

数学试题

一、单选题(共 8 道题, 每题 5 分, 共 40 分)

1. 已知 $A = \{x | 2x - 1 > 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{3\}$ B. \emptyset C. $\{3, 4, 5, 6\}$ D. $\{4, 5, 6\}$

2. 命题 $p: \forall x > 2, x^2 - 1 > 0$, 则 $\neg p$ 是 ()

- A. $\forall x > 2, x^2 - 1 \leq 0$ B. $\forall x \leq 2, x^2 - 1 > 0$
C. $\exists x > 2, x^2 - 1 \leq 0$ D. $\exists x \leq 2, x^2 - 1 \leq 0$

3. 已知 $a \in R$, 则 $a > 2$ 是 $a^2 > 2a$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 3x - 1 = 0$ 有实根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k \leq -\frac{9}{4}$ B. $k \geq -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$
C. $k \geq -\frac{9}{4}$ D. $k > -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$

5. 有 3 个房间需要粉刷, 粉刷方案为: 每个房间只用一种颜色, 且三个房间颜色各不相同.

已知三个房间的粉刷面积 (单位: m^2) 分别为 x, y, z , 且 $x < y < z$, 三种颜料的粉刷费用 (单位: 元/ m^2) 分别为: a, b, c , 且 $a < b < c$. 在不同方案中, 最低费用 (单位: 元) 是 ()

- A. $ax + by + cz$ B. $ay + bx + cz$
C. $zy + bz + cx$ D. $az + by + cx$

6. 已知函数 $f(x-1) = x^2 - 2$, 则 $f(2)$ 的值为 ()

- A. -1 B. 7 C. 2 D. 1

7. 若 $0 < x < \frac{1}{2}$, 则 $y = x\sqrt{1-4x^2}$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

8. 已知集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 对于它的任一非空子集 A , 可以将 A 中的每一个元素 k 都乘以 $(-1)^k$ 再求和, 例如 $A = \{2, 3, 5\}$, 则可求得和为 $(-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^5 \cdot 5 = -6$, 对 S 的所有非空子集, 这些和的总和为 ()

- A. 92 B. 96 C. 100 D. 192

二、多选题 (共 4 道题, 每题 5 分, 共 20 分, 每题 4 个选项中, 有多个正确选项, 全部选对得 5 分, 选对但不全得 2 分, 有错误选项得 0 分)

9. 已知集合 $M = \{1, m+2, m^2+4\}$, 且 $5 \in M$, 则 m 的可能取值有 ()

- A. 1 B. -1 C. 3 D. 2

10. 对于实数 a, b, c 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a = b$, 则 $a + c = b + c$ B. 若 $a + c = b + c$ 则 $a = b$
C. 若 $a = b$, 则 $ac = bc$ D. 若 $ac = bc$, 则 $a = b$

11. 已知 a, b, c, d 是实数, 则下列一定正确的有 ()

- A. $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ B. $a + \frac{1}{a} \geq 2$
C. 若 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $a < b$ D. 若 $a < b < 0, c < d < 0$, 则 $ac > bd$

12. 对于实数 x , 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[\pi] = 3, [-1.08] = -2$, 定义函数

$f(x) = x - [x]$, 则下列命题中正确的是 ()

- A. $f(-3.9) = f(4.1)$ B. 函数 $f(x)$ 的最大值为 1
C. 函数 $f(x)$ 的最小值为 0 D. 方程 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 有无数个根

三、填空题（共 4 道题，每题 5 分，共 20 分，其中 13 题第一个空 2 分，第二个空 3 分）

13. 关于 x 的方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根分别为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____，

$$|x_1 - x_2| = \text{_____}.$$

14. 已知 $1 \leq a + b \leq 4$ ， $-1 \leq a - b \leq 2$ ，则 $4a - 2b$ 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，函数 $g(x) = \frac{f(x-1)}{\sqrt{2x-1}}$ ，则 $g(x)$ 的定义域为_____.

16. 已知函数 $f(x) = |x-1|(x+1)$ ， $x \in [a, b]$ 的值域为 $[0, 8]$ ，则 $a+b$ 的取值范围是_____.

四、解答题（共 6 道题，17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分）

17. 解下列不等式：

$$(1) |2x-3| > 2; \quad (2) 9x^4 - 37x^2 + 4 < 0.$$

18. 已知集合 $A = \{x | a-1 < x < 2a+3\}$ ， $B = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$

(1) $a = 2$ 时，求 $A \cup B$ ；

(2) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

19. 某公司生产一种电子仪器的固定成本为 20000 元，每生产一台仪器需增加投入 100 元. 设该公司的仪器月产量为 x 台，当月产量不超过 400 台时，总收益为 $400x - \frac{1}{2}x^2$ 元，当月产量超过 400 台时，总收益为 80000 元.（注：总收益=总成本+利润）

(1) 将利润表示为月产量 x 的函数 $f(x)$ ；

(2) 当月产量为何值时，公司所获利润最大？最大利润为多少元？

20. (1) 比较 x^3 与 $x^2 - x + 1$ 的大小;

(2) 证明: 已知 $a > b > c$, 且 $a + b + c = 0$, 求证: $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$

21. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 3x + 2 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < 1, \text{ 或 } x > b\}$

(1) 求 a, b 的值;

(2) 当 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ 时, 有 $2x + y \geq k^2 + k + 2$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + a + 3$, $g(x) = mx + 5 - 2m$

(1) 当 $a = -3$, $m = 0$ 时, 求方程 $f(x) - g(x) = 0$ 的解;

(2) 若方程 $f(x) = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有实数根, 求实数 a 的取值范围;

(3) 当 $a = 0$ 时, 若对任意的 $x_1 \in [1, 4]$, 总存在 $x_2 \in [1, 4]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案及评分标准

1. D 2. C 3. A 4. B 5. D 6. B 7. C 8. B 9. AC 10. ABC 11. AD 12. ACD

13. $-4, 2\sqrt{5}$ 14. $[-2, 10]$ 15. $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ 16. $[2, 4]$

17.(1)原不等式可转化为: $2x-3 > 2$ 或 $2x-3 < -2$

整理得: $x > \frac{5}{2}$ 或 $x < \frac{1}{2}$, 则原不等式解集为 $\left\{x \mid x > \frac{5}{2} \text{ 或 } x < \frac{1}{2}\right\}$ 5 分

$$(2) 9x^4 - 37x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(9x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x^2 < 4$$

所以 $-2 < x < -\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{3} < x < 2$ 9 分

则该不等式解集为: $\left\{x \mid -2 < x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3} < x < 2\right\}$ 10 分

18. (1) $a = 2$ 时 $A = \{x \mid 1 < x < 7\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$

$$A \cup B = \{x \mid 1 < x < 7\} \cup \{x \mid -2 \leq x \leq 4\} = \{x \mid -2 \leq x < 7\} \text{6 分}$$

(2) 因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分条件, 所以 $A \subseteq B$ 7 分

① $A = \emptyset$, $a-1 \geq 2a+3$ 即 $a \leq -4$ 时满足题意;9 分

$$\textcircled{2} A \neq \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} a > -4 \\ a-1 \geq -2 \text{ 解得 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ 2a+3 \leq 4 \end{cases} \text{11 分}$$

综上所述, $a \leq -4$ 或 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 12 分

19. (1) 由题意得总成本为 $(20000+100x)$ 元,

$$\text{所以利润 } f(x) = \begin{cases} 300x - \frac{1}{2}x^2 - 20000, & 0 \leq x \leq 400 \\ 60000 - 100x, & x > 400 \end{cases}, x \in N \text{4 分}$$

$$(2) \text{ 当 } 0 \leq x \leq 400 \text{ 时, } f(x) = 300x - \frac{1}{2}x^2 - 20000 = -\frac{1}{2}(x-300)^2 + 25000,$$

所以当 $x = 300$ 时, $f(x)$ 的最大值为 25000;

$$\text{当 } x > 400 \text{ 时, } f(x) < 60000 - 100 \times 400 = 20000 < 25000$$

综上, 当月产量为 300 台时, 公司所获利润最大, 最大利润为 25000 元.12 分

$$20. (1) x^3 - (x^2 - x + 1) = (x^3 - x^2) + (x - 1) = (x^2 + 1)(x - 1) \text{2 分}$$

当 $x = 1$ 时 $(x^2 + 1)(x - 1) = 0$, 故 $x^3 = x^2 - x + 1$;

当 $x > 1$ 时, $(x^2 + 1)(x - 1) > 0$, 故 $x^3 > x^2 - x + 1$;

当 $x < 1$ 时, $(x^2 + 1)(x - 1) < 0$, 故 $x^3 < x^2 - x + 1$ 6 分

(2) 因为 $a > b > c$ 且 $a + b + c = 0$ 所以 $c < 0$

因为 $a > b$ 所以 $a - c > b - c > 0$, 两边取倒数得: $\frac{1}{a - c} < \frac{1}{b - c}$

又 $c < 0$ 所以 $\frac{c}{a - c} > \frac{c}{b - c}$ 12 分

21. (1) 因为不等式 $ax^2 - 3x + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | x < 1, \text{ 或 } x > b\}$ 所以 1 和 b 是方程

$ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的两个实数根且 $a > 0$ 2 分

所以 $\begin{cases} 1 + b = \frac{3}{a} \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ 5 分

(3) 由 (1) 知 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ 于是有 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$ 6 分

故 $2x + y = (2x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = 4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 8$ (当 $x = 2, y = 4$ 时等号成立)9 分

依题意有 $k^2 + k + 2 \leq 8$, 即 $k^2 + k - 6 \leq 0$ 10 分

解得 $-3 \leq k \leq 2$ 12 分

22. (1) 当 $a = -3, m = 0$ 时方程 $f(x) - g(x) = 0$ 化为 $x^2 - 4x - 5 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 5$;2 分

(2) 由函数 $f(x)$ 图像可知当 $x \in [-1, 1]$ 时 $f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$, 方程 $f(x) = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有实数根

则必有 $\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \leq 0 \\ a + 8 \geq 0 \end{cases}$ 解得: $-8 \leq a \leq 0$ 6 分

(3) 当 $x_1 \in [1, 4] f(x_1) \in [-1, 3], x_2 \in [1, 4]$

① 当 $m = 0$ 时 $g(x_2) = 5$, 不符合题意, 舍去。

② 当 $m > 0$ 时 $g(x_2) \in [5 - m, 5 + 2m]$ 则需有 $\begin{cases} 5 - m \leq -1 \\ 5 + 2m \geq 3 \end{cases}$, 解得 $m \geq 6$;

③ 当 $m < 0$ $g(x_2) \in [5 + 2m, 5 - m]$, 则需有 $\begin{cases} 5 - m \geq 3 \\ 5 + 2m \leq -1 \end{cases}$, 解得 $m \leq -3$;

综上所述, m 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [6, +\infty)$ 。12 分