

导数选填

1. 若 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$ 且满足 $f'(x) < f(x)$, 则 $f(3)$ 与 $e^3 f(0)$ 的大小关系是 ()
 (A) $f(3) < e^3 f(0)$ (B) $f(3) = e^3 f(0)$ (C) $f(3) > e^3 f(0)$ (D) 不能确定
2. 设 $f(x), g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的可导函数, $f'(x), g'(x)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 的导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, $g(x) > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则当 $a < b$ 时, 有 ()
 (A) $f(a)g(b) > f(b)g(a)$ (B) $f(b)g(b) < f(a)g(a)$
 (C) $f(b)g(b) > f(a)g(a)$ (D) $f(a)g(b) < f(b)g(a)$
3. 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则 ()
 (A) $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1$ (B) $e^{x_2} - e^{x_1} < \ln x_2 - \ln x_1$
 (C) $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2}$ (D) $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2}$
4. 设函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$. 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2 + [f(x_0)]^2 < m^2$, 则 m 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$ (B) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
5. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $(2, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1)$
6. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 给出下来结论:
 ① $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) = 0$;
 ② 函数 $f(x)$ 的图像是中心对称图形;
 ③ 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减;
 ④ 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$
 上述结论错误的是 ()
 (A) ①③ (B) ②③ (C) ②④ (D) ③
7. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (B) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (D) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $x_0 (x_0 \neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论正确的是 ()
 (A) $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$ (B) $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点
 (C) $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点 (D) $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点
9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ \ln(x+1), & x > 0. \end{cases}$ 若 $|f(x)| \geq ax$, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, 0]$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $[-2, -1]$ (D) $[-2, 0]$

10. 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3} \sin 2x + a \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
- (A) $[-1, 1]$ (B) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$
11. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若 $f(x_1) = x_1 < x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实数根的个数为 ()
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
12. 已知函数 $f(x) = e^x + ax - 2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) < a(x_1 - x_2)$, 则 a 的取值范围是 ()
- (A) $[1, +\infty)$ (B) $[2, +\infty)$
- (C) $(-\infty, 1]$ (D) $(-\infty, 2]$
13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x \leq a, \\ -2x & x > a. \end{cases}$
- ①若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____;
- ②若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是_____.
14. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + 3x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -3)$ 处的切线方程是_____.
15. 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a+2)x + 1$ 相切, 则 $a =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = e^{-|x|} + \cos \pi x$, 给出下列命题:
- ① $f(x)$ 的最大值为 2;
- ② $f(x)$ 在 $(-10, 10)$ 内的零点之和为 0;
- ③ $f(x)$ 的任何一个极大值都大于 1.
- 其中, 所有正确命题的序号是_____.