数学试题

（考试时间：120 分钟　　　试卷满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 计算：$625^{\frac{1}{4}}=$

A. 5　　B. 25　　C. ±5　　D. ±25

2. 若函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 R 上是减函数，则

A. $m>\frac{1}{2}$　　B. $m<\frac{1}{2}$　　C. $m>-\frac{1}{2}$　　D. $m<-\frac{1}{2}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，且 $A\cap B=A$，则集合 B 可以是

A. $\{x|2^x>1\}$　　B. $\{x|x^2>1\}$　　C. $\{x|x>5\}$　　D. $\{1,2,3\}$

4. 下列四组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是

A. $f(x)=x-1,\ g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

B. $f(x)=|x+1|,\ g(x)=\begin{cases}x+1,x\geq 1\\-x-1,x<-1\end{cases}$

C. $f(x)=1,\ g(x)=(x+1)^0$

D. $f(x)=\sqrt[3]{x^3},\ g(x)=(\sqrt{x})^2$

5. 已知 $f(x)=x^2+x$，则 $f(x-1)$ 等于

A. x^2-x+1　　B. x^2-x　　C. x^2-2x-1　　D. x^2-2x

6. 函数 $f(x)=\sqrt{3^{2x-1}-\frac{1}{27}}$ 的定义域是

A. $(-2,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,-2)$

7. 已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3(a>0)$，则下列选项错误的是

A. $f(-3)>f(3)$　　B. $f(-2)<f(3)$　　C. $f(4)=f(-2)$　　D. $f(4)>f(3)$

8. 设函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则函数 $f(x-1)-f^2(x)$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. -1

9. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 R，值域为 $[-1,2]$，则值域也为 $[-1,2]$ 的函数是

A. $y=2f(x)+1$　　B. $y=f(2x+1)$　　C. $y=-f(x)$　　D. $y=|f(x)|$

10. 已知 $1<b<a$，则下列大小关系不正确的是

A. $a^b<a^a$　　B. $b^a>b^b$　　C. $a^b>b^b$　　D. $a^b>b^a$

11. 设函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$ 在区间 $[2,9]$ 上的最大值和最小值分别为 M、m，则 $m+M=$

A. $\frac{27}{2}$　　B. 13　　C. $\frac{25}{2}$　　D. 12

12. 已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(-x)=4-f(x)$，若函数 $y=\frac{2x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_m+y_m)=$

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知函数 $f(x)=a-\frac{2}{e^x+1}(a\in R)$ 是奇函数，则 $a=$________.

14. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是________.

15. 已知 $A=\{x|x^2+px+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值集合是________.

16. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-(\frac{1}{2})^x+a,a\leq x<0\\-x^2+2x-3,0\leq x\leq 4\end{cases}$ 的值域为 $[-11,-2]$，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

(1) 求证：$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 是定值；

(2) 求 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)$ 的值.

18. （本题满分 12 分）

已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x^2-5x<0\}$，$B=\{x|m+1\leq x\leq 3m-1\}$.

(1) 当 $m=2$ 时，求 $\complement_U(A\cap B)$；

(2) 如果 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

19.（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a\neq1)$.

(1)若 $a>0$,求$f(x)$的定义域;

(2)若$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数,求实数 a 的取值范围.

20.（本题满分 12 分）

定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$,满足$f(mn)=f(m)+f(n)(m,n>0)$,且当 $x>1$ 时,$f(x)>0$.

(1)求证:$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)$;

(2)求证:$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数;

(3)若$f(2)=1$,解不等式$f(x+2)-f(2x)>2$.

21.（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x^2-2tx+t^2-6t+1\left(x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]\right)$,其最小值为$g(t)$.

(1)求 $g(t)$的表达式;

(2)当 $t>1$ 时,是否存在 $k\in\mathbf{R}$,使关于 t 的不等式 $g(t)<kt$ 有且仅有一个正整数解,若存在,求实数 k 的取值范围;若不存在,请说明理由.

22.（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\begin{cases}m\left(x+\frac{1}{x}\right)-2,x>0\\2\left(x+\frac{1}{x}\right)+n,x<0\end{cases}$是奇函数.

(1)求实数 m,n 的值;

(2)若对任意实数 x,都有$f(4^x)+\lambda f(2^x)\geq0$ 成立. 求实数 λ 的取值范围.

高一数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	B	B	B	B	C	B	D	C	C

1．

【解析】$625^{\frac{1}{4}}=(5^4)^{\frac{1}{4}}=5$，故选 A.

2．

【解析】根据题意，有 $2m-1<0$，解得 $m<\dfrac{1}{2}$，故选 B.

3．

【解析】由 $A\bigcap B=A$ 可知，A $\subseteq$ B，对于 A：$\{x\,|\,2^x>1=2^0\}=\{x\,|\,x>0\}\supseteq A$，符合题意.对于 B：$\left\{x\middle|x^2>1\right\}=\{x\,|\,x<-1或x>1\}$，没有元素 1，所以不包含 A.对于 C、D 显然不合题意；故选 A.

4.

【解析】A 选项中，$f(x)$ 定义域为 R，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以二者不是同一函数，所以 A 错误；B 选项中，$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geq -1\\ -1-x, & x<-1\end{cases}$，与 $g(x)$ 定义域相同，都是 R，对应法则也相同，所以二者是同一函数，所以 B 正确；C 选项中，$f(x)$ 定义域为 R，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以二者不是同一函数， 所以 C 错误；D 选项中，$f(x)$ 定义域为 R，$g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，所以二者不是同一函数，所以 D 错误.故选 B

5．

【解析】因为 $f(x)=x^2+x$，所以 $f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)=x^2-x$．故选 B

6．

【解析】要使函数有意义，需满足 $3^{2x-1}-\dfrac{1}{27}\geq 0$，即：$3^{2x-1}\geq 3^{-3}$，因为 $y=3^x$ 为增函数，所以 $2x-1\geq -3$，解得：$x\geq -1$.故选 B.

7．

【解析】$f(x)=ax^2-2ax-3(a>0)$ 对称轴为 $x=1$，且在 $[1,+\infty)$ 是增函数，$f\left(-3\right)=f(5)>f\left(3\right)$，选项 A 正确；$f\left(-2\right)=f(4)>f\left(3\right)$，选项 B 错误；$f\left(4\right)=f\left(-2\right)$，选项 C 正确；$f\left(4\right)>f\left(3\right)$，选项 D 正确.故选 B.

8．

【解析】因为 $f\left(x-1\right)-f^2\left(x\right)=\sqrt{x-1}-x$，令 $\sqrt{x-1}=t(t\geq 0)$，则 $x=1+t^2$，所以

$y=-t^2+t-1=-(t-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}$，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，函数取得最大值 $-\frac{3}{4}$，故选 C.

9．

【解析】由于 $y=2f(x)+1\in[-1,5]$，∴A 错误；$y=f(2x+1)\in[-1,2]$，∴B 正确；$y=-f(x)\in[-2,1]$，∴C 错误；$y=|f(x)|\in[0,2]$，∴D 错误．故选 B.

10.

【解析】∵ $1<b<a$，∴ $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 均为增函数，∴ $a^b<a^a$，$b^a>b^b$，A，B 项正确，又由 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 的图像在第一象限内的关系可知：$a^b>b^b$，C 项正确；a^b 和 b^a 的大小关系不能确定，如 $a=3,b=2,a^b>b^a$；$a=4,b=2,a^b=b^a$；$a=5,b=2,a^b<b^a$，故 D 项不正确，故选 D.

11．

【解析】$f\left(x\right)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}=\frac{\left(x-1\right)^2+4}{x-1}=\left(x-1\right)+\frac{4}{x-1}$；因为 $x\in\left[2,9\right]$，所以 $x-1\in\left[1,8\right]$，令 $x-1=t$，则 $t\in\left[1,8\right]$；因为 $y=f\left(x\right)=t+\frac{4}{t},t\in\left[1,8\right]$，根据对勾函数性质可知当 $t=2$ 时，函数有最小值为 4；当 $t=8$ 时，函数有最大值为 $\frac{17}{2}$.所以 $m+M=\frac{25}{2}$.

故选 C.

12．

【解析】由 $f(-x)=4-f(x)$，得 $f(x)+f(-x)=4$，可得 $y=f(x)$ 的图象关于 $\left(0,2\right)$ 对称，而 $y=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$.所以函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{2x+1}{x}$ 的图像都关于点 $(0,2)$ 对称，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_m=0$，$y_1+y_2+\cdots+y_m=\frac{m}{2}\times4=2m$，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．1　　14．$x=0$　　15．$(-2,+\infty)$　　16．$\left[-3,-1\right]$

【解析】

13．

【解析】因为函数 $f\left(x\right)=a-\frac{2}{e^x+1}\left(a\in R\right)$ 是奇函数，

所以 $f\left(-x\right)=a-\frac{2}{e^{-x}+1}=a-\frac{2e^x}{e^x+1}=-f(x)=-a+\frac{2}{e^x+1},2a=2$，解得 $a=1$.

14．

【解析】设 $2^x=t$，则 $t^2+t-2=0$，$t=-2$（舍去），$t=1$，所以解为 $x=0$.

15．

【解析】∵ $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，∴方程 $x^2+px+1=0$ 没有正实数解，故 A 集合有两种情况：

①若 $A=\varnothing$，则 $\Delta=p^2-4<0$，则 $-2<p<2$；

②若 $A\neq\varnothing$，则方程有两个非正数解，且 0 不是其解，则有：$\begin{cases}p^2-4\geqslant 0\\ -p\leqslant 0\end{cases}$，解得 $p\geqslant 2$．

综上所述，$p>-2$，即实数 p 的取值范围是 $(-2,+\infty)$．

16.

【解析】当 $0\le x\le 4$ 时，$f(x)\in[-11,-2]$，

当 $a\le x<0$ 时，$f(x)\in[-(\frac{1}{2})^a+a,-1+a)$，数形结合只需：$\begin{cases}-(\frac{1}{2})^a+a\ge -11\\ -1+a\le -2\end{cases}$，解得

$-3\le a\le -1$．所以实数 a 的取值范围是 $\left[-3,-1\right]$．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】

（1）证明：$\because f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，…………………3 分

$\therefore f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$……………………………………………………………5 分

（2）由（1）知 $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$，

$\therefore f\left(i\right)+f\left(\dfrac{1}{i}\right)=1\left(i=2,3,4,\ldots,2020\right)$……………………………………………7 分

$\therefore f\left(2\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(3\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+f\left(2020\right)+f\left(\dfrac{1}{2020}\right)=2019$………10 分

18.【解析】

（1）集合 $A=\left\{x\middle|x^2-5x<0\right\}=\left\{x\middle|0<x<5\right\}$，…………………………………2 分

当 $m=2$ 时，$B=\left\{x\middle|3\le x\le 5\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{x\middle|3\le x<5\right\}$，…………………………………………………………4 分

故 $\complement_U(A\cap B)=\left\{x\middle|x<3或x\ge 5\right\}$……………………………………………………6 分

（2）因为 $A\cup B=A$，

所以 $B\subseteq A$，……………………………………………………………………………7 分

①当 $B=\varnothing$ 时，有 $m+1>3m-1$ 得：$m<1$，……………………………………8 分

②当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}m+1\le 3m-1\\ m+1>0\\ 3m-1<5\end{cases}$，解得 $1\le m<2$，…………………………10 分

综合①②得：$m<2$，……………………………………………………………………11 分

故实数 m 的取值范围为：$\left(-\infty,2\right)$．………………………………………………12 分

19.【解析】

（1）当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，由 $3-ax\geq 0$ 得 $x\leq \dfrac{3}{a}$，

即函数 $f\left(x\right)$ 的定义域是 $\left(-\infty,\dfrac{3}{a}\right]$……………………………………………………….4 分

（2）当 $a-1>0$ 即 $a>1$ 时，令 $t=3-ax$,………………………………………………….5 分

要使 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上是减函数，则函数 $t=3-ax$ 在 $\left(0,1\right]$ 上为减函数，

即 $-a<0$，并且 $3-a\times 1\geq 0$，解得 $1<a\leqslant 3$；……………………………………….7 分

当 $a-1<0$ 即 $a<1$ 时 ，令 $t=3-ax$ ……………………………………………………….8 分

要使 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上是减函数，则函数 $t=3-ax$ 在 $\left(0,1\right]$ 为增函数，

即 $-a>0$ 并且 $3-a\times 0\geqslant 0$，解得 $a<0$ ……………………………………………………10 分

综上可知，所求实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,3\right]$……………………………….12 分

20.【解析】

（1）由题可得 $f(m)=f\left(\dfrac{m}{n}\cdot n\right)=f\left(\dfrac{m}{n}\right)+f(n)$，……………………………2 分

即 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)$…………………………………………………………………….4 分

（2）任取 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$.

由（1）得：$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)>0$，即 $f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$.

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.……………………………………………………………….8 分

（3）$\because f(2)=1$，$\therefore 2=f(2)+f(2)=f(4)$，…………………………………….9 分

$f(x+2)-f(2x)>2\Leftrightarrow f(x+2)>f(2x)+f(4)\Rightarrow f(x+2)>f(8x)$……….10 分

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore\begin{cases}x+2>0,\\2x>0,\\x+2>8x,\end{cases}$ 解得 $0<x<\dfrac{2}{7}$ ……………………………………………………….11 分

故不等式 $f(x+2)-f(2x)>2$ 的解集为 $\left\{x\middle|0<x<\dfrac{2}{7}\right\}$………………………….12 分

21.【解析】

（1）函数 $f\left(x\right)=x^2-2tx+t^2-6t+1\left(x\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ 的对称轴为 $x=t$，……… 1 分

当 $t\leq -\dfrac{1}{2}$ 时，区间 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$ 为增区间，可得 $g\left(t\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=t^2-5t+\dfrac{5}{4}$；……..2 分

当$-\frac{1}{2}<t<1$，可得$g(t)=f(t)=-6t+1$；……………………………………………3分

当$t\geq 1$时，区间$\left[-\frac{1}{2},1\right]$为减区间，可得$g(t)=f(1)=t^2-8t+2$………………4分

则$g(t)=\begin{cases}t^2-5t+\frac{5}{4},t\leq-\frac{1}{2}\\1-6t,-\frac{1}{2}<t<1\\t^2-8t+2,t\geq 1\end{cases}$；…………………………………………………………6分

（2）当$t>1$时，$g(t)<kt$即$t^2-8t+2<kt$，

可得$k>t+\frac{2}{t}-8$，……………………………………………………………………8分

令$m(t)=t+\frac{2}{t}(t>1)$，

可得$m(t)$在$(1,\sqrt{2})$递减，在$(\sqrt{2},+\infty)$递增，

$m(1)=m(2)=3$，$m(3)=\frac{11}{3}$，……………………………………………………9分

由图可得$3<k+8\leq\frac{11}{3}$，即$-5<k\leq-\frac{13}{3}$，

关于t的不等式$g(t)<kt$有且仅有一个正整数解2，……………………………10分

所以k的范围是$\left(-5,-\frac{13}{3}\right]$…………………………………………………………12分

22.【解析】

（1）当$x>0$时，$f(-x)=2\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]+n$，

因为$f(x)$为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(-x)=2\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]+n=-\left[m\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]$，………………………2分

即$(m-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(n-2)=0$总成立. ……………………………………………3分

$\therefore\begin{cases}m-2=0\\n-2=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$，………………………………………………………4分

又当$x<0$时，同理可得$\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$，…………………………………………5分

综上：$\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$ ……………………………………………………………………6 分

（2）$\because 4^x>0$，$2^x>0$，

原不等式化为 $2\left(4^x+\dfrac{1}{4^x}\right)-2+2\lambda\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-2\lambda\geq 0$，……………………7 分

令 $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$，则 $t\geq 2$，

原不等式进一步化为 $t^2+\lambda t-\lambda-3\geq 0$ 在 $t\geq 2$ 上恒成立. ……………………8 分

记 $g(t)=t^2+\lambda t-\lambda-3$，$t\in[2,+\infty)$……………………………………………9 分

①当 $-\dfrac{\lambda}{2}\leq 2$ 时，即 $\lambda\geq -4$ 时，$g(t)_{\min}=g(2)=\lambda+1\geq 0$，

$\therefore \lambda\geq -1$ 合理；…………………………………………………………………………10 分

②当 $-\dfrac{\lambda}{2}>2$ 时，即 $\lambda<-4$ 时，

$g(t)_{\min}=g\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)=-\dfrac{\lambda^2}{4}-\lambda-3\geq 0$，显然不成立. ……………………………11 分

综上实数 λ 的取值范围为：$\lambda\geq -1$………………………………………………12 分