

成都七中万达学校通锦校区高 2020 级高一（上）九月月考
数学试题

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：人教 A 版必修一。
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，满分60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求

1. $f(x) = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为

- A. $\{x|x > -2 \text{ 且 } x \neq -1\}$ B. $\{x|x > -2\}$ C. $\{x|x > 2\}$ D. $\{x|x > -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

2. 设集合 $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 3\}$ ， $a = -\sqrt{2}$ ，则下列关系正确的是

- A. $a \subseteq M$ B. $a \notin M$ C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subseteq M$

3. 已知 $f(x+1) = 3x+2$ ，则 $f(x)$ 的解析式为

- A. $3x+2$ B. $3x-1$ C. $3x+1$ D. $3x+4$

4. 偶函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上单调递减，则有

- A. $f(-1) > f(\frac{\pi}{3}) > f(-\pi)$ B. $f(\frac{\pi}{3}) > f(-1) > f(-\pi)$
C. $f(-\pi) > f(-1) > f(\frac{\pi}{3})$ D. $f(-1) > f(-\pi) > f(\frac{\pi}{3})$

5. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ， $b \in \mathbb{R}$ ，若集合 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a-b, 0\}$ ，则 $a^{2019} + b^{2019}$ 的值为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6.若 $f(x)$ 的定义域 $[-2,2]$,则函数 $f(x+1)$ 的定义域是

- A. $[-2,2]$ B. $[-3,1]$ C. $[-1,3]$ D. $[1,3]$

7. $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是

- A. $a \geq -3$ B. $a \leq -3$ C. $a \leq 5$ D. $a \geq 3$

8.下列各组函数中, 是同一函数的是

① $y = 2x+1$ 与 $y = \sqrt{4x^2+4x+1}$

② $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = x^0$

③ $y = \frac{x^2-x}{x}$ 与 $y = x-1$

④ $y = 3x^2 + 2x + 1$ 与 $u = 3v^2 + 1 + 2v$

- A. ①②③ B. ①②④ C. ②④ D. ①④

9. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 在区间 $[0, m]$ ($m > 0$) 上的最大值为 4, 最小值为 3, 则实数 m 的取值范围是

- A. $[1, 2]$ B. $(0, 1]$ C. $(0, 2]$ D. $[1, +\infty)$

10. $\min\{a, b\}$ 表示 a, b 两数中的最小值, 若函数 $f(x) = \min\{|x|, |x+t|\}$ 的

图象关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 对称, 则 t 的值为

- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的恒不为 0 的函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有

$f(x \cdot y) = xf(y) + yf(x)$, 则 $f(x)$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 不是奇函数也不是偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}[(|x-a^2|) + (|x-2a^2|) - 3a^2]$ 。若对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq f(x-2)$, 则实数 a 的取值范围为

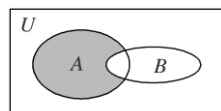
- A. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ B. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ C. $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$ D. $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。请将答案填在题后横线上。

13. 用列举法表示集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}\} =$ _____;

14. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 6\}$, 则右图中阴影部分所表示的集合是 _____;



15. 若 $[x]$ 表示不大于 x 的最大的整数, 如 $[2] = 2, [3.1] = 3, [-2.6] = -3$ 。

已知函数 $f(x) = [x], x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$, 则 $f(x)$ 的值域是_____;

16. 已知定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = 2f(x+1)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = -2|x-1| + 2$, 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不等的实根, 则实数 m 的取值范围是_____。

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知集合 U 为全体实数集, $M = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 5\}$, $N = \{x \mid a+1 \leq x \leq 2a-1\}$ 。

(1) 若 $a = 3$, 求 $M \cup C_U N$;

(2) 若 $N \subseteq M$, 求实数 a 的取值范围。

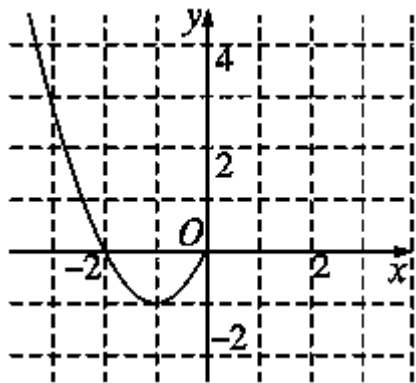
18. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$ 。

(1) 现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象, 如图所示, 请补全函数 $f(x)$ 的图象, 并根据图象写出函数 $f(x)$

($x \in R$) 的递增区间;

(2) 求函数 $f(x)$ ($x \in R$) 的解析式;

(3) 求函数 $f(x)$ ($x \in R$) 的值域。



19. (12 分) 已知 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 8 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + a^2 - 12 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值集合。

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{m}{x}$, $f(1) = 2$ 。

(1) 判定函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的单调性, 并用定义证明;

(2) 若 $a < f(x) + x$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围。

21. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) < 1$ 。

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) $f(x)$ 在 R 上是增函数还是减函数? 请说明理由;

(3) 若 $f(4) = 7$, 解不等式 $f(2x+1) < 4$ 。

22. (12 分) 已知定义域为 R 的函数 $g(x)$ 同时满足条件: ①对任意的实数 x 都有

$g(g(x) - x^2 + x) = g(x) - x^2 + x$; ②仅有一个实数 x_0 使 $g(x_0) = x_0$ 成立。记 $f(x) = g(x) + 3x - 1$ 。

(I) 求 $y = g(x)$ 的解析式;

(II) 记 $h(x) = af(x) - x - 3$ (其中 $a \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$), 求函数 $h(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$ 时的最大值 $W(a)$;

(III) $\varphi(x) = f(x) - l + 1$ ($l \in Z$), 是否存在 l , 若对任意 $x_1 \in [0, +\infty)$, 总存在 $x_2 \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$, 使得 $\varphi(x_1) > -W(x_2)$

成立; 若存在, 求出 l 的最大值; 若不存在, 请说明理由。

答案

一. 选择题：本大题共12小题，每小题5分，满分60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	B	A	B	B	C	A	D	A	C

二、填空题：本大题共4小题,每小题5分，共20分.请将答案填在题后横线上。

13. {0,1,4} 14. {3,4,5} 15. {0,1,2} 16. $(\frac{1}{2}, 1)$

三. 解答题：本大题共6小题,共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

解：(1) 当 $a=3$ 时, $N=\{x|4\leq x\leq 5\}$, 所以 $M\cup C_U N$
 $=\{x|x<4\text{或}x\geq 5\}$ -----4分

(2) ① $2a-1<a+1$, 即 $a<2$ 时, $N=\emptyset$, 此时满足 $N\subseteq M$; -----8分

② 当 $2a-1\geq a+1$, 即 $a\geq 2$ 时, $N\neq\emptyset$,

由 $N\subseteq M$ 得 $a+1\geq 5$ 或 $2a-1\leq -2$ 所以 $a\geq 4$;

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2)\cup[4, +\infty)$ 。-----12分

18. (12分)

解：(1) 根据偶函数的图象关于 y 轴对称，作出函数在 R 上的图象，2分

结合图象可得函数的增区间为 $(-1, 0)$ 、 $(1, +\infty)$ 。4分.

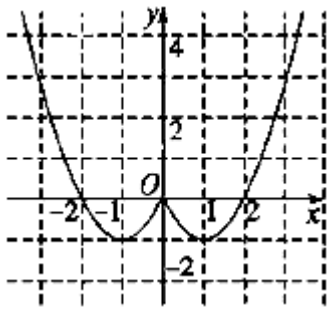
(2) 结合函数的图象可得，当 $x=1$ ，或 $x=-1$ 时，函数取得最小值为 -1 ，
 函数没有最大值，故函数的值域为 $[-1, +\infty)$ 。7分

(3) 当 $x>0$ 时， $-x<0$ ，再根据 $x\leq 0$ 时， $f(x)=x^2+2x$ ，

可得 $f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x$ 。

再根据函数 $f(x)$ 为偶函数，可得 $f(x)=x^2-2x$ 。10分

综上可得， $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leq 0 \\ x^2-2x, & x>0 \end{cases}$ 。12分



19. (12 分)

解: 已知 $A = \{-2, 4\}$, 又 $A \cap B = B$ 即 $B \subseteq A$; -----2 分

\therefore 当 $B = \emptyset$ 时, 则由 $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 12) < 0 \Rightarrow a < -4$, 或 $a > 4$; -----4 分

当 $B = \{-2\}$ 时, 则由 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ (-2)^2 + a \cdot (-2) + a^2 - 12 = 0 \end{cases}, \Rightarrow a = 4$; -----6 分

当 $B = \{4\}$ 时, 则由 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ (-2)^2 + a \cdot (-2) + a^2 - 12 = 0 \end{cases}, \Rightarrow$ 无解; -----8 分

当 $B = \{-2, 4\}$ 时, 则由 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -2 + 4 = -a \end{cases}, \Rightarrow a = -2$; -----10 分

综上, 实数 a 的取值集合为 $\{a \mid a < -4, \text{ 或 } a = -2, \text{ 或 } a \geq 4\}$ 。-----12 分

20. (12 分)

解: (I) $\because f(1) = 1 + m = 2, \therefore m = 1, \therefore f(x) = x + \frac{1}{x}$, -----1 分

任取 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, -----2 分

$$\because f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \frac{1}{x_1}) - (x_2 + \frac{1}{x_2}) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}, \text{-----}$$

其中 $x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 0, x_1 x_2 - 1 > 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增。-----6 分

(II) $\because a < x + f(x) = 2x + \frac{1}{x}, x \in (1, +\infty)$, 设 $g(x) = 2x + \frac{1}{x}, x \in (1, +\infty)$,

$\therefore a \leq g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值,

$\because g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 3, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$ 。-----12 分

21. (12 分)

解: (1) 取 $x = y = 0$, 代入已知条件, 得 $f(0) = 1$; -----2 分

(2) 设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$,

$$f(x_1) = f[(x_1 - x_2) + x_2] = f(x_1 - x_2) + f(x_2) - 1$$

由 $x < 0$ 时, $f(x) < 1$, 得 $f(x_1 - x_2) < 1$

则 $f(x_1) = f[(x_1 - x_2) + x_2] = f(x_1 - x_2) + f(x_2) - 1 < 1 + f(x_2) - 1 = f(x_2)$

即 $f(x_1) < f(x_2)$ ，故 $f(x)$ 在 R 上为增函数；-----9 分

(3) 取 $x = y = 2$ ，代入已知条件，得 $f(4) = 2f(2) - 1$

而 $f(4) = 7$ ，则 $f(2) = 4$ ，-----10 分

$$f(2x+1) < 4 \Leftrightarrow f(2x+1) < f(2)$$

由 (2) 知 $f(x)$ 在 R 上为增函数， $f(2x+1) < f(2) \Leftrightarrow 2x+1 < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ 。--11 分

故解不等式 $f(2x+1) < 4$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2})$ -----12 分

22、(12 分)

解：(I) ①对任意的实数 x 都有

$g(g(x) - x^2 + x) = g(x) - x^2 + x$ ；②仅有一个实数 x_0 使 $g(x_0) = x_0$ ，得：

$g(x) - x^2 + x = x_0$ 对任意 $x \in R$ 恒成立；

取 $x = x_0$ ，代入 $g(x) - x^2 + x = x_0$ ，得 $g(x_0) - x_0^2 + x_0 = x_0$ ，

又 $g(x_0) = x_0$ ，则有 $x_0 = 0$ 或 1 ；

当 $x_0 = 0$ 时， $g(x) - x^2 + x = 0$ ，即 $g(x) = x^2 - x$ ，由 $g(x) = x^2 - x = x \Rightarrow x = 0$ 或 2 ，不满足题意；

当 $x_0 = 1$ 时， $g(x) - x^2 + x = 1$ ，即 $g(x) = x^2 - x + 1$ ，由 $g(x) = x^2 - x + 1 = x \Rightarrow x = 1$ ，满足题意；

所以 $x_0 = 1$ ，则 $g(x) = x^2 - x + 1$

故 $f(x) = g(x) + 3x - 1 = x^2 - x + 1 + 3x - 1 = x^2 + 2x$ ；-----4 分

(II) $h(x) = af(x) - x - 3 = a(x^2 + 2x) - x - 3 = ax^2 + (2a - 1)x - 3 (a > 0)$

因为 $a > 0$ ，函数 $h(x)$ 图像的对称轴为 $x = -\frac{2a-1}{2a} = -1 + \frac{1}{2a}$ ，

又 $W(a)$ 是函数 $h(x)$ 在 $[-\frac{3}{2}, 2]$ 上的最大值，则有如下两种情况：

(i) 若 $-1 + \frac{1}{2a} \leq \frac{-\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{1}{4}$ ， $0 < a \leq \frac{3}{5}$ ，即 $\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{3}{5}$ 时， $W(a) = h(2) = 8a - 5$ ；-----6 分

(ii) 若 $-1 + \frac{1}{2a} > \frac{-\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{1}{4}$ ， $a > 0$ ，即 $0 < a < \frac{2}{5}$ 时， $W(a) = h(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}$ ；-----7 分

综上， $W(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}, & 0 < a < \frac{2}{5} \\ 8a - 5, & \frac{2}{5} \leq a \leq \frac{3}{5} \end{cases}$ -----8 分

(III) 易得函数 $W(a) = \begin{cases} -\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}, & 0 < a < \frac{2}{5} \\ 8a - 5, & \frac{2}{5} \leq a \leq \frac{3}{5} \end{cases}$ 的值域为 $[-\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}]$;

则 $-W(a)$ 的值域为 $[\frac{1}{5}, \frac{9}{5}]$

$\varphi(x) = f(x) - l + 1 = x^2 + 2x - l + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上 \uparrow , 故 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域为 $[-l + 1, +\infty)$; -----10 分

对任意 $x_1 \in [0, +\infty)$, 总存在 $x_2 \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$, 使得 $\varphi(x_1) > -W(x_2)$ 成立

$$\Leftrightarrow -l + 1 > \frac{1}{5} \Leftrightarrow l < \frac{4}{5}$$

故存在 $l \in \mathbb{Z}$ 满足题意, 且 l 的最大值为 0 -----12 分