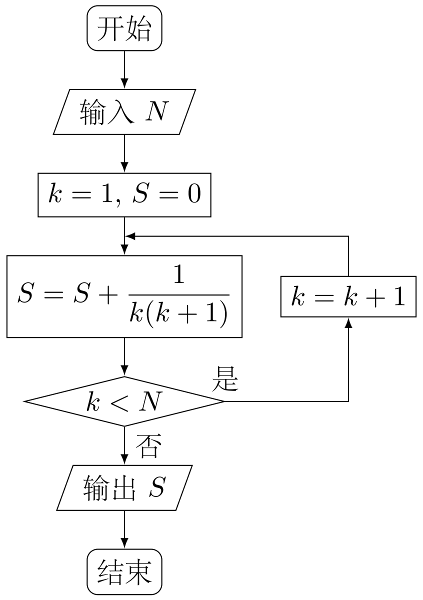
5. 已知命题 p_1：函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数；p_2：函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为减函数. 则在命题 q_1：$p_1\vee p_2$，q_2：$p_1\wedge p_2$，q_3：$(\neg p_1)\vee p_2$ 和 q_4：$p_1\wedge(\neg p_2)$ 中，真命题是 （ ）

(A) q_1，q_3 (B) q_2，q_3 (C) q_1，q_4 (D) q_2，q_4

6. 某种种子每粒发芽的概率都为 0.9，现播种了 1000 粒，对于没有发芽的种子，每粒需再补种 2 粒，补种的种子数记为 X，则 X 的数学期望为 （ ）

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400

7. 如果执行如图所示的框图，输入 $N=5$，则输出的数等于 （ ）



(A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{6}{5}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

8. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^3-8\ (x\geqslant 0)$，则 $\{x\,|\,f(x-2)>0\}=$（ ）

(A) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>4\}$ (B) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>4\}$

(C) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>6\}$ (D) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>2\}$

9. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，α 是第三象限的角，则 $\dfrac{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2

10. 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱长都为 a，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为 （ ）

(A) πa^2 (B) $\dfrac{7}{3}\pi a^2$ (C) $\dfrac{11}{3}\pi a^2$ (D) $5\pi a^2$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,\ 0<x\leqslant 10\\ -\dfrac{1}{2}x+6,\ x>10\end{cases}$，若 a，b，c 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 abc 的取值范围是 （ ）

(A) $(1,10)$ (B) $(5,6)$ (C) $(10,12)$ (D) $(20,24)$

12. 已知双曲线 E 的中心为原点，$F(3,0)$ 是 E 的焦点，过 F 的直线 l 与 E 相交于 A,B 两点，且 AB 的中点为 $N(-12,-15)$，则 E 的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

13. 设 $y=f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续函数，且恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，可以用随机模拟方法近似计算积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 先产生两组（每组 N 个）区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_N$，由此得到 N 个点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,N)$，再数出其中满足 $y_i\leqslant f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 的点数 N_1，那么由随机模拟方法可得积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值为______.

14. 正视图为一个三角形的几何体可以是______.（写出三种）

15. 过点 $A(4,1)$ 的圆 C 与直线 $x-y-1=0$ 相切于点 $B(2,1)$，则圆 C 的方程为______.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上一点，$BD=\dfrac{1}{2}DC$，$\angle ADB=120°$，$AD=2$，若 $\triangle ADC$ 的面积为 $3-\sqrt{3}$，则 $\angle BAC=$______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$.

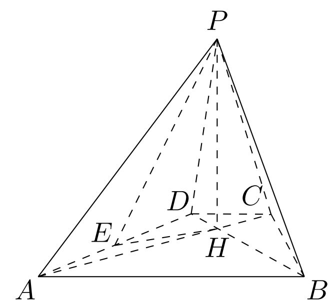
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n=na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形，$AB\,/\!/\,CD$，$AC\perp BD$，垂足为 H，PH 是四棱锥的高，E 为 AD 中点.

(1) 证明：$PE\perp BC$；

(2) 若 $\angle APB=\angle ADB=60°$，求直线 PA 与平面 PEH 所成角的正弦值.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

性别 / 是否需要志愿者	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附:

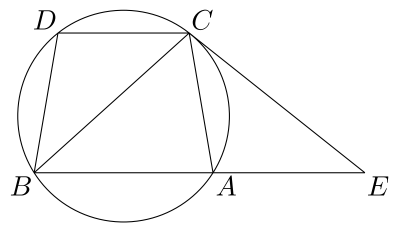
$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 且斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点, 且 $|AF_2|$, $|AB|$, $|BF_2|$ 成等差数列.
(1) 求 E 的离心率;
(2) 设点 $P(0,-1)$ 满足 $|PA|=|PB|$, 求 E 的方程.

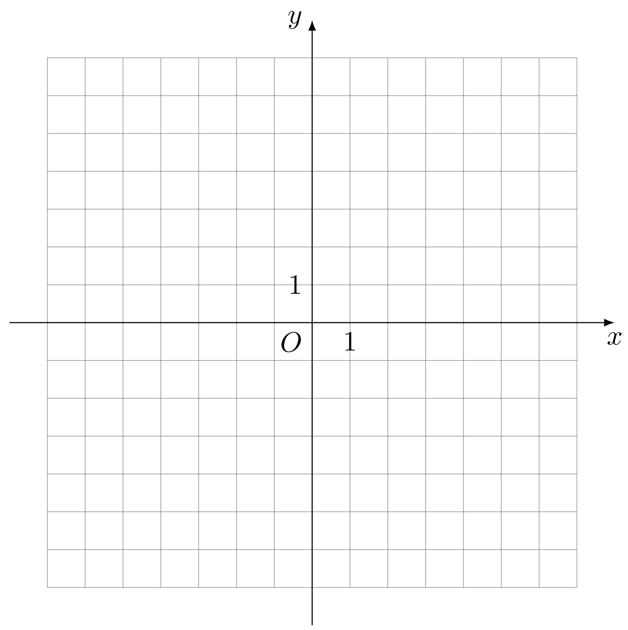
21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2$.
(1) 若 $a=0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:
(1) $\angle ACE=\angle BCD$;
(2) $BC^2=BE\cdot CD$.



23. 已知直线 C_1: $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 圆 C_2: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A, P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.
(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x)\leqslant ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.



2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,||\,x\,|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 4, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $(0,2)$ (B) $[0,2]$ (C) $\{0,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为平面向量, 若 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$, 则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值等于 ( )

(A) $\dfrac{8}{65}$ (B) $-\dfrac{8}{65}$ (C) $\dfrac{16}{65}$ (D) $-\dfrac{16}{65}$

3. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

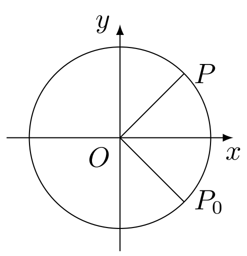
4. 曲线 $y=x^3-2x+1$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 ( )

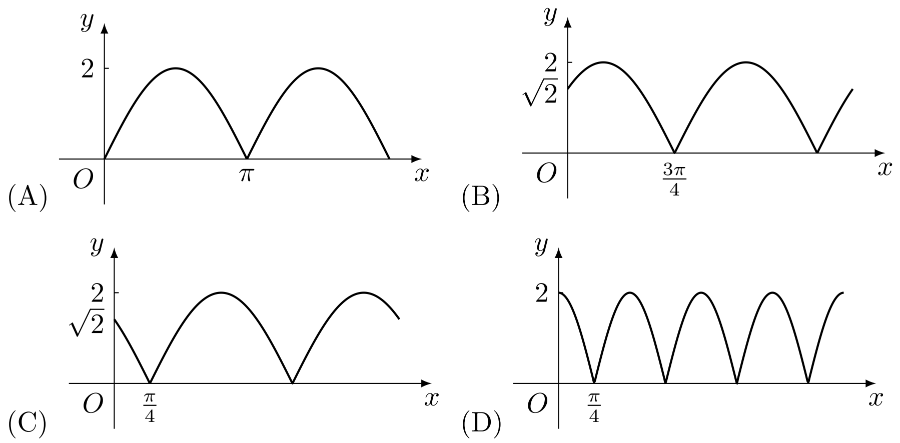
(A) $y=x-1$ (B) $y=-x+1$ (C) $y=2x-2$ (D) $y=-2x+2$

5. 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4,2)$, 则它的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

6. 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 ( )

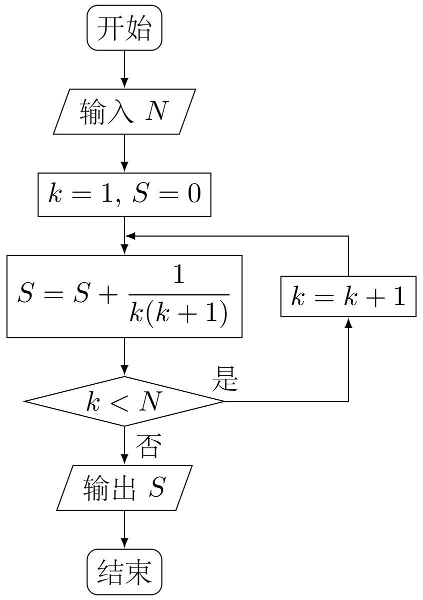




7. 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$、a、a, 其顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ( )

(A) $3\pi a^2$ (B) $6\pi a^2$ (C) $12\pi a^2$ (D) $24\pi a^2$

8. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N=5$, 则输出的数等于 ( )



(A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{6}{5}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

9. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2^x-4\ (x\geqslant 0)$, 则 $\{x\,|\,f(x-2)>0\}=$( )

(A) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>4\}$ (B) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>4\}$

(C) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>6\}$ (D) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>2\}$

10. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (B) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

11. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(-1,2)$、$B(3,4)$、$C(4,-2)$, 点 (x,y) 在平行四边形 $ABCD$ 的内部, 则 $z=2x-5y$ 的取值范围是 ( )

(A) $(-14,16)$ (B) $(-14,20)$ (C) $(-12,18)$ (D) $(-12,20)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & 0<x\leqslant 10\\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10\end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 abc 的取值范围是 ( )

(A) $(1,10)$ (B) $(5,6)$ (C) $(10,12)$ (D) $(20,24)$

二、填空题

13. 圆心位于原点且与直线 $x+y-2=0$ 相切的圆的方程为______.

14. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 且恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 可以用随机模拟方法近似计算由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=0$, $x=1$, $y=0$ 所围成部分的面积 S, 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_N$, 由此得到 N 个点 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$. 再数出其中满足 $y_i\leqslant f(x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 的点数 N_1, 那么由随机模拟方法可得 S 的近似值为______.

15. 一个几何体的正视图为一个三角形, 则这个几何体可能是下列几何体中的______. (填入所有可能的几何体前的编号)

①三棱锥 ②四棱锥 ③三棱柱 ④四棱柱 ⑤圆锥 ⑥圆柱

16. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BC=3BD$, $AD=\sqrt{2}$, $\angle ADB=135^\circ$. 若 $AC=\sqrt{2}AB$, 则 $BD=$______.

三、解答题

17. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=5$, $a_{10}=-9$.

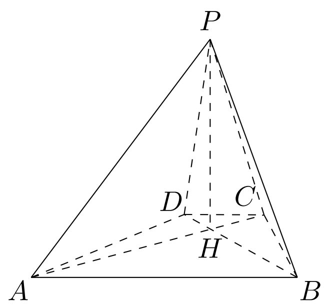
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.

18. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形, $AB\,/\!/\,CD$, $AC\perp BD$, 垂足为 H, PH 是四棱锥的高.

(1) 证明: 平面 $PAC\perp$ 平面 PBD;

(2) 若 $AB=\sqrt{6}$, $\angle APB=\angle ADB=60^\circ$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

性别 / 是否需要志愿者	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附:

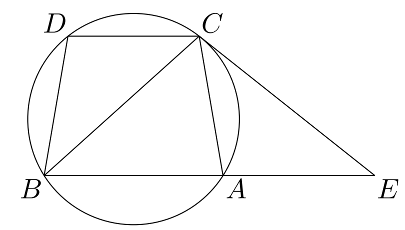
$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<1)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点, 且 $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等差数列.
(1) 求 $|AB|$;
(2) 若直线 l 的斜率为 1, 求 b 的值.

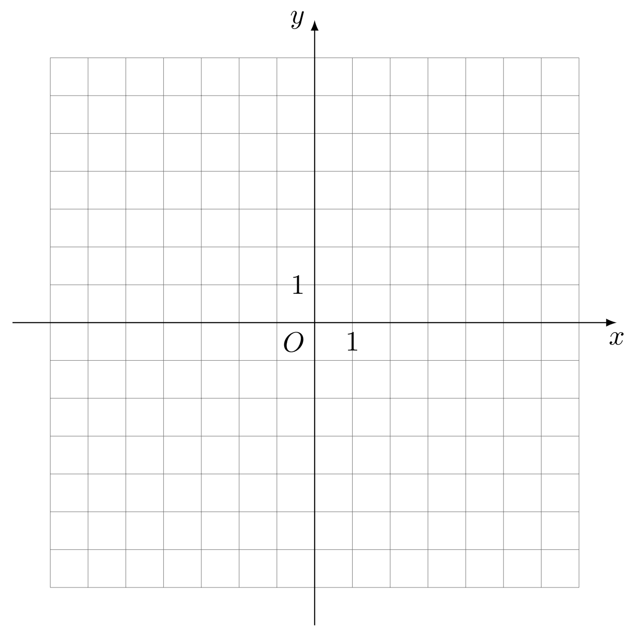
21. 设函数 $f(x)=x\left(\mathrm{e}^x-1\right)-ax^2$.
(1) 若 $a=\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:
(1) $\angle ACE=\angle BCD$;
(2) $BC^2=BE \cdot CD$.



23. 已知直线 C_1: $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 圆 C_2: $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A, P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.
(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x) \leqslant ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.



2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=1+\mathrm{i}$, $\overline{z}$ 为 z 的共轭复数, 则 $z\overline{z}-z-1=$ （ ）

(A) $-2\mathrm{i}$ (B) $-\mathrm{i}$ (C) i (D) $2\mathrm{i}$

2. 函数 $y=2\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\geqslant 0)$

(C) $y=4x^2$ $(x\in\mathbf{R})$ (D) $y=4x^2$ $(x\geqslant 0)$

3. 下面四个条件中, 使 $a>b$ 成立的充分而不必要的条件是 （ ）

(A) $a>b+1$ (B) $a>b-1$ (C) $a^2>b^2$ (D) $a^3>b^3$

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 公差 $d=2$, $S_{k+2}-S_k=24$, 则 $k=$ （ ）

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

5. 设函数 $f(x)=\cos\omega x$ $(\omega>0)$, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则 ω 的最小值等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) 3 (C) 6 (D) 9

6. 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, 点 $A\in\alpha$, $AC\perp l$, C 为垂足, $B\in\beta$, $BD\perp l$, D 为垂足. 若 $AB=2$, $AC=BD=1$, 则 D 到平面 ABC 的距离等于（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (D) 1

7. 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友, 每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 （ ）

(A) 4 种 (B) 10 种 (C) 18 种 (D) 20 种

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) 1

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=2x(1-x)$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

10. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 $y=2x-4$ 与 C 交于 A, B 两点, 则 $\cos\angle AFB=$ （ ）

(A) $\dfrac{4}{5}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $-\dfrac{3}{5}$ (D) $-\dfrac{4}{5}$

11. 已知平面 α 截一球面得圆 M, 过圆心 M 且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆 N. 若该球面的半径为 4, 圆 M 的面积为 4π, 则圆 N 的面积为 （ ）

(A) 7π (B) 9π (C) 11π (D) 13π

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$, $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

二、填空题

13. $(1-\sqrt{x})^{20}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为______.

14. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$______.

15. 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点, 点 $A\in C$, 点 M 的坐标为 $(2,0)$, AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线. 则 $|AF_2|=$______.

16. 已知点 E, F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1, CC_1 上, 且 $B_1E=2EB$, $CF=2FC_1$, 则面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的正切值等于______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $A-C=90^\circ$, $a+c=\sqrt{2}b$, 求 C.

18. 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.

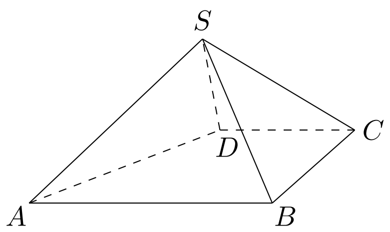
(1) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(2) X 表示该地的 100 位车主中, 甲、乙两种保险都不购买的车主数. 求 X 的期望.

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB\,/\!/\,CD$, $BC\perp CD$, 侧面 SAB 为等边三角形. $AB=BC=2$, $CD=SD=1$.

(1) 证明: $SD\perp$ 平面 SAB;

(2) 求 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$ 且 $\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$.

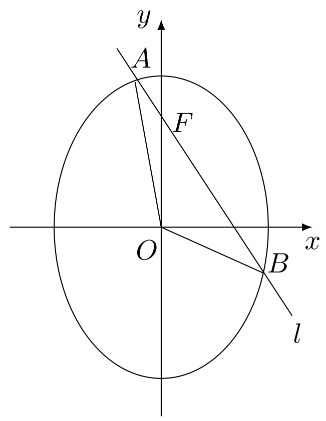
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 证明: $S_n<1$.

21. 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 C: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$.

(1) 证明: 点 P 在 C 上;

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q, 证明: A, P, B, Q 四点在同一圆上.



22. (1) 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

(2) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随机抽取一张, 然后放回, 用这种方式连续抽取 20 次, 设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p. 证明: $p<\left(\dfrac{9}{10}\right)^{19}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4\}$, $M=\{1,2,3\}$, $N=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U(M\cap N)=$(　)

(A) $\{1,2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{2,4\}$　(D) $\{1,4\}$

2. 函数 $y=2\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数为　(　)

(A) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\geqslant 0)$

(C) $y=4x^2$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=4x^2$ $(x\geqslant 0)$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$　(　)

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{7}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 6\\ x-3y\leqslant -2\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最小值为(　)

(A) 17　(B) 14　(C) 5　(D) 3

5. 下面四个条件中, 使 $a>b$ 成立的充分而不必要的条件是　(　)

(A) $a>b+1$　(B) $a>b-1$　(C) $a^2>b^2$　(D) $a^3>b^3$

6. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 公差 $d=2$, $S_{k+2}-S_k=24$, 则 $k=$　(　)

(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5

7. 设函数 $f(x)=\cos\omega x$ $(\omega>0)$, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则 ω 的最小值等于　(　)

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) 3　(C) 6　(D) 9

8. 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, 点 $A\in\alpha$, $AC\perp l$, C 为垂足, 点 $B\in\beta$, $BD\perp l$, D 为垂足. 若 $AB=2$, $AC=BD=1$, 则 $CD=$　(　)

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

9. 4 位同学每人从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门, 则恰有 2 人选修课程甲的不同选法共有　(　)

(A) 12 种　(B) 24 种　(C) 30 种　(D) 36 种

10. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=2x(1-x)$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$　(　)

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

11. 设两圆 C_1、C_2 都和两坐标轴相切, 且都过点 $(4,1)$, 则两圆心的距离 $|C_1C_2|=$　(　)

(A) 4　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 8　(D) $8\sqrt{2}$

12. 已知平面 α 截一球面得圆 M, 过圆心 M 且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆 N. 若该球面的半径为 4, 圆 M 的面积为 4π, 则圆 N 的面积为　(　)

(A) 7π　(B) 9π　(C) 11π　(D) 13π

二、填空题

13. $(1-x)^{10}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为______.

14. 已知 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\alpha=$______.

15. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 C_1D_1 的中点, 则异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为______.

16. 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点, 点 $A\in C$, 点 M 的坐标为 $(2,0)$, AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线. 则 $|AF_2|=$______.

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_2=6$, $6a_1+a_3=30$, 求 a_n 和 S_n.

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$.

(1) 求 B;

(2) 若 $A=75^\circ$, $b=2$, 求 a, c.

19. 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.

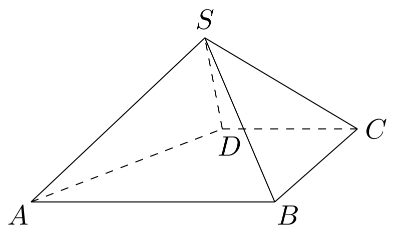
(1) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(2) 求该地 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

20. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $BC \perp CD$, 侧面 SAB 为等边三角形. $AB=BC=2$, $CD=SD=1$.

(1) 证明: $SD\perp$ 平面 SAB;

(2) 求 AB 与平面 SBC 所成角的大小.



21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+(3-6a)x+12a-4$ $(a\in\mathbf{R})$.

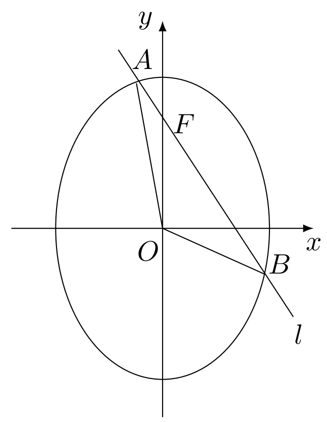
(1) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线过点 $(2,2)$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值, $x_0\in(1,3)$, 求 a 的取值范围.

22. 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 C: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$.

(1) 证明: 点 P 在 C 上;

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q, 证明: A, P, B, Q 四点在同一圆上.



2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

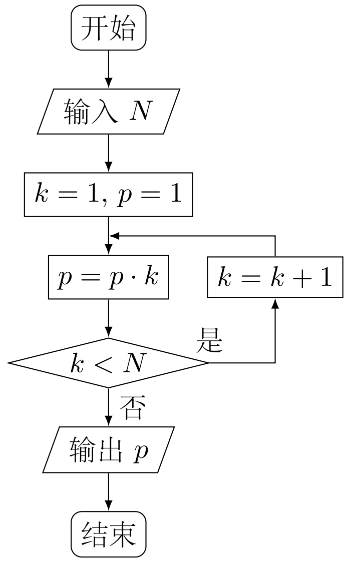
1. 复数 $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 ( )

(A) $-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

2. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是 ( )

(A) $y=x^3$　(B) $y=|x|+1$　(C) $y=-x^2+1$　(D) $y=2^{-|x|}$

3. 执行如图的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是 ( )



(A) 120　(B) 720　(C) 1440　(D) 5040

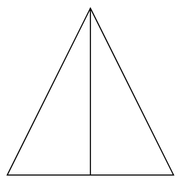
4. 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

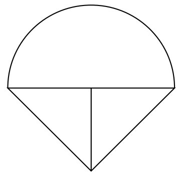
5. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ ( )

(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

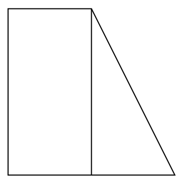
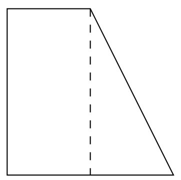
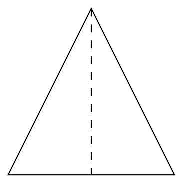
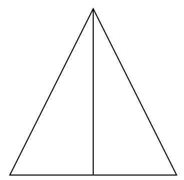
6. 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如下图所示, 则相应的侧视图可以为 ( )



正视图



俯视图

(A) 　(B) 　(C) 　(D) 

7. 设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点, 且与 C 的一条对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

8. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为 ( )

(A) -40　(B) -20　(C) 20　(D) 40

9. 由曲线 $y=\sqrt{x}$, 直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为 ( )

(A) $\dfrac{10}{3}$　(B) 4　(C) $\dfrac{16}{3}$　(D) 6

10. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 其夹角为 θ, 有下列四个命题:

p_1: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　p_2: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

p_3: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$　p_4: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是 ( )

(A) p_1, p_4　(B) p_1, p_3　(C) p_2, p_3　(D) p_2, p_4

11. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π, 且 $f(-x)=f(x)$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减　(B) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递减

(C) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增　(D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递增

12. 函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y=\sin\pi x\ (-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于 ( )

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

二、填空题

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的中心为原点, 焦点 F_1、F_2 在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16, 那么 C 的方程为______.

15. 已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在半径为 4 的球 O 的球面上, 且 $AB=6$, $BC=2\sqrt{3}$, 则棱锥 $O-ABCD$ 的体积为______.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ$, $AC=\sqrt{3}$, 则 $AB+2BC$ 的最大值为______.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1+3a_2=1$, $a_3^2=9a_2a_6$.

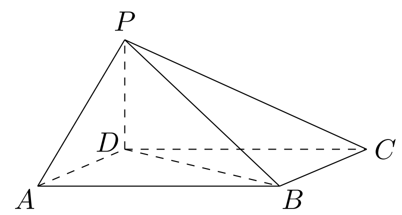
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $PA\perp BD$;

(2) 若 $PD=AD$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19. 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做试验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	4	12	42	32	10

(1) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(2) 已知用 B 配方生产一件产品的利润 y (单位: 元) 与其质量指标值 t 的关系式为 $y=\begin{cases}-2,\ t<94\\ 2,\ 94\leqslant t<102\\ 4,\ t\geqslant 102\end{cases}$. 从用 B 配方生产的产品中任取一件, 其利润记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望. (以实验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率)

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,-1)$, B 点在直线 $y=-3$ 上, M 点满足 $\overrightarrow{MB}\mathrel{/\mkern-5mu/}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$, M 点的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) P 为 C 上的动点, l 为 C 在 P 点处的切线, 求 O 点到 l 距离的最小值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

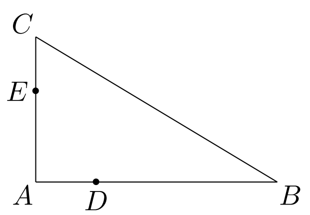
(1) 求 a, b 的值;

(2) 如果当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$, 求 k 的取值范围.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m, AC 的长为 n, AD, AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

(1) 证明: C, B, D, E 四点共圆;

(2) 若 $\angle A=90^\circ$, 且 $m=4$, $n=6$, 求 C, B, D, E 所在圆的半径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), M 是 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

24. 设函数 $f(x)=|x-a|+3x$, 其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$, 求 a 的值.

2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$, $N=\{1,3,5\}$, $P=M\cap N$, 则 P 的子集共有 （ ）

(A) 2 个　(B) 4 个　(C) 6 个　(D) 8 个

2. 复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $-2+\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

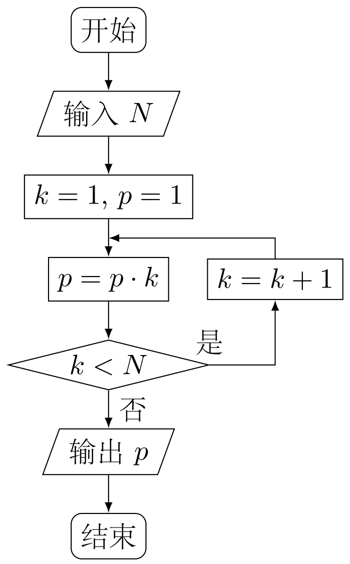
3. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是 （ ）

(A) $y=x^3$　(B) $y=|x|+1$　(C) $y=-x^2+1$　(D) $y=2^{-|x|}$

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 执行如图的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是 （ ）



(A) 120　(B) 720　(C) 1440　(D) 5040

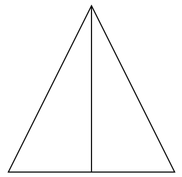
6. 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

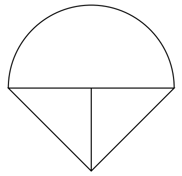
7. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

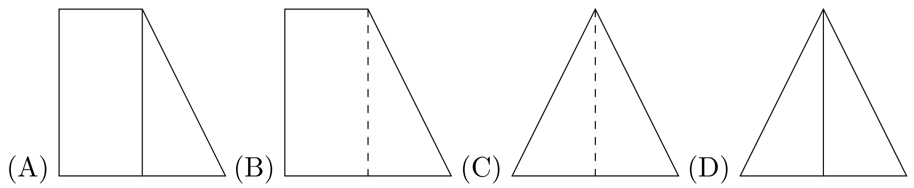
8. 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如下图所示, 则相应的侧视图可以为 （ ）



正视图



俯视图



9. 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点, 且与 C 的对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=12$, P 为 C 的准线上一点, 则 $\triangle ABP$ 的面积为 （ ）

(A) 18　(B) 24　(C) 36　(D) 48

10. 在下列区间中, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+4x-3$ 的零点所在的区间为 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　(C) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 则 （ ）

(A) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(B) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(D) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

12. 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2, 当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=x^2$, 那么函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=|\lg x|$ 的图象的交点共有 （ ）

(A) 10 个　(B) 9 个　(C) 8 个　(D) 1 个

二、填空题

13. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的单位向量, k 为实数, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $k=$.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

15. $\triangle ABC$ 中, $B=120^\circ$, $AC=7$, $AB=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

16. 已知两个圆锥有公共底面, 且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\dfrac{3}{16}$, 则这两个圆锥中, 体积较小者的高与体积较大者的高的比值为______.

三、解答题

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 公比 $q=\dfrac{1}{3}$.

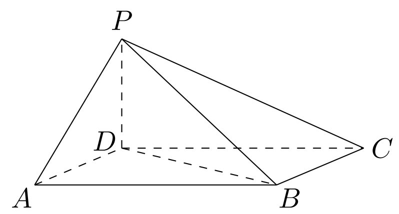
(1) 若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n=\dfrac{1-a_n}{2}$;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $PA\perp BD$;

(2) 设 $PD=AD=1$, 求棱锥 $D-PBC$ 的高.



19. 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做试验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	4	12	42	32	10

(1) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(2) 已知用 B 配方生产一件产品的利润 y (单位: 元) 与其质量指标值 t 的关系式为 $y=\begin{cases}-2,\ t<94\\ 2,\ 94\leqslant t<102\\ 4,\ t\geqslant 102\end{cases}$. 估计用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率, 并求用 B 配方生产的上述 100 件产品平均一件的利润.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A, B 两点, 且 $OA\perp OB$, 求 a 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

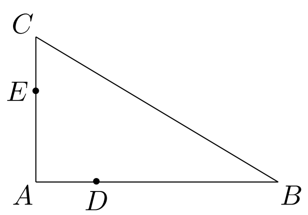
(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m, AC 的长为 n, AD, AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

(1) 证明: C, B, D, E 四点共圆;

(2) 若 $\angle A=90^\circ$, 且 $m=4$, $n=6$, 求 C, B, D, E 所在圆的半径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), M 是 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

24. 设函数 $f(x)=|x-a|+3x$, 其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$, 求 a 的值.

2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $1+2\mathrm{i}$ (D) $1-2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$, $B=\{1,m\}$, $A\cup B=A$, 则 $m=$ （ ）

(A) 0 或 $\sqrt{3}$ (B) 0 或 3 (C) 1 或 $\sqrt{3}$ (D) 1 或 3

3. 椭圆的中心在原点, 焦距为 4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为( )

(A) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

4. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 到平面 BED 的距离为 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. $a_5=5$, $S_5=15$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 100 项和为 （ ）

(A) $\dfrac{100}{101}$ (B) $\dfrac{99}{101}$ (C) $\dfrac{99}{100}$ (D) $\dfrac{101}{100}$

6. $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD, 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ (B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$ (C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$ (D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$

7. 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{9}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

8. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C: x^2-y^2=2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1|=2|PF_2|$, 则 $\cos\angle F_1PF_2=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

9. 已知 $x=\ln\pi$, $y=\log_5 2$, $z=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, 则 （ ）

(A) $x<y<z$ (B) $z<x<y$ (C) $z<y<x$ (D) $y<z<x$

10. 已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则 $c=$ （ ）

(A) -2 或 2 (B) -9 或 3 (C) -1 或 1 (D) -3 或 1

11. 将字母 a, a, b, b, c, c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 （ ）

(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 24 种 (D) 36 种

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE=BF=\dfrac{3}{7}$. 动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第一次碰到 E 时, P 与正方形的边碰撞的次数为 （ ）

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10

二、填空题

13. 若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为______.

14. 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ $(0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时, $x=$______.

15. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中 $\dfrac{1}{x^2}$ 的系数为______.

16. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长都相等, $\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为______.

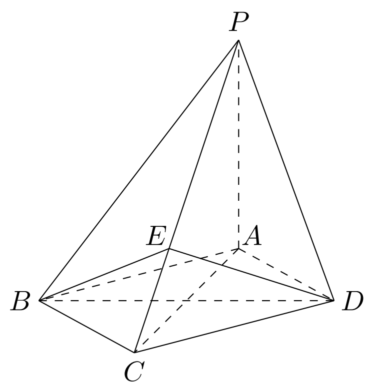
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $\cos(A-C)+\cos B=1$, $a=2c$, 求 C.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BED;

(2) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小.



19. 乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换. 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分. 设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中, 甲先发球.

(1) 求开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;

(2) ξ 表示开始第 4 次发球时乙的得分, 求 ξ 的期望.

20. 设函数 $f(x)=ax+\cos x$, $x\in[0,\pi]$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$, 求 a 的取值范围.

21. 已知抛物线 $C: y=(x+1)^2$ 与圆 $M:(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=r^2\ (r>0)$ 有一个公共点 A, 且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l.

(1) 求 r;

(2) 设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m、n 的交点为 D, 求 D 到 l 的距离.

22. 函数 $f(x)=x^2-2x-3$, 定义数列 $\{x_n\}$ 如下: $x_1=2$, x_{n+1} 是过两点 $P(4,5)$, $Q_n(x_n,f(x_n))$ 的直线 PQ_n 与 x 轴交点的横坐标.

(1) 证明: $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$;

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$, $B=\{x\mid x$ 是矩形$\}$, $C=\{x\mid x$ 是正方形$\}$, $D=\{x\mid x$ 是菱形$\}$, 则 ( )

(A) $A\subseteq B$　(B) $C\subseteq B$　(C) $D\subseteq C$　(D) $A\subseteq D$

2. 函数 $y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=x^2-1\ (x\geqslant 0)$　(B) $y=x^2-1\ (x\geqslant 1)$

(C) $y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$　(D) $y=x^2+1\ (x\geqslant 1)$

3. 若函数 $f(x)=\sin\dfrac{x+\varphi}{3}\ (\varphi\in[0,2\pi])$ 是偶函数, 则 $\varphi=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\dfrac{3\pi}{2}$　(D) $\dfrac{5\pi}{3}$

4. 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ ( )

(A) $-\dfrac{24}{25}$　(B) $-\dfrac{12}{25}$　(C) $\dfrac{12}{25}$　(D) $\dfrac{24}{25}$

5. 椭圆的中心在原点, 焦距为 4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为( )

(A) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $S_n=2a_{n+1}$, 则 $S_n=$ ( )

(A) 2^{n-1}　(B) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　(C) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　(D) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

7. 6 位选手依次演讲, 其中选手甲不在第一个也不在最后一个演讲, 则不同的演讲次序共有 ( )

(A) 240 种　(B) 360 种　(C) 480 种　(D) 720 种

8. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 到平面 BED 的距离为 ( )

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

9. $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD, 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$　(D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$

10. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C: x^2-y^2=2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1|=2|PF_2|$, 则 $\cos\angle F_1PF_2=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

11. 已知 $x=\ln\pi$, $y=\log_5 2$, $z=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, 则 ( )

(A) $x<y<z$　(B) $z<x<y$　(C) $z<y<x$　(D) $y<z<x$

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE=BF=\dfrac{1}{3}$. 动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第一次碰到 E 时, P 与正方形的边碰撞的次数为 ( )

(A) 8　(B) 6　(C) 4　(D) 3

二、填空题

13. $\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式中 x^2 的系数为______.

14. 若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为______.

15. 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x\ (0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时, $x=$______.

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为 BB_1、CC_1 的中点, 那么异面直线 AE 与 D_1F 所成角的余弦值为______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 成等差数列, 其对边 a、b、c 满足 $2b^2=3ac$, 求 A.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$.

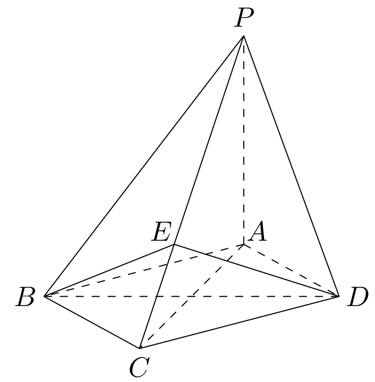
(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BED;

(2) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小.



20. 乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换. 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分. 设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中, 甲先发球.

(1) 求开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;

(2) 求开始第 5 次发球时, 甲得分领先的概率.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 若过两点 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ 的直线 l 与 x 轴的交点在曲线 $f(x)$ 上, 求 a 的值.

22. 已知抛物线 $C: y=(x+1)^2$ 与圆 $M:(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=r^2\ (r>0)$ 有一个公共点 A, 且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l.

(1) 求 r;

(2) 设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m、n 的交点为 D, 求 D 到 l 的距离.

2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in A, x-y\in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 (　)

(A) 3　　(B) 6　　(C) 8　　(D) 10

2. 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 (　)

(A) 12 种　　(B) 10 种　　(C) 9 种　　(D) 8 种

3. 下面是关于复数 $z=\dfrac{2}{-1+\mathrm{i}}$ 的四个命题: p_1: $|z|=2$; p_2: $z^2=2\mathrm{i}$; p_3: z 的共轭复数为 $1+\mathrm{i}$; p_4: z 的虚部为 -1. 其中的真命题为 (　)

(A) p_2, p_3　　(B) p_1, p_2　　(C) p_2, p_4　　(D) p_3, p_4

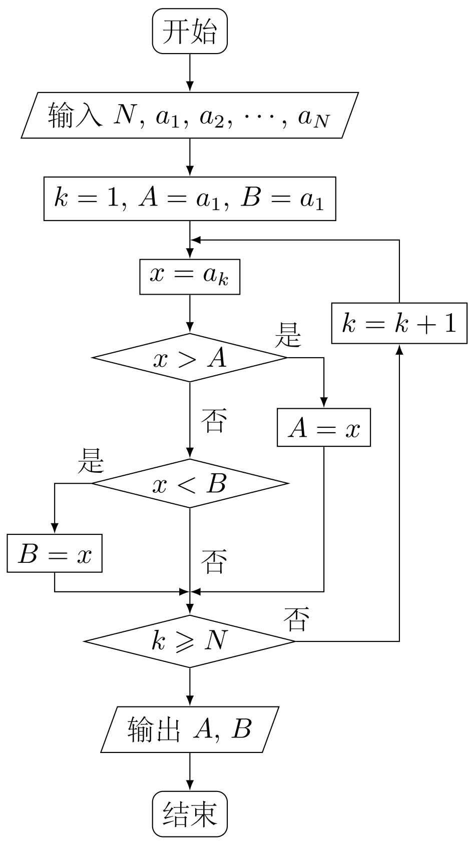
4. 设 F_1, F_2 是椭圆 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 (　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=$ (　)

(A) 7　　(B) 5　　(C) -5　　(D) -7

6. 如果执行下面的程序框图, 输入正整数 N $(N\geqslant 2)$ 和实数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 输出 A, B, 则 (　)



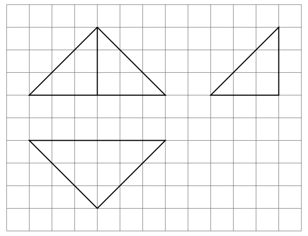
(A) $A+B$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的和

(B) $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的算术平均数

(C) A 和 B 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最大的数和最小的数

(D) A 和 B 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最小的数和最大的数

7. 如图, 网格上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 (　)



(A) 6　　(B) 9　　(C) 12　　(D) 18

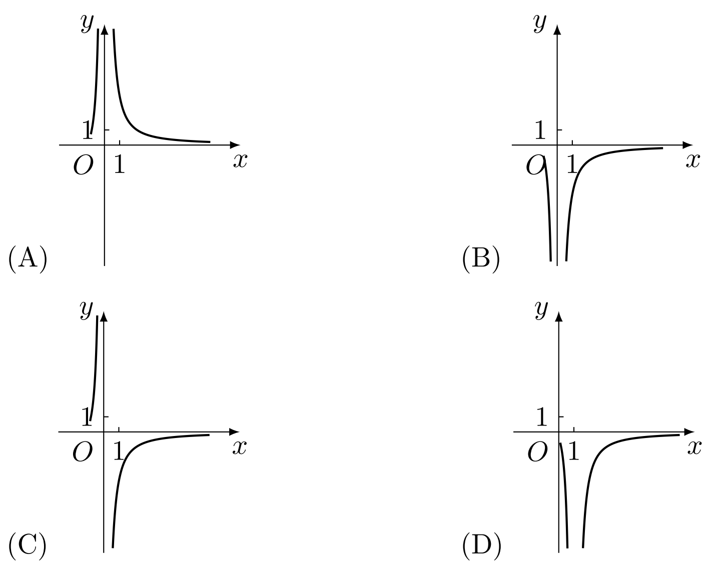
8. 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A, B 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为 (　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) 8

9. 已知 $\omega>0$, 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减, 则 ω 的取值范围是 (　)

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$　　(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　(D) $(0,2]$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 (　)



11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC=2$, 则此棱锥的体积为 (　)

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为 (　)

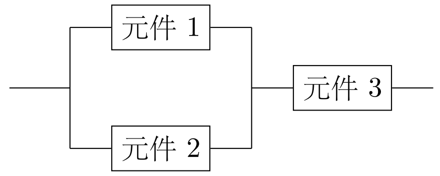
(A) $1-\ln 2$　　(B) $\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　(C) $1+\ln 2$　　(D) $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为 45°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$______.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1 \\ x+y\leqslant 3 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的取值范围为______.

15. 某一部件由三个电子元件按下图方式连接而成, 元件 1 或元件 2 正常工作, 且元件 3 正常工作, 则部件正常工作. 设三个电子元件的使用寿命 (单位: 小时) 均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$, 且各个元件能否正常工作相互独立, 那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为______.



16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为______.

三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c.

18. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位: 元) 关于当天需求量 n (单位: 枝, $n \in \mathbf{N}$) 的函数解析式;

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得下表:

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

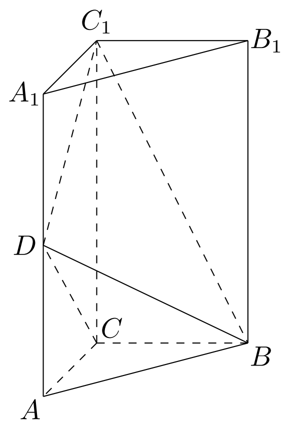
① 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, X 表示当天的利润 (单位: 元), 求 X 的分布列、数学期望及方差;

② 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花, 你认为应购进 16 枝还是 17 枝? 请说明理由.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=\dfrac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点, $DC_1 \perp BD$.

(1) 证明: $DC_1 \perp BC$;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小.



20. 设抛物线 $C: x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l, A 为 C 上一点, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点.

(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;

(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

21. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)\,\mathrm{e}^{x-1}-f(0)\,x+\dfrac{1}{2}x^2$.

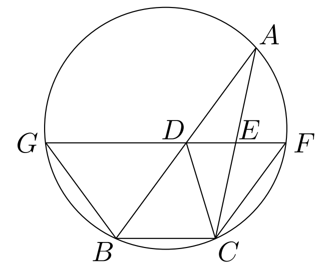
(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$, 求 $(a+1)\,b$ 的最大值.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F, G 两点. 若 $CF \parallel AB$, 证明:

(1) $CD=BC$;

(2) $\triangle BCD \backsim \triangle GBD$.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=2\cos\varphi \\ y=3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 是参数) 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.

(1) 当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x) \geqslant 3$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leqslant |x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$, 求 a 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$, $B=\{x\mid -1<x<1\}$, 则 ( )

(A) $A\subsetneqq B$ (B) $B\subsetneqq A$ (C) $A=B$ (D) $A\cap B=\varnothing$

2. 复数 $z=\dfrac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

3. 在一组样本数据 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n) $(n\geqslant 2,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 不全相等) 的散点图中, 若所有样本点 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都在直线 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 上, 则这组样本数据的样本相关系数为 ( )

(A) -1 (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

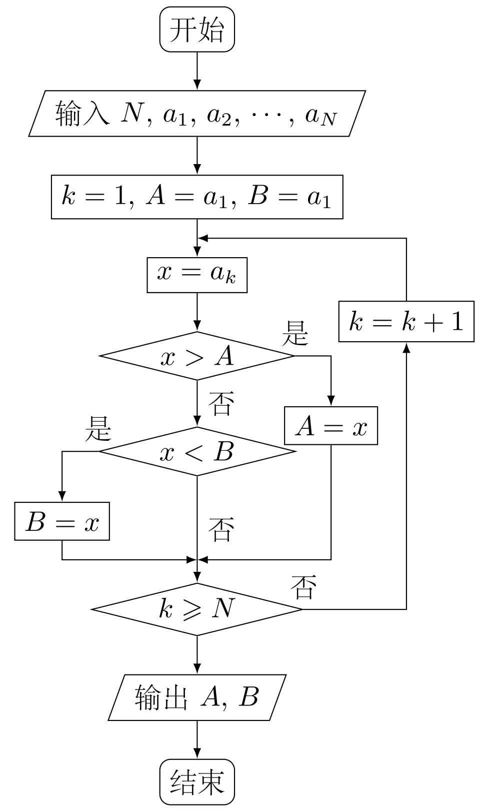
4. 设 F_1, F_2 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知正三角形 ABC 的顶点 $A(1,1)$, $B(1,3)$, 顶点 C 在第一象限, 若点 (x,y) 在 $\triangle ABC$ 内部, 则 $z=-x+y$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(1-\sqrt{3},2\right)$ (B) $(0,2)$ (C) $\left(\sqrt{3}-1,2\right)$ (D) $\left(0,1+\sqrt{3}\right)$

6. 如果执行下面的程序框图, 输入正整数 N $(N\geqslant 2)$ 和实数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$, 输出 A, B, 则 ( )



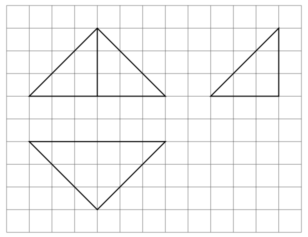
(A) $A+B$ 为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 的和

(B) $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 的算术平均数

(C) A 和 B 分别是 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 中最大的数和最小的数

(D) A 和 B 分别是 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 中最小的数和最大的数

7. 如图, 网格上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 ( )



(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18

8. 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1, 球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$, 则此球的体积为 ( )

(A) $\sqrt{6}\pi$ (B) $4\sqrt{3}\pi$ (C) $4\sqrt{6}\pi$ (D) $6\sqrt{3}\pi$

9. 已知 $\omega>0$, $0<\varphi<\pi$, 直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴, 则 $\varphi=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{3\pi}{4}$

10. 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A, B 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 8

11. 当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $4^x<\log_a x$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ (C) $\left(1,\sqrt{2}\right)$ (D) $\left(\sqrt{2},2\right)$

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为 ( )

(A) 3690 (B) 3660 (C) 1845 (D) 1830

二、填空题

13. 曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为______.

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3+3S_2=0$, 则公比 $q=$______.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角为 45°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$______.

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $M+m=$______.

三、解答题

17. 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边, $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c.

18. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位: 元) 关于当天需求量 n (单位: 枝, $n\in\mathbf{N}$) 的函数解析式;

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得下表:

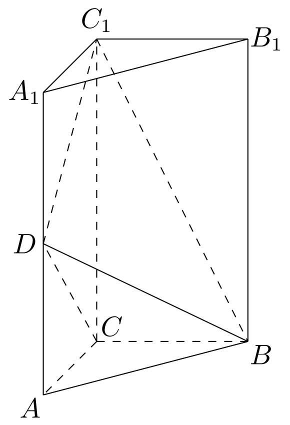
日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

① 假设花店在这 100 天内每天购进 17 枝玫瑰花, 求这 100 天的日利润 (单位: 元) 的平均数;

② 若花店一天购进 17 枝玫瑰花, 以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率, 求当天的利润不少于 75 元的概率.

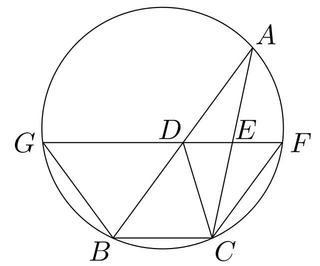
19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱垂直底面, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点.
(1) 证明: 平面 $BDC_1\perp$ 平面 BDC;
(2) 平面 BDC_1 分此棱柱为两部分, 求这两部分体积的比.



20. 设抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l, A 为 C 上一点, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点.
(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;
(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $a=1$, k 为整数, 且当 $x>0$ 时, $(x-k)f'(x)+x+1>0$, 求 k 的最大值.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F, G 两点. 若 $CF\parallel AB$, 证明:
(1) $CD=BC$;
(2) $\triangle BCD\backsim\triangle GBD$.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$ (φ 是参数) 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$.
(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;
(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.
(1) 当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3$ 的解集;
(2) 若 $f(x)\leqslant|x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$, $M=\{x\mid x=a+b, a\in A, b\in B\}$, 则 M 中元素的个数为 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. $\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3=$ （ ）

(A) -8 (B) 8 (C) $-8\mathrm{i}$ (D) $8\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$, 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$, 则 $\lambda=$ （ ）

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(-1,0)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

5. 函数 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2^x-1}$ $(x>0)$ (B) $\dfrac{1}{2^x-1}$ $(x\neq 0)$

(C) 2^x-1 $(x\in\mathbf{R})$ (D) 2^x-1 $(x>0)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\dfrac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 （ ）

(A) $-6\left(1-3^{-10}\right)$ (B) $\dfrac{1}{9}\left(1-3^{10}\right)$ (C) $3\left(1-3^{-10}\right)$ (D) $3\left(1+3^{-10}\right)$

7. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是 （ ）

(A) 56 (B) 84 (C) 112 (D) 168

8. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2, 点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（ ）

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ (D) $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

9. 若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,0]$ (B) $[-1,+\infty)$ (C) $[0,3]$ (D) $[3,+\infty)$

10. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 则 $k=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$, 下列结论中错误的是 （ ）

(A) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 中心对称

(B) $y=f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

二、填空题

13. 已知 α 是第三象限角, $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cot\alpha=$______.

14. 6 个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有______种. (用数字作答)

15. 记不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域为 D, 若直线 $y=a(x+1)$ 与 D 有公共点, 则 a 的取值范围是______.

16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK=\dfrac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 60°, 则球 O 的表面积等于______.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2^2$, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

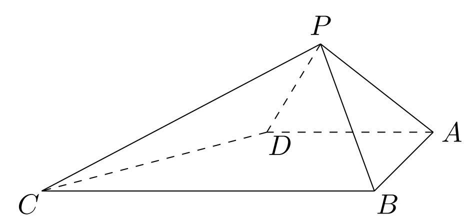
(1) 求 B;

(2) 若 $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$, $BC=2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

(1) 证明: $PB\perp CD$;

(2) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.

(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;

(2) X 表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求 X 的数学期望.

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.

(1) 求 a、b;

(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点, 且 $|AF_1|=|BF_1|$, 证明: $|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$ 成等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.

(1) 若 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \leqslant 0$, 求 λ 的最小值;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 证明: $a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$.

2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{1,2\}$, 则 $\complement_U A=$ ( )

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{3,4,5\}$ (C) $\{1,2,3,4,5\}$ (D) $\varnothing$

2. 已知 α 是第二象限角, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, 则 $\cos\alpha=$ ( )

(A) $-\frac{12}{13}$ (B) $-\frac{5}{13}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{12}{13}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$, 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$, 则 $\lambda=$ ( )

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

4. 不等式 $|x^2-2|<2$ 的解集是 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-2,2)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-2,0)\cup(0,2)$

5. $(x+2)^8$ 的展开式中 x^6 的系数是 ( )

(A) 28 (B) 56 (C) 112 (D) 224

6. 函数 $f(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ( )

(A) $\frac{1}{2^x-1}\ (x>0)$ (B) $\frac{1}{2^x-1}\ (x\neq 0)$

(C) $2^x-1\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $2^x-1\ (x>0)$

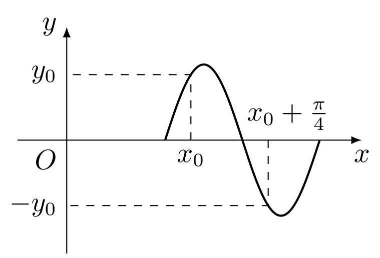
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 ( )

(A) $-6(1-3^{-10})$ (B) $\frac{1}{9}(1-3^{10})$ (C) $3(1-3^{-10})$ (D) $3(1+3^{-10})$

8. 已知 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ 是椭圆 C 的两个焦点, 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交 C 于 A、B 两点, 且 $|AB|=3$, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ (B) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ (C) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

9. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0)$ 的部分图象如图所示, 则 $\omega=$ ( )



(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

10. 已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点 $(-1,a+2)$ 处切线的斜率为 8, 则 $a=$( )

(A) 9 (B) 6 (C) -9 (D) -6

11. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ( )

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

12. 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 则 $k=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

二、填空题

13. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且当 $x\in[1,3)$ 时, $f(x)=x-2$, 则 $f(-1)=$______.

14. 从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖, 2 名二等奖, 3 名三等奖, 则可能的决赛结果共有______种. (用数字作答)

15. 若 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$, 则 $z=-x+y$ 的最小值为______.

16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK=\frac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 60°, 则球 O 的表面积等于______.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7=4$, $a_{19}=2a_9$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\frac{1}{na_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

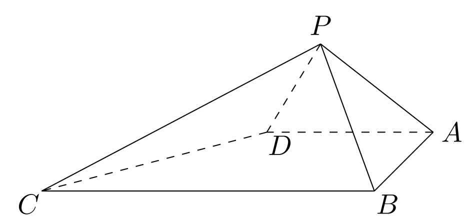
(1) 求 B;

(2) 若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$, $BC=2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是边长为 2 的等边三角形.

(1) 证明: $PB\perp CD$;

(2) 求点 A 到平面 PCD 的距离.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.

(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;

(2) 求前 4 局中乙恰好当 1 次裁判的概率.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3x+1$.

(1) 当 $a=-\sqrt{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $x\in[2,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.

(1) 求 a、b;

(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点, 且 $|AF_1|=|BF_1|$, 证明: $|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$ 成等比数列.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$, $B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$, 则 ( )

(A) $A\cap B=\varnothing$ (B) $A\cup B=\mathbf{R}$ (C) $B\subseteq A$ (D) $A\subseteq B$

2. 若复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})\,z=|4+3\mathrm{i}|$, 则 z 的虚部为 ( )

(A) -4 (B) $-\dfrac{4}{5}$ (C) 4 (D) $\dfrac{4}{5}$

3. 为了解某地区的中小学生视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大, 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ( )

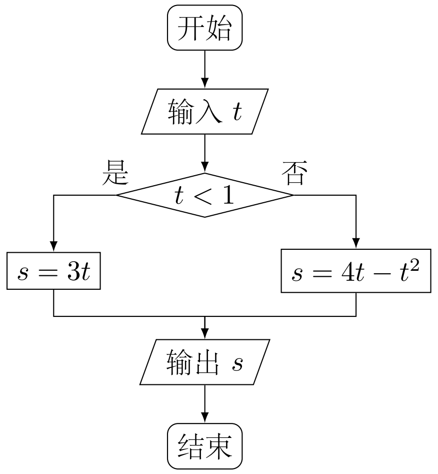
(A) 简单随机抽样 (B) 按性别分层抽样

(C) 按学段分层抽样 (D) 系统抽样

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ( )

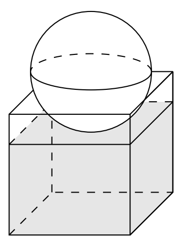
(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$ (B) $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ (D) $y=\pm x$

5. 执行下面的程序框图, 若输入的 $t\in[-1,3]$, 则输出的 s 属于 ( )



(A) $[-3,4]$ (B) $[-5,2]$ (C) $[-4,3]$ (D) $[-2,5]$

6. 如图, 有一个水平放置的透明无盖的正方体容器, 容器高 8 cm, 将一个球放在容器口, 再向容器内注水, 当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm, 如果不计容器的厚度, 则球的体积为 ( )

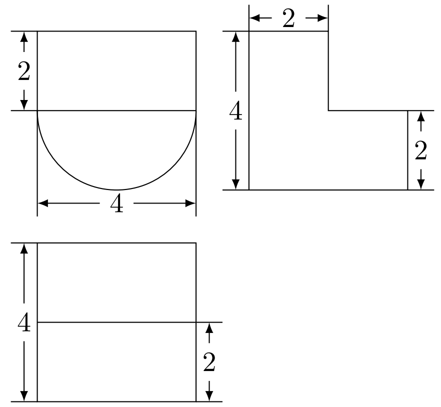


(A) $\dfrac{500\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (B) $\dfrac{866\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (C) $\dfrac{1372\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (D) $\dfrac{2048\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_{m-1}=-2$, $S_m=0$, $S_{m+1}=3$, 则 $m=$ ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何的体积为 ( )



(A) $16+8\pi$ (B) $8+8\pi$ (C) $16+16\pi$ (D) $8+16\pi$

9. 设 m 为正整数, $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a, $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b, 若 $13a=7b$, 则 $m=$ ( )

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$, 过点 F 的直线交 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$, 则 E 的方程为( )

(A) $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$, 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,0]$ (B) $(-\infty,1]$ (C) $[-2,1]$ (D) $[-2,0]$

12. 设 $\triangle A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n, b_n, c_n, $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n, $n=1$, 2, 3, $\cdots$, 若 $b_1>c_1$, $b_1+c_1=2a_1$, $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$, $c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$, 则 ( )

(A) $\{S_n\}$ 为递减数列

(B) $\{S_n\}$ 为递增数列

(C) $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列, $\{S_{2n}\}$ 为递减数列

(D) $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列, $\{S_{2n}\}$ 为递增数列

二、填空题

13. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\,\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$______.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=$______.

15. 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$______.

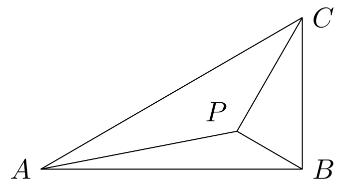
16. 若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值是______.

三、解答题

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC=90^\circ$.

(1) 若 $PB=\dfrac{1}{2}$, 求 PA;

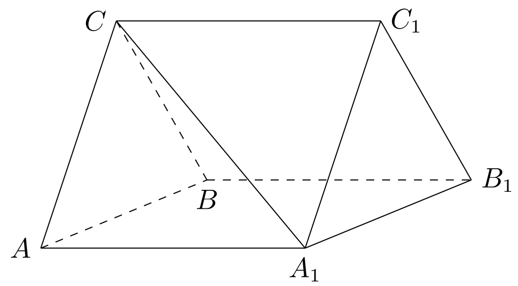
(2) 若 $\angle APB=150^\circ$, 求 $\tan\angle PBA$.



18. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$.

(1) 证明: $AB\perp A_1C$;

(2) 若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B, $AB=CB$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.

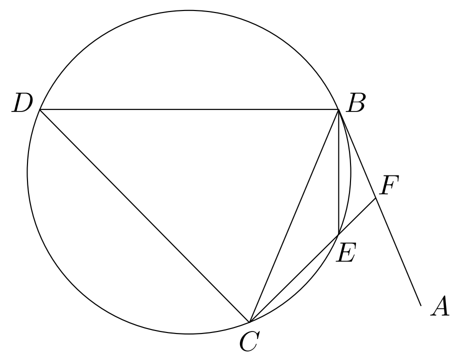


19. 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取 4 件作检验, 这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$, 再从这批产品中任取 4 件作检验, 若都为优质品, 则这批产品通过检验; 如果 $n=4$, 再从这批产品中任取 1 件作检验, 若为优质品, 则这批产品通过检验; 其他情况下, 这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%, 即取出的产品是优质品的概率都为 $\dfrac{1}{2}$, 且各件产品是否为优质品相互独立.
(1) 求这批产品通过检验的概率;
(2) 已知每件产品检验费用为 100 元, 凡抽取的每件产品都需要检验, 对这批产品作质量检验所需的费用记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望.

20. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.
(1) 求 C 的方程;
(2) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

21. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x(cx+d)$, 若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.
(1) 求 a, b, c, d 的值;
(2) 若 $x\geqslant -2$ 时, $f(x)\leqslant kg(x)$, 求 k 的取值范围.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B, 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E, DB 垂直 BE 交圆于 D.
(1) 证明: $DB=DC$;
(2) 设圆的半径为 1, $BC=\sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F, 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;
(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.
(1) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;
(2) 设 $a>-1$, 且当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\mid x=n^2,n\in A\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,4\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{9,16\}$　(D) $\{1,2\}$

2. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $-1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 从 1, 2, 3, 4 中任取 2 个不同的数, 则取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 （ ）

(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$　(B) $y=\pm\dfrac{1}{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　(D) $y=\pm x$

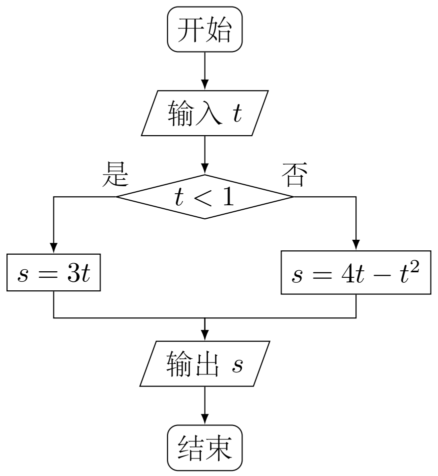
5. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x<3^x$; 命题 q: $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^3=1-x^2$, 则下列命题中为真命题的是 （ ）

(A) $p\wedge q$　(B) $\neg p\wedge q$　(C) $p\wedge\neg q$　(D) $\neg p\wedge\neg q$

6. 设首项为 1, 公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 （ ）

(A) $S_n=2a_n-1$ (B) $S_n=3a_n-2$ (C) $S_n=4-3a_n$ (D) $S_n=3-2a_n$

7. 执行下面的程序框图, 若输入的 $t\in[-1,3]$, 则输出的 s 属于 （ ）

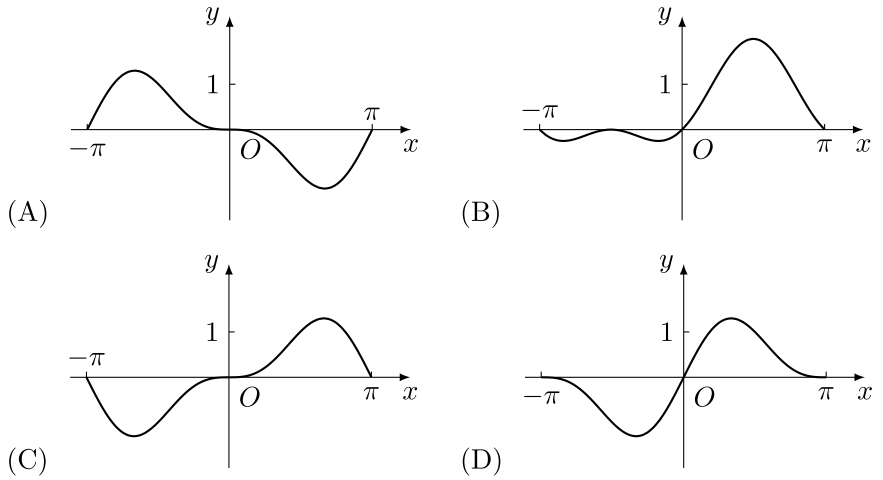


(A) $[-3,4]$　(B) $[-5,2]$　(C) $[-4,3]$　(D) $[-2,5]$

8. O 为坐标原点, F 为抛物线 $C:y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF|=4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 （ ）

(A) 2　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) 4

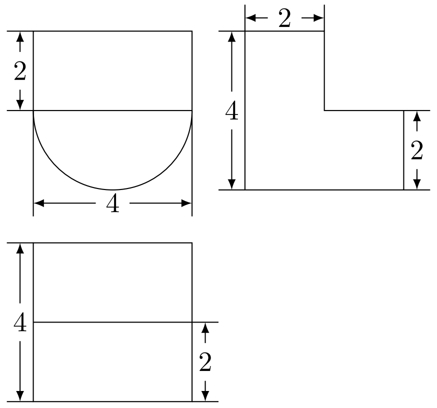
9. 函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （ ）



10. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, $23\cos^2A+\cos 2A=0$, $a=7$, $c=6$, 则 $b=$ （ ）

(A) 10　(B) 9　(C) 8　(D) 5

11. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何的体积为 （ ）



(A) $16+8\pi$　(B) $8+8\pi$　(C) $16+16\pi$　(D) $8+16\pi$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$, 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$　(B) $(-\infty,1]$　(C) $[-2,1]$　(D) $[-2,0]$

二、填空题

13. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$______.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\ -1\leqslant x-y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为______.

15. 已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点, $AH:HB=1:2$, $AB\perp$ 平面 α, H 为垂足, 平面 α 截球 O 所得截面的面积为 π, 则球 O 的表面积为______.

16. 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0$, $S_5=-5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 为了比较两种治疗失眠症的药 (分别称为 A 药, B 药) 的疗效, 随机地选取 20 位患者服用 A 药, 20 位患者服用 B 药, 这 40 位患者在服用一段时间后, 记录他们日平均增加的睡眠时间 (单位: h). 试验的观测结果如下:

服用 A 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

0.6	1.2	2.7	1.5	2.8	1.8	2.2	2.3	3.2	3.5
2.5	2.6	1.2	2.7	1.5	2.9	3.0	3.1	2.3	2.4

服用 B 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

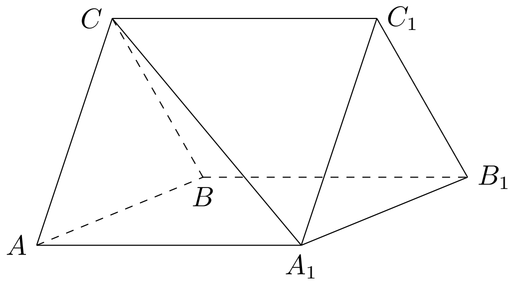
3.2	1.7	1.9	0.8	0.9	2.4	1.2	2.6	1.3	1.4
1.6	0.5	1.8	0.6	2.1	1.1	2.5	1.2	2.7	0.5

(1) 分别计算两组数据的平均数, 从计算结果看, 哪种药的疗效更好?

(2) 根据两组数据完成下面茎叶图, 从茎叶图看, 哪种药的疗效更好?

A 药		B 药
	0.	
	1.	
	2.	
	3.	

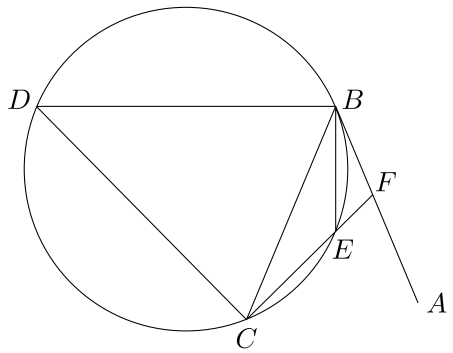
19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$.
(1) 证明: $AB\perp A_1C$;
(2) 若 $AB=CB=2$, $A_1C=\sqrt{6}$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积. .



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(ax+b)-x^2-4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并求 $f(x)$ 的极大值.

21. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.
(1) 求 C 的方程;
(2) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B, 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E, DB 垂直 BE 交圆于 D.
(1) 证明: $DB=DC$;
(2) 设圆的半径为 1, $BC=\sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F, 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;
(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta<2\pi$).

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.
(1) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;
(2) 设 $a>-1$, 且当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\mid(x-1)^2<4,x\in\mathbf{R}\right\}$, $N=\{-1,0,1,2,3\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{0,1,2\}$　(B) $\{-1,0,1,2\}$　(C) $\{-1,0,2,3\}$　(D) $\{0,1,2,3\}$

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $-1+\mathrm{i}$　(B) $-1-\mathrm{i}$　(C) $1+\mathrm{i}$　(D) $1-\mathrm{i}$

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2+10a_1$, $a_5=9$, 则 $a_1=$（　）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{9}$　(D) $-\frac{1}{9}$

4. 已知 m, n 为异面直线, $m\perp$ 平面 α, $n\perp$ 平面 β. 直线 l 满足 $l\perp m$, $l\perp n$, $l\not\subset\alpha$, $l\not\subset\beta$, 则 （　）

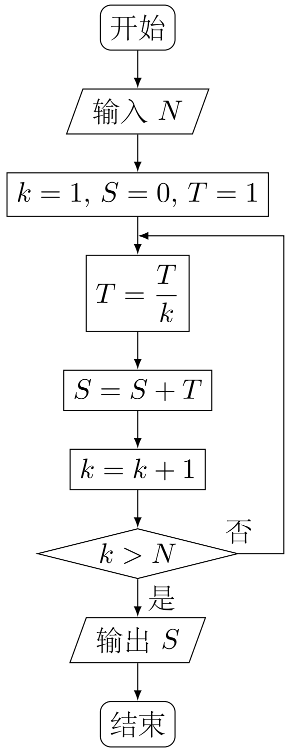
(A) $\alpha/\!/\beta$ 且 $l/\!/\alpha$　(B) $\alpha\perp\beta$ 且 $l\perp\beta$

(C) α 与 β 相交, 且交线垂直于 l　(D) α 与 β 相交, 且交线平行于 l

5. 已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5, 则 $a=$ （　）

(A) -4　(B) -3　(C) -2　(D) -1

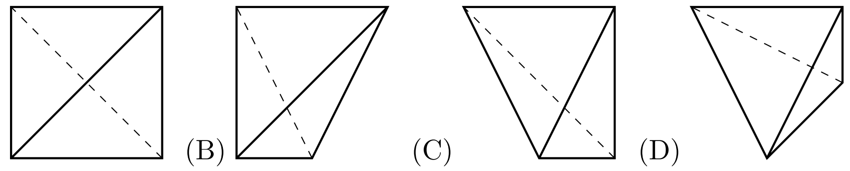
6. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=10$, 那么输出的 $S=$ （　）



(A) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$　(B) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$

(C) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}$　(D) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}$

7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 （　）



(A)　(B)　(C)　(D)

8. 设 $a=\log_3 6$, $b=\log_5 10$, $c=\log_7 14$, 则 （　）

(A) $c>b>a$　(B) $b>c>a$　(C) $a>c>b$　(D) $a>b>c$

9. 已知 $a>0$, x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x+y\leqslant 3\\ y\geqslant a(x-3)\end{cases}$, 若 $z=2x+y$ 的最小值为 1, 则 $a=$ （　）

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是 （　）

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

11. 设抛物线 $C:y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 点 M 在 C 上, $|MF|=5$. 若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　(B) $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

(C) $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　(D) $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

12. 已知点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, 直线 $y=ax+b\ (a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 则 b 的取值范围是 （　）

(A) $(0,1)$　(B) $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

(C) $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}\right]$　(D) $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

二、填空题

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$______.

14. 从 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 中任意取出两个不同的数, 若取出的两数之和等于 5 的概率为 $\frac{1}{14}$, 则 $n=$______.

15. 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, 则 $\sin\theta+\cos\theta=$______.

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_{10}=0$, $S_{15}=25$, 则 nS_n 的最小值为______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=b\cos C+c\sin B$.

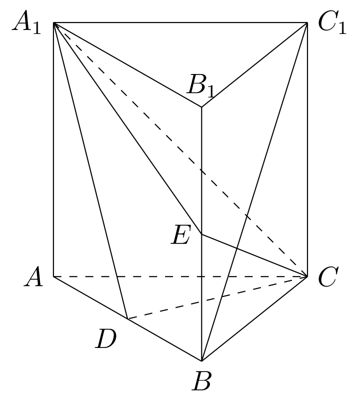
(1) 求 B;

(2) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

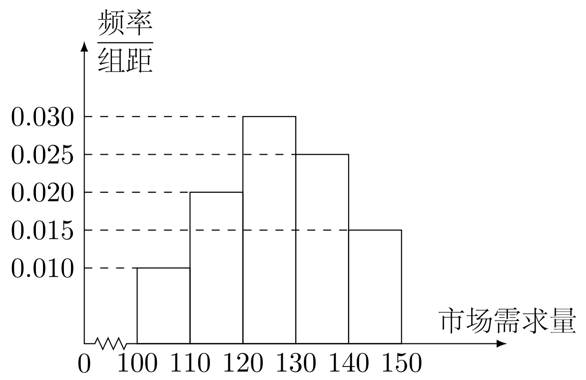
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点, $AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

(1) 证明: $BC_1/\!/$ 平面 A_1CD;

(2) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

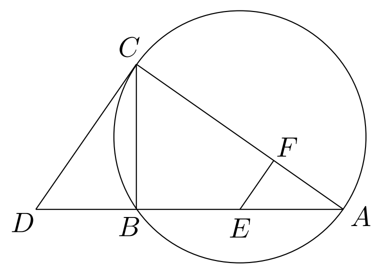


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率;
(3) 在直方图的需求量分组中, 以各组的区间中点值代表该组的各个值, 需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率 (例如: 若需求量 $X \in [100,110)$, 则取 $X = 105$, 且 $X = 105$ 的概率等于需求量落入 $[100,110)$ 的频率), 求 T 的数学期望.

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 M 的方程;
(2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x+m)$.
(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $m \leqslant 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB = BE = EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$, M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$, 证明:
(1) $ab + bc + ca \leqslant \dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geqslant 1$.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$, $N=\{-3,-2,-1,0,1\}$, 则 $M\cap N=$(　)

(A) $\{-2,-1,0,1\}$　　(B) $\{-3,-2,-1,0\}$

(C) $\{-2,-1,0\}$　　(D) $\{-3,-2,-1\}$

2. $\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=$　　(　)

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 1

3. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0 \\ x+y-1\geqslant 0 \\ x\leqslant 3\end{cases}$，则 $z=2x-3y$ 的最小值是(　)

(A) -7　　(B) -6　　(C) -5　　(D) -3

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b=2$, $B=\dfrac{\pi}{6}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为　　(　)

(A) $2\sqrt{3}+2$　　(B) $\sqrt{3}+1$　　(C) $2\sqrt{3}-2$　　(D) $\sqrt{3}-1$

5. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, P 是 C 上的点, $PF_2\perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为　　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$　　(　)

(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

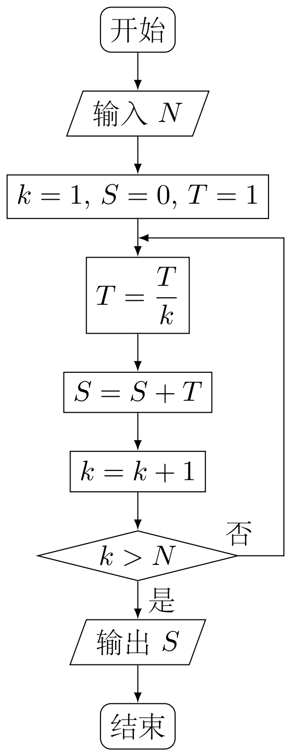
7. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=4$, 那么输出的 $S=$　　(　)

(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

(B) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$

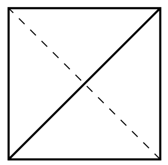
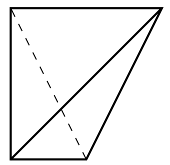
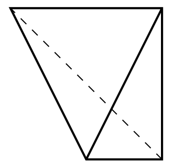
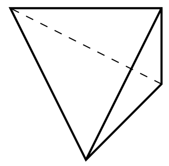
(D) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}+\dfrac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$



8. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 2$, $c=\log_2 3$, 则　　(　)

(A) $a>c>b$　　(B) $b>c>a$　　(C) $c>b>a$　　(D) $c>a>b$

9. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为　　(　)

(A) 　(B) 　(C) 　(D) 

10. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 l 过 F 且与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF|=3|BF|$, 则 l 的方程为　　(　)

(A) $y=x-1$ 或 $y=-x+1$

(B) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

(C) $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$

(D) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

11. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是　　(　)

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

12. 若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立, 则 a 的取值范围是　　(　)

(A) $(-\infty,+\infty)$　　(B) $(-2,+\infty)$　　(C) $(0,+\infty)$　　(D) $(-1,+\infty)$

二、填空题

13. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任意取出两个不同的数, 其和为 5 的概率是______.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$______.

15. 已知正四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 底面边长为 $\sqrt{3}$, 则以 O 为球心, OA 为半径的球的表面积为______.

16. 函数 $y=\cos(2x+\varphi)\ (-\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合, 则 $\varphi=$______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1=25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

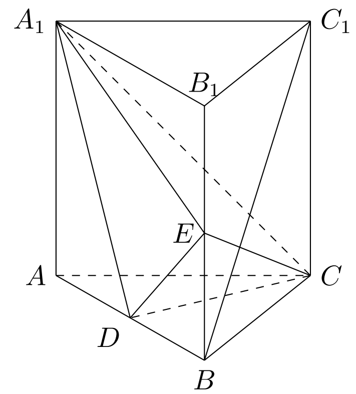
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

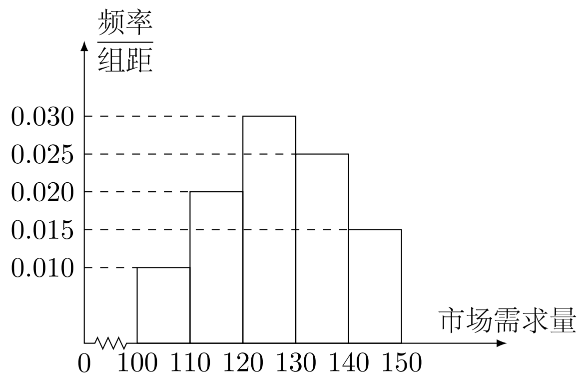
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点.

(1) 证明: $BC_1\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 设 $AA_1=AC=CB=2$, $AB=2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

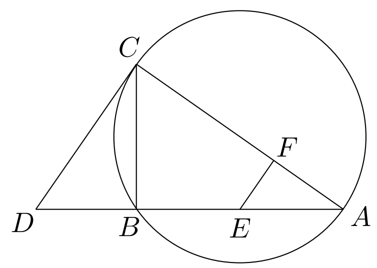


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$, 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.
(1) 求圆心 P 的轨迹方程;
(2) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求圆 P 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值;
(2) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时, 求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC\cdot AE=DC\cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB=BE=EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t=\alpha$ 与 $t=2\alpha$ $(0<\alpha<2\pi)$, M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:
(1) $ab+bc+ca\leqslant\dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geqslant 1$.

2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{10\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$, 则 z 的共轭复数为 (　)

(A) $-1+3\mathrm{i}$　(B) $-1-3\mathrm{i}$　(C) $1+3\mathrm{i}$　(D) $1-3\mathrm{i}$

2. 设集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$, $N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $M\cap N=$(　)

(A) $(0,4]$　(B) $[0,4)$　(C) $[-1,0)$　(D) $(-1,0]$

3. 设 $a=\sin 33^\circ$, $b=\cos 55^\circ$, $c=\tan 35^\circ$, 则 (　)

(A) $a>b>c$　(B) $b>c>a$　(C) $c>b>a$　(D) $c>a>b$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|=1$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ (　)

(A) 2　(B) $\sqrt{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 (　)

(A) 60 种　(B) 70 种　(C) 75 种　(D) 150 种

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 (　)

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　(C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 曲线 $y=x\mathrm{e}^{x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率等于 (　)

(A) $2\mathrm{e}$　(B) e　(C) 2　(D) 1

8. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 (　)

(A) $\dfrac{81\pi}{4}$　(B) 16π　(C) 9π　(D) $\dfrac{27\pi}{4}$

9. 已知双曲线 C 的离心率为 2, 焦点为 F_1、F_2, 点 A 在 C 上, 若 $|F_1A|=2|F_2A|$, 则 $\cos\angle AF_2F_1=$ (　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=2$, $a_5=5$, 则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 (　)

(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

11. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°, $AB\subset\alpha$, $AB\perp l$, A 为垂足, $CD\subset\beta$, $C\in l$, $\angle ACD=135^\circ$, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 (　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

12. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称, 则 $y=f(x)$ 的反函数是 (　)

(A) $y=g(x)$　(B) $y=g(-x)$　(C) $y=-g(x)$　(D) $y=-g(-x)$

二、填空题

13. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为______. (用数字作答)

14. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 3\\ x-2y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为______.

15. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于______.

16. 若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $3a\cos C=2c\cos A$, $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 求 B.

18. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=10$, a_2 为整数, 且 $S_n\leqslant S_4$.

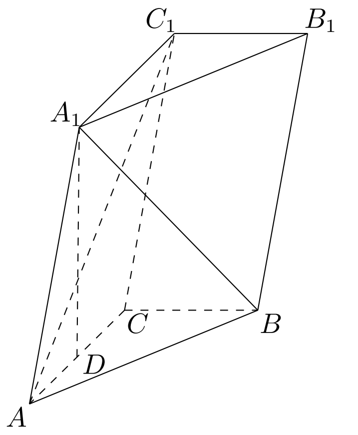
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=1$, $AC=CC_1=2$.

(1) 证明: $AC_1\perp A_1B$;

(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 A_1-AB-C 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.

(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;

(2) X 表示同一工作日需使用设备的人数, 求 X 的数学期望.

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px\ (p > 0)$ 的焦点为 F, 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P, 与 C 的交点为 Q, 且 $|QF| = \dfrac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点, 且 A、M、B、N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

22. 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{ax}{x+a}\ (a > 1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$, 证明: $\dfrac{2}{n+2} < a_n \leqslant \dfrac{3}{n+2}$.

2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{1,2,4,6,8\}$, $N=\{1,2,3,5,6,7\}$, 则 $M\cap N$ 中元素的个数为 ( )
(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 7

2. 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$, 则 $\cos\alpha=$ ( )
(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $-\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{4}{5}$

3. 不等式组 $\begin{cases} x(x+2)>0 \\ |x|<1 \end{cases}$ 的解集为 ( )
(A) $\{x\mid -2<x<-1\}$　(B) $\{x\mid -1<x<0\}$
(C) $\{x\mid 0<x<1\}$　(D) $\{x\mid x>1\}$

4. 已知正四面体 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, 则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 ( )
(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 函数 $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)\ \ (x>-1)$ 的反函数是 ( )
(A) $y=(1-\mathrm{e}^x)^3\ \ (x>-1)$　(B) $y=(\mathrm{e}^x-1)^3\ \ (x>-1)$
(C) $y=(1-\mathrm{e}^x)^3\ \ (x\in\mathbf{R})$　(D) $y=(\mathrm{e}^x-1)^3\ \ (x\in\mathbf{R})$

6. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 其夹角为 60°, 则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )
(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

7. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ( )
(A) 60 种　(B) 70 种　(C) 75 种　(D) 150 种

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则 $S_6=$ ( )
(A) 31　(B) 32　(C) 63　(D) 64

9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ( )
(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　(C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

10. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ( )
(A) $\dfrac{81\pi}{4}$　(B) 16π　(C) 9π　(D) $\dfrac{27\pi}{4}$

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 ( )
(A) 2　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{2}$

12. 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(1)=1$, 则 $f(8)+f(9)=$ ( )
(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 1

二、填空题

13. $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为______. (用数字作答)

14. 函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值为______.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+2y\leqslant 3 \\ x-2y\leqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为______.

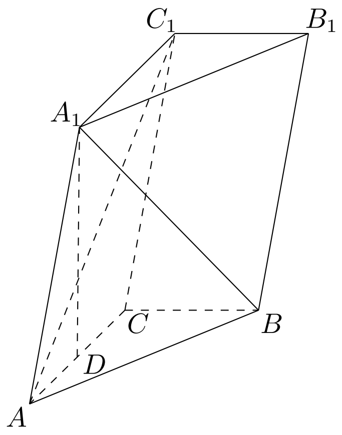
16. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于______.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.
(1) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $3a\cos C=2c\cos A$, $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 求 B.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=1$, $AC=CC_1=2$.
(1) 证明: $AC_1\perp A_1B$;
(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 A_1-AB-C 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.

(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;

(2) 实验室计划购买 k 台设备供甲、乙、丙、丁使用, 若要求"同一工作日需使用设备的人数大于 k"的概率小于 0.1, 求 k 的最小值.

21. 函数 $f(x)=ax^3+3x^2+3x\ (a\neq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P, 与 C 的交点为 Q, 且 $|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点, 且 A、M、B、N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \geqslant 0\}$, $B = \{x \mid -2 \leqslant x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ( )

(A) $[-2, -1]$　(B) $[-1, 2)$　(C) $[-1, 1]$　(D) $[1, 2)$

2. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} =$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

3. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x)\,g(x)$ 是偶函数　(B) $|f(x)|\,g(x)$ 是奇函数

(C) $|g(x)|\,f(x)$ 是奇函数　(D) $|f(x)\,g(x)|$ 是奇函数

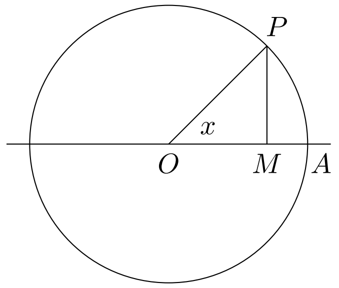
4. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - my^2 = 3m\ (m > 0)$ 的一个焦点, 则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 ( )

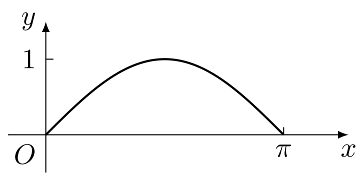
(A) $\sqrt{3}$　(B) 3　(C) $\sqrt{3}m$　(D) $3m$

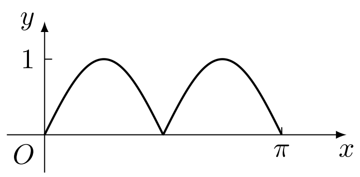
5. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ( )

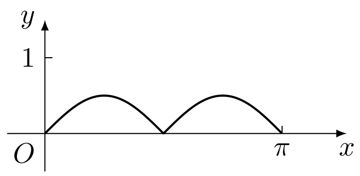
(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{5}{8}$　(D) $\dfrac{7}{8}$

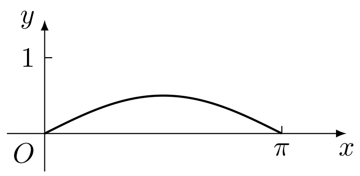
6. 如图, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA, 终边为射线 OP, 过点 P 作直线 OA 的垂线, 垂足为 M, 将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图象大致为 ( )



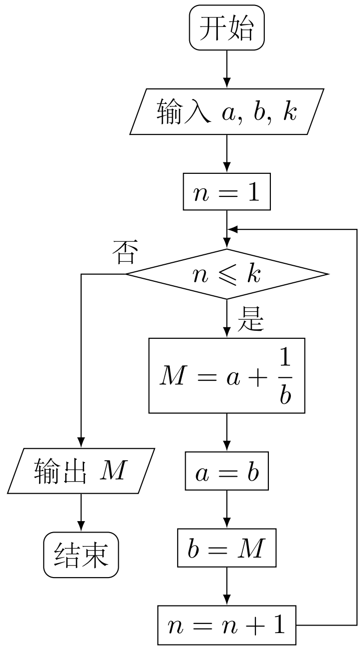
(A)


(B)


(C)


(D)


7. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M =$( )



(A) $\dfrac{20}{3}$　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) $\dfrac{16}{5}$　(D) $\dfrac{15}{8}$

8. 设 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan\alpha = \dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$, 则 ( )

(A) $3\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$　(B) $3\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$　(C) $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$　(D) $2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

9. 不等式组 $\begin{cases} x + y \geqslant 1 \\ x - 2y \leqslant 4 \end{cases}$ 的解集记为 D. 有下面四个命题:

p_1: $\forall (x, y) \in D$, $x + 2y \geqslant -2$;　p_2: $\exists (x, y) \in D$, $x + 2y \geqslant 2$;

p_3: $\forall (x, y) \in D$, $x + 2y \leqslant 3$;　p_4: $\exists (x, y) \in D$, $x + 2y \leqslant -1$.

其中真命题是 ( )

(A) p_2, p_3　(B) p_1, p_2　(C) p_1, p_4　(D) p_1, p_3

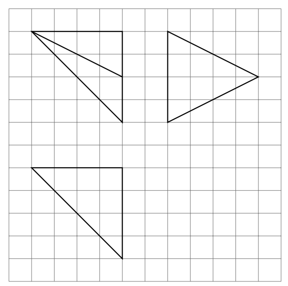
10. 已知抛物线 C: $y^2 = 8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与 C 的一个交点, 若 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$, 则 $|QF| =$ ( )

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

11. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $(2, +\infty)$　(B) $(1, +\infty)$　(C) $(-\infty, -2)$　(D) $(-\infty, -1)$

12. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ( )



(A) $6\sqrt{2}$　(B) 6　(C) $4\sqrt{2}$　(D) 4

二、填空题

13. $(x - y)(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为______. (用数字填写答案)

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为______.

15. 已知 A, B, C 是圆 O 上的三点, 若 $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为______.

16. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为______.

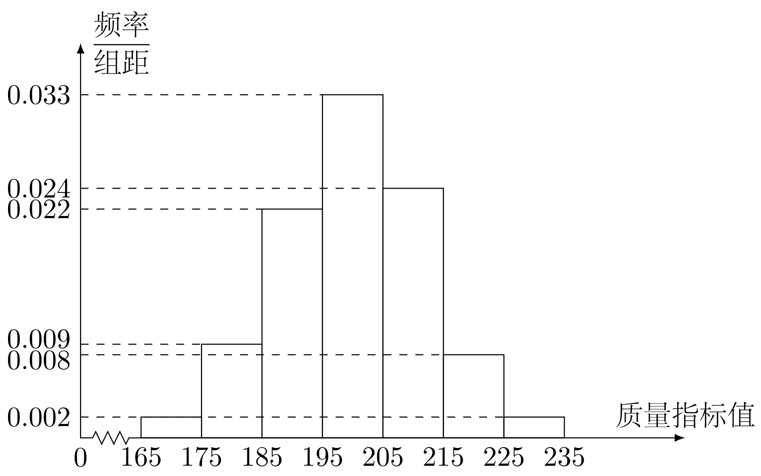
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1 = 1$, $a_n \neq 0$, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 其中 λ 为常数.

(1) 证明: $a_{n+2} - a_n = \lambda$;

(2) 是否存在 λ, 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列? 并说明理由.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2.

① 利用该正态分布, 求 $P(187.8<Z<212.2)$;

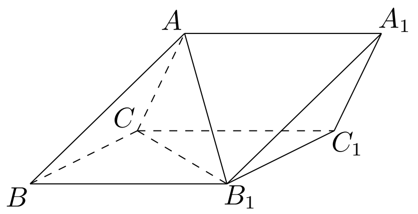
② 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品件数, 利用①的结果, 求 EX.

附: $\sqrt{150}\approx 12.2$, 若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB\perp B_1C$.

(1) 证明: $AC=AB_1$;

(2) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $AB=BC$, 求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.



20. 已知点 $A(0,-2)$, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

21. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$.

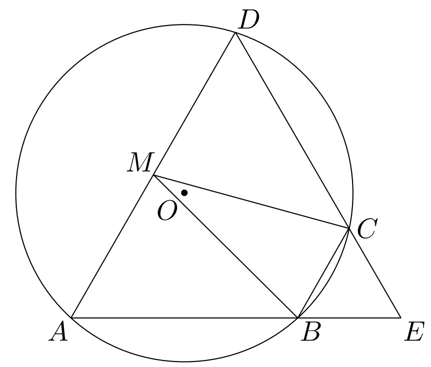
(1) 求 a, b;

(2) 证明: $f(x)>1$.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}$, $N=\{x\mid -2<x<1\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $(-2,1)$　(B) $(-1,1)$　(C) $(1,3)$　(D) $(-2,3)$

2. 若 $\tan\alpha>0$, 则 ( )

(A) $\sin 2\alpha>0$　(B) $\cos\alpha>0$　(C) $\sin\alpha>0$　(D) $\cos 2\alpha>0$

3. 设 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\dfrac12$　(B) $\dfrac{\sqrt2}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt3}{2}$　(D) 2

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1\ (a>0)$ 的离心率为 2, 则 $a=$ ( )

(A) 2　(B) $\dfrac{\sqrt6}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt5}{2}$　(D) 1

5. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x)|g(x)|$ 是奇函数　(B) $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)g(x)$ 是偶函数　(D) $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

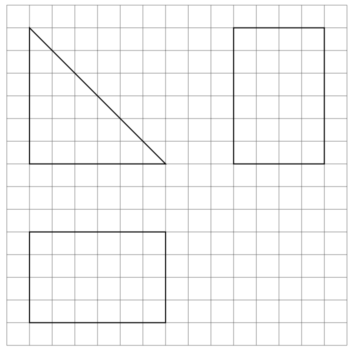
6. 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$ ( )

(A) $\overrightarrow{BC}$　(B) $\dfrac12\overrightarrow{AD}$　(C) $\overrightarrow{AD}$　(D) $\dfrac12\overrightarrow{BC}$

7. 在函数① $y=\cos|2x|$, ② $y=|\cos x|$, ③ $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, ④ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为 ( )

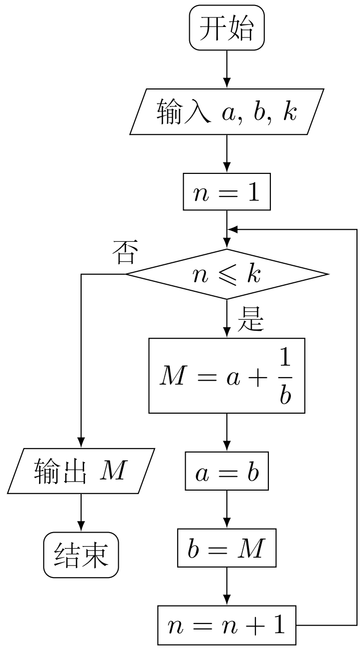
(A) ②④　(B) ①③④　(C) ①②③　(D) ①③

8. 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是 ( )



(A) 三棱锥　(B) 三棱柱　(C) 四棱锥　(D) 四棱柱

9. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M=$ ( )



(A) $\dfrac{20}{3}$　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) $\dfrac{16}{5}$　(D) $\dfrac{15}{8}$

10. 已知抛物线 $C: y^2=x$ 的焦点为 F, $A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点, $|AF|=\dfrac54x_0$, 则 $x_0=$ ( )

(A) 4　(B) 2　(C) 1　(D) 8

11. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a\\ x-y\leqslant -1\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7, 则 $a=$ ( )

(A) -5　(B) 3　(C) -5 或 3　(D) 5 或 -3

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $(-\infty,-2)$　(B) $(1,+\infty)$　(C) $(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)$

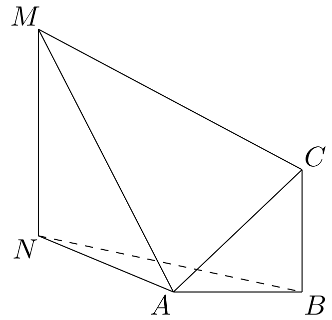
二、填空题

13. 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为______.

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & x<1\\ x^{\frac13}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是______.

16. 如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN=60^\circ$, C 点的仰角 $\angle CAB=45^\circ$ 以及 $\angle MAC=75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA=60^\circ$. 已知山高 $BC=100$ m, 则山高 $MN=$______m.



三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

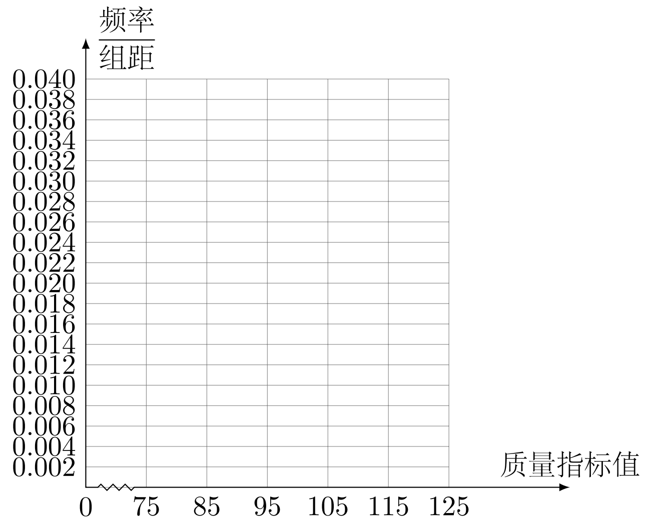
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频数分布表:

质量指标值分组	[75, 85)	[85, 95)	[95, 105)	[105, 115)	[115, 125)
频数	6	26	38	22	8

(1) 作出这些数据的频率分布直方图;



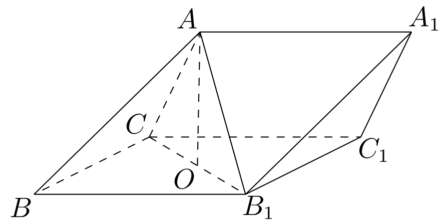
(2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定?

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, B_1C 的中点为 O, 且 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(1) 证明: $B_1C\perp AB$;

(2) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $BC=1$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



20. 已知点 $P(2,2)$, 圆 $C:x^2+y^2-8y=0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M, O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx\,(a\neq 1)$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0.

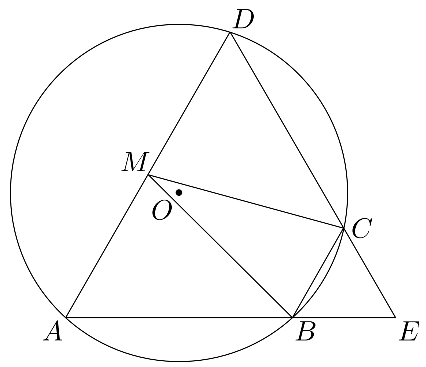
(1) 求 b;

(2) 若存在 $x_0\geqslant 1$ 使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{0,1,2\}$, $N=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{1\}$　(B) $\{2\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{1,2\}$

2. 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, $z_1=2+\mathrm{i}$, 则 $z_1z_2=$( )

(A) -5　(B) 5　(C) $-4+\mathrm{i}$　(D) $-4-\mathrm{i}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 5

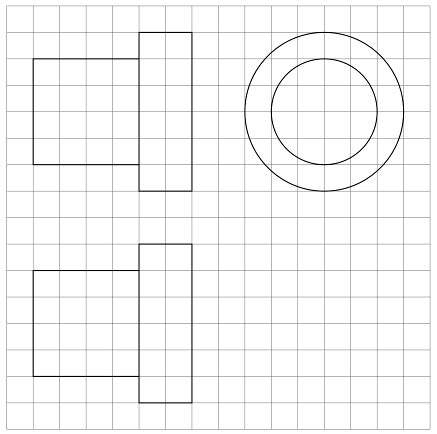
4. 钝角三角形 ABC 的面积是 $\dfrac{1}{2}$, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 $AC=$ （ ）

(A) 5　(B) $\sqrt{5}$　(C) 2　(D) 1

5. 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75, 连续两天为优良的概率是 0.6, 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 （ ）

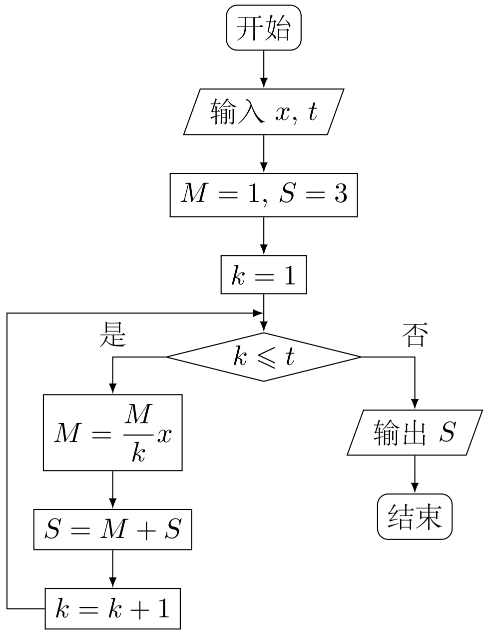
(A) 0.8　(B) 0.75　(C) 0.6　(D) 0.45

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 （ ）



(A) $\dfrac{17}{27}$　(B) $\dfrac{5}{9}$　(C) $\dfrac{10}{27}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

8. 设曲线 $y=ax-\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$, 则 $a=$( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-7\leqslant 0\\x-3y+1\leqslant 0\\3x-y-5\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为( )

(A) 10　(B) 8　(C) 3　(D) 2

10. 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$　(C) $\dfrac{63}{32}$　(D) $\dfrac{9}{4}$

11. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC=CA=CC_1$, 则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$, 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$　(B) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

二、填空题

13. $(x+a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数为 15, 则 $a=$______. (用数字填写答案)

14. 函数 $f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为______.

15. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, $f(2)=0$, 若 $f(x-1)>0$, 则 x 的取值范围是______.

16. 设点 $M(x_0,1)$, 若在圆 $O: x^2+y^2=1$ 上存在点 N, 使得 $\angle OMN=45^\circ$, 则 x_0 的取值范围是______.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+1$.

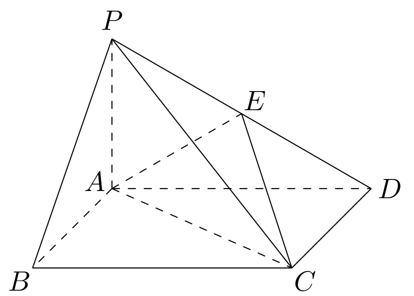
(1) 证明 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.

(1) 证明: $PB\mathbin{/\!/}$ 平面 AEC;

(2) 设二面角 $D-AE-C$ 为 60°, $AP=1$, $AD=\sqrt{3}$, 求三棱锥 $E-ACD$ 的体积.



19. 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入 y (单位: 千元) 的数据如下表:

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

(1) 求 y 关于 t 的线性回归方程;

(2) 利用 (1) 中的回归方程, 分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况, 并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.

附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\widehat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2},\ \widehat{a}=\overline{y}-\widehat{b}\overline{t}.$$

20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 C 的离心率;

(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN|=5|F_1N|$, 求 a, b.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

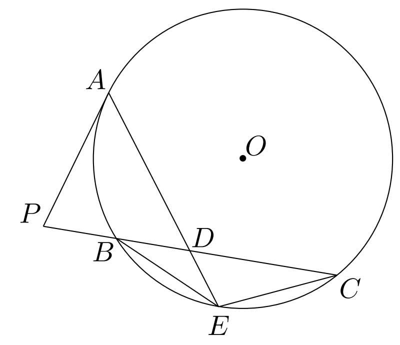
(2) 设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$, 当 $x>0$ 时, $g(x)>0$, 求 b 的最大值;

(3) 已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值 (精确到 0.001).

22. 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA 是切线, A 为切点, 割线 PBC 与 $\odot O$ 相交于点 B, C, $PC=2PA$, D 为 PC 的中点, AD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E. 证明:

(1) $BE=EC$;

(2) $AD\cdot DE=2PB^2$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(1) 求 C 的参数方程;

(2) 设点 D 在 C 上, C 在 D 处的切线与直线 $l:y=\sqrt{3}x+2$ 垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点 D 的坐标.

24. 设函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\ \ (a>0)$.

(1) 证明: $f(x)\geqslant 2$;

(2) 若 $f(3)<5$, 求 a 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-2,0,2\}$, $B=\{x\mid x^2-x-2=0\}$, 则 $A\cap B=$　　（　）

(A) $\varnothing$　　(B) $\{2\}$　　(C) $\{0\}$　　(D) $\{-2\}$

2. $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$　　（　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $-1+2\mathrm{i}$　　(C) $1-2\mathrm{i}$　　(D) $-1-2\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在, 若 p: $f'(x_0)=0$; q: $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则　　（　）

(A) p 是 q 的充分必要条件

(B) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

(C) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

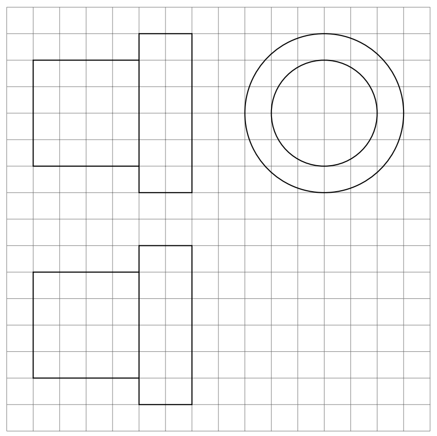
4. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　　（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 5

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 2, 若 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$　　（　）

(A) $n(n+1)$　　(B) $n(n-1)$　　(C) $\dfrac{n(n+1)}{2}$　　(D) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为　　（　）

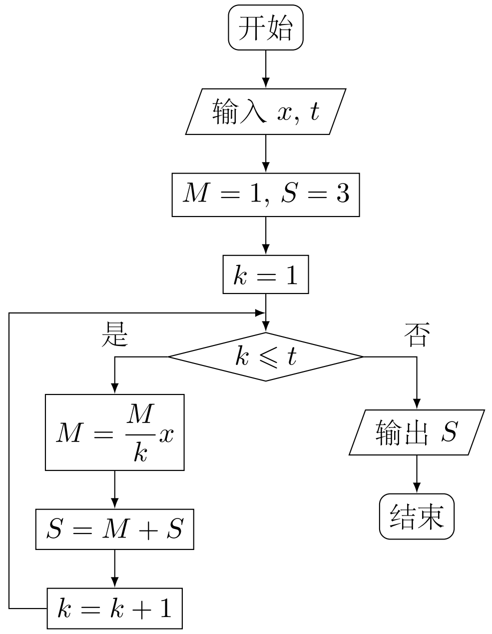


(A) $\dfrac{17}{27}$　　(B) $\dfrac{5}{9}$　　(C) $\dfrac{10}{27}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, 则三棱锥 $A-B_1DC_1$ 的体积为　　（　）

(A) 3　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2, 则输出的 $S=$　　（　）



(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x-3y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值为（　）

(A) 8　　(B) 7　　(C) 2　　(D) 1

10. 设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB|=$　　（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$　　(B) 6　　(C) 12　　(D) $7\sqrt{3}$

11. 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增, 则 k 的取值范围是（　）

(A) $(-\infty,-2]$　　(B) $(-\infty,-1]$　　(C) $[2,+\infty)$　　(D) $[1,+\infty)$

12. 设点 $M(x_0,1)$, 若在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N, 使得 $\angle OMN=45^\circ$, 则 x_0 的取值范围是　　（　）

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　(C) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　(D) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

二、填空题

13. 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 则他们选择相同颜色运动服的概率为______.

14. 函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为______.

15. 偶函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $f(3)=3$, 则 $f(-1)=$______.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$______.

三、解答题

17. 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补, $AB=1$, $BC=3$, $CD=DA=2$.

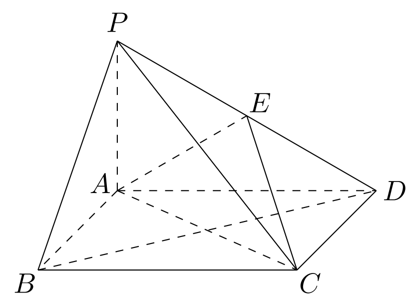
(1) 求 C 和 BD;

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.

(1) 证明: $PB\parallel$ 平面 AEC;

(2) 设 $AP=1$, $AD=\sqrt{3}$, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 求 A 到平面 PBC 的距离.



19. 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况, 随机访问了 50 位市民, 根据这 50 位市民对这两部门的评分 (评分越高表明市民的评价越高), 绘制茎叶图如下:

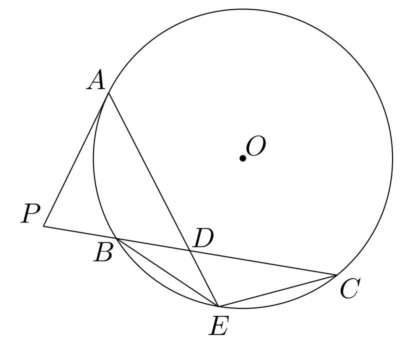
甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 7 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

(1) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分的中位数;
(2) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率;
(3) 根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.
(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 C 的离心率;
(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN|=5|F_1N|$, 求 a, b.

21. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2.
(1) 求 a;
(2) 证明: 当 $k<1$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

22. 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA 是切线, A 为切点, 割线 PBC 与 $\odot O$ 相交于点 B, C, $PC=2PA$, D 为 PC 的中点, AD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E. 证明:
(1) $BE=EC$;
(2) $AD\cdot DE=2PB^2$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 求 C 的参数方程;
(2) 设点 D 在 C 上, C 在 D 处的切线与直线 $l: y=\sqrt{3}x+2$ 垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点 D 的坐标.

24. 设函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\ \ (a>0)$.
(1) 证明: $f(x)\geqslant 2$;
(2) 若 $f(3)<5$, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （　）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

2. $\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=$ （　）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

3. 设命题 p: $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2>2^n$, 则 $\neg p$ 为 （　）

(A) $\forall n\in\mathbf{N}$, $n^2>2^n$　(B) $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2\leqslant 2^n$

(C) $\forall n\in\mathbf{N}$, $n^2\leqslant 2^n$　(D) $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2=2^n$

4. 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为 （　）

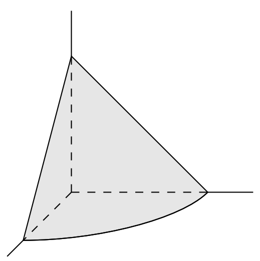
(A) 0.648　(B) 0.432　(C) 0.36　(D) 0.312

5. 已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的两个焦点. 若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$, 则 y_0 的取值范围是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

(C) $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题:“今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何? ”其意思为:“在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? ”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 （　）



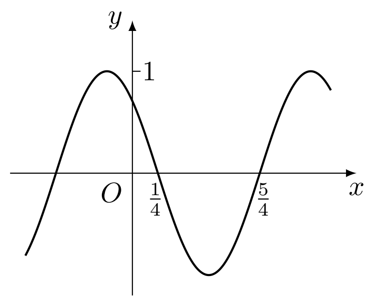
(A) 14 斛　(B) 22 斛　(C) 36 斛　(D) 66 斛

7. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$, 则 （　）

(A) $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　(B) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　(D) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

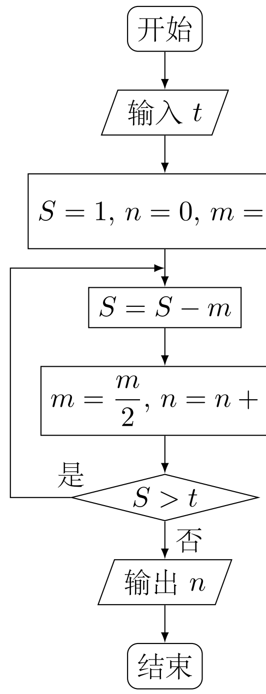
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 （　）



(A) $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(B) $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(D) $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$ （　）

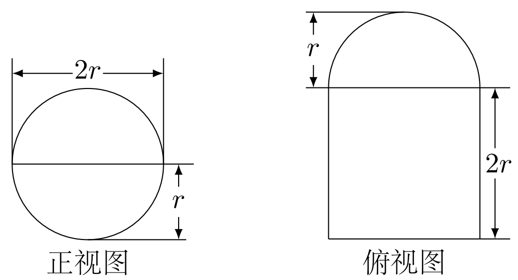


(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

10. $\left(x^2+x+y\right)^5$ 的展开式中, x^5y^2 的系数为 （　）

(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 60

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

12. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$, 其中 $a<1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　(B) $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　(C) $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　(D) $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数, 则 $a=$______.

14. 一个圆经过椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 则该圆的标准方程为______.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为______.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$, $BC=2$, 则 AB 的取值范围是______.

三、解答题

17. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n>0$, $a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

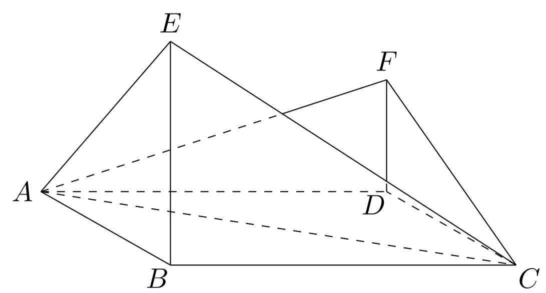
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

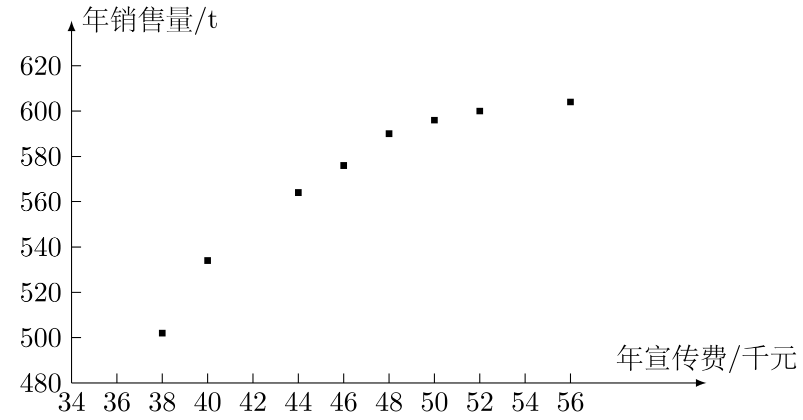
18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC=120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$, $DF\perp$ 平面 $ABCD$, $BE=2DF$, $AE\perp EC$.

(1) 证明: 平面 $AEC\perp$ 平面 AFC;

(2) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6

$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$
1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$, $\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

① 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2}$, $\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y=kx+a$ $(a>0)$ 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(2) y 轴上是否存在点 P, 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM=\angle OPN$? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$, $g(x)=-\ln x$.

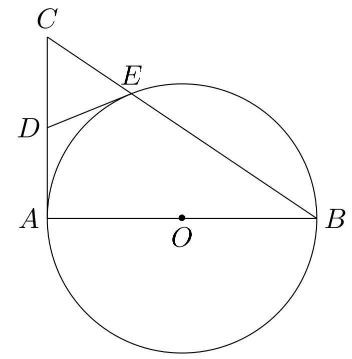
(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(2) 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x=-2$, 圆 $C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$, $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{6,8,10,12,14\}$, 则集合 $A\cap B$ 中的元素个数为 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

2. 已知点 $A(0,1)$, $B(3,2)$, 向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC}=$ ( )

(A) $(-7,-4)$ (B) $(7,4)$ (C) $(-1,4)$ (D) $(1,4)$

3. 已知复数 z 满足 $(z-1)\,\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-2-\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $2+\mathrm{i}$

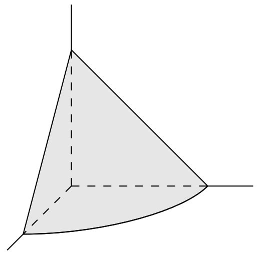
4. 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数, 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{10}$ (D) $\dfrac{1}{20}$

5. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB|=$ ( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题:“今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何? ”其意思为:“在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? ”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ( )

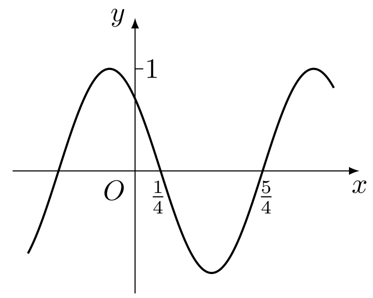


(A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8=4S_4$, 则 $a_{10}=$ ( )

(A) $\dfrac{17}{2}$ (B) $\dfrac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12

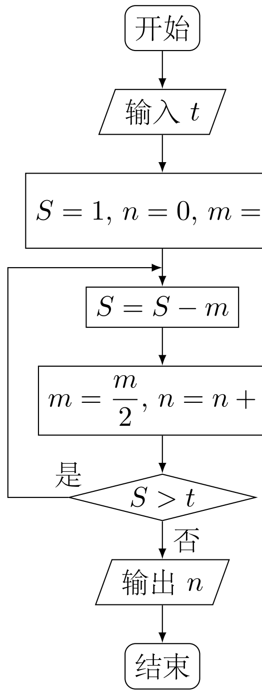
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ( )



(A) $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$ ( )

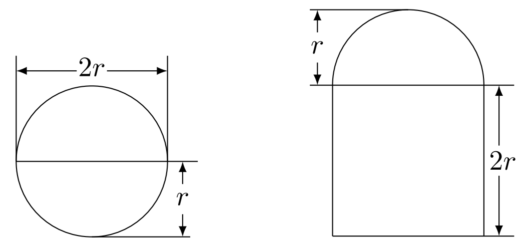


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1\\ -\log_2(x+1), & x>1\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$, 则 $f(6-a)=$ ( )

(A) $-\dfrac{7}{4}$ (B) $-\dfrac{5}{4}$ (C) $-\dfrac{3}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{4}$

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ ( )



正视图 俯视图

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称, 且 $f(-2)+f(-4)=1$, 则 $a=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

二、填空题

13. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=126$, 则 $n=$______.

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$, 则 $a=$______.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-2y+1\leqslant 0\\ 2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最大值为______.

16. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点, P 是 C 左支上一点, $A\left(0,6\sqrt{6}\right)$, 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为______.

三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B=2\sin A\sin C$.

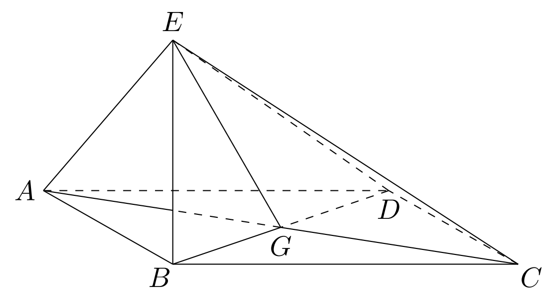
(1) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;

(2) 若 $B=90°$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

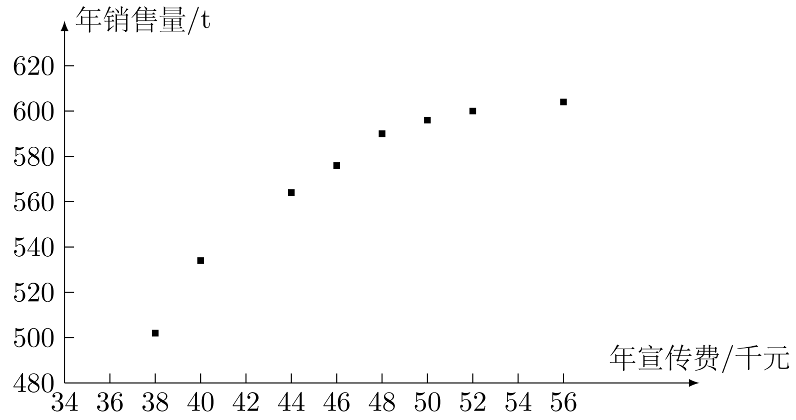
18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: 平面 $AEC\perp$ 平面 BED;

(2) 若 $\angle ABC=120°$, $AE\perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$, $\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

① 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$, $\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20. 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

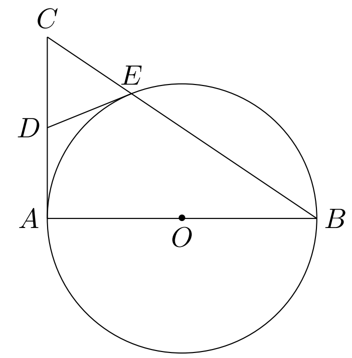
(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点的个数;

(2) 证明: 当 $a>0$ 时, $f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x=-2$, 圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$, $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

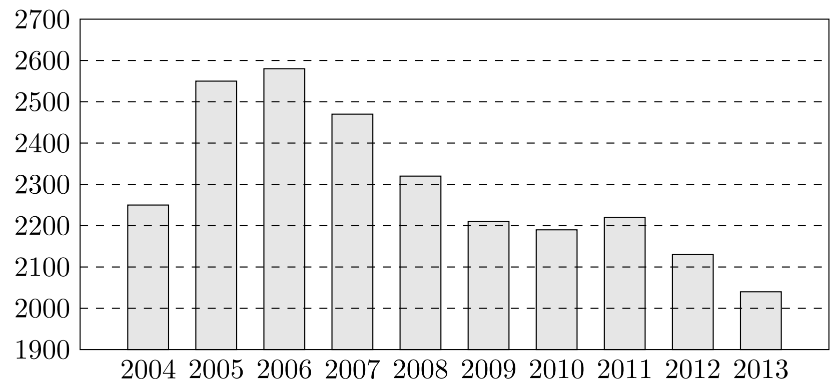
1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{x\mid(x-1)(x+2)<0\}$, 则 $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $\{-1,0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,0,1\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 若 a 为实数, 且 $(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$, 则 $a=$ ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ( )



(A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

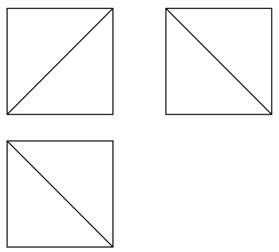
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_1+a_3+a_5=21$, 则 $a_3+a_5+a_7=$( )

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ( )

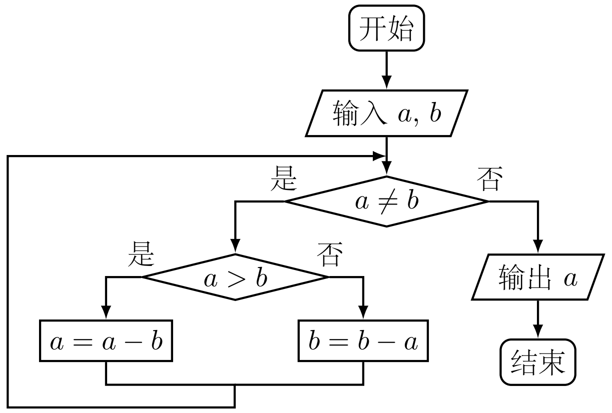


(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$

7. 过三点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, $C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN|=$ ( )

(A) $2\sqrt{6}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{6}$ (D) 10

8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a=$( )

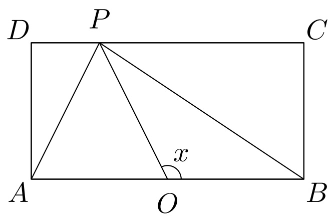


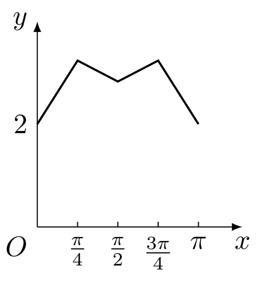
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

9. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ( )

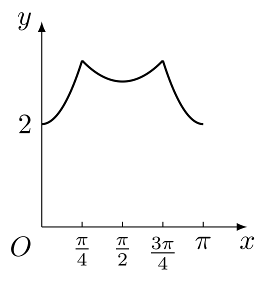
(A) 36π (B) 64π (C) 144π (D) 256π

10. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ( )

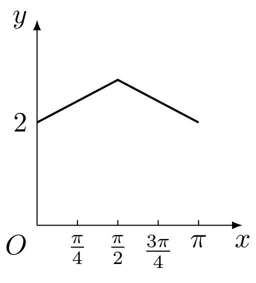




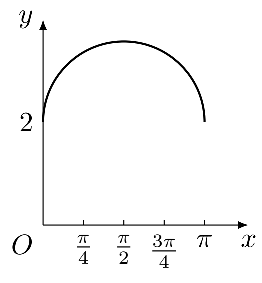
(A)



(B)



(C)



(D)

11. 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120°, 则 E 的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

12. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (B) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ (D) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不平行, 向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行, 则实数 $\lambda=$______.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a=$______.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=-1$, $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$, 则 $S_n=$______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$;

(2) 若 $AD=1$, $DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

18. 某公司为了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区:	62	73	81	92	95	85	74	64	53	76
	78	86	95	66	97	78	88	82	76	89
B 地区:	73	83	62	51	91	46	53	73	64	82
	93	48	65	81	74	56	54	76	65	79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 给出结论即可);

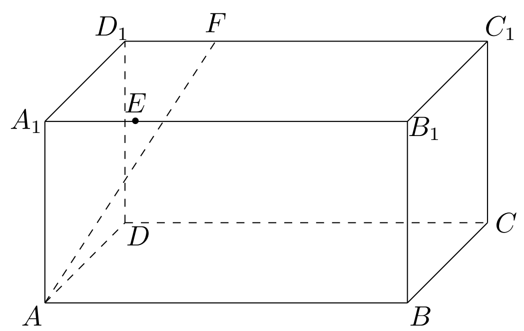
A 地区		B 地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C:"A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级". 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率, 求 C 的概率.

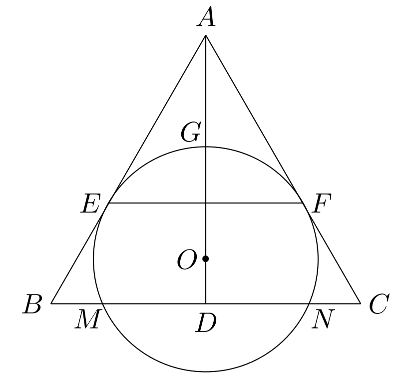
19. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.
(1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
(2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



20. 已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2\ (m>0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M.
(1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;
(2) 若 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P, 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$.
(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 单调递增;
(2) 若对于任意 x_1, $x_2\in[-1,1]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$, 求 m 的取值范围.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G, 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.
(1) 证明: $EF /\!/ BC$;
(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE=MN=2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$, $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.
(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:
(1) 若 $ab>cd$, 则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$;
(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

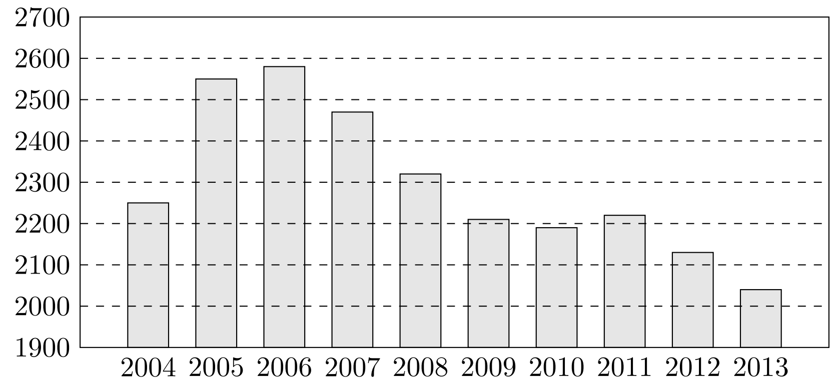
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,-1<x<2\}$, $B=\{x\,|\,0<x<3\}$, 则 $A\cup B=$ （ ）

(A) $(-1,3)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(0,2)$ (D) $(2,3)$

2. 若 a 为实数, 且 $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$, 则 $a=$ （ ）

(A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 （ ）



(A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

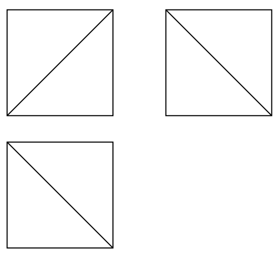
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$ （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1+a_3+a_5=3$, 则 $S_5=$ （ ）

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 （ ）

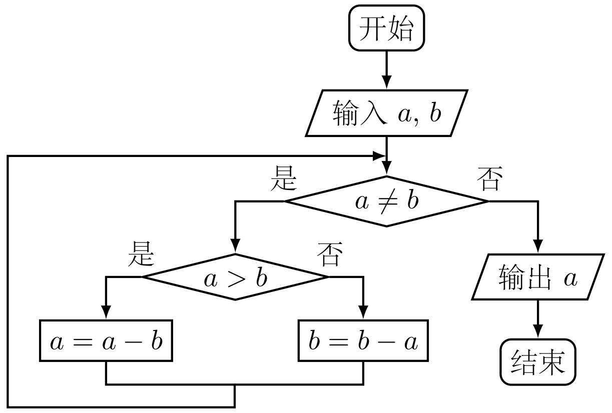


(A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $\dfrac{1}{7}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{5}$

7. 已知三点 $A(1,0)$, $B(0,\sqrt{3})$, $C(2,\sqrt{3})$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a=$（ ）



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

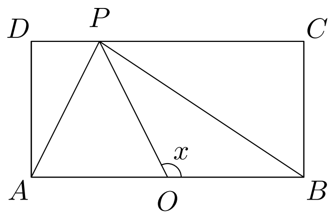
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_3a_5=4(a_4-1)$, 则 $a_2=$ （ ）

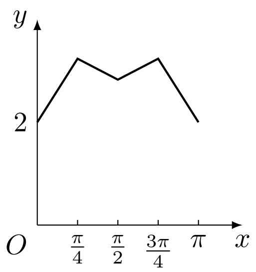
(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{8}$

10. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 （ ）

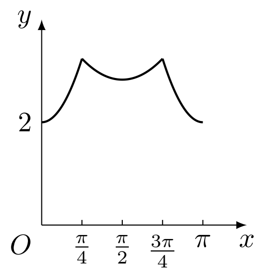
(A) 36π (B) 64π (C) 144π (D) 256π

11. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 （ ）

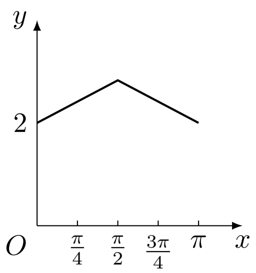




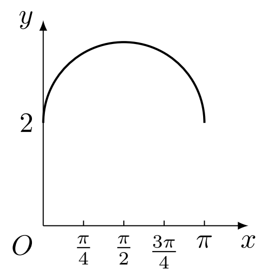
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

(C) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ (D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=ax^3-2x$ 的图象过点 $(-1,4)$, 则 $a=$______.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0\\2x-y-1\geqslant 0\\x-2y+1\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为______.

15. 已知双曲线过点 $(4,\sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程为______.

16. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切, 则 $a=$______.

三、解答题

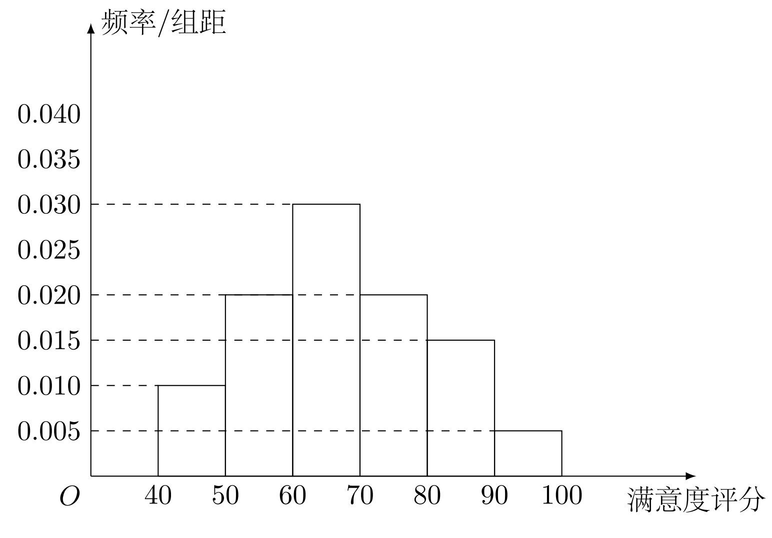
17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD=2DC$.

(1) 求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$;

(2) 若 $\angle BAC=60^\circ$, 求 $\angle B$.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对其产品的满意度的评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频率分布表.

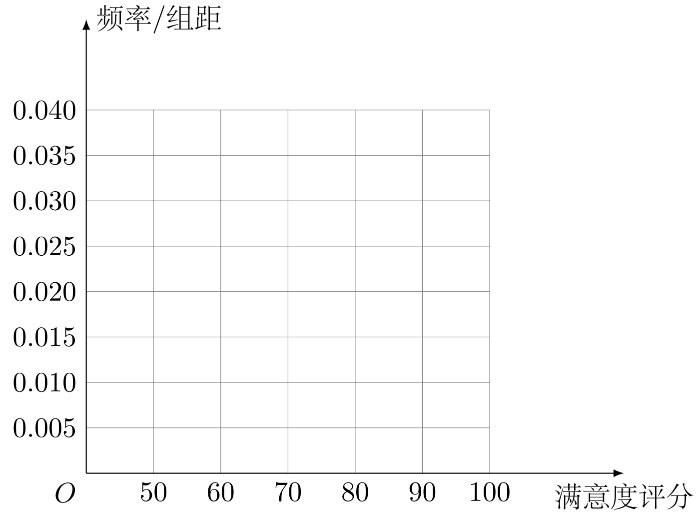
A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布表

满意度评分分组	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频数	2	8	14	10	6

(1) 在图中作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图, 并通过此图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度; (不要求计算出具体值, 给出结论即可)

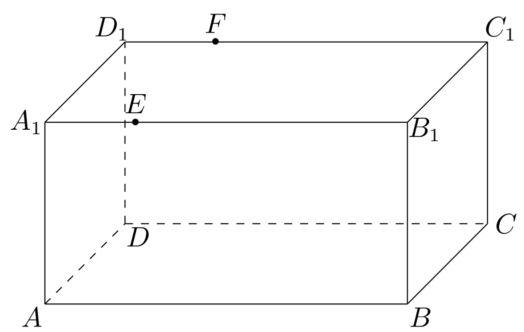


(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度评分分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区的用户的满意度等级为不满意的概率大, 说明理由.

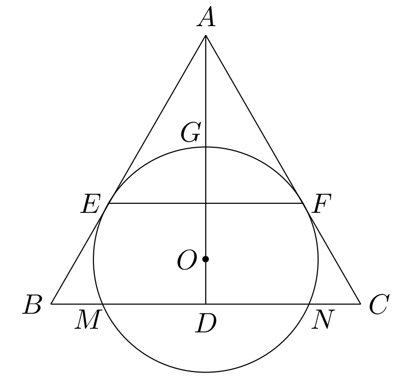
19. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.
(1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
(2) 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.



20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上.
(1) 求 C 的方程;
(2) 直线 l 不经过原点 O, 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 中点为 M, 证明: 直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率乘积为定值.

21. 已知 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G, 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.
(1) 证明: $EF\parallel BC$;
(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE=MN=2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 : $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$, $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.
(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:
(1) 若 $ab>cd$, 则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$;
(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x\mid 2x-3>0\}$, 则 $A\cap B=$(　)

(A) $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$　(B) $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　(C) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{3}{2},3\right)$

2. 设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$, 其中 x, y 是实数, 则 $|x+y\mathrm{i}|=$　(　)

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27, $a_{10}=8$, 则 $a_{100}=$　(　)

(A) 100　(B) 99　(C) 98　(D) 97

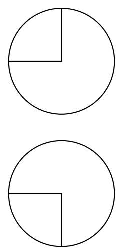
4. 某公司的班车在 7 : 30, 8 : 00, 8 : 30 发车, 小明在 7 : 50 至 8 : 30 之间到达发车站乘坐班车, 且到达发车站的时刻是随机的, 则他等车时间不超过 10 分钟的概率是　(　)

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

5. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则 n 的取值范围是　(　)

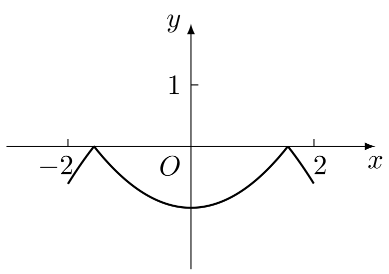
(A) $(-1,3)$　(B) $(-1,\sqrt{3})$　(C) $(0,3)$　(D) $(0,\sqrt{3})$

6. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是　(　)

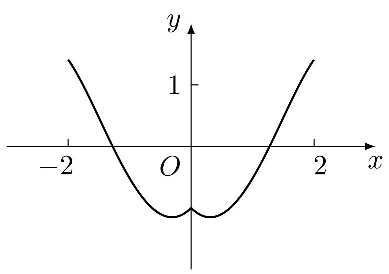


(A) 17π　(B) 18π　(C) 20π　(D) 28π

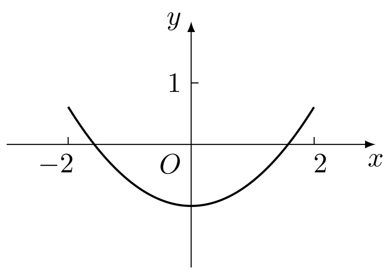
7. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为　(　)



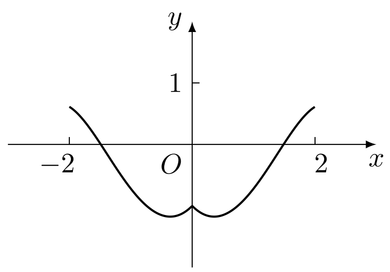
(A)



(B)



(C)



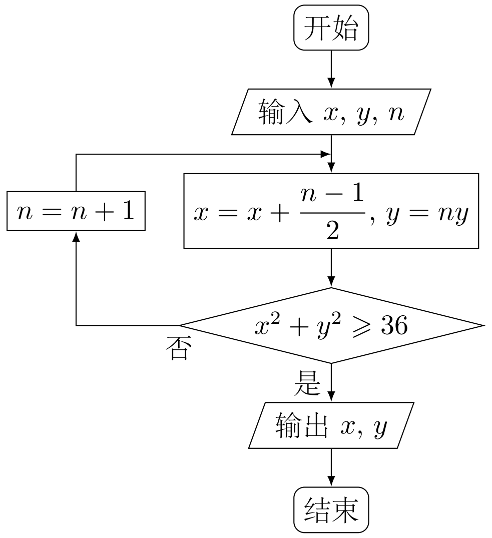
(D)

8. 若 $a>b>1$, $0<c<1$, 则　(　)

(A) $a^c<b^c$　(B) $ab^c<ba^c$

(C) $a\log_b c<b\log_a c$　(D) $\log_a c<\log_b c$

9. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 x, y 的值满足　(　)



(A) $y=2x$　(B) $y=3x$　(C) $y=4x$　(D) $y=5x$

10. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 D, E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$, $|DE|=2\sqrt{5}$, 则 C 的焦点到准线的距离为(　)

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, $\alpha\,/\!/$ 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 m, n 所成角的正弦值为(　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为　(　)

(A) 11　(B) 9　(C) 7　(D) 5

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$, 则 $m=$______.

14. $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中, x^3 的系数是______. (用数字填写答案)

15. 设等比数列满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为______.

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为______元.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

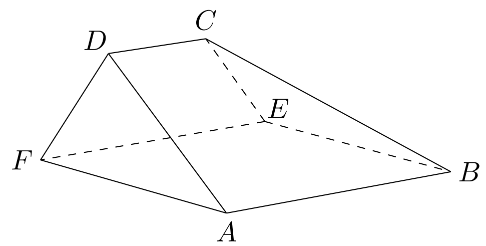
(1) 求 C;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

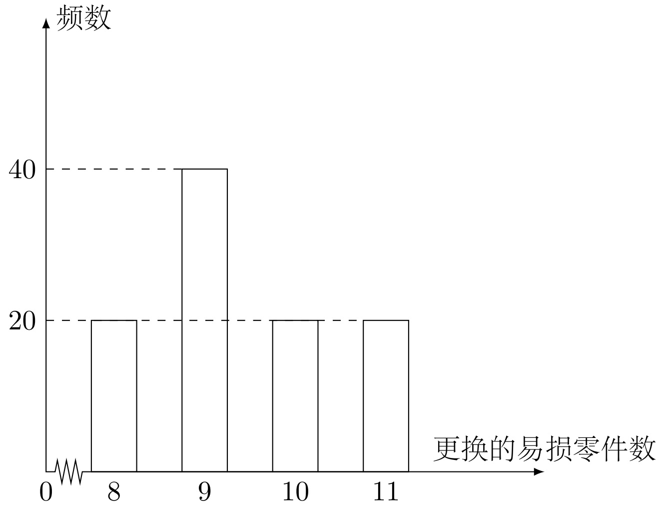
18. 如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 面 $ABEF$ 为正方形, $AF=2FD$, $\angle AFD=90^\circ$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60°.

(1) 证明: 平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$;

(2) 求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.



19. 某公司计划购买 2 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率, 记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数, n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若要求 $P(X \leqslant n) \geqslant 0.5$, 确定 n 的最小值;

(3) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据, 在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一, 应选用哪个?

20. 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A, 直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合, l 交圆 A 于 C, D 两点, 过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

(1) 证明 $|EA|+|EB|$ 为定值, 并写出点 E 的轨迹方程;

(2) 设点 E 的轨迹为曲线 C_1, 直线 l 交 C_1 于 M, N 两点, 过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点, 求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

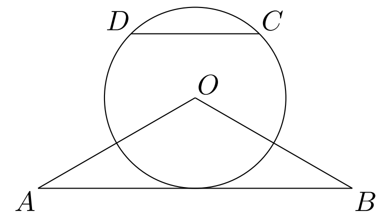
(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1+x_2<2$.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120^\circ$, 以 O 为圆心, $\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB \parallel CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=1+a\sin t \end{cases}$ (t 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2: $\rho=4\cos\theta$.

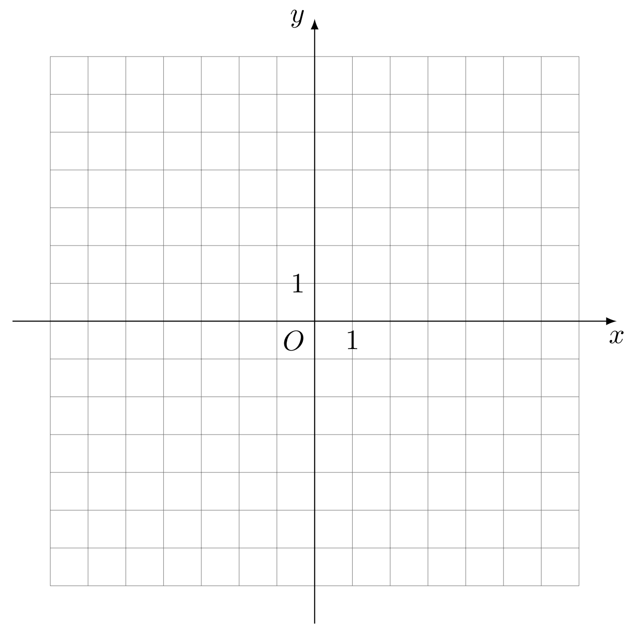
(1) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求 a.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,3\}$　(B) $\{3,5\}$　(C) $\{5,7\}$　(D) $\{1,7\}$

2. 设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等, 其中 a 为实数, 则 $a=$ （ ）

(A) -3　(B) -2　(C) 2　(D) 3

3. 为美化环境, 从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中, 余下的 2 种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是 （ ）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{5}{6}$

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\frac{2}{3}$, 则 $b=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为 （ ）

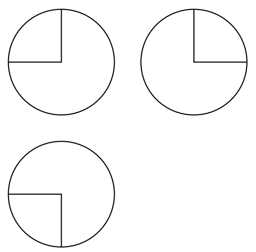
(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图象对应的函数为 （ ）

(A) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

7. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是 （ ）



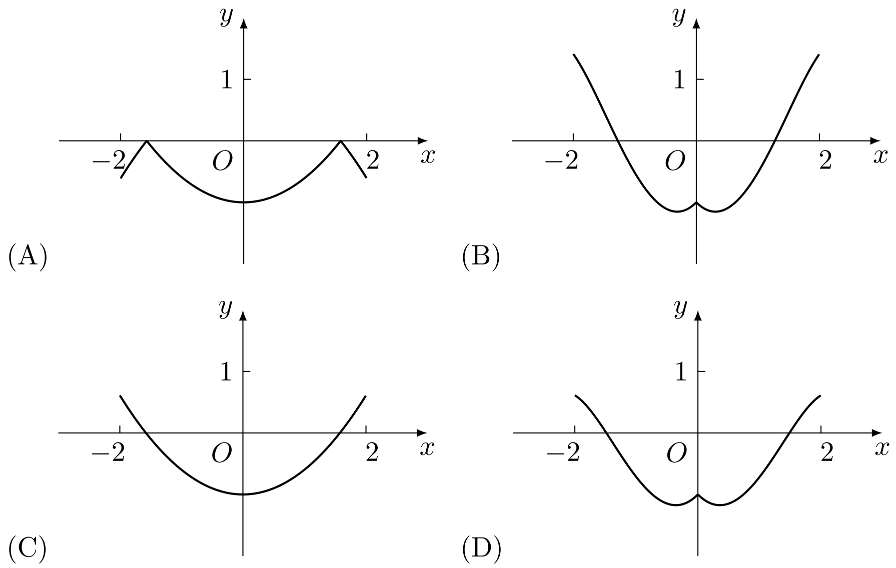
(A) 17π　(B) 18π　(C) 20π　(D) 28π

8. 若 $a>b>0$, $0<c<1$, 则 （ ）

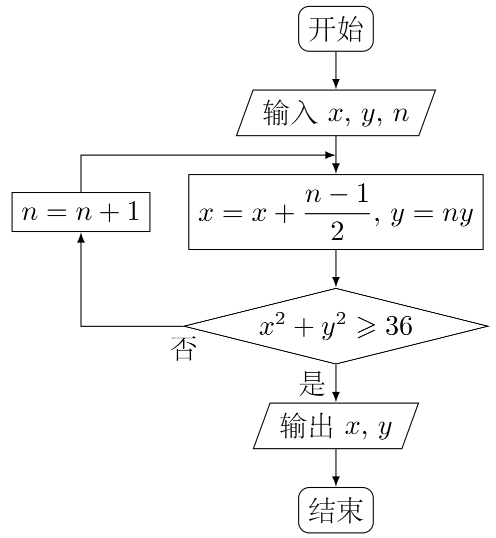
(A) $\log_a c<\log_b c$　(B) $\log_c a<\log_c b$

(C) $a^c<b^c$　(D) $c^a>c^b$

9. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为 （ ）



10. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 x, y 的值满足 （ ）



(A) $y=2x$　(B) $y=3x$　(C) $y=4x$　(D) $y=5x$

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, $\alpha\,/\!/$ 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 m, n 所成角的正弦值为（ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

12. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$　(C) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　(D) $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $x=$______.

14. 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$______.

15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 C: $x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为______.

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为______元.

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_2=\frac{1}{3}$, $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

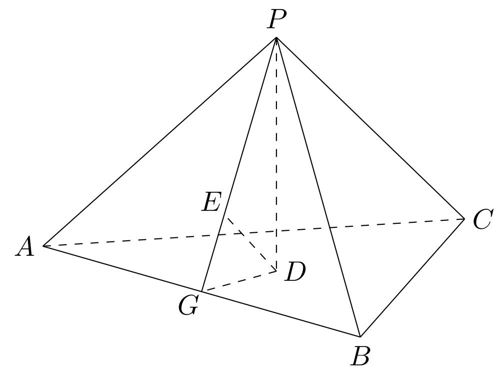
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

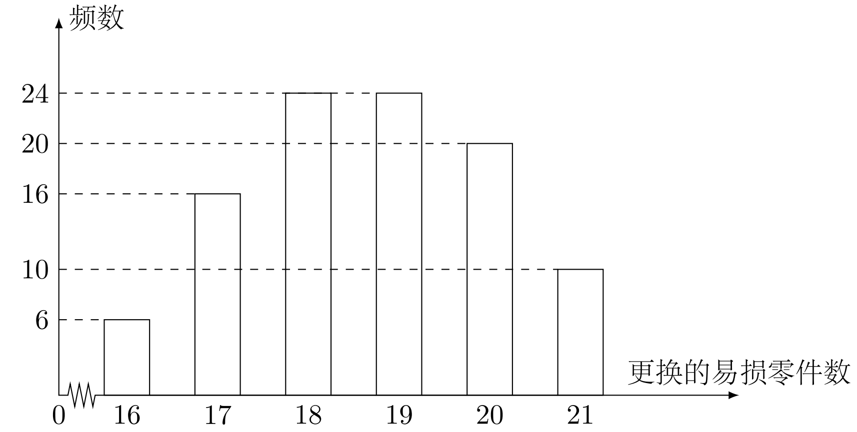
18. 如图, 在已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形, $PA=6$, 顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D, D 在平面 PAB 内的正投影为点 E, 连接 PE 并延长交 AB 于点 G.

(1) 证明 G 是 AB 的中点;

(2) 如图, 在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F (说明做法及理由), 并求四面体 $PDEF$ 的体积.



19. 某公司计划购买 1 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年试用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:



记 x 表示 1 台机器在三年试用期内需更换的易损零件数, y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用 (单位: 元), n 表示购机的同时购买的易损零件数.

(1) 若 $n=19$, 求 y 与 x 的函数解析式;

(2) 若要求"需更换的易损零件数不大于 n"的频率不小于 0.5, 求 n 的最小值;

(3) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件或每台都购买 20 个易损零件, 分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数, 以此作为决策依据, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件?

20. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l: $y=t$ $(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M, 交抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 于点 P, M 关于点 P 的对称点为 N, 连接 ON 并延长交 C 于点 H.

(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$;

(2) 除 H 以外, 直线 MH 与抛物线 C 是否有其它公共点? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$.

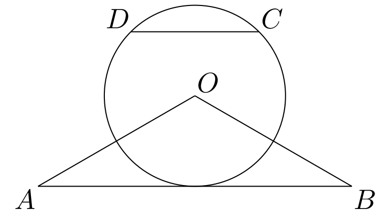
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120°$, 以 O 为圆心, $\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB\parallel CD$.



23. 在直线坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$ (t 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2: $\rho=4\cos\theta$.

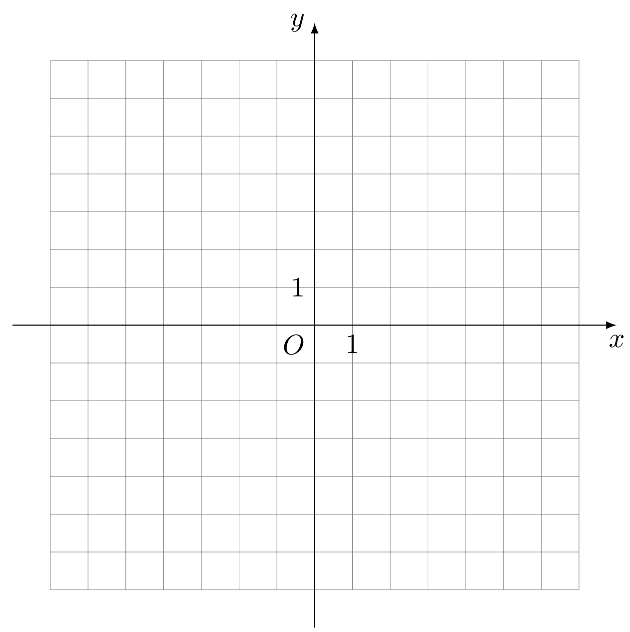
(1) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求 a.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $z=(m+3)+(m-1)\,\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限, 则实数 m 的取值范围是 ( )

(A) $(-3,1)$ (B) $(-1,3)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)$

2. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{0,1,2,3\}$ (D) $\{-1,0,1,2,3\}$

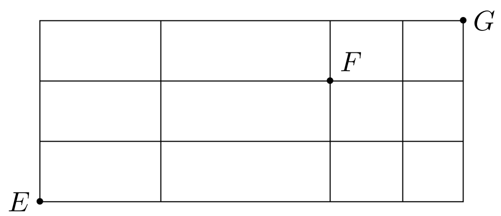
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$ ( )

(A) -8 (B) -6 (C) 6 (D) 8

4. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ ( )

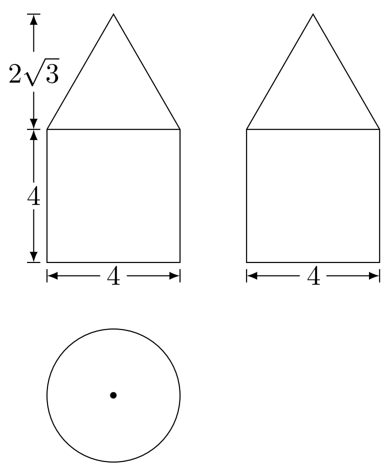
(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

5. 如图, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 ( )



(A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 9

6. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ( )



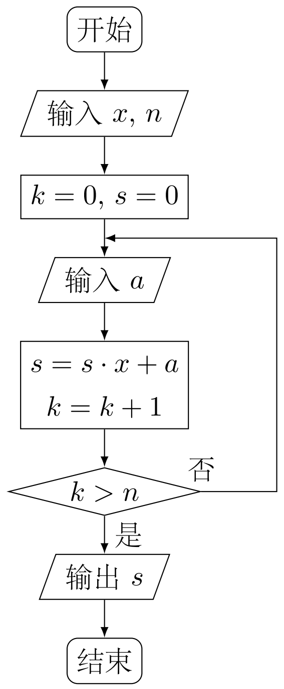
(A) 20π (B) 24π (C) 28π (D) 32π

7. 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图象的对称轴为 ( )

(A) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$ (B) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$ (D) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$

8. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 a 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ ( )



(A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

9. 若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{25}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $-\dfrac{1}{5}$ (D) $-\dfrac{7}{25}$

10. 从区间 $[0,1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$, 构成 n 个数对 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$, 其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个, 则用随机模拟的方法得到的圆周率的近似值为 ( )

(A) $\dfrac{4n}{m}$ (B) $\dfrac{2n}{m}$ (C) $\dfrac{4m}{n}$ (D) $\dfrac{2m}{n}$

11. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 M 在 E 上, MF_1 与 x 轴垂直, $\sin\angle MF_2F_1=\dfrac{1}{3}$, 则 E 的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$, 若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_m,y_m)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$( )

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

二、填空题

13. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$______.

14. α, β 是两个平面, m, n 是两条线, 有下列四个命题:
① 如果 $m\perp n$, $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$, 那么 $\alpha\perp\beta$;
② 如果 $m\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 那么 $m\perp n$;
③ 如果 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, 那么 $m\parallel\beta$;
④ 如果 $m\parallel n$, $\alpha\parallel\beta$, 那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.
则上述四个命题中真命题的是______.

15. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是______.

16. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线, $b=$______.

三、解答题

17. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $S_7=28$. 记 $b_n=[\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[\lg 99]=1$.
(1) 求 b_1, b_{11}, b_{101};
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和.

18. 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下:

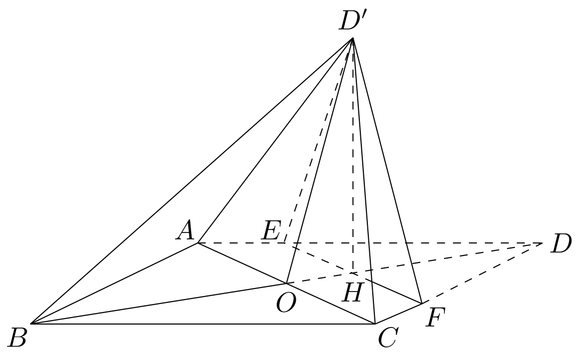
一年内出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
概率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

(1) 求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率;
(2) 若一续保人本年度的保费高于基本保费, 求其保费比基本保费高出 60% 的概率;
(3) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, $AB=5$, $AC=6$, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, $AE=CF=\dfrac{5}{4}$, EF 交 BD 于点 H. 将三角形 DEF 沿 EF 折到三角形 $D'EF$ 的位置 $OD'=\sqrt{10}$.

(1) 证明: $D'H\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上, A 是 E 的左顶点, 斜率为 $k\ (k>0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点, 点 N 在 E 上, $MA\perp NA$.

(1) 当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 AMN 的面积;

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 求 k 的取值范围.

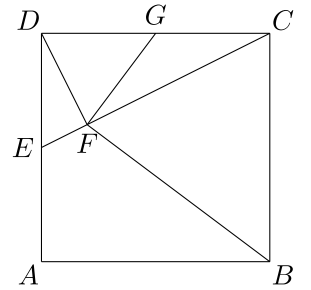
21. (1) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\cdot \mathrm{e}^x$ 的单调性, 并证明当 $x>0$ 时, $(x-2)\,\mathrm{e}^x+x+2>0$;

(2) 证明: 当 $a\in[0,1)$ 时, 函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}\ (x>0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的值域.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, G 分别在边 DA, DC 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 D 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 F.

(1) 证明: B, C, G, F 四点共圆;

(2) 若 $AB=1$, E 为 DA 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.

(1) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

(1) 求 M;

(2) 证明: 当 $a,b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x \mid x^2<9\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

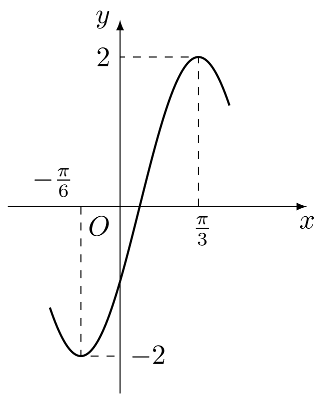
(A) $\{-2,-1,0,1,2,3\}$ (B) $\{-2,-1,0,1,2\}$

(C) $\{1,2,3\}$ (D) $\{1,2\}$

2. 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$, 则 $\overline{z}=$ （ ）

(A) $-1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $3+2\mathrm{i}$ (D) $3-2\mathrm{i}$

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 （ ）



(A) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (D) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

4. 体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球面的表面积为 （ ）

(A) 12π (B) $\dfrac{32}{3}\pi$ (C) 8π (D) 4π

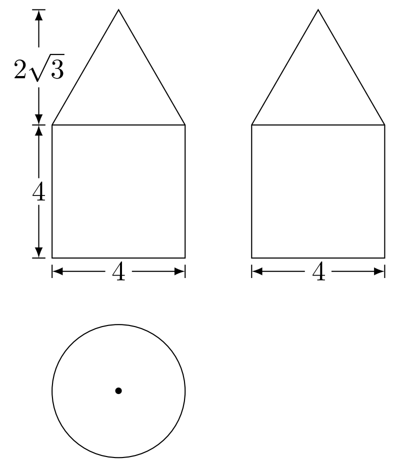
5. 设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$ 与 C 交于点 P, $PF\perp x$, 则 $k=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

6. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

7. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 （ ）

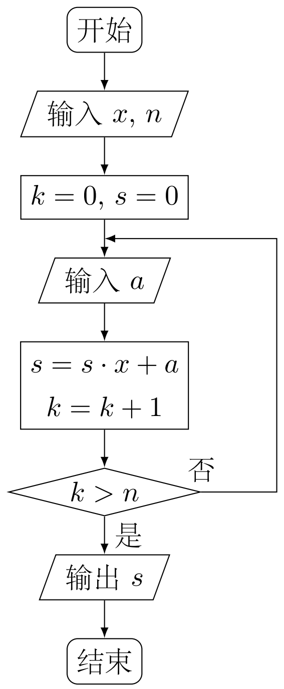


(A) 20π (B) 24π (C) 28π (D) 32π

8. 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现, 红灯持续时间为 40 秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯, 则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{7}{10}$ (B) $\dfrac{5}{8}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{3}{10}$

9. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 a 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ （ ）



(A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

10. 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 （ ）

(A) $y=x$ (B) $y=\lg x$ (C) $y=2^x$ (D) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

11. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

12. 已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$, 若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_m,y_m), 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$（ ）

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\\ x-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最小值为______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$______.

16. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是______.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4=4$, $a_5+a_7=6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=[a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[2.6]=2$.

18. 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频数	60	50	30	30	20	10

(1) 记 A 为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 求 $P(A)$ 的估计值;

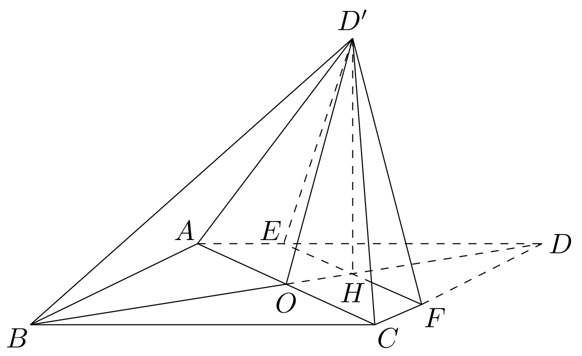
(2) 记 B 为事件: “一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”. 求 $P(B)$ 的估计值;

(2) 求续保人本年度的平均保费估计值.

19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, $AE=CF$, EF 交 BD 于点 H, 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置.

(1) 证明: $AC \perp HD'$;

(2) 若 $AB=5$, $AC=6$, $AE=\dfrac{5}{4}$, $OD'=2\sqrt{2}$, 求五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积.



20. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点, 斜率为 k $(k>0)$ 的直线交椭圆 E 于 A, M 两点, 点 N 在 E 上, $MA\perp NA$.

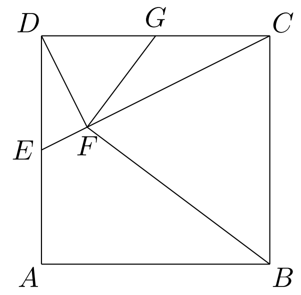
(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 AMN 的面积;

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 证明: $\sqrt{3}<k<2$.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, G 分别在边 DA, DC 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 D 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 F.

(1) 证明: B, C, G, F 四点共圆;

(2) 若 $AB=1$, E 为 DA 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.

(1) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

(1) 求 M;

(2) 证明: 当 a, $b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid(x-2)(x-3)\geqslant 0\}$, $T=\{x\mid x>0\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $[2,3]$ (B) $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

(C) $[3,+\infty)$ (D) $(0,2]\cup[3,+\infty)$

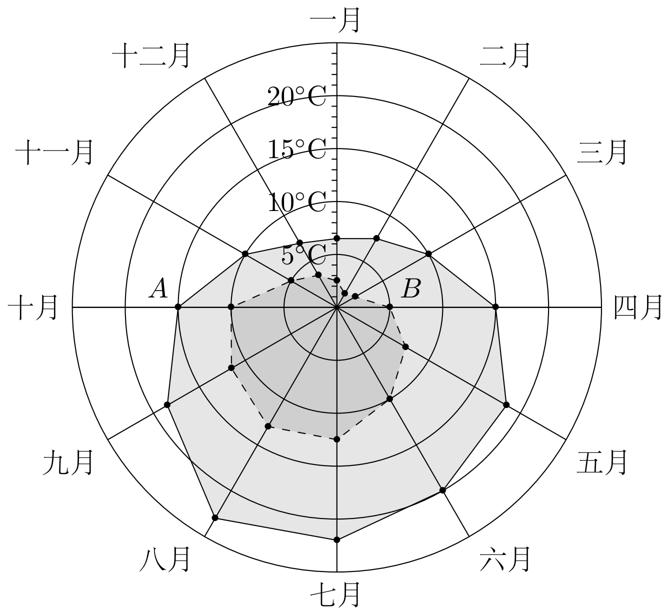
2. 若 $z=1+2\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{4\mathrm{i}}{z\bar{z}-1}=$ ( )

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ ( )

(A) $30°$ (B) $45°$ (C) $60°$ (D) $120°$

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 $15°\mathrm{C}$, B 点表示四月的平均最低气温约为 $5°\mathrm{C}$. 下面叙述不正确的是 ( )



----- 平均最低气温 ——— 平均最高气温

(A) 各月的平均最低气温都在 $0°\mathrm{C}$ 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 $20°\mathrm{C}$ 的月份有 5 个

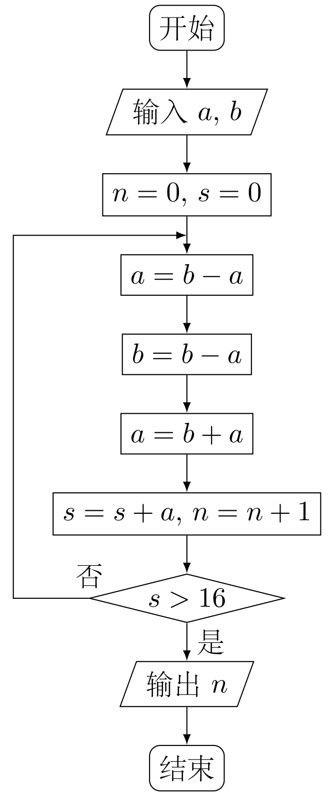
5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{64}{25}$ (B) $\dfrac{48}{25}$ (C) 1 (D) $\dfrac{16}{25}$

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=4^{\frac{2}{5}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

(A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

7. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ ( )

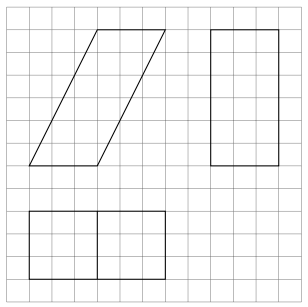


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\cos A=$ ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 ( )



(A) $18+36\sqrt{5}$ (B) $54+18\sqrt{5}$ (C) 90 (D) 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 ( )

(A) 4π (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) 6π (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

11. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

12. 定义"规范 01 数列"$\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 m 项为 0, m 项为 1, 且对任意 $k\leqslant 2m$, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$, 则不同的"规范 01 数列"共有 ( )

(A) 18 个 (B) 16 个 (C) 14 个 (D) 12 个

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

16. 已知直线 $l: mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 若 $AB=2\sqrt{3}$, 则 $|CD|=$______.

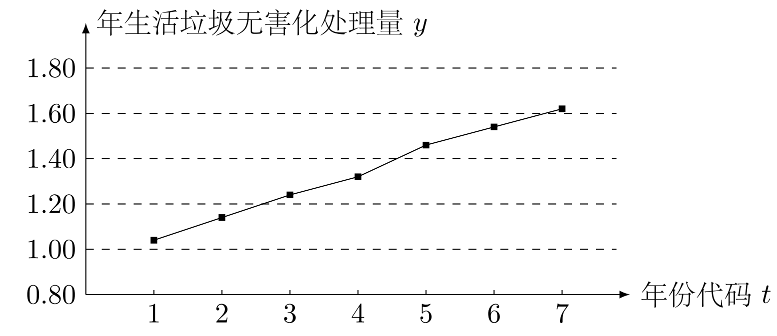
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$, 其中 $\lambda\neq 0$;

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 若 $S_5=\dfrac{31}{32}$, 求 λ.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 − 7 分别对应年份 2008 − 2014

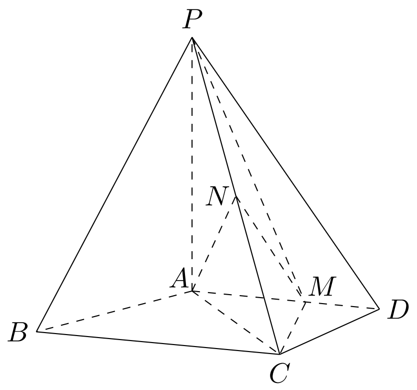
(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;
(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

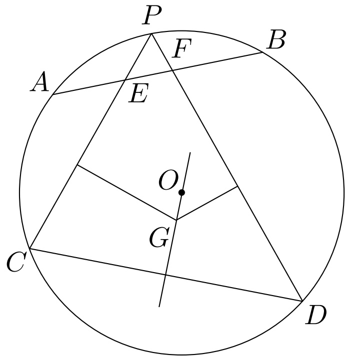
19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\parallel BC$, $AB=AD=AC=3$, $PA=BC=4$, M 为线段 AD 上一点, $AM=2MD$, N 为 PC 的中点.
(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 PAB;
(2) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



20. 已知抛物线 $C: y^2=2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.
(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR\parallel FQ$;
(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x)=\alpha\cos 2x+(\alpha-1)(\cos x+1)$, 其中 $\alpha>0$, $|f(x)|$ 的最大值为 A.
(1) 求 $f'(x)$;
(2) 求 A;
(3) 证明 $|f'(x)|\leqslant 2A$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.
(1) 若 $\angle PFB=2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;
(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG\perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.
(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集;
(2) 设函数 $g(x)=|2x-1|$, 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x)+g(x)\geqslant 3$, 求 a 的取值范围.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$, $B=\{4,8\}$, 则 $\complement_A B=$ （ ）

(A) $\{4,8\}$ (B) $\{0,2,6\}$

(C) $\{0,2,6,10\}$ (D) $\{0,2,4,6,8,10\}$

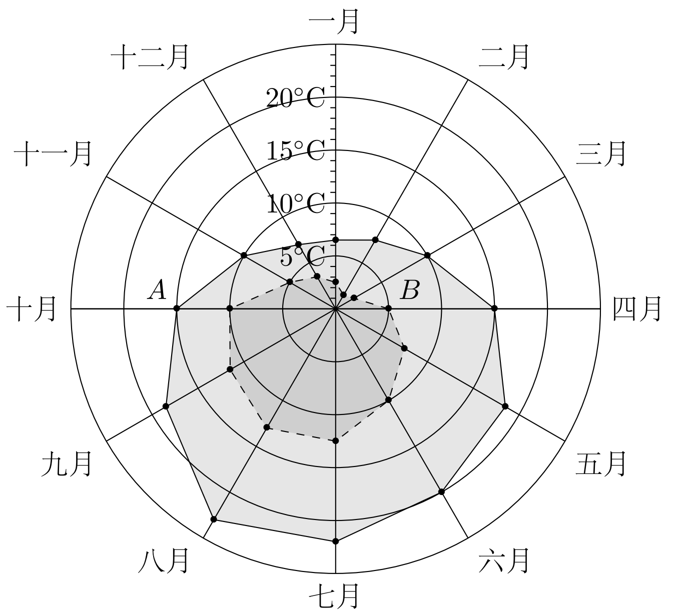
2. 若 $z=4+3\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (D) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 $15^\circ\mathrm{C}$, B 点表示四月的平均最低气温约为 $5^\circ\mathrm{C}$. 下面叙述不正确的是 （ ）



----- 平均最低气温 ——— 平均最高气温

(A) 各月的平均最低气温都在 $0^\circ\mathrm{C}$ 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 $20^\circ\mathrm{C}$ 的月份有 5 个

5. 小敏打开计算机时, 忘记了开机密码的前两位, 只记得第一位是 M, I, N 中的一个字母, 第二位是 1, 2, 3, 4, 5 中的一个数字, 则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{8}{15}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

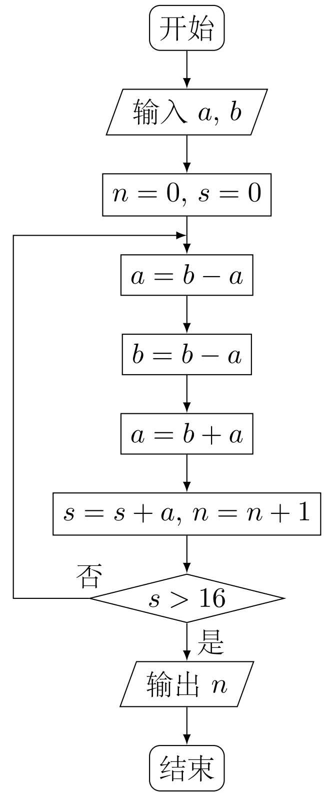
6. 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

7. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 （ ）

(A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

8. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ （ ）

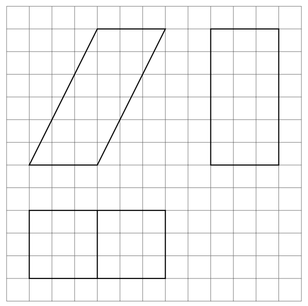


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\sin A=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

10. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 （ ）



(A) $18+36\sqrt{5}$ (B) $54+18\sqrt{5}$ (C) 90 (D) 81

11. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 （ ）

(A) 4π (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) 6π (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0\\ x-2y-1\leqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=2\sin x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知直线 $l:x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 则 $|CD|=$______.

16. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是______.

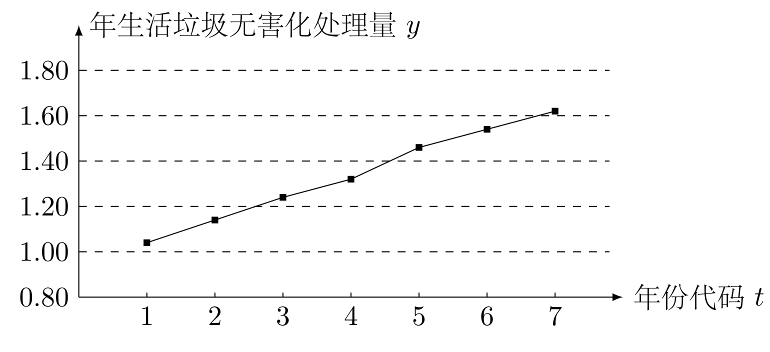
三、解答题

17. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 − 7 分别对应年份 2008 − 2014

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

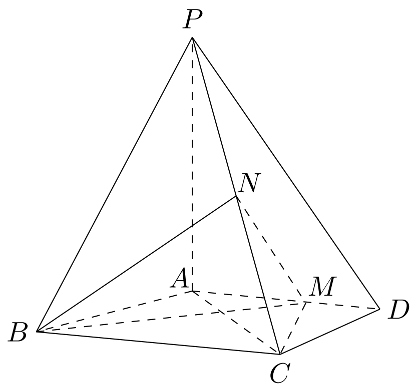
回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB;

(2) 求四面体 $N-BCM$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

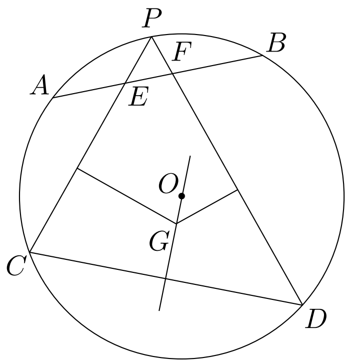
(2) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c > 1$, 证明当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG \perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 a 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

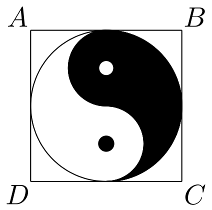
一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<1\}$, $B=\{x\mid 3^x<1\}$, 则 （ ）

(A) $A\cap B=\{x\mid x<0\}$ (B) $A\cup B=\mathbf{R}$

(C) $A\cup B=\{x\mid x>1\}$ (D) $A\cap B=\varnothing$

2. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 （ ）



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

3. 设有下面四个命题:

p_1: 若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_2: 若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_3: 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$, 则 $z_1=\overline{z_2}$;

p_4: 若复数 $z\in\mathbf{R}$, 则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$.

其中的真命题为 （ ）

(A) p_1, p_3 (B) p_1, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_2, p_4

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24$, $S_6=48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

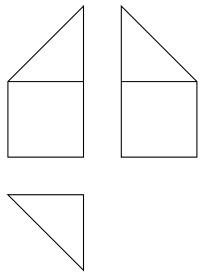
5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1)=-1$, 则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-2,2]$ (B) $[-1,1]$ (C) $[0,4]$ (D) $[1,3]$

6. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 （ ）

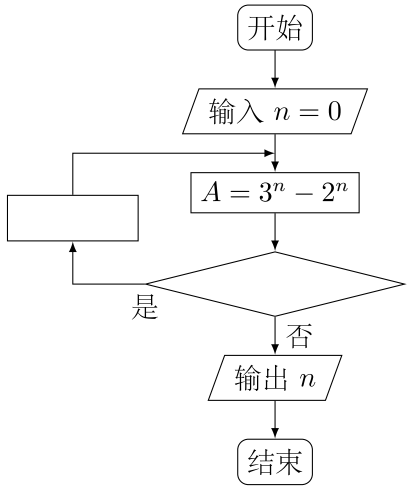
(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 35

7. 某多面体的三视图如图所示, 其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成, 正方形的边长为 2, 俯视图为等腰直角三角形, 该多面体的各个面中有若干个是梯形, 这些梯形的面积之和为 （ ）



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

8. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 ◇ 和 ▭ 两个空白框中, 可以分别填入 （ ）



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$ (B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$ (D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

9. 已知曲线 $C_1: y=\cos x$, $C_2: y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是 （ ）

(A) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(B) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(C) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(D) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

10. 已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2, 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为 （ ）

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10

11. 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x=3^y=5^z$, 则 （ ）

(A) $2x<3y<5z$ (B) $5z<2x<3y$ (C) $3y<5z<2x$ (D) $3y<2x<5z$

12. 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, $\cdots$, 其中第一项是 2^0, 接下来的两项是 2^0, 2^1, 再接下来的三项是 2^0, 2^1, 2^2, 依此类推. 求满足如下条件的最小整数 N: $N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 （ ）

(A) 440 (B) 330 (C) 220 (D) 110

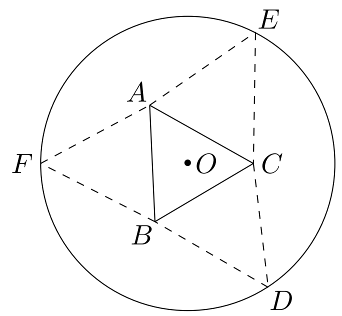
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$______.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 1\\ 2x+y\geqslant -1\\ x-y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-2y$ 的最小值为______.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右顶点为 A, 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A, 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN=60^\circ$, 则 C 的离心率为______.

16. 如图, 圆形纸片的圆心为 O, 半径为 5 cm, 该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D, E, F 为圆 O 上的点, $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后, 分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$, 使得 D, E, F 重合, 得到三棱锥. 当 $\triangle ABC$ 的边长变化时, 所得三棱锥体积 (单位: cm^3) 的最大值为______.



三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

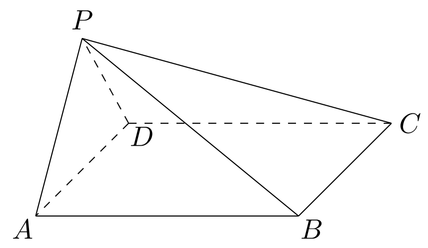
(1) 求 $\sin B\sin C$;

(2) 若 $6\cos B\cos C=1$, $a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90°$.

(1) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;

(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90°$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 根据长期生产经验, 可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

(1) 假设生产状态正常, 记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数, 求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望;

(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

① 试说明上述监控生产过程方法的合理性;

② 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\frac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 16$.

用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$, 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查? 剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据, 用剩下的数据估计 μ 和 σ (精确到 0.01).

附: 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$, $0.9974^{16}\approx 0.9592$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, 四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1, 证明: l 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\,\mathrm{e}^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t\\ y=1-t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;

(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$, $B=\{x\mid 3-2x>0\}$, 则 （ ）

(A) $A\cap B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$ (B) $A\cap B=\varnothing$

(C) $A\cup B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$ (D) $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果, 选了 n 块地作试验田, 这 n 块地的亩产量 (单位: kg) 分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是 （ ）

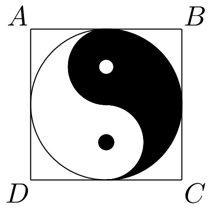
(A) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数 (B) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标准差

(C) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最大值 (D) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是 （ ）

(A) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$ (B) $\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$ (C) $(1+\mathrm{i})^2$ (D) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 （ ）

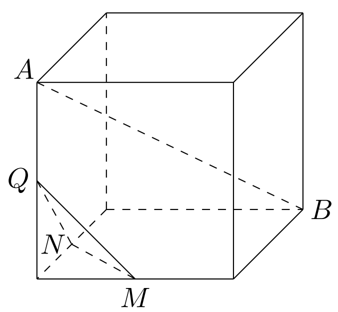


(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{8}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

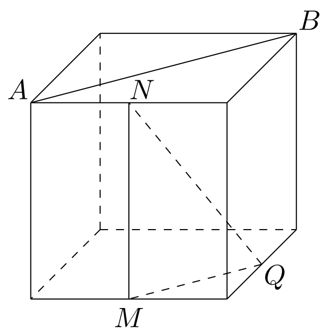
5. 已知 F 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点, P 是 C 上一点, 且 PF 与 x 轴垂直, 点 A 的坐标是 $(1,3)$. 则 $\triangle APF$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

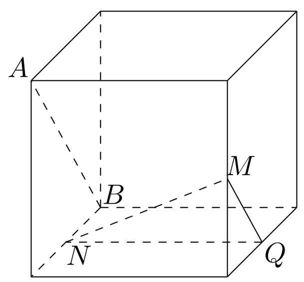
6. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是( )



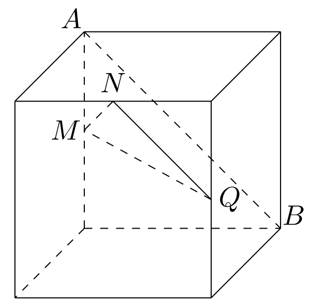
(A)



(B)



(C)

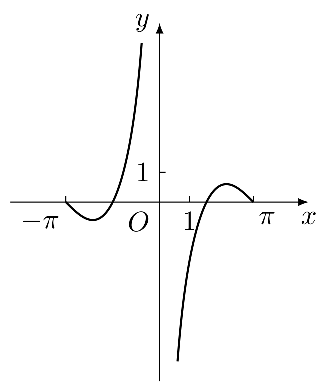


(D)

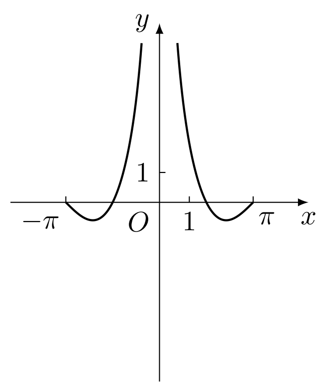
7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3\\ x-y\geqslant 1\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

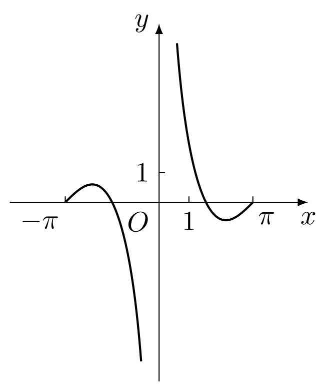
8. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为 （ ）



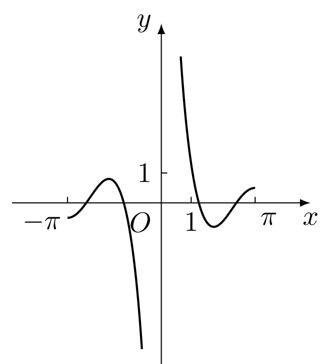
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$, 则 （ ）

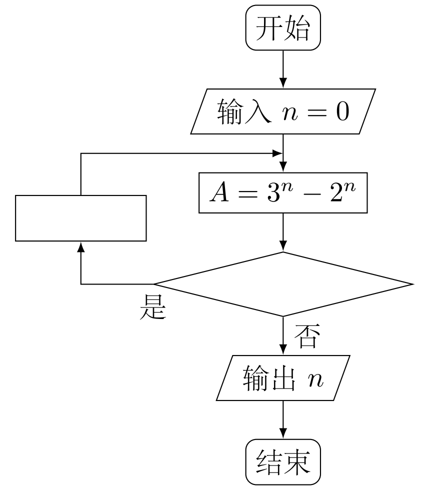
(A) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增

(B) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

(C) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

(D) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

10. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 ◇ 和 ▭ 两个空白框中, 可以分别填入 （ ）



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$ (B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$ (D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2$, $c=\sqrt{2}$, 则 $C=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$

12. 设 A, B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1]\cup[9,+\infty)$ (B) $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

(C) $(0,1]\cup[4,+\infty)$ (D) $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(m,1)$, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $m=$______.

14. 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为______.

15. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$______.

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB, $SA=AC$, $SB=BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为______.

三、解答题

17. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.

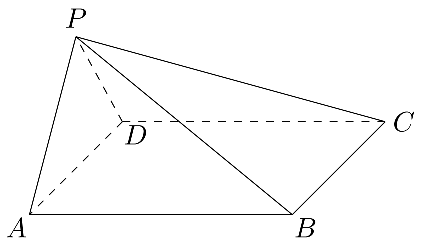
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否能成等差数列.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;

(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 下面是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸:

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得

$\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx 18.439$, $\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})(i-8.5)=-2.78$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1, 2, \cdots, 16$.

(1) 求 (x_i,i) $(i=1, 2, \cdots, 16)$ 的相关系数 r, 并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小; (若 $|r|<0.25$, 则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小)

(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

① 从这一天抽检的结果看, 是否需对当天的生产过程进行检查?

② 在 $(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s)$ 之外的数据称为离群值, 试剔除离群值, 估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值与标准差. (精确到 0.01)

附: 样本 (x_i,y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 设 A, B 为曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.

(1) 求直线 AB 的斜率;

(2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM \perp BM$, 求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t\\ y=1-t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;

(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ (　)

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $2-\mathrm{i}$

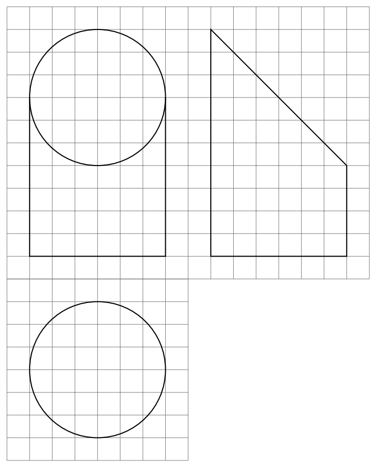
2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ (　)

(A) $\{1,-3\}$　(B) $\{1,0\}$　(C) $\{1,3\}$　(D) $\{1,5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?”意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 (　)

(A) 1 盏　(B) 3 盏　(C) 5 盏　(D) 9 盏

4. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为(　)



(A) 90π　(B) 63π　(C) 42π　(D) 36π

5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\ 2x-3y+3\geqslant 0\\ y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是(　)

(A) -15　(B) -9　(C) 1　(D) 9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 (　)

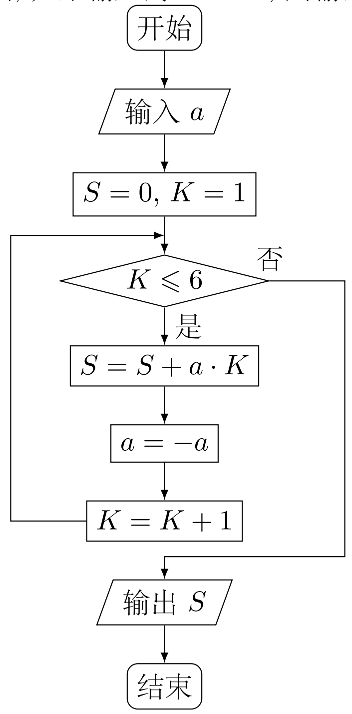
(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 (　)

(A) 乙可以知道四人的成绩　(B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩　(D) 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ (　)



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 (　)

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 (　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 (　)

(A) -1　(B) $-2\mathrm{e}^{-3}$　(C) $5\mathrm{e}^{-3}$　(D) 1

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 (　)

(A) -2　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) -1

二、填空题

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$______.

14. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\ \left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$______.

16. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN|=$______.

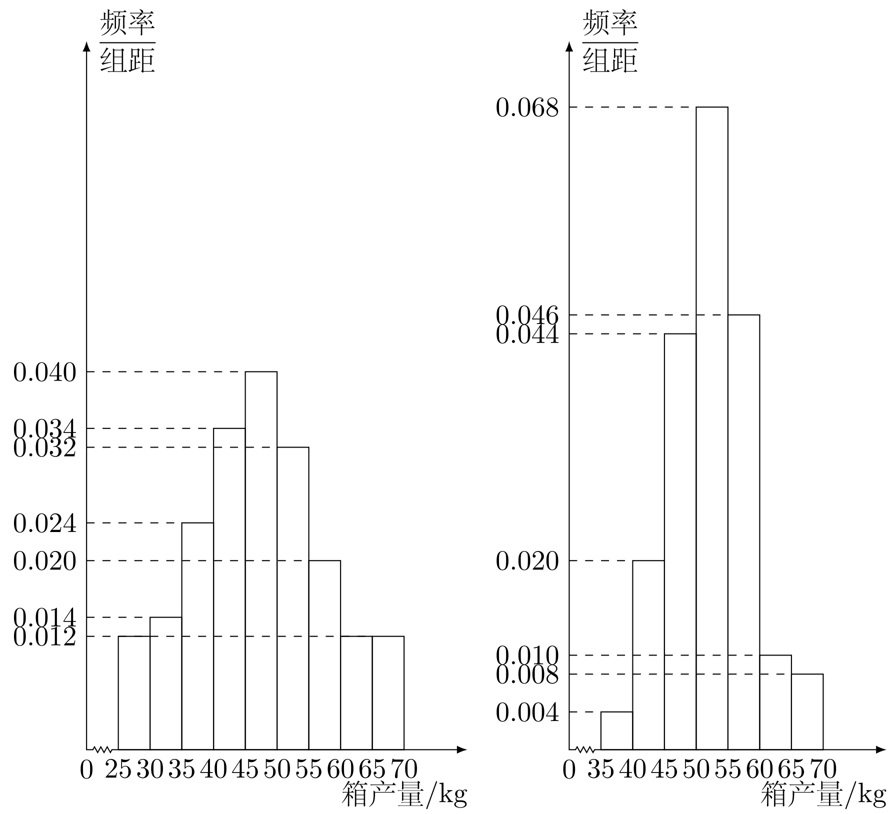
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b.

18. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



旧养殖法　　新养殖法

(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg”, 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

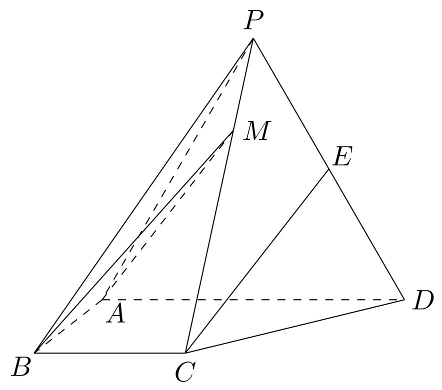
(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90°$, E 是 PD 的中点.
(1) 证明: 直线 $CE\parallel$ 平面 PAB;
(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 $45°$, 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
(1) 求点 P 的轨迹方程;
(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geqslant 0$.
(1) 求 a;
(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0, 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:
(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;
(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A\cup B=$ （ ）

(A) $\{1,2,3,4\}$ (B) $\{1,2,3\}$ (C) $\{2,3,4\}$ (D) $\{1,3,4\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ （ ）

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+3\mathrm{i}$ (C) $3+\mathrm{i}$ (D) $3+3\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 （ ）

(A) 4π (B) 2π (C) π (D) $\dfrac{\pi}{2}$

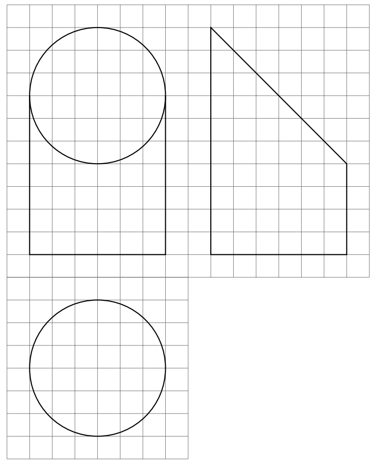
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 （ ）

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ (B) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ (C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ (D) $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

5. 若 $a>1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(\sqrt{2},+\infty)$ (B) $(\sqrt{2},2)$ (C) $(1,\sqrt{2})$ (D) $(1,2)$

6. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为（ ）



(A) 90π (B) 63π (C) 42π (D) 36π

7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\ 2x-3y+3\geqslant 0\\ y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是（ ）

(A) -15 (B) -9 (C) 1 (D) 9

8. 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间为 （ ）

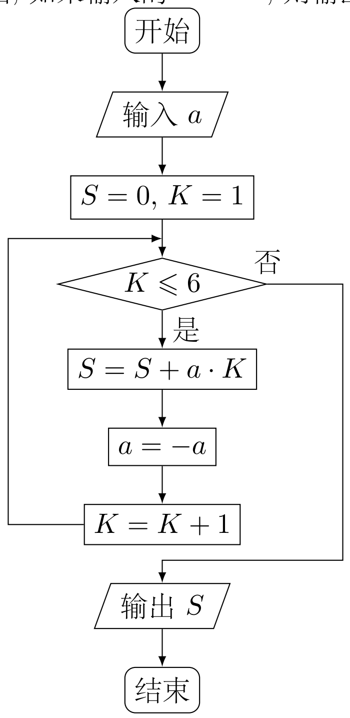
(A) $(-\infty,-2)$ (B) $(-\infty,1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(4,+\infty)$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 （ ）

(A) 乙可以知道四人的成绩 (B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩 (D) 乙、丁可以知道自己的成绩

10. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

11. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张, 放回后再随机抽取 1 张, 则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

12. 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F, 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴上方), l 为 C 的准线, 点 N 在 l 上, 且 $MN\perp l$, 则 M 到直线 NF 的距离为 （ ）

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{3}$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为______.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=2x^3+x^2$, 则 $f(2)=$______.

15. 长方体的长、宽、高分别为 3, 2, 1, 其顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为______.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$, 则 $B=$______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, $a_1=-1$, $b_1=1$, $a_2+b_2=2$.

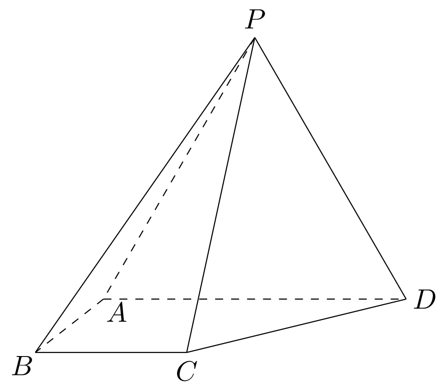
(1) 若 $a_3+b_3=5$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_3=21$, 求 S_3.

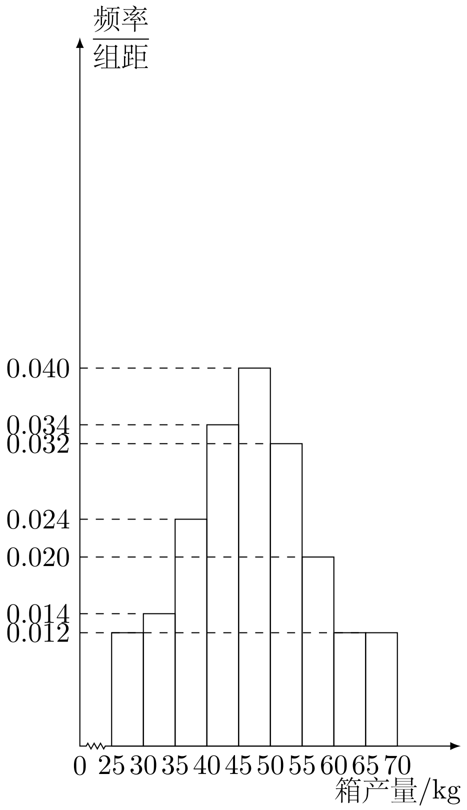
18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$.

(1) 证明: 直线 $BC\parallel$ 平面 PAD;

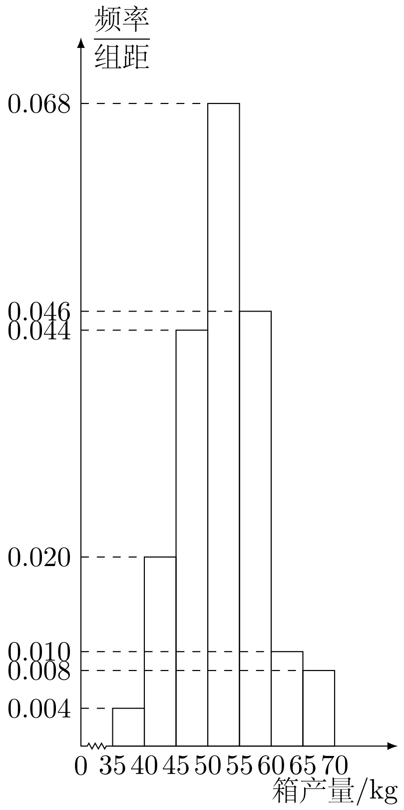
(2) 若 $\triangle PCD$ 面积为 $2\sqrt{7}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



旧养殖法



新养殖法

(1) 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg”, 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的优劣进行比较.

附:

$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

,

$$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}.$$

20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 设函数 $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x$.

(1) 讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f\left(x\right)\leqslant ax+1$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:

(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;

(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

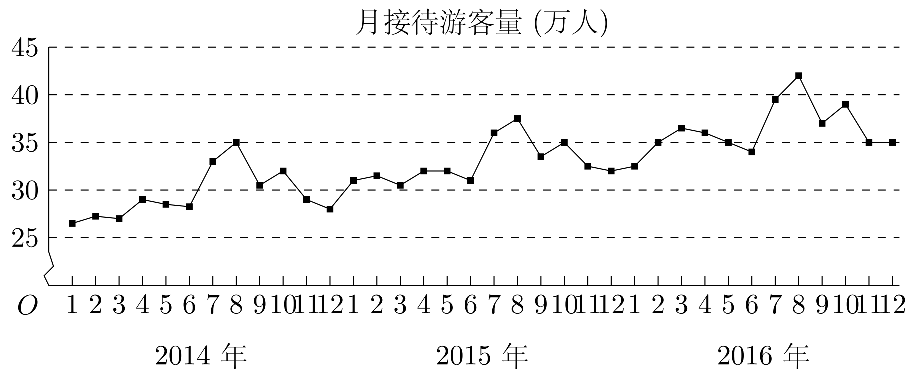
1. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|y=x\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

2. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\,z=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是 ( )

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. $(x+y)\,(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为 ( )

(A) -80　(B) -40　(C) 40　(D) 80

5. 已知双曲线 $C:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　(B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　(C) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　(D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 ( )

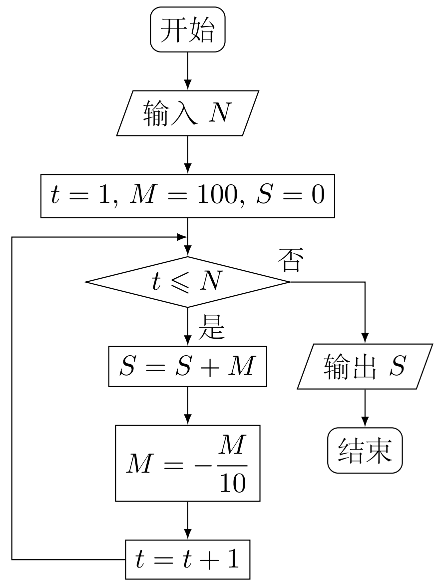
(A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π

(B) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

(C) $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

(D) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

7. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为 ( )



(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

8. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为 ( )

(A) π　(B) $\frac{3\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0, 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为 ( )

(A) -24　(B) -3　(C) 3　(D) 8

10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$ ( )

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 ( )

(A) 3　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-4y$ 的最小值为______.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$, 则 $a_4=$______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\leqslant 0\\ 2^x,\ x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 有下列结论:

① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角;

② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角;

③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°;

④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60°;

其中正确的是______. (填写所有正确结论的编号)

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$, $a=2\sqrt{7}$, $b=2$.

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

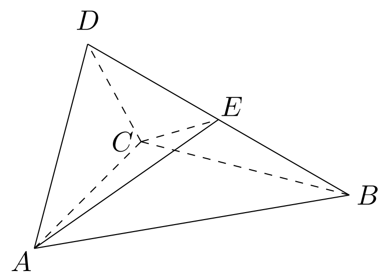
最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

(1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;

(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD$.
(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC;
(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E, 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



20. 已知抛物线 C: $y^2 = 2x$, 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
(1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;
(2) 设圆 M 过点 $P(4, -2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = x - 1 - a\ln x$.
(1) 若 $f(x) \geqslant 0$, 求 a 的值;
(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < m$, 求 m 的最小值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = kt \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + m \\ y = \dfrac{m}{k} \end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3 : $\rho(\cos\theta + \sin\theta) - \sqrt{2} = 0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x) = |x+1| - |x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x) \geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x) \geqslant x^2 - x + m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

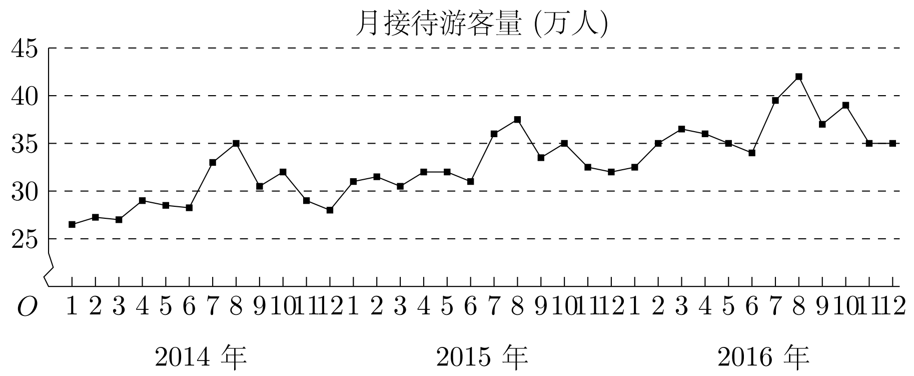
1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}\,(-2+\mathrm{i})$ 的点位于　(　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是　(　)

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=$　(　)

(A) $-\dfrac{7}{9}$　　(B) $-\dfrac{2}{9}$　　(C) $\dfrac{2}{9}$　　(D) $\dfrac{7}{9}$

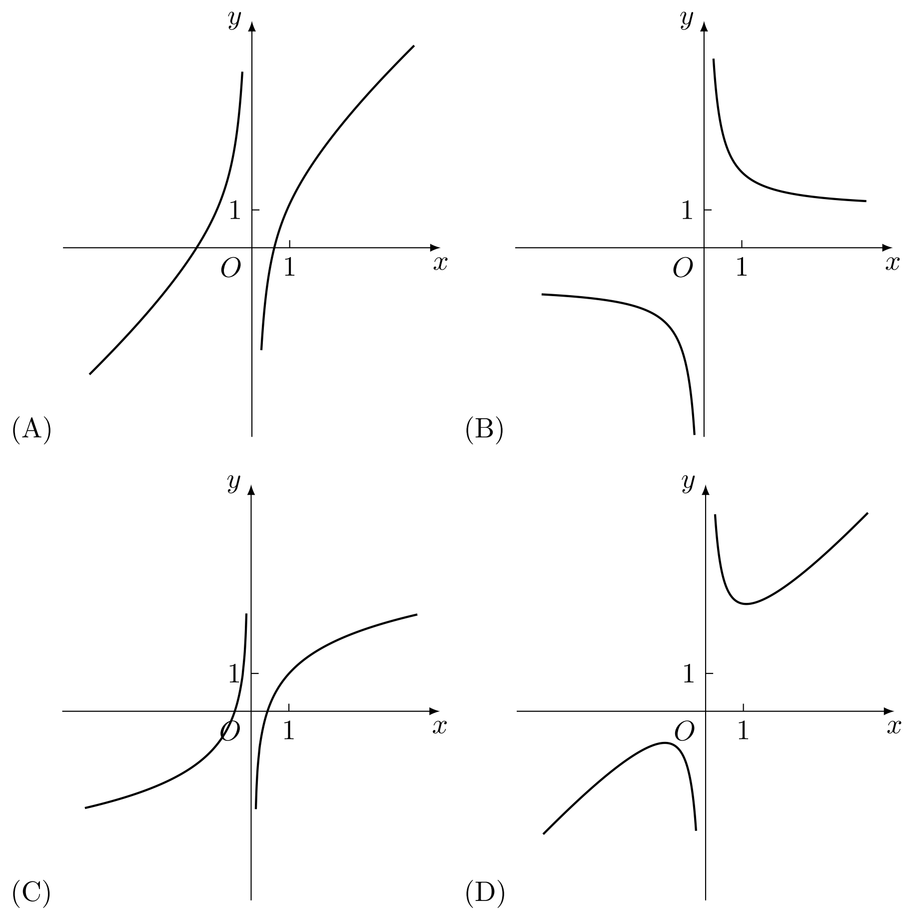
5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-y$ 的取值范围是(　)

(A) $[-3,0]$　　(B) $[-3,2]$　　(C) $[0,2]$　　(D) $[0,3]$

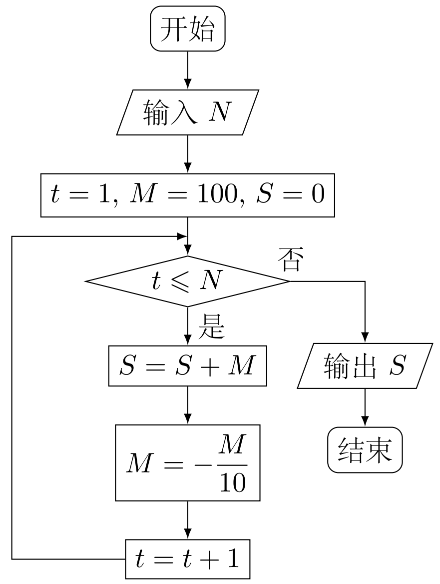
6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　(　)

(A) $\dfrac{6}{5}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

7. 函数 $y=1+x+\dfrac{\sin x}{x^2}$ 的部分图象大致为　(　)



8. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为　(　)



(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

9. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为　(　)

(A) π　　(B) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

10. 在正方体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 的中点, 则　(　)

(A) $A_1E\perp DC_1$　(B) $A_1E\perp BD$　(C) $A_1E\perp BC_1$　(D) $A_1E\perp AC$

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$　(　)

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1\,(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{5}x$, 则 $a=$______.

15. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $C=60^\circ$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$, 则 $A=$______.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\leqslant 0\\ 2^x,\ x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)\,a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

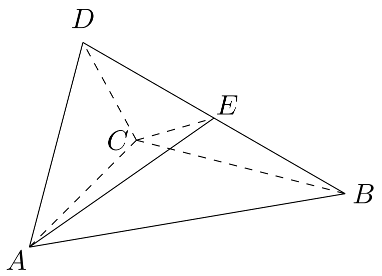
(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.
(1) 估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率;
(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率.

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD=CD$.
(1) 证明: $AC\perp BD$;
(2) 已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形, $AB=BD$, 若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点, 且 $AE\perp EC$, 求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



20. 在直角坐标系中 xOy, 曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 C 的坐标为 $(0,1)$, 当 m 变化时, 解答下列问题:
(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况? 说明理由;
(2) 证明过 A, B, C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $a<0$ 时, 证明 $f(x)\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\ y=kt\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m\\ y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3 : $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （ ）

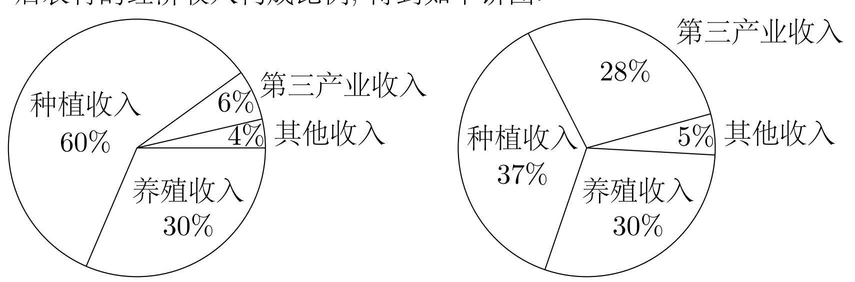
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

(A) $\{x \mid -1<x<2\}$ (B) $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x \mid x<-1\}\cup\{x \mid x>2\}$ (D) $\{x \mid x\leqslant -1\}\cup\{x \mid x\geqslant 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例 建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 （ ）

(A) 新农村建设后, 种植收入减少

(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上

(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍

(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3=S_2+S_4$, $a_1=2$, 则 $a_5=$( )

(A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12

5. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （ ）

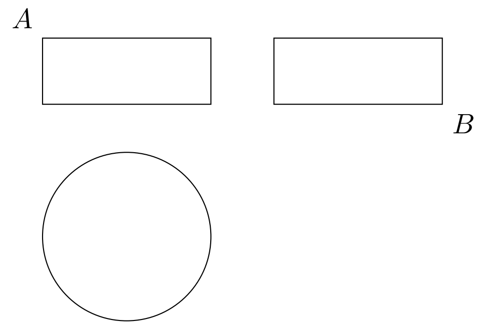
(A) $y=-2x$ (B) $y=-x$ (C) $y=2x$ (D) $y=x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=$（ ）

(A) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (B) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (D) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A, 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B, 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 （ ）



(A) $2\sqrt{17}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 2

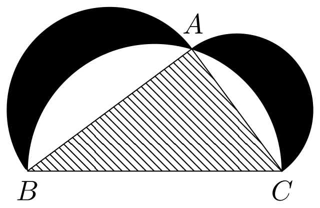
8. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$ （ ）

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,0)$ (B) $[0,+\infty)$ (C) $[-1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

10. 如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC, 直角边 AB, AC. $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1, p_2, p_3, 则 （ ）



(A) $p_1=p_2$ (B) $p_1=p_3$ (C) $p_2=p_3$ (D) $p_1=p_2+p_3$

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N. 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN|=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

12. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=2a_n+1$, 则 $S_6=$______.

15. 从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有______种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是______.

三、解答题

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle A=45^\circ$, $AB=2$, $BD=5$.

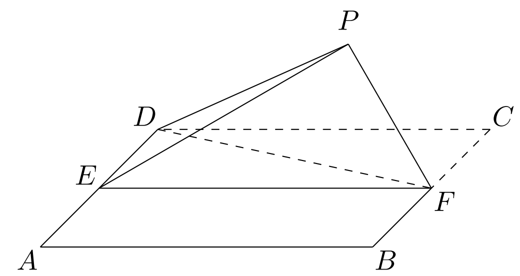
(1) 求 $\cos\angle ADB$;

(2) 若 $DC=2\sqrt{2}$, 求 BC.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕, 把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF\perp BF$.

(1) 证明: 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$;

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2,0)$.
(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA=\angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p $(0<p<1)$, 且各件产品是否为不合格品相互独立.
(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0;
(2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.
① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X, 求 EX;
② 以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 证明: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.
(1) 求 C_2 的直角坐标方程;
(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;
(2) 若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{0,2\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

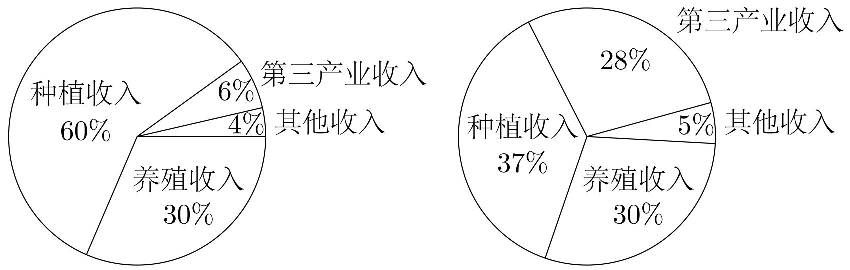
(A) $\{0,2\}$ (B) $\{1,2\}$

(C) $\{0\}$ (D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （ ）

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例　　建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 （ ）

(A) 新农村建设后, 种植收入减少

(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上

(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍

(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2, 过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形, 则该圆柱的表面积为 （ ）

(A) $12\sqrt{2}\pi$ (B) 12π (C) $8\sqrt{2}\pi$ (D) 10π

6. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $y=-2x$ (B) $y=-x$ (C) $y=2x$ (D) $y=x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (B) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (D) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$, 则 （ ）

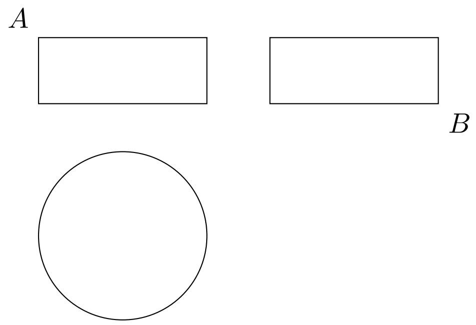
(A) $f(x)$ 的最小正周期为 π, 最大值为 3

(B) $f(x)$ 的最小正周期为 π, 最大值为 4

(C) $f(x)$ 的最小正周期为 2π, 最大值为 3

(D) $f(x)$ 的最小正周期为 2π, 最大值为 4

9. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A, 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B, 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 （ ）



(A) $2\sqrt{17}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 2

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30°, 则该长方体的体积为 （ ）

(A) 8 (B) $6\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{3}$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1,a)$, $B(2,b)$, 且 $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $|a-b|=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) 1

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,-1]$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(-1,0)$ (D) $(-\infty,0)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$, 若 $f(3)=1$, 则 $a=$______.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

15. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$, $b^2+c^2-a^2=8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $na_{n+1}=2(n+1)a_n$, 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3;

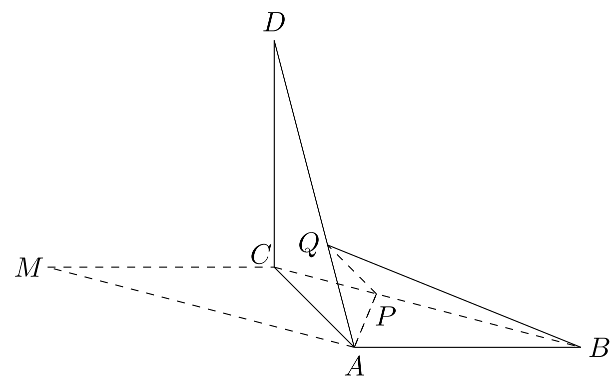
(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB=AC=3$, $\angle ACM=90^\circ$, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB\perp DA$.

(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;

(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点, 且 $BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.



19. 某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据 (单位: m^3) 和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

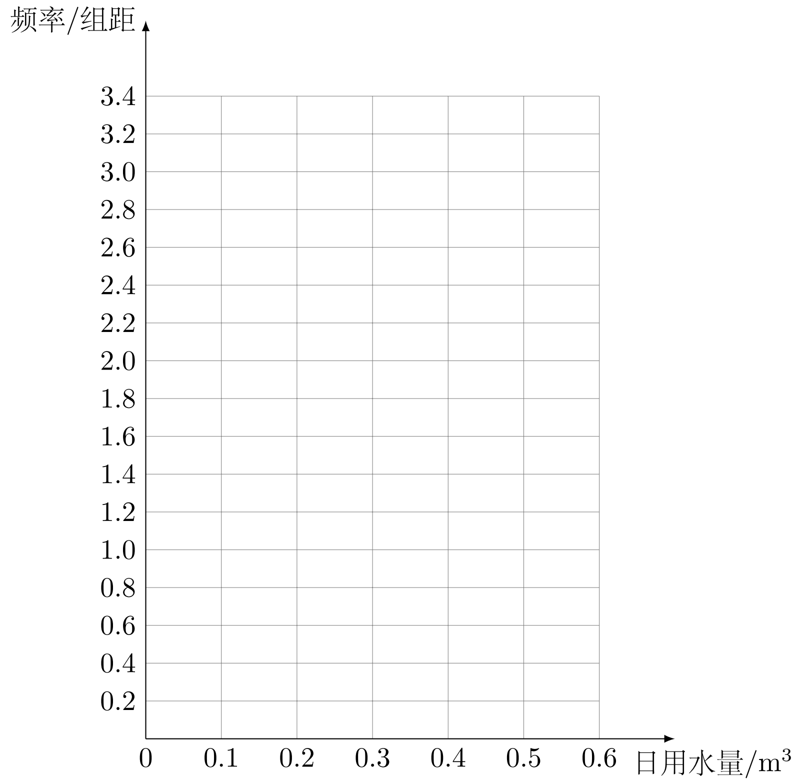
未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$
频数	1	3	2	4
日用水量	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$	$[0.6,0.7)$	
频数	9	26	5	

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$
频数	1	5	13
日用水量	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$
频数	10	16	5

(1) 在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图:



(2) 估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于 0.35 m^3 的概率;
(3) 估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)

20. 设抛物线 $C: y^2=2x$, 点 $A(2,0)$, $B(-2,0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.
(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程;
(2) 证明: $\angle ABM=\angle ABN$.

21. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$.
(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 证明: 当 $a \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f(x) \geqslant 0$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.
(1) 求 C_2 的直角坐标方程;
(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;
(2) 若 $x \in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

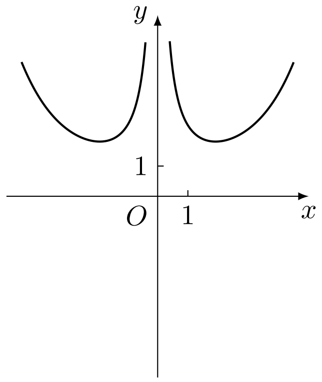
1. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(C) $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

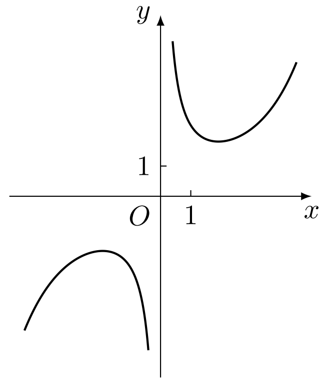
2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为 ( )

(A) 9　(B) 8　(C) 5　(D) 4

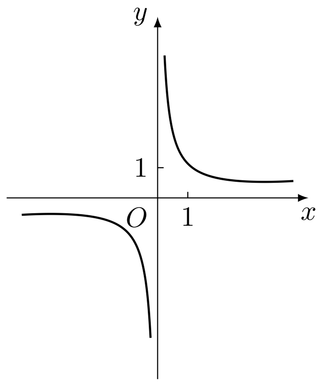
3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ( )



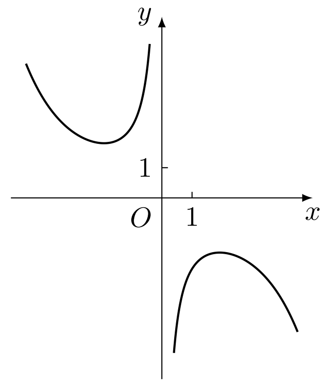
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ ( )

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

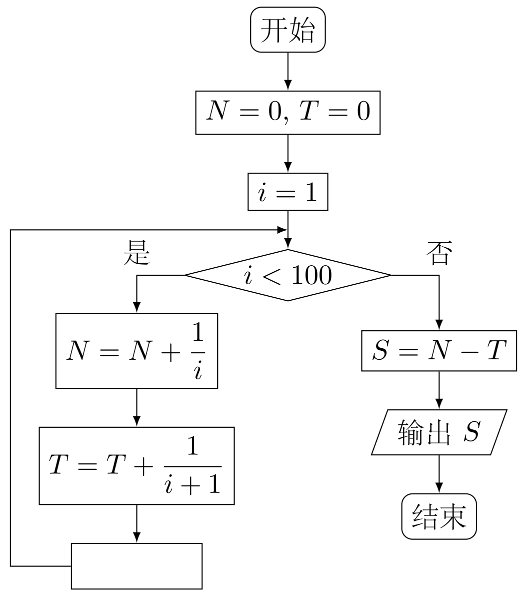
5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为( )

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$　(B) $y=\pm\sqrt{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　(D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=$ ( )

(A) $4\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{30}$　(C) $\sqrt{29}$　(D) $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ( )



(A) $i=i+1$　(B) $i=i+2$　(C) $i=i+3$　(D) $i=i+4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”, 如 $30=7+23$. 在不超过 30 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 30 的概率是( )

(A) $\dfrac{1}{12}$　(B) $\dfrac{1}{14}$　(C) $\dfrac{1}{15}$　(D) $\dfrac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ ( )

(A) -50　(B) 0　(C) 2　(D) 50

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左, 右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P=120^\circ$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

13. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

15. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$, $\cos\alpha+\sin\beta=0$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$______.

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45°, 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为______.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

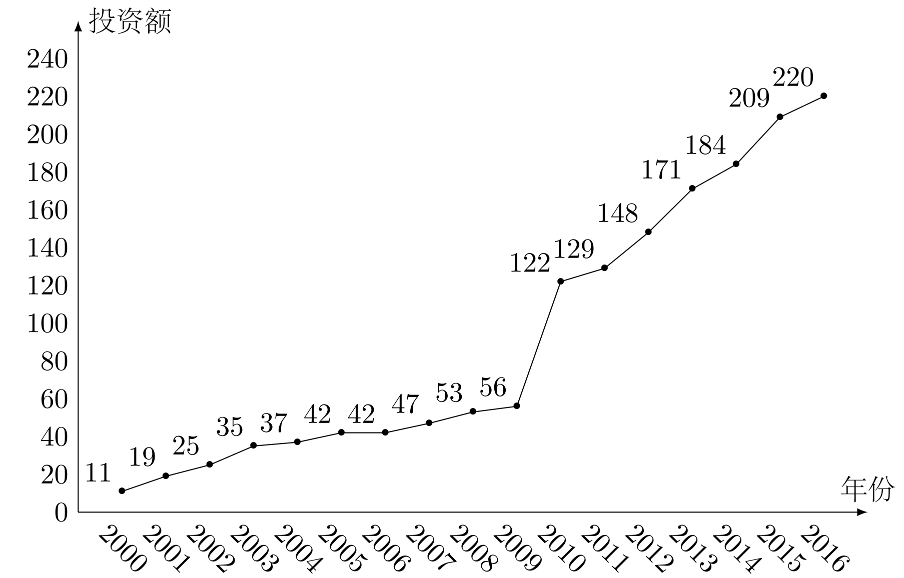
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 17$) 建立模型①: $\hat{y}=-30.4+13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 7$) 建立模型②: $\hat{y}=99+17.5t$.

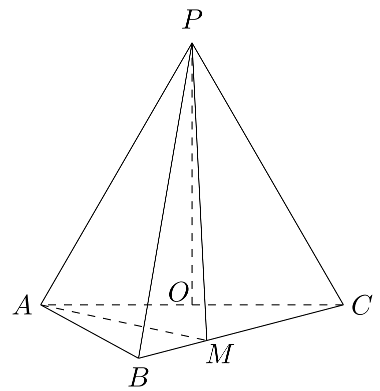
(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 k $(k > 0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$.
(1) 求 l 的方程;
(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.
(1) 证明: $PO \perp$ 平面 ABC;
(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且二面角 $M-PA-C$ 为 $30°$, 求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - ax^2$.
(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 1$;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数).
(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

23. 设函数 $f(x) = 5 - |x + a| - |x - 2|$.
(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geqslant 0$ 的解集;
(2) 若 $f(x) \leqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. $\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=$ （ ）

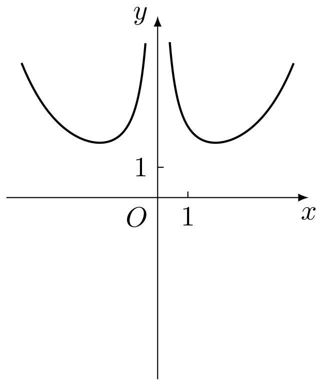
(A) $3-2\mathrm{i}$ (B) $3+2\mathrm{i}$ (C) $-3-2\mathrm{i}$ (D) $-3+2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

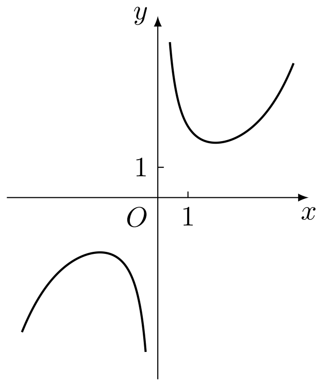
(A) $\{3\}$ (B) $\{5\}$

(C) $\{3,5\}$ (D) $\{1,2,3,4,5,7\}$

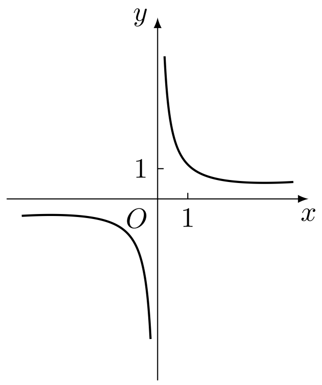
3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 （ ）



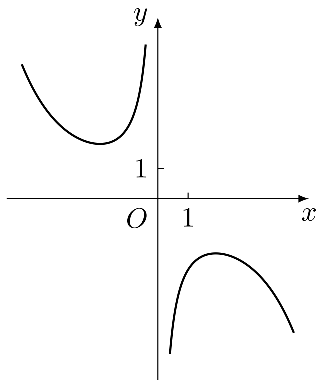
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

5. 从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务, 则选中的 2 人都是女同学的概率为 （ ）

(A) 0.6 (B) 0.5 (C) 0.4 (D) 0.3

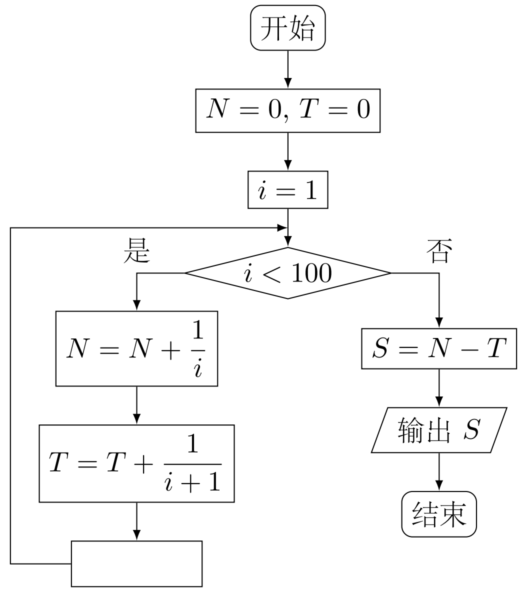
6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为（ ）

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$ (B) $y=\pm\sqrt{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=$ （ ）

(A) $4\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{30}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $2\sqrt{5}$

8. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 （ ）



(A) $i=i+1$ (B) $i=i+2$ (C) $i=i+3$ (D) $i=i+4$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{3\pi}{4}$ (D) π

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, 若 $PF_1\perp PF_2$, 且 $\angle PF_2F_1=60^\circ$, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (D) $\sqrt{3}-1$

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ （ ）

(A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

二、填空题

13. 曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为______.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

15. 已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$, 则 $\tan\alpha=$______.

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 互相垂直, SA 与圆锥底面所成角为 30°, 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8, 则该圆锥的体积为______.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

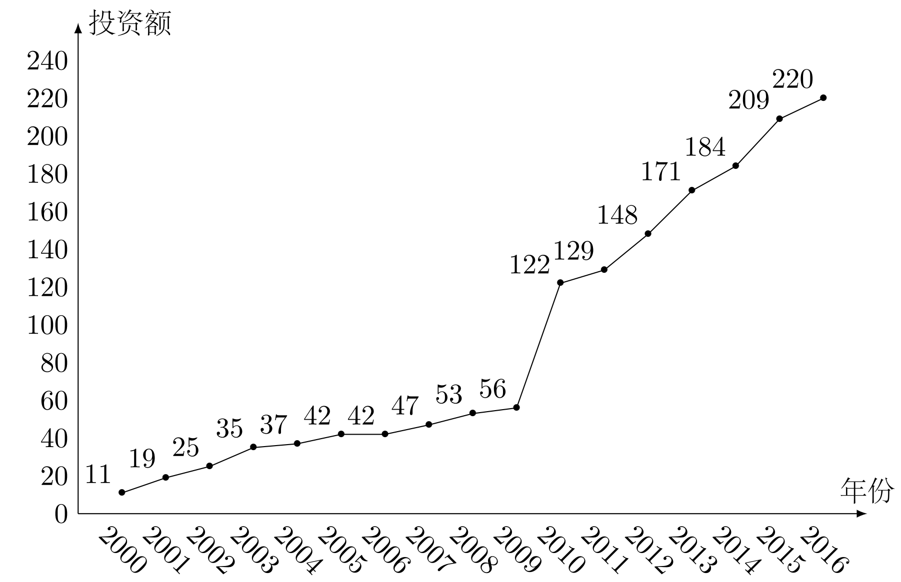
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,17$) 建立模型①: $\hat{y}=-30.4+13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,7$) 建立模型②: $\hat{y}=99+17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

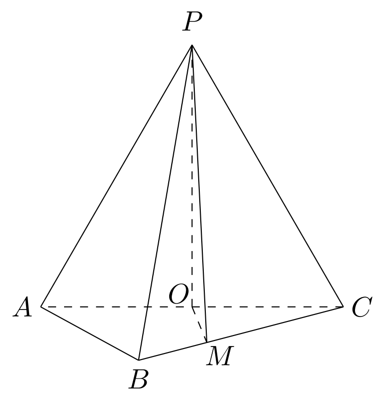
(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=2\sqrt{2}$, $PA=PB=PC=AC=4$, O 为 AC 的中点.

(1) 证明: $PO\perp$ 平面 ABC;

(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且 $MC=2MB$, 求点 C 到平面 POM 的距离.



20. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1) 若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$, 求 l 的斜率.

23. 设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\leqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

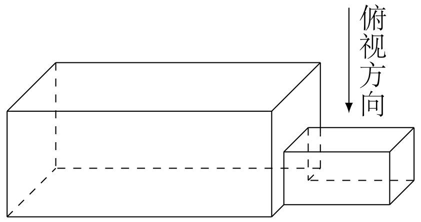
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

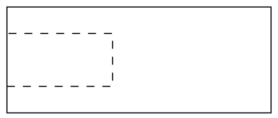
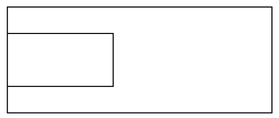
(A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

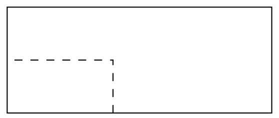
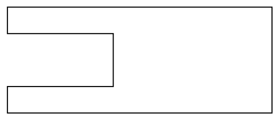
2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$ ( )

(A) $-3-\mathrm{i}$ (B) $-3+\mathrm{i}$ (C) $3-\mathrm{i}$ (D) $3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 ( )



(A)  (B) 

(C)  (D) 

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{8}{9}$ (B) $\dfrac{7}{9}$ (C) $-\dfrac{7}{9}$ (D) $-\dfrac{8}{9}$

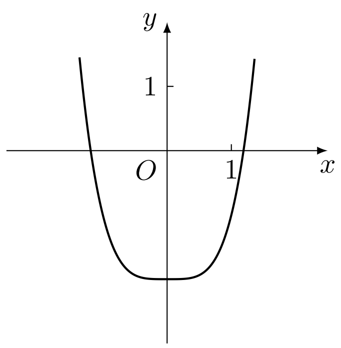
5. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 ( )

(A) 10 (B) 20 (C) 40 (D) 80

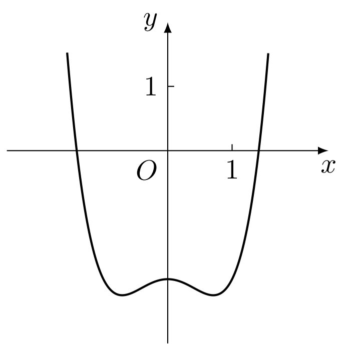
6. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ( )

(A) $[2,6]$ (B) $[4,8]$ (C) $\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$ (D) $\left[2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

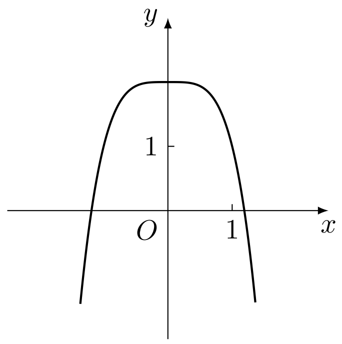
7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为 ( )



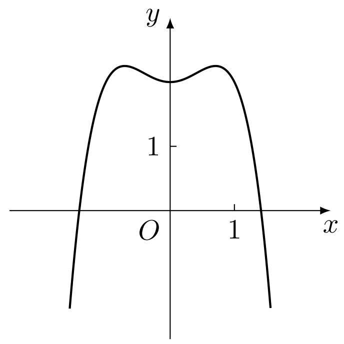
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p, 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX=2.4$, $P(X=4)<P(X=6)$, 则 $p=$ ( )

(A) 0.7 (B) 0.6 (C) 0.4 (D) 0.3

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 则 $C=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

10. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 ( )

(A) $12\sqrt{3}$ (B) $18\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $54\sqrt{3}$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点, O 是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P. 若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

12. 设 $a=\log_{0.2}0.3$, $b=\log_2 0.3$, 则 ( )

(A) $a+b<ab<0$ (B) $ab<a+b<0$

(C) $a+b<0<ab$ (D) $ab<0<a+b$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-2)$, $\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\lambda=$______.

14. 曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2, 则 $a=$______.

15. 函数 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 的零点个数为______.

16. 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C: $y^2=4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB=90^\circ$, 则 $k=$______.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_5=4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$, 求 m.

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

(1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;

(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m, 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

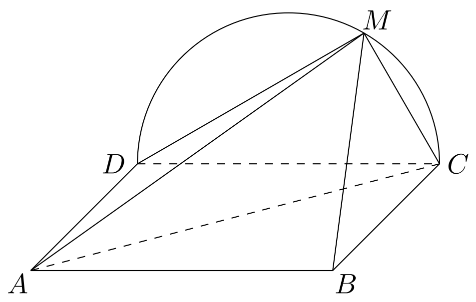
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC;

(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1,m)\quad(m>0)$.

(1) 证明: $k<-\dfrac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$. 证明: $\left|\overrightarrow{FA}\right|$, $\left|\overrightarrow{FP}\right|$, $\left|\overrightarrow{FB}\right|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

21. 已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$, 证明: 当 $-1<x<0$ 时, $f(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

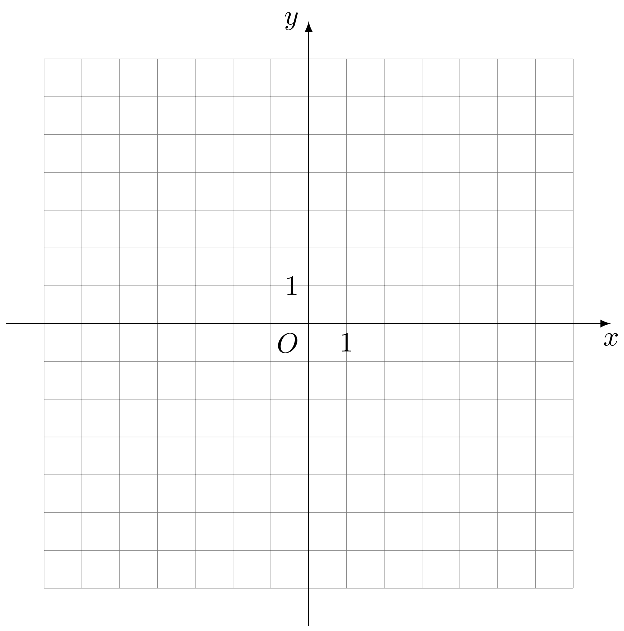
(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. 设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $f(x)\leqslant ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

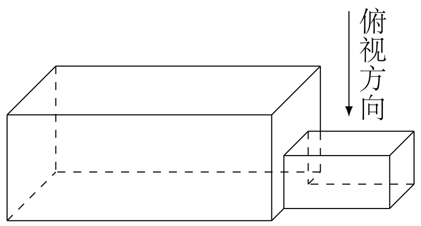
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

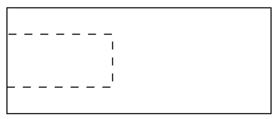
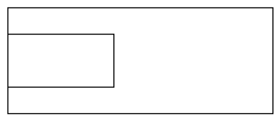
(A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

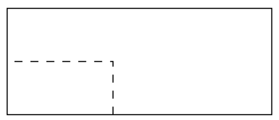
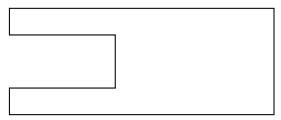
2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$ （ ）

(A) $-3-\mathrm{i}$ (B) $-3+\mathrm{i}$ (C) $3-\mathrm{i}$ (D) $3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 （ ）



(A)  (B) 

(C)  (D) 

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{8}{9}$ (B) $\dfrac{7}{9}$ (C) $-\dfrac{7}{9}$ (D) $-\dfrac{8}{9}$

5. 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45, 既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15, 则不用现金支付的概率为 （ ）

(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.7

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

7. 下列函数中, 其图象与函数 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的是（ ）

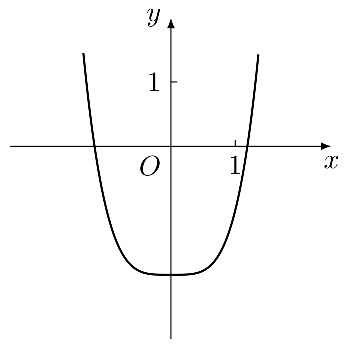
(A) $y=\ln(1-x)$ (B) $y=\ln(2-x)$

(C) $y=\ln(1+x)$ (D) $y=\ln(2+x)$

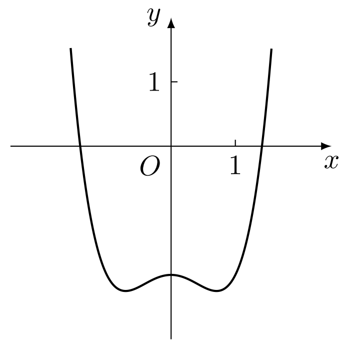
8. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 （ ）

(A) $[2,6]$ (B) $[4,8]$ (C) $\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$ (D) $\left[2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

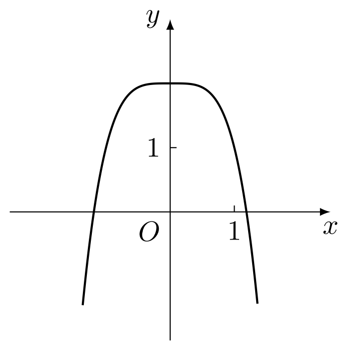
9. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为 （ ）



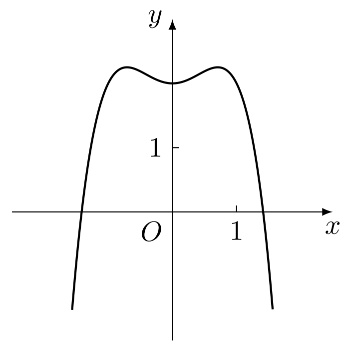
(A)



(B)



(C)



(D)

10. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 则 $C=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

12. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 （ ）

(A) $12\sqrt{3}$ (B) $18\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $54\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-2)$, $\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\lambda=$______.

14. 某公司有大量客户, 且不同龄段客户对其服务的评价有较大差异. 为了解客户的评价, 该公司准备进行抽样调查, 可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样, 则最合适的抽样方法是______.

15. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0\\ x-2y+4\geqslant 0\\ x-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 的最大值是______.

16. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1$, $f(a)=4$, 则 $f(-a)=$______.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_5=4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$, 求 m.

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

(1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;

(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m, 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

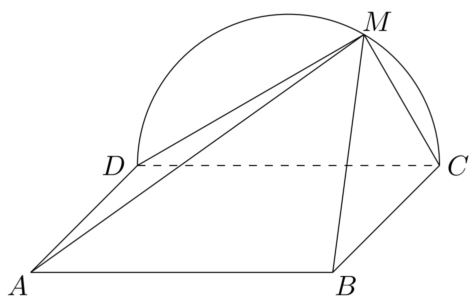
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC;

(2) 在线段 AM 上是否存在点 P, 使得 $MC \parallel$ 平面 PBD? 说明理由.



20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1,m)\quad(m>0)$.

(1) 证明: $k<-\dfrac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$. 证明: $2\left|\overrightarrow{FP}\right|=\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geqslant 1$ 时, $f(x)+\mathrm{e} \geqslant 0$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

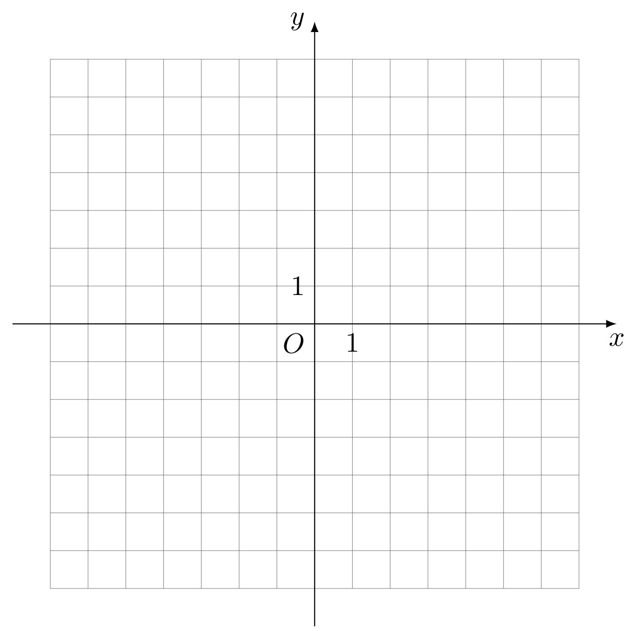
(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. 设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0,+\infty)$ 时, $f(x) \leqslant ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$, $N=\{x|x^2-x-6<0\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{x|-4<x<3\}$　(B) $\{x|-4<x<-2\}$
(C) $\{x|-2<x<2\}$　(D) $\{x|2<x<3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, z 在复平面内对应的点为 (x,y), 则 （　）

(A) $(x+1)^2+y^2=1$　(B) $(x-1)^2+y^2=1$
(C) $x^2+(y-1)^2=1$　(D) $x^2+(y+1)^2=1$

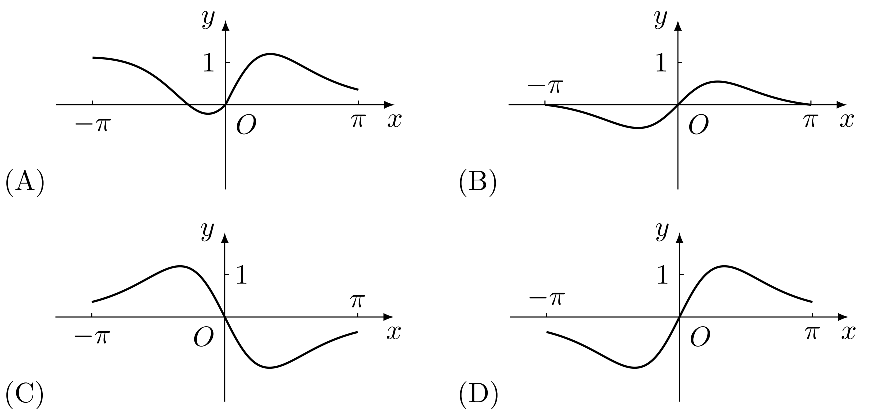
3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $c<a<b$　(D) $b<c<a$

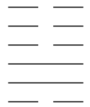
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 （　）

(A) 165 cm　(B) 175 cm　(C) 185 cm　(D) 190 cm

5. 函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （　）



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是 （　）

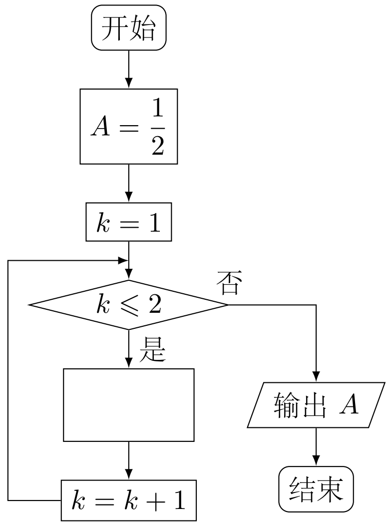


(A) $\frac{5}{16}$　(B) $\frac{11}{32}$　(C) $\frac{21}{32}$　(D) $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （　）

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{2\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{6}$

8. 如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 （　）



(A) $A=\frac{1}{2+A}$　(B) $A=2+\frac{1}{A}$　(C) $A=\frac{1}{1+2A}$　(D) $A=1+\frac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则 （　）

(A) $a_n=2n-5$　(B) $a_n=3n-10$　(C) $S_n=2n^2-8n$　(D) $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　(B) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　(C) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:
① $f(x)$ 是偶函数;
② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增;
③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点;
④ $f(x)$ 的最大值为 2.
其中所有正确结论的编号是 （　）

(A) ①②④　(B) ②④　(C) ①④　(D) ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF=90°$, 则球 O 的体积为 （　）

(A) $8\sqrt{6}\pi$　(B) $4\sqrt{6}\pi$　(C) $2\sqrt{6}\pi$　(D) $\sqrt{6}\pi$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$______.

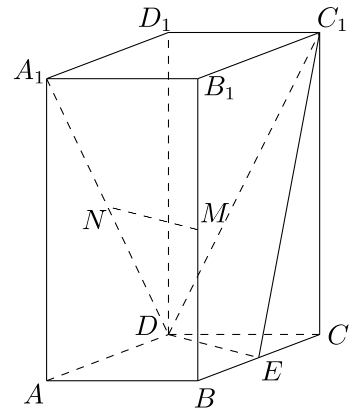
15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4 : 1 获胜的概率是______.

16. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.
(1) 求 A;
(2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

18. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60°$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.
(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 C_1DE;
(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19. 已知抛物线 C: $y^2 = 3x$ 的焦点为 F, 斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B, 与 x 轴的交点为 P.
(1) 若 $|AF| + |BF| = 4$, 求 l 的方程;
(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

20. 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:
(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;
(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β, 一轮试验中甲药的得分记为 X.
(1) 求 X 的分布列;
(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, p_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 表示"甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效"的概率, 则 $p_0 = 0$, $p_8 = 1$, $p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$, 其中 $a = P(X=-1)$, $b = P(X=0)$, $c = P(X=1)$. 假设 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$.
① 证明: $\{p_{i+1} - p_i\}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ 为等比数列;
② 求 p_4, 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.
(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:
(1) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leqslant a^2 + b^2 + c^2$;
(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geqslant 24$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$, 则 $|z|=$ （ ）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

2. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,6,7\}$, 则 $B\cap \complement_U A=$ （ ）

(A) $\{1,6\}$　(B) $\{1,7\}$　(C) $\{6,7\}$　(D) $\{1,6,7\}$

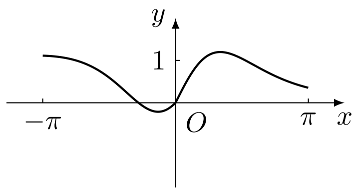
3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $c<a<b$　(D) $b<c<a$

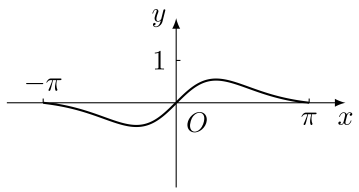
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的"断臂维纳斯"便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 （ ）

(A) 165 cm　(B) 175 cm　(C) 185 cm　(D) 190 cm

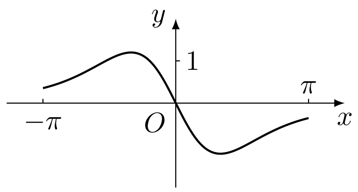
5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （ ）



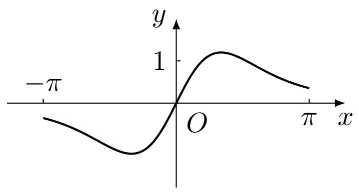
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 某学校为了解 1000 名新生的身体素质, 将这些学生编号为 1, 2, $\cdots$, 1000, 从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验. 若 46 号学生被抽到, 则下面 4 名学生中被抽到的是 （ ）

(A) 8 号学生　(B) 200 号学生　(C) 616 号学生　(D) 815 号学生

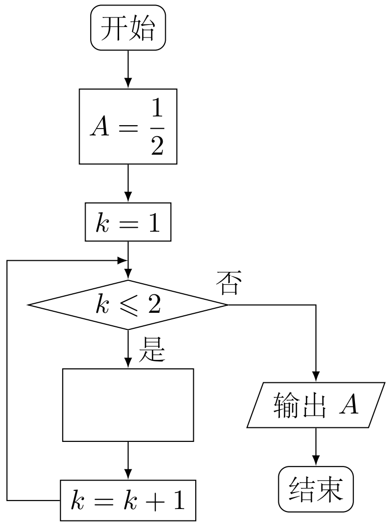
7. $\tan 255^\circ=$ （ ）

(A) $-2-\sqrt{3}$　(B) $-2+\sqrt{3}$　(C) $2-\sqrt{3}$　(D) $2+\sqrt{3}$

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 （ ）



(A) $A=\dfrac{1}{2+A}$　(B) $A=2+\dfrac{1}{A}$　(C) $A=\dfrac{1}{1+2A}$　(D) $A=1+\dfrac{1}{2A}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $2\sin 40^\circ$　(B) $2\cos 40^\circ$　(C) $\dfrac{1}{\sin 50^\circ}$　(D) $\dfrac{1}{\cos 50^\circ}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$, 则 $\dfrac{b}{c}=$ （ ）

(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=1$, $S_3=\dfrac{3}{4}$, 则 $S_4=$______.

15. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为______.

16. 已知 $\angle ACB=90^\circ$, P 为平面 ABC 外一点, $PC=2$, 点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为______.

三、解答题

17. 某商场为提高服务质量, 随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客, 每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价, 得到如表列联表:

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

(1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率;

(2) 能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异?

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9=-a_5$.

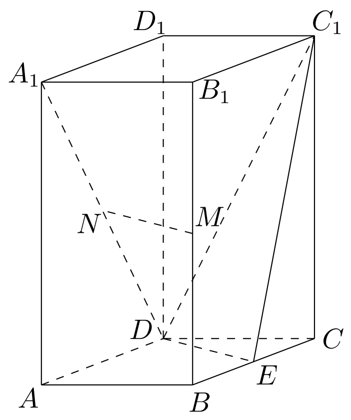
(1) 若 $a_3=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1>0$, 求使得 $S_n\geqslant a_n$ 的 n 的取值范围.

19. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN \mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 C_1DE;

(2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.



20. 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点;

(2) 若 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geqslant ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB|=4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x+2=0$ 相切.

(1) 若 A 在直线 $x+y=0$ 上, 求 $\odot M$ 的半径;

(2) 是否存在定点 P, 使得当 A 运动时, $|MA|-|MP|$ 为定值? 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$;

(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6>0\}$, $B=\{x\mid x-1<0\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(-\infty,1)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(-3,-1)$　(D) $(3,+\infty)$

2. 设 $z=-3+2\mathrm{i}$, 则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,t)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ （ ）

(A) -3　(B) -2　(C) 2　(D) 3

4. 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆, 我国航天事业取得又一重大成就, 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题, 发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”, 鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行. L_2 点是平衡点, 位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1, 月球质量为 M_2, 地月距离为 R, L_2 点到月球的距离为 r, 根据牛顿运动定律和万有引力定律, r 满足方程: $\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$. 设 $\alpha=\dfrac{r}{R}$, 由于 α 的值很小, 因此在近似计算中 $\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$, 则 r 的近似值为 （ ）

(A) $\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$　(B) $\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$　(C) $\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{M_1}}R$　(D) $\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

5. 演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分, 评定该选手的成绩时, 从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分, 得到 7 个有效评分. 7 个有效评分与 9 个原始评分相比, 不变的数字特征是 （ ）

(A) 中位数　(B) 平均数　(C) 方差　(D) 极差

6. 若 $a>b$, 则 （ ）

(A) $\ln(a-b)>0$　(B) $3^a<3^b$　(C) $a^3-b^3>0$　(D) $|a|>|b|$

7. 设 α,β 为两个平面, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是 （ ）

(A) α 内有无数条直线与 β 平行　(B) α 内有两条相交直线与 β 平行

(C) α,β 平行于同一条直线　(D) α,β 垂直于同一平面

8. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点, 则 $p=$ （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 8

9. 下列函数中, 以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是 （ ）

(A) $f(x)=|\cos 2x|$　(B) $f(x)=|\sin 2x|$

(C) $f(x)=\cos|x|$　(D) $f(x)=\sin|x|$

10. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$, 则 $\sin\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt5}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt3}{3}$　(D) $\dfrac{2\sqrt5}{5}$

11. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt2$　(B) $\sqrt3$　(C) 2　(D) $\sqrt5$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$, 都有 $f(x)\geqslant-\dfrac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$　(C) $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　(D) $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题

13. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为______.

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x<0$ 时, $f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$, 则 $a=$______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $b=6$, $a=2c$, $B=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有______个面, 其棱长为______.

图 1

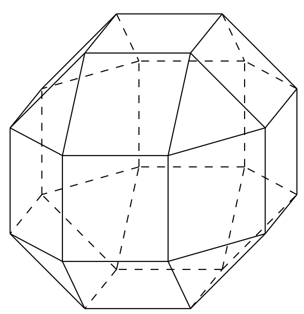


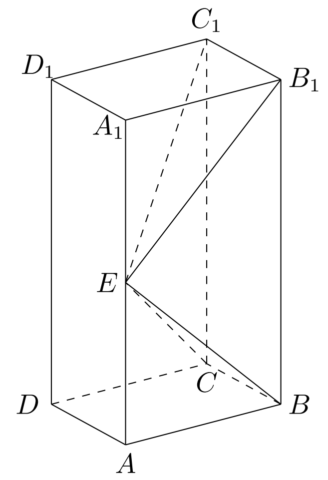
图 2

三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE\perp EC_1$.

(1) 证明: $BE\perp$ 平面 EB_1C_1;

(2) 若 $AE=A_1E$, 求二面角 B–EC–C_1 的正弦值.



18. 11 分制乒乓球比赛, 每赢一球得 1 分, 当某局打成 $10:10$ 平后, 每球交换发球权, 先多得 2 分的一方获胜, 该局比赛结束. 甲、乙两位同学进行单打比赛, 假设甲发球时甲得分的概率为 0.5, 乙发球时甲得分的概率为 0.4, 各球的结果相互独立. 在某局双方 $10:10$ 平后, 甲先发球, 两人又打了 X 个球该局比赛结束.

(1) 求 $P(X=2)$;

(2) 求事件“$X=4$ 且甲获胜”的概率.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$, $b_1=0$, $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1) 证明: $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

20. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

21. 已知点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;

(2) 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE\perp x$ 轴, 垂足为 E, 连接 QE 并延长交 C 于点 G.

① 证明: $\triangle PQG$ 是直角三角形;

② 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0,\theta_0)$ $(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P.

(1) 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;

(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. 已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)<0$ 的解集;

(2) 若 $x\in(-\infty,1]$ 时, $f(x)<0$, 求 a 的取值范围.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>-1\}$, $B=\{x\mid x<2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(-1,+\infty)$ (B) $(-\infty,2)$ (C) $(-1,2)$ (D) $\varnothing$

2. 设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$, 则 $\overline{z}=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $-1+2\mathrm{i}$ (C) $1-2\mathrm{i}$ (D) $-1-2\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,2)$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $5\sqrt{2}$ (D) 50

4. 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{5}$

5. 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.

甲: 我的成绩比乙高.

乙: 丙的成绩比我和甲的都高.

丙: 我的成绩比乙高.

成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 （ ）

(A) 甲、乙、丙 (B) 乙、甲、丙 (C) 丙、乙、甲 (D) 甲、丙、乙

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x-1$, 则当 $x<0$ 时, $f(x)=$（ ）

(A) $\mathrm{e}^{-x}-1$ (B) $\mathrm{e}^{-x}+1$ (C) $-\mathrm{e}^{-x}-1$ (D) $-\mathrm{e}^{-x}+1$

7. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是 （ ）

(A) α 内有无数条直线与 β 平行 (B) α 内有两条相交直线与 β 平行

(C) α, β 平行于同一条直线 (D) α, β 垂直于同一平面

8. 若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 两个相邻的极值点, 则 $\omega=$ （ ）

(A) 2 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点, 则 $p=$ （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

10. 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $x-y-\pi-1=0$ (B) $2x-y-2\pi-1=0$

(C) $2x+y-2\pi+1=0$ (D) $x+y-\pi+1=0$

11. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$, 则 $\sin\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

二、填空题

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-6\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最大值是______.

14. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $b\sin A+a\cos B=0$, 则 $B=$______.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有______个面, 其棱长为______.

图 1

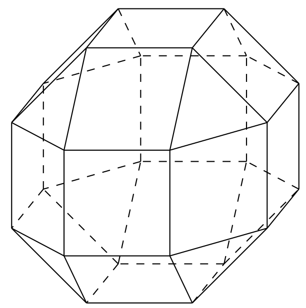


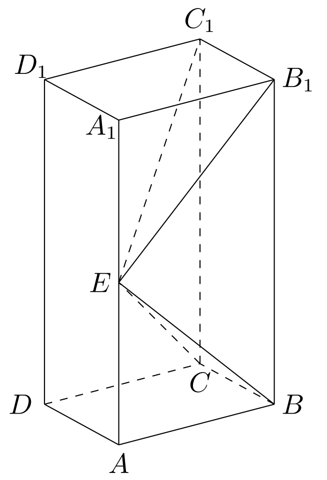
图 2

三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE\perp EC_1$.

(1) 证明: $BE\perp$ 平面 EB_1C_1;

(2) 若 $AE=A_1E$, $AB=3$, 求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1=2$, $a_3=2a_2+16$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20,0)$	$[0,0.20)$	$[0.20,0.40)$	$[0.40,0.60)$	$[0.60,0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

(1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;
(2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)
附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.
(1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;
(2) 如果存在点 P, 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$. 证明:
(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;
(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0,\theta_0)$ $(\rho_0>0)$ 在曲线 $C: \rho=4\sin\theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P.
(1) 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;
(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. 已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)<0$ 的解集;
(2) 若 $x\in(-\infty,1]$ 时, $f(x)<0$, 求 a 的取值范围.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\,|x^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{-1,0,1\}$　(B) $\{0,1\}$　(C) $\{-1,1\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $-1-\mathrm{i}$　(B) $-1+\mathrm{i}$　(C) $1-\mathrm{i}$　(D) $1+\mathrm{i}$

3.《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 （　）

(A) 0.5　(B) 0.6　(C) 0.7　(D) 0.8

4. $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 （　）

(A) 12　(B) 16　(C) 20　(D) 24

5. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为和为 15, 且 $a_5=3a_3+4a_1$, 则 $a_3=$ （　）

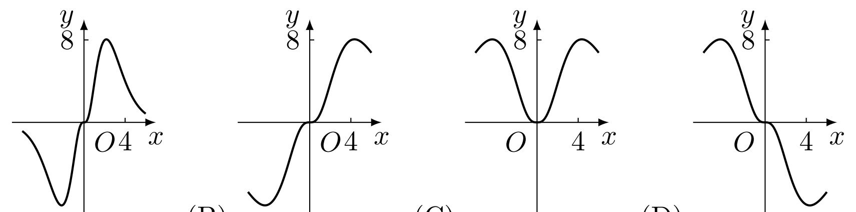
(A) 16　(B) 8　(C) 4　(D) 2

6. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则（　）

(A) $a=\mathrm{e}$, $b=-1$　(B) $a=\mathrm{e}$, $b=1$

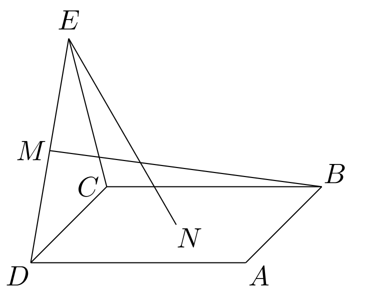
(C) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=1$　(D) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=-1$

7. 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图象大致为 （　）



(A)　(B)　(C)　(D)

8. 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 （　）



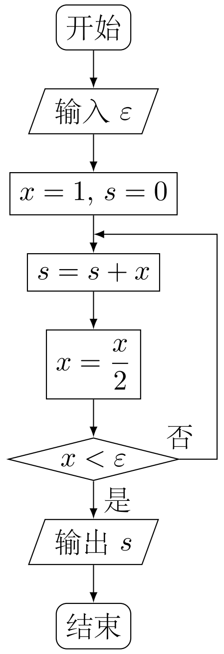
(A) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(B) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(C) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

(D) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 （　）



(A) $2-\dfrac{1}{2^4}$　(B) $2-\dfrac{1}{2^5}$　(C) $2-\dfrac{1}{2^6}$　(D) $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F, 为点 P 在 C 的一条渐近线上, O 为坐标原点, 若 $|PO|=|PF|$, 则 $\triangle PFO$ 的面积为 （　）

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $3\sqrt{2}$

11. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 则 （　）

(A) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

(B) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

(C) $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

(D) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

12. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ $(\omega>0)$, 已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点. 下述四个结论:

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;

② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点;

③ $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{10})$ 单调递增;

④ ω 的取值范围是 $\left[\dfrac{12}{5},\dfrac{29}{10}\right)$.

其中所有正确结论的编号是 （　）

(A) ①④　(B) ②③　(C) ①②③　(D) ①③④

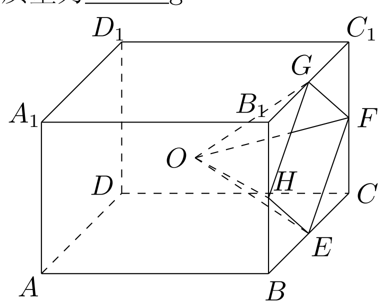
二、填空题

13. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$______.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1\neq 0$, $a_2=3a_1$, 则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$______.

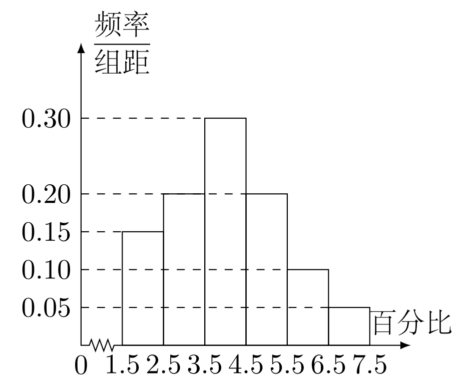
15. 设 F_1, F_2 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为______.

16. 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB=BC=6$ cm, $AA_1=4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为______g.

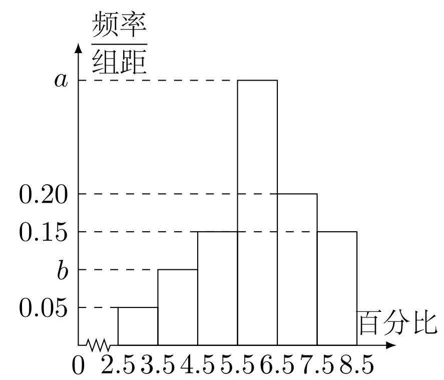


三、解答题

17. 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件:“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

(1) 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;

(2) 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.
(1) 求 B;
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG, 如图 2.
(1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$;
(2) 求图 2 中的二面角 $B-CG-A$ 的大小.

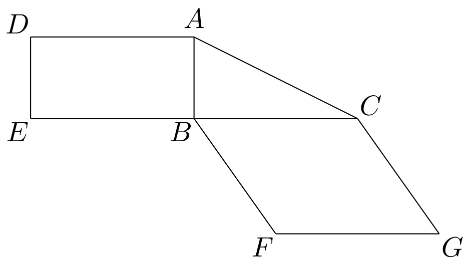


图 1

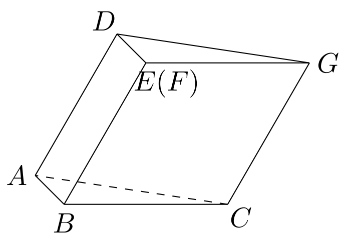
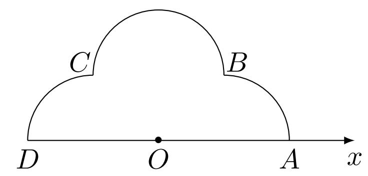


图 2

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 是否存在 a, b, 使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小为 -1 且最大值为 1? 若存在, 求出 a, b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

21. 已知曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{2}$, D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B.
(1) 证明: 直线 AB 过定点;
(2) 若以 $E\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2,0)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2,\pi)$, 弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$, $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1,\pi)$, 曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$, 曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$, 曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.
(1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
(2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP|=\sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



23. 设 $x, y, z\in\mathbf{R}$, 且 $x+y+z=1$.
(1) 求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值;
(2) 若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$ 成立, 证明: $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\,|x^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{-1,0,1\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,1\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

3. 两位男同学和两位女同学随机排成一列, 则两位女同学相邻的概率是( )

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

4.《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 ( )

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

5. 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

6. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5=3a_3+4a_1$, 则 $a_3=$ ( )

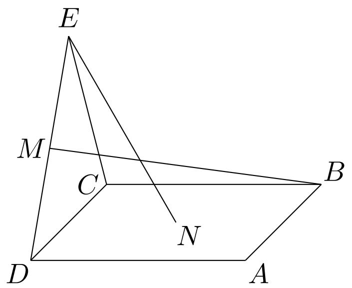
(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 2

7. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则( )

(A) $a=\mathrm{e}$, $b=-1$ (B) $a=\mathrm{e}$, $b=1$

(C) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=1$ (D) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=-1$

8. 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 ( )



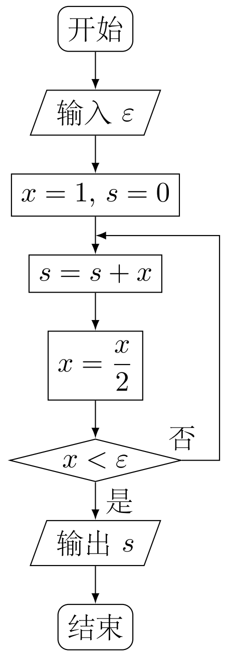
(A) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(B) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(C) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

(D) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 ( )



(A) $2-\dfrac{1}{2^4}$ (B) $2-\dfrac{1}{2^5}$ (C) $2-\dfrac{1}{2^6}$ (D) $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 已知 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点, 点 P 在 C 上, O 为坐标原点, 若 $|OP|=|OF|$, 则 $\triangle OPF$ 的面积为 ( )

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{7}{2}$ (D) $\dfrac{9}{2}$

11. 记不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 6\\ 2x-y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 命题 $p:\exists(x,y)\in D$, $2x+y\geqslant 9$; 命题 $q:\forall(x,y)\in D$, $2x+y\leqslant 12$. 下面给出了四个命题:

① $p\vee q$; ② $\neg p\vee q$; ③ $p\wedge\neg q$; ④ $\neg p\wedge\neg q$.

这四个命题中, 所有真命题的编号是 ( )

(A) ①③ (B) ①② (C) ②③ (D) ③④

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 则 ( )

(A) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

(B) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

(C) $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

(D) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

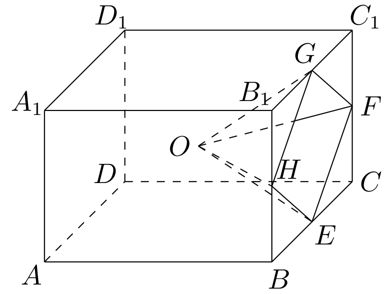
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$, $\boldsymbol{b}=(-8,6)$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$______.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3=5$, $a_7=13$, 则 $S_{10}=$______.

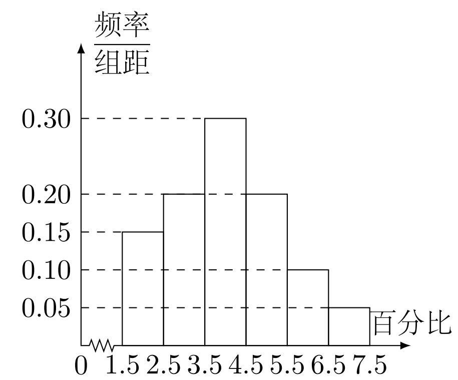
15. 设 F_1, F_2 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为______.

16. 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB=BC=6$ cm, $AA_1=4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为______g.

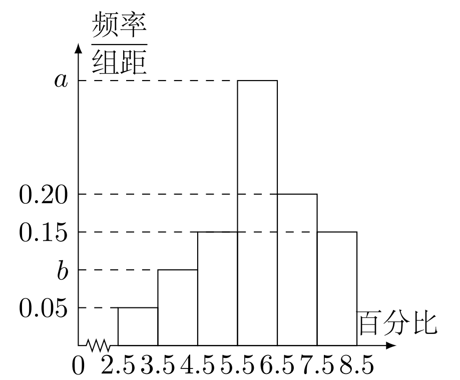


三、解答题

17. 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件:“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

(1) 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;

(2) 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.
(1) 求 B;
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG, 如图 2.
(1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$;
(2) 求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.

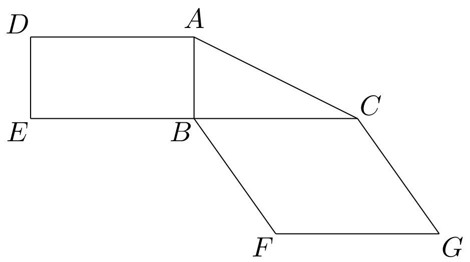


图 1

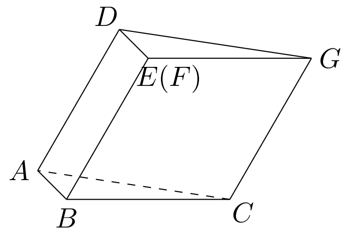
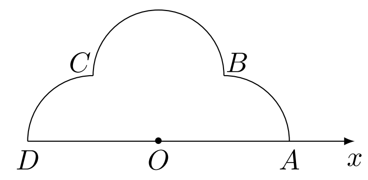


图 2

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $0<a<3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 求 $M-m$ 的取值范围.

21. 已知曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{2}$, D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B.
(1) 证明: 直线 AB 过定点;
(2) 若以 $E\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求该圆的方程.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2,0)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2,\pi)$, 弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$, $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1,\pi)$, 曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$, 曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$, 曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.
(1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
(2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP|=\sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



23. 设 $x, y, z\in\mathbf{R}$, 且 $x+y+z=1$.
(1) 求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值;
(2) 若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$ 成立, 证明: $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $|z^2-2z|=$（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

2. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,2x+a\leqslant 0\}$, 且 $A\cap B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $a=$（ ）

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

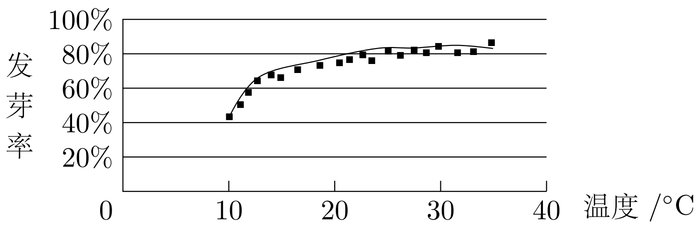
3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. 已知 A 为抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y 轴的距离为 9, 则 $p=$（ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: °C) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 (x_i, y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 得到下面的散点图:



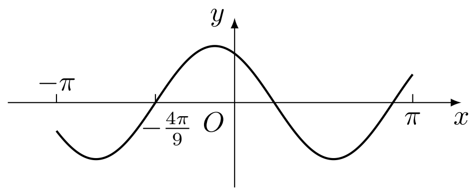
由此散点图, 在 10°C 至 40°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（ ）

(A) $y=a+bx$ (B) $y=a+bx^2$ (C) $y=a+b\mathrm{e}^x$ (D) $y=a+b\ln x$

6. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为（ ）

(A) $y=-2x-1$ (B) $y=-2x+1$ (C) $y=2x-3$ (D) $y=2x+1$

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）



(A) $\dfrac{10\pi}{9}$ (B) $\dfrac{7\pi}{6}$ (C) $\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2}$

8. $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为（ ）

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

9. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$, 且 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$, 则 $\sin\alpha=$（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

10. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 若 $\odot O_1$ 的面积为 4π, $AB=BC=AC=OO_1$, 则球 O 的表面积为（ ）

(A) 64π (B) 48π (C) 36π (D) 32π

11. 已知 $\odot M$: $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, 直线 l: $2x+y+2=0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB, 切点为 A, B, 当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为（ ）

(A) $2x-y-1=0$ (B) $2x+y-1=0$ (C) $2x-y+1=0$ (D) $2x+y+1=0$

12. 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$, 则（ ）

(A) $a>2b$ (B) $a<2b$ (C) $a>b^2$ (D) $a<b^2$

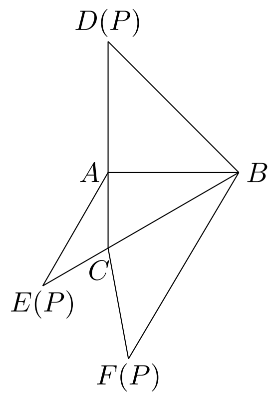
二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\ x-y-1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+7y$ 的最大值为______.

14. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$______.

15. 已知 F 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点, A 为 C 的右顶点, B 为 C 上的点, 且 BF 垂直于 x 轴. 若 AB 的斜率为 3, 则 C 的离心率为______.

16. 如图, 在三棱锥 P–ABC 的平面展开图中, $AC=1$, $AB=AD=\sqrt{3}$, $AB\perp AC$, $AB\perp AD$, $\angle CAE=30°$, 则 $\cos\angle FCB=$______.



三、解答题

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

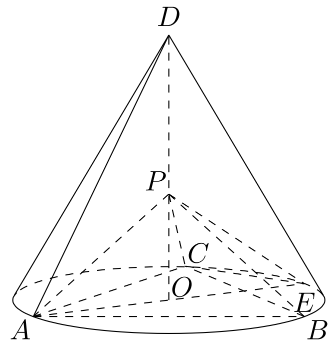
(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1=1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, AE 为底面直径, $AE=AD$. $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO$.

(1) 证明: $PA\perp$ 平面 PBC;

(2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.



19. 甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛, 约定赛制如下: 累计负两场者被淘汰; 比赛前抽签决定首先比赛的两人, 另一人轮空; 每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛, 负者下一场轮空, 直至有一人被淘汰; 当一人被淘汰后, 剩余的两人继续比赛, 直至其中一人被淘汰, 另一人最终获胜, 比赛结束. 经抽签, 甲、乙首先比赛, 丙轮空. 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求甲连胜四场的概率;

(2) 求需要进行第五场比赛的概率;

(3) 求丙最终获胜的概率.

20. 已知 A, B 分别为椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3+1$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos^k t \\ y=\sin^k t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

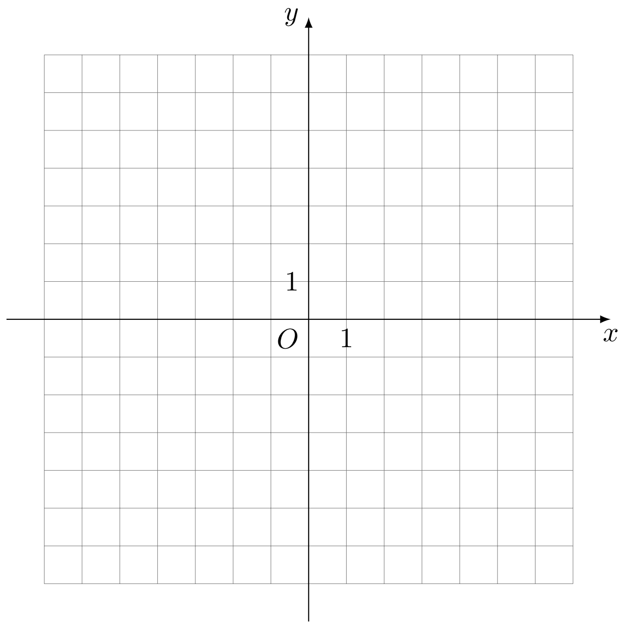
(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23. 已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.



2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$, $B=\{-4,1,3,5\}$, 则 $A\cap B=$ (　)

(A) $\{-4,1\}$　(B) $\{1,5\}$　(C) $\{3,5\}$　(D) $\{1,3\}$

2. 若 $z=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^3$, 则 $|z|=$ (　)

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

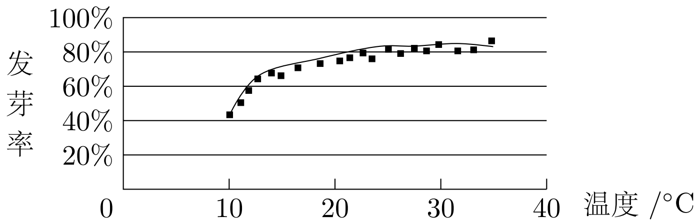
3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 (　)

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 在 O, A, B, C, D 中任取 3 点, 则取到的 3 点共线的概率为 (　)

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: °C) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 得到下面的散点图:



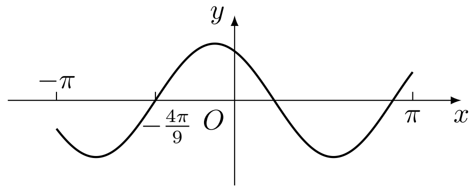
由此散点图, 在 10 °C 至 40 °C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 (　)

(A) $y=a+bx$　(B) $y=a+bx^2$　(C) $y=a+b\mathrm{e}^x$　(D) $y=a+b\ln x$

6. 已知圆 $x^2+y^2-6x=0$, 过点 $(1,2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为 (　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 (　)

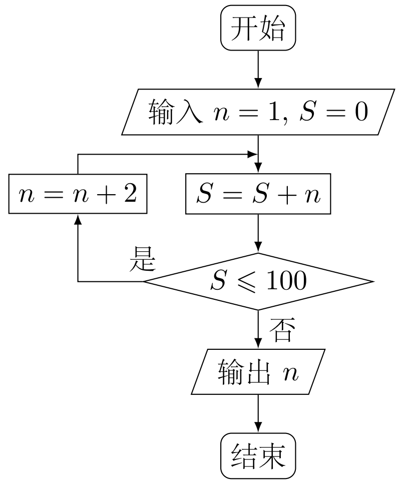


(A) $\dfrac{10\pi}{9}$　(B) $\dfrac{7\pi}{6}$　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

8. 设 $a\log_3 4=2$, 则 $4^{-a}=$ (　)

(A) $\dfrac{1}{16}$　(B) $\dfrac{1}{9}$　(C) $\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

9. 执行下面的程序框图, 则输出的 $n=$ (　)



(A) 17　(B) 19　(C) 21　(D) 23

10. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1+a_2+a_3=1$, $a_2+a_3+a_4=2$, 则 $a_6+a_7+a_8=$ (　)

(A) 12　(B) 24　(C) 30　(D) 32

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在 C 上且 $|OP|=2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 (　)

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

12. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $\odot O_1$ 的面积为 4π, $AB=BC=AC=OO_1$, 则球 O 的表面积为 (　)

(A) 64π　(B) 48π　(C) 36π　(D) 32π

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\ x-y-1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+7y$ 的最大值为______.

14. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(m+1,2m-4)$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

15. 曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为______.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1=$______.

三、解答题

17. 某厂接受了一项加工业务, 加工出来的产品 (单位: 件) 按标准分为 A, B, C, D 四个等级. 加工业务约定: 对于 A 级品、B 级品、C 级品, 厂家每件分别收取加工费 90 元, 50 元, 20 元; 对于 D 级品, 厂家每件要赔偿原料损失费 50 元. 该厂有甲、乙两个分厂可承接加工业务. 甲分厂加工成本费为 25 元/件, 乙分厂加工成本费为 20 元/件. 厂家为决定由哪个分厂承接加工业务, 在两个分厂各试加工了 100 件这种产品, 并统计了这些产品的等级, 整理如下:

甲分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	40	20	20	20

乙分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	28	17	34	21

(1) 分别估计甲、乙两分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率;

(2) 分别求甲、乙两分厂加工出来的 100 件产品的平均利润, 以平均利润为依据, 厂家应选哪个分厂承接加工业务?

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $B=150°$.

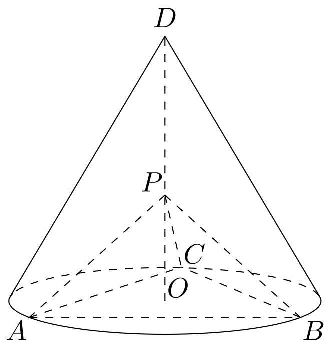
(1) 若 $a=\sqrt{3}c$, $b=2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C.

19. 如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $\angle APC=90^{\circ}$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC;

(2) 设 $DO=\sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知 A, B 分别为椭圆 E: $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+y^{2}=1\ (a>1)$ 的左, 右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^{k} t\\ y=\sin^{k} t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

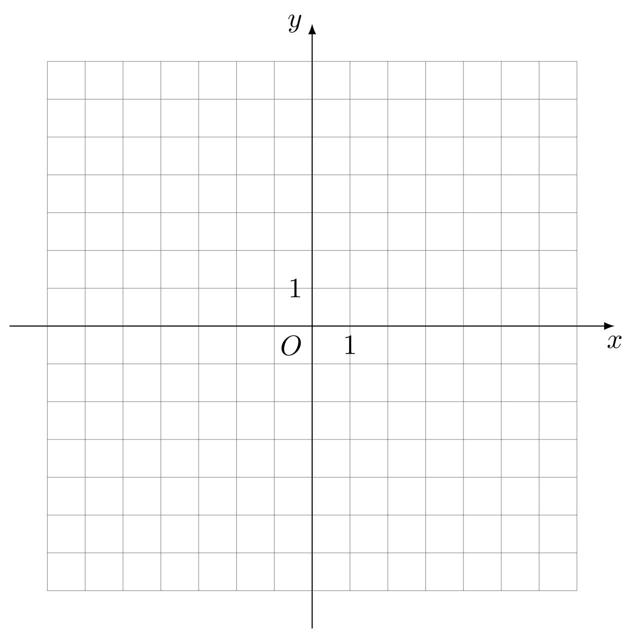
(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23. 已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.



2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$, $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{1,2\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{-2,3\}$ (B) $\{-2,2,3\}$

(C) $\{-2,-1,0,3\}$ (D) $\{-2,-1,0,2,3\}$

2. 若 α 为第四象限角, 则 （ ）

(A) $\cos 2\alpha>0$ (B) $\cos 2\alpha<0$ (C) $\sin 2\alpha>0$ (D) $\sin 2\alpha<0$

3. 在新冠肺炎疫情防控期间, 某超市开通网上销售业务, 每天能完成 1200 份订单的配货, 由于订单量大幅增加, 导致订单积压. 为解决困难, 许多志愿者踊跃报名参加配货工作. 已知该超市某日积压 500 份订单未配货, 预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05. 志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货, 为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需要志愿者 （ ）

(A) 10 名 (B) 18 名 (C) 24 名 (D) 32 名

4. 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所, 分上、中、下三层, 上层中心有一块圆形石板 (称为天心石), 环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环, 向外每环依次增加 9 块, 下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块, 向外每环依次也增加 9 块, 已知每层环数相同, 且下层比中层多 729 块, 则三层共有扇面形石板 (不含天心石) （ ）

(A) 3699 块 (B) 3474 块 (C) 3402 块 (D) 3339 块

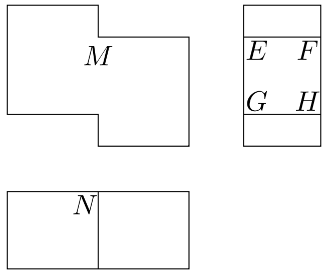
5. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

6. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{m+n}=a_m a_n$. 若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$, 则 $k=$ （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 如图是一个多面体的三视图, 这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为 M, 在俯视图中对应的点为 N, 则该端点在侧视图中对应的点为 （ ）



(A) E (B) F (C) G (D) H

8. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=a$ 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D, E 两点. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 （ ）

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

9. 设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 是偶函数, 且在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增

(B) 是奇函数, 且在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减

(C) 是偶函数, 且在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递增

(D) 是奇函数, 且在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减

10. 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形, 且其顶点都在球 O 的球面上. 若球 O 的表面积为 16π, 则 O 到平面 ABC 的距离为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 则 （ ）

(A) $\ln(y-x+1)>0$ (B) $\ln(y-x+1)<0$

(C) $\ln|x-y|>0$ (D) $\ln|x-y|<0$

12. $0-1$ 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots)$, 且存在正整数 m, 使得 $a_{i+m}=a_i\ (i=1,2,\cdots)$ 成立, 则称其为 $0-1$ 周期序列, 并称满足 $a_{i+m}=a_i\ (i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期. 对于周期为 m 的 $0-1$ 序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}\ (k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标, 下列周期为 5 的 $0-1$ 序列中, 满足 $C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}\ (k=1,2,3,4)$ 的序列是（ ）

(A) $11010\cdots$ (B) $11011\cdots$ (C) $10001\cdots$ (D) $11001\cdots$

二、填空题

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°, $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $k=$______.

14. 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动, 每名同学只去 1 个小区, 每个小区至少安排 1 名同学, 则不同的安排方法共有______种.

15. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$, $z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, 则 $|z_1-z_2|=$______.

16. 设有下列四个命题:

p_1: 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内;

p_2: 过空间中任意三点有且仅有一个平面;

p_3: 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行;

p_4: 若直线 $l\subset$ 平面 α, 直线 $m\perp$ 平面 α, 则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是______.

① $p_1\wedge p_4$; ② $p_1\wedge p_2$; ③ $\neg p_2\vee p_3$; ④ $\neg p_3\vee\neg p_4$.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中, $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

(1) 求 A;

(2) 若 $BC=3$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

18. 某沙漠地区经过治理, 生态系统得到很大改善, 野生动物数量有所增加. 为调查该地区某种野生动物数量, 将其分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区, 调查得到样本数据 $(x_i,y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$, 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$, $\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$.

(1) 求该地区这种野生动物数量的估计值 (这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数);

(2) 求样本 $(x_i,y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 的相关系数 (精确到 0.01);

(3) 根据现有统计资料, 各地块间植物覆盖面积差异很大. 为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计, 请给出一种你认为更合理的抽样方法, 并说明理由.

附: 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{2}\approx1.414$.

19. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A, B 两点, 交 C_2 于 C, D 两点, 且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

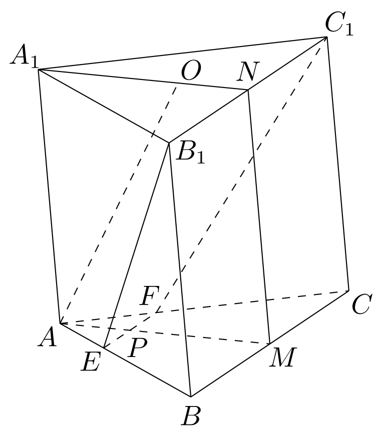
(1) 求 C_1 的离心率;

(2) 设 M 是 C_1 与 C_2 的公共点, 若 $|MF|=5$, 求 C_1 与 C_2 的标准方程.

20. 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形, M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, P 为 AM 上一点, 过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E, 交 AC 于 F.

(1) 证明: $AA_1 /\!/ MN$, 且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F;

(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO /\!/$ 平面 EB_1C_1F, 且 $AO=AB$, 求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)|\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\leqslant\dfrac{3^n}{4^n}$.

22. 已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 C_1: $\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (θ 为参数), C_2: $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设 C_1, C_2 的交点为 P, 求圆心在极轴上, 且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\geqslant 4$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<3, x\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,|x|>1, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

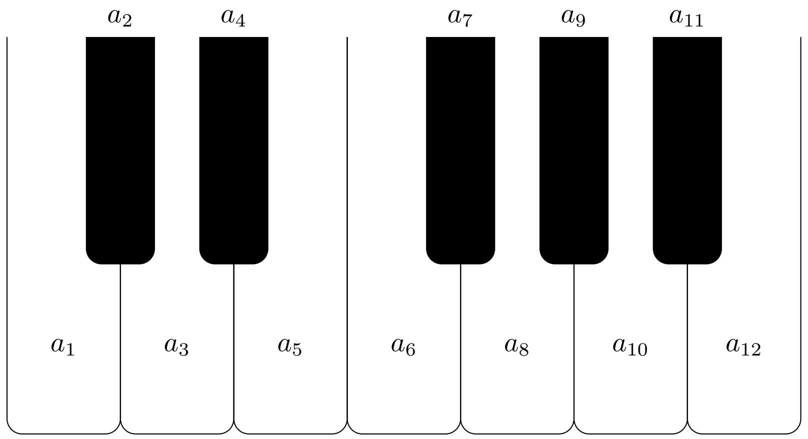
(A) $\varnothing$ (B) $\{-3,-2,2,3\}$

(C) $\{-2,0,2\}$ (D) $\{-2,2\}$

2. $(1-\mathrm{i})^4=$ （ ）

(A) -4 (B) 4 (C) $-4\mathrm{i}$ (D) $4\mathrm{i}$

3. 如图, 将钢琴上的 12 个键依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$. 设 $1\leqslant i<j<k\leqslant 12$. 若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦; 若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦. 用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 （ ）



(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 15

4. 在新冠肺炎疫情防控期间, 某超市开通网上销售业务, 每天能完成 1200 份订单的配货, 由于订单量大幅增加, 导致订单积压. 为解决困难, 许多志愿者踊跃报名参加配货工作. 已知该超市某日积压 500 份订单未配货, 预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05, 志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货, 为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需要志愿者 （ ）

(A) 10 名 (B) 18 名 (C) 24 名 (D) 32 名

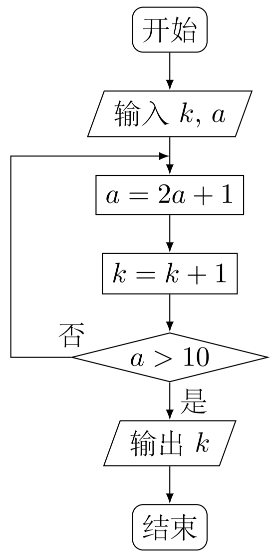
5. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则在下列向量中, 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的是 （ ）

(A) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ (B) $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (C) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ (D) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_5-a_3=12$, $a_6-a_4=24$, 则 $\dfrac{S_n}{a_n}=$ （ ）

(A) 2^n-1 (B) $2-2^{1-n}$ (C) $2-2^{n-1}$ (D) $2^{1-n}-1$

7. 执行下面的程序框图, 若输入的 $k=0$, $a=0$, 则输出的 k 为 （ ）



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=a$ 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D, E 两点. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 （ ）

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

10. 设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

(B) 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

(C) 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

(D) 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

11. 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形, 且其顶点都在球 O 的球面上. 若球 O 的表面积为 16π, 则 O 到平面 ABC 的距离为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 则 （ ）

(A) $\ln(y-x+1)>0$ (B) $\ln(y-x+1)<0$

(C) $\ln|x-y|>0$ (D) $\ln|x-y|<0$

二、填空题

13. 若 $\sin x=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos 2x=$______.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=-2$, $a_2+a_6=2$, 则 $S_{10}=$______.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant -1 \\ x-y\geqslant -1 \\ 2x-y\leqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值是______.

16. 设有下列四个命题:

p_1: 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内;

p_2: 过空间中任意三点有且仅有一个平面;

p_3: 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行;

p_4: 若直线 $l\subset$ 平面 α, 直线 $m\perp$ 平面 α, 则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是______.

① $p_1\wedge p_4$; ② $p_1\wedge p_2$; ③ $\neg p_2\vee p_3$; ④ $\neg p_3\vee\neg p_4$.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\dfrac{5}{4}$.

(1) 求 A;

(2) 若 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, 证明: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

18. 某沙漠地区经过治理, 生态系统得到很大改善, 野生动物数量有所增加. 为调查该地区某种野生动物的数量, 将其分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区, 调查得到样本数据 (x_i, y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$, 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$, $\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$.

(1) 求该地区这种野生动物数量的估计值 (这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数);

(2) 求样本 (x_i, y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 的相关系数 (精确到 0.01);

(3) 根据现有统计资料, 各地块间植物覆盖面积差异很大. 为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计, 请给出一种你认为更合理的抽样方法, 并说明理由.

附: 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{2}\approx 1.414$.

19. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴重直的直线交 C_1 于 A, B 两点, 交 C_2 于 C, D 两点, 且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

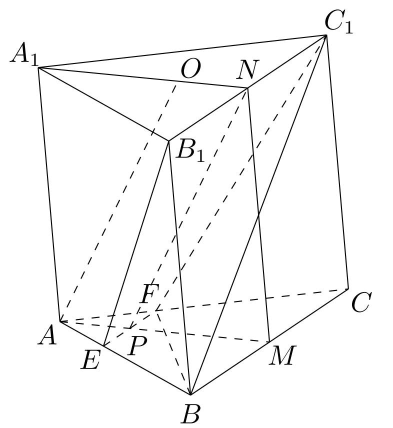
(1) 求 C_1 的离心率;

(2) 若 C_1 的四个顶点到 C_2 的准线距离之和为 12, 求 C_1 与 C_2 的标准方程.

20. 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形, M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, P 为 AM 上一点. 过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E, 交 AC 于 F.

(1) 证明: $AA_1 \parallel MN$, 且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F;

(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO=AB=6$, $AO\parallel$ 平面 EB_1C_1F, 且 $\angle MPN=\dfrac{\pi}{3}$, 求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.



21. 已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.

(1) 若 $f(x)\leqslant 2x+c$, 求 c 的取值范围;

(2) 设 $a>0$ 时, 讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

22. 已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 C_1: $\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (θ 为参数), C_2: $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设 C_1, C_2 的交点为 P, 求圆心在极轴上, 且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\geqslant 4$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N}^*, y \geqslant x\}$，$B = \{(x, y) \mid x + y = 8\}$，则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

2. 复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是 ( )

(A) $-\dfrac{3}{10}$ (B) $-\dfrac{1}{10}$ (C) $\dfrac{1}{10}$ (D) $\dfrac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是 ( )

(A) $p_1 = p_4 = 0.1$, $p_2 = p_3 = 0.4$ (B) $p_1 = p_4 = 0.4$, $p_2 = p_3 = 0.1$

(C) $p_1 = p_4 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.3$ (D) $p_1 = p_4 = 0.3$, $p_2 = p_3 = 0.2$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领城．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t) = \dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t^*) = 0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为 $(\ln 19 \approx 3)$ ( )

(A) 60 (B) 63 (C) 66 (D) 69

5. 设 O 为坐标原点，直线 $x = 2$ 与抛物线 C：$y^2 = 2px\ (p > 0)$ 交于 D，E 两点．若 $OD \perp OE$，则 C 的焦点坐标为 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ (C) $(1, 0)$ (D) $(2, 0)$

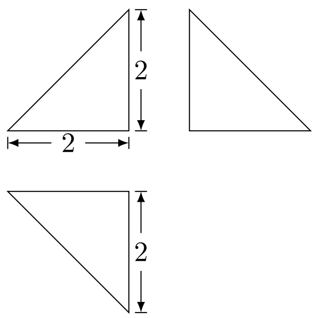
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 6$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -6$, 则 $\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle =$ ( )

(A) $-\dfrac{31}{35}$ (B) $-\dfrac{19}{35}$ (C) $\dfrac{17}{35}$ (D) $\dfrac{19}{35}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C = \dfrac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\cos B =$ ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

8. 下图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是 ( )



(A) $6 + 4\sqrt{2}$ (B) $4 + 4\sqrt{2}$ (C) $6 + 2\sqrt{3}$ (D) $4 + 2\sqrt{3}$

9. 已知 $2\tan\theta - \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 7$, 则 $\tan\theta =$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

10. 若直线 l 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为 ( )

(A) $y = 2x + 1$ (B) $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ (C) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ (D) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

11. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\sqrt{5}$. P 是 C 上一点，且 $F_1P \perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4, 则 $a =$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则 ( )

(A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geqslant 0 \\ 2x - y \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$，则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为______.

14. $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是______.（用数字作答）

15. 已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

16. 关于函数 $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；
② $f(x)$ 的图象关于原点对称；
③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 对称；
④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 4n$.

(1) 计算 a_2, a_3, 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 / 空气质量等级	$[0, 200]$	$(200, 400]$	$(400, 600]$
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天"空气质量好"；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天"空气质量不好"．根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次 $\leqslant 400$	人次 > 400
空气质量好		
空气质量不好		

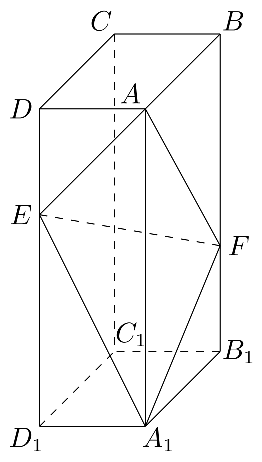
附：$K^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$.

(1) 证明: 点 C_1 在平面 AEF 内;

(2) 若 $AB=2$, $AD=1$, $AA_1=3$, 求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 b;

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 $a, b, c\in \mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;

(2) 用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,b,c\}\geqslant \sqrt[3]{4}$.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$, $B=\{x\,|\,3<x<15\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 若 $\overline{z}\,(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+\mathrm{i}$ (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

3. 设一组样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的方差为 0.01, 则数据 $10x_1$, $10x_2$, $\cdots$, $10x_n$ 的方差为 ( )

(A) 0.01 (B) 0.1 (C) 1 (D) 10

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领城. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 ($\ln 19\approx 3$) ( )

(A) 60 (B) 63 (C) 66 (D) 69

5. 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$, 则 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, 则点 C 的轨迹为 ( )

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 直线

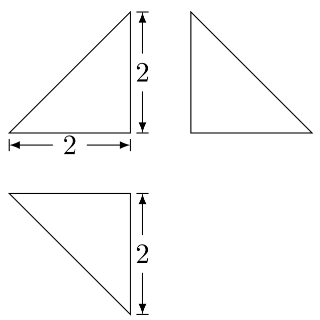
7. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 交于 D, E 两点. 若 $OD\perp OE$, 则 C 的焦点坐标为 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ (C) $(1,0)$ (D) $(2,0)$

8. 点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为 ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

9. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 ( )



(A) $6+4\sqrt{2}$ (B) $4+4\sqrt{2}$ (C) $6+2\sqrt{3}$ (D) $4+2\sqrt{3}$

10. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 3$, $c=\dfrac{2}{3}$, 则 ( )

(A) $a<c<b$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\tan B=$ ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $4\sqrt{5}$ (D) $8\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 的最小值为 2

(B) $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

(C) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

(D) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ 2x-y\geqslant 0 \\ x\leqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

14. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$, 则 C 的离心率为______.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+a}$. 若 $f'(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$, 则 $a=$______.

16. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=4$, $a_3-a_1=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$, 求 m.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

锻炼人次 / 空气质量等级	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天"空气质量好"; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天"空气质量不好". 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leqslant 400$	人次 >400
空气质量好		
空气质量不好		

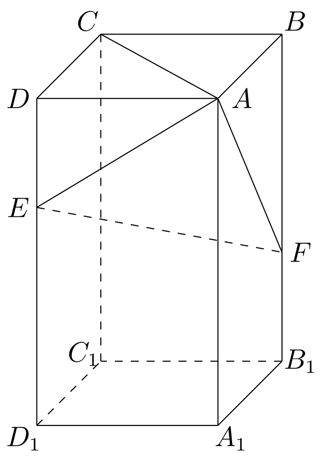
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$. 证明:

(1) 当 $AB=BC$ 时, $EF\perp AC$;

(2) 点 C_1 在平面 AEF 内.



20. 已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$ $(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;

(2) 用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

2020 年普通高等学校招生考试（新高考 I）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\,|\,2<x<4\}$, 则 $A\cup B=$ （ ）

(A) $\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 3\}$

(C) $\{x\,|\,1\leqslant x<4\}$　(D) $\{x\,|\,1<x<4\}$

2. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-$i

3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有（ ）

(A) 120 种　(B) 90 种　(C) 60 种　(D) 30 种

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 40°, 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （ ）

(A) 20°　(B) 40°　(C) 50°　(D) 90°

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （ ）

(A) 62%　(B) 56%　(C) 46%　(D) 42%

6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型: $I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0, T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$, $T=6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 ($\ln 2\approx 0.69$) （ ）

(A) 1.2 天　(B) 1.8 天　(C) 2.5 天　(D) 3.5 天

7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(-2,6)$　(B) $(-6,2)$　(C) $(-2,4)$　(D) $(-4,6)$

8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　(B) $[-3,-1]\cup[0,1]$

(C) $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　(D) $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多选题

9. 已知曲线 C: $mx^2+ny^2=1$ （ ）

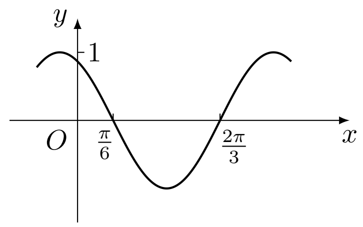
(A) 若 $m>n>0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

(B) 若 $m=n>0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

(C) 若 $mn<0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

(D) 若 $m=0$, $n>0$, 则 C 是两条直线

10. 下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （ ）



(A) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

(C) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(D) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

11. 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　(B) $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

(C) $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 1, 2, $\cdots$, n, 且 $P(X=i)=p_i>0$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, 定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$. （ ）

(A) 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$

(B) 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

(C) 若 $p_i=\dfrac{1}{n}$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

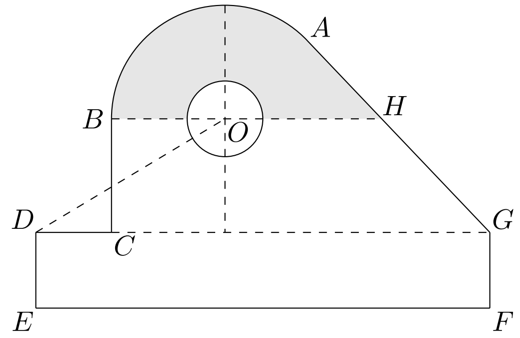
(D) 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 1, 2, $\cdots$, m, 且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$), 则 $H(X)\leqslant H(Y)$

三、填空题

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为______.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC\perp DG$, 垂足为 C, $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$, $BH\,/\!/\,DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为______cm^2.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2, $\angle BAD=60°$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为______.

四、解答题

17. 在① $ac=\sqrt{3}$, ② $c\sin A=3$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$, $C=\dfrac{\pi}{6}$?

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m]$ ($m\in\mathbf{N}^*$) 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100}.

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得下表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

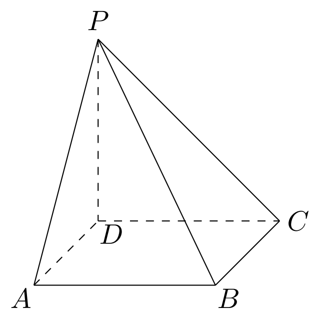
(1) 估计事件"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;
(2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关?
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.
(1) 证明: $l\perp$ 平面 PDC;
(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.
(1) 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;
(2) 若 $f(x)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2,1)$.
(1) 求 C 的方程;
(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM\perp AN$, $AD\perp MN$, D 垂足. 证明: 存在定点 Q, 使得 $|DQ|$ 为定值.

2020 年普通高等学校招生考试（新高考 II）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,5,8\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,3,5,7\}$ (B) $\{2,3\}$

(C) $\{2,3,5\}$ (D) $\{1,2,3,5,7,8\}$

2. $(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ （ ）

(A) $4+5\mathrm{i}$ (B) $5\mathrm{i}$ (C) $-5\mathrm{i}$ (D) $2+3\mathrm{i}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的中点, 则 $\overrightarrow{CB}=$ （ ）

(A) $2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$ (B) $\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$ (C) $2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$ (D) $\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 $40°$, 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （ ）

(A) $20°$ (B) $40°$ (C) $50°$ (D) $90°$

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （ ）

(A) 62% (B) 56% (C) 46% (D) 42%

6. 要安排 3 名学生到 2 个乡村做志愿者, 每名学生只能选择去一个村, 每个村里至少有一名志愿者, 则不同的安排方法共有 （ ）

(A) 2 种 (B) 3 种 (C) 6 种 (D) 8 种

7. 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(2,+\infty)$ (B) $[2,+\infty)$ (C) $(5,+\infty)$ (D) $[5,+\infty)$

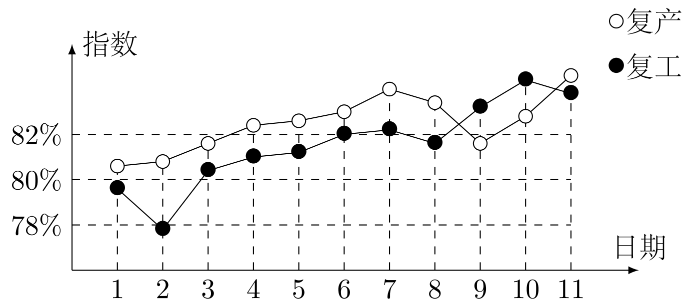
8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]\cup[3,+\infty)$ (B) $[-3,-1]\cup[0,1]$

(C) $[-1,0]\cup[1,+\infty)$ (D) $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多选题

9. 我国新冠肺炎疫情进入常态化, 各地有序推进复工复产, 下面是某地连续 11 天复工复产指数折线图, 下列说法正确的是 （ ）



(A) 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加

(B) 这 11 天期间, 复产指数增量大于复工指数的增量

(C) 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%

(D) 第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量

10. 已知曲线 C: $mx^2+ny^2=1$ （ ）

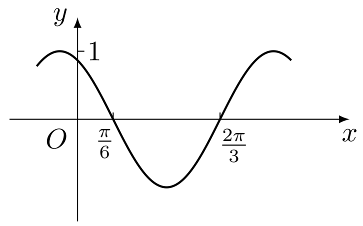
(A) 若 $m>n>0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

(B) 若 $m=n>0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

(C) 若 $mn<0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

(D) 若 $m=0$, $n>0$, 则 C 是两条直线

11. 下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （ ）



(A) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

(C) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (D) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

12. 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$ (B) $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

(C) $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$ (D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

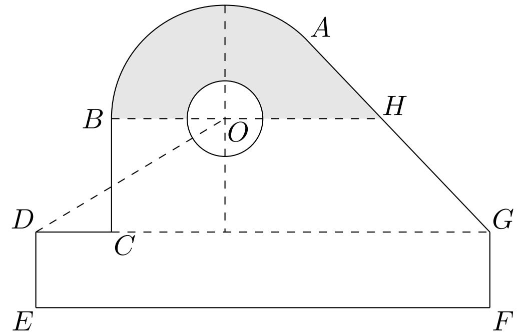
三、填空题

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M, N 分别为 BB_1, AB 的中点, 则三棱锥 $A-NMD_1$ 的体积为______.

14. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

15. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为______.

16. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC\perp DG$, 垂足为 C, $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$, $BH\parallel DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为______cm^2.



四、解答题

17. 在① $ac=\sqrt{3}$, ② $c\sin A=3$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$, $C=\dfrac{\pi}{6}$, ?

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得下表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

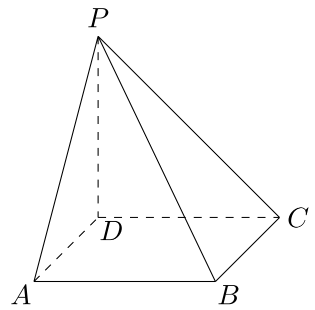
(1) 估计事件"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;
(2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关?
附: $K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$,

$P\left(K^2\geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.
(1) 证明: $l\perp$ 平面 PDC;
(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $M\left(2,3\right)$, 点 A 为其左顶点, 且 AM 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 C 方程;
(2) 点 N 为椭圆上任意一点, 求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.
(1) 当 $a=e$ 时, 求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;
(2) 若 $f\left(x\right)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.