导数解题方法

目录

1 利用导数的概念解题

1.1 导数的定义

若函数 $f(x)$ 的在 x_0 附近有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得一个增量 $\triangle x$ 时 ($\triangle x$充分小)，因变量 y 也随之取得增量 $\triangle y$ $\big(\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)\big)$. 若 $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，此极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (或变化率)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x_0}$，即 $f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1.2 常用函数的导数和基本运算

1.2.1 常用函数的导数

原函数	导数
$y = C$ (C为常数)	$y' = 0$
$y = x^n$ ($n \in \mathbf{Q}^*$)	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$

1.2.2 四则运算

1) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$;

2) $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}$

1.2.3 复合函数导数

$y = f\big[u(x)\big]$ 的导函数为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (其中 y'_x 表示 y 关于 x 的导数).

证明. 将 $y = f\big[u(x)\big]$ 分拆成 $\begin{cases} y = f(u) \\ u = u(x). \end{cases}$. 根据导数的定义：

$$\begin{aligned} y'_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= y'_u \cdot u'_x \end{aligned}$$

□

1.3 练习

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & (x\leqslant 1)\\ \dfrac{1}{2}(x+1), & (x>1)\end{cases}$ 判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导？

2. $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, 则 $\dfrac{a^2}{f'(a)}+\dfrac{b^2}{f'(b)}+\dfrac{c^2}{f'(c)}=$ (　　)

   (A) 1　　(B) -1　　(C) $a+b+c$　　(D) $ab+bc+ca$

3. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 **R** 上的两个可导函数，若 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f'(x)=g'(x)$，则 (　　)

   (A) $f(x)=g(x)$　　(B) $f(x)-g(x)$ 为常数函数

   (C) $f(x)=g(x)=0$　　(D) $f(x)+g(x)$ 为常数函数

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$，则 $f'(0)=$______.

5. 下列说法正确的是______.

   ① $f'(x_0)$ 和 $f'(x)$ 都称为 $f(x)$ 的导数，它们有相同的意义；

   ② $f'(x_0)$ 是 $f(x_0)$ 的导数；

   ③ $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值.

6. 函数 $y=(\sin x^2)^3$ 的导数是______.

7. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+ax+a}$ 的导数是______.

2 切线方程

2.1 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率(瞬时速度就是位移 $s(t)$ 对时间 t 的导数).

2.2 求曲线切线方程的步骤：

2.2.1 点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上

(1) 求出函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的导数，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率;

(2) 在已知切点坐标 $P(x_0,f(x_0))$ 和切线斜率的条件下，求得切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

注：① 当曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线平行于 y 轴时 (此时导数不存在)，由切线的定义可知，切线方程为 $x=x_0$;

② 当切点坐标未知时，应首先设出切点坐标，再求解.

2.2.2 点 $P(x_0,y_0)$ 不在曲线上

1) 设出切点 $P'\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$;

2) 写出过点 $P'\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 的切线方程 $y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\left(x-x_1\right)$;

3) 将点 P 的坐标 (x_0,y_0) 代入切线方程，求出 x_1；

4) 将 x_1 的值代入方程 $y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\left(x-x_1\right)$，可得过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程.

2.2.3 切线方程已知

当曲线的切线方程是已知时，常合理选择以下三个条件的表达式解题：

1) 切点在切线上;

2) 切点在曲线上；

3) 切点横坐标处的导数等于切线的斜率.

2.3 练习

1. 直线 l 是曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$ 的切线，则 l 的斜率的取值范围是 ( )

   (A) $(-\infty,1]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[0,1]$　(D) $[1,+\infty)$

2. 已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 a 的值为 ( )

   (A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2

3. 垂直于直线 $2x-6y+1=0$ 且与曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 相切的直线方程是 ( )

   (A) $3x-y+6=0$　(B) $3x+y+6=0$

   (C) $3x-y-6=0$　(D) $3x+y-6=0$

4. 已知曲线 $S: y = 3x - x^3$ 及点 $P(2,2)$，则过点 P 可向 S 引切线，其切线的条数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 若曲线 $y = x^4$ 的一条切线 l 和直线 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直，则 l 的方程为 ( )

(A) $4x - y - 3 = 0$ (B) $x + 4y - 5 = 0$

(C) $4x - y + 3 = 0$ (D) $x - 4y + 5 = 0$

6. 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a+2)x + 1$ 相切，则 $a =$______.

7. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x < 0$ 时，$f(x) = \ln(-x) + 3x$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

8. 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为______.

9. 设点 P 是曲线 $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x - 3$ 上的一个动点，则以 P 为切点的切线中，斜率取得最小值时的切线方程是______.

10. 已知两曲线 $y = x^3 + ax$ 和 $y = x^2 + bx + c$ 都经过点 $P(1,2)$，且在点 P 处有公切线，试求 a, b, c 值.

11. 已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 6ax - 11$, $g(x) = 3x^2 + 6x + 12$，直线 m： $y = kx + 9$，又 $f'(-1) = 0$.

(1) 求 a 的值；

(2) 是否存在 k 的值，使直线 m 既是曲线 $y = f(x)$ 的切线，又是曲线 $y = g(x)$ 的切线？如果存在，求出 k 的值，如果不存在，说明理由.

12. 是否存在这样的 a, 使得 $f(x) = ax + \sin x$ 存在两切线互相垂直.

13. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a > 0$，如果过点 (a,b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线，证明：$-a < b < f(a)$.

14. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

15. 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+1$，其中 $a>0$，若过点 $(0,2)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条不同切线，求 a 的取值范围.

16. (2016 文) 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

(1) (3 分) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(0,f(0)\big)$ 处的切线方程；

(2) (5 分) 设 $a=b=4$, 若函数 $y=f(x)$ 有三个不同零点，求 c 的取值范围；

(3) (5 分) 求证：$a^2-3b>0$ 是 $y=f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

17. (2014 文) 已知函数 $f(x)=2x^3-3x$.

(1) (3 分) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值；

(2) (5 分) 若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 t 的取值范围；

(3) (5 分) 问过点 $A(-1,2), B(2,10), C(0,2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？(只需写出结论)

18. (2013 理) 设 l 为曲线 $C\colon y=\frac{\ln x}{x}$ 在点 (1,0) 处的切线.

(1) (5 分) 求 l 的方程；

(2) (8 分) 证明：除切点 $(1,0)$ 之外，曲线 C 在直线 l 的下方.

19. (2013 文) 已知函数 $f(x)=x^2+x\sin x+\cos x$.

(1) (5 分) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处与直线 $y=b$ 相切，求 a 与 b 的值；

(2) (8 分) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=b$ 有两个不同的交点，求 b 的取值范围.

20. (2012 理) 已知函数 $f(x)=ax^2+1\ (a>0)$，$g(x)=x^3+bx$.

(1) (5 分) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线, 求 a,b 的值；

(2) (8 分) 当 $a^2=4b$ 时, 求函数 $f(x)+g(x)$ 的单调区间, 并求其在区间 $(-\infty,-1)$ 上的最大值.

21. (2012 文) 已知函数 $f(x)=ax^2+1(a>0)$，$g(x)=x^3+bx$.

(1) (5 分) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求 a,b 的值；

(2) (8 分) 当 $a=3$，$b=-9$ 时, 若函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 $[k,2]$ 上的最大值为 28，求 k 的取值范围.

22. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P\,(0,2)$，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.

(1) 求 a,b,c,d 的值；

(2) 若 $x\geqslant-2$ 时，$f(x)\leqslant kg(x)$，求 k 的取值范围.

3 函数单调性、零点问题

3.1 单调性

3.1.1 定义

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，此时有:

如果在开区间 (a,b) 内，恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为增函数;

如果在开区间 (a,b) 内，恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为减函数;

如果在开区间 (a,b) 内，恒有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为常数;

3.1.2 求可导函数单调性的一般方法

(1) 确定 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求出 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$，解此方程，求出它在定义域内的所有实根;

(3) 把函数 $f(x)$ 的间断点 (即 $f(x)$ 无定义的点) 和上面的各实根按照由小到大的顺序排列起来，然后用这些点把 $f(x)$ 的定义域分成若干个小区间;

(4) 确定 $f'(x)$ 在各个小区间内的符号，根据 $f'(x)$ 的符号判定函数 $f(x)$ 在每个相应小区间内的增减性.

3.1.3 含参问题的讨论

当研究含有参变量的函数 $f(x)$ 的单调性时，要对参变量进行分类讨论，常见讨论点为:

(1) 求导后，令 $f'(x)=0$，解方程，对方程类型进行讨论;

(2) 解方程的过程中，对 $f'(x)$ 中符号确定部分忽略，可构造新函数进行化简;

(3) 解方程时常分解因式，不好分解因式时采用求根公式;

(4) 对根的大小进行讨论；对根是否在定义域内进行讨论;

(5) 讨论过程中，一定要注意参变量的取值对导数图象是否有影响 (比如开口方向).

3.2 零点问题

方法一 :

i) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

ii) 根据函数 $f(x)$ 的性质作出其图像;

iii) 判断函数 $f(x)$ 的零点的个数.

方法二 :

i) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

ii) 分类讨论，判断函数的零点.

注意:

(1) 研究零点时，首先要确定有没有零点，如果有，再研究有几个;

(2) 研究零点个数时，对于函数自变量趋向无穷时函数值的描述，一般采用选取某个特殊的函数值来说明符合正负的方法.

3.3 练习

1. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为 ( )

   (A) $(2,+\infty)$ (B) $(-\infty,2)$ (C) $(-\infty,0)$ (D) $(0,2)$

2. 函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在下面哪个区间内是增函数 ( )

   (A) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (B) $(\pi,2\pi)$ (C) $\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$ (D) $(2\pi,3\pi)$

3. 若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则 b 的取值范围是 ( )

   (A) $[-1,+\infty)$ (B) $(-1,+\infty)$ (C) $(-\infty,-1]$ (D) $(-\infty,-1)$

4. 设 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义域在 R 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$, 且 $g(-3)=0$, 则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 ( )

   (A) $(-3,0)\cup(3,+\infty)$ (B) $(-3,0)\cup(0,3)$

   (C) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

5. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

   (A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (B) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

   (C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ (D) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

6. 设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，$f'(x),g'(x)$ 分别是 $f(x),g(x)$ 的导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,$g(x)>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则当 $a<b$ 时，有 ( )

   (A) $f(a)g(b)>f(b)g(a)$ (B) $f(b)g(b)<f(a)g(a)$

   (C) $f(b)g(b)>f(a)g(a)$ (D) $f(a)g(b)<f(b)g(a)$

7. 若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 ( )

   (A) $[-1,1]$ (B) $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$ (C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

8. 若 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$ 且满足 $f'(x)<f(x)$，则 $f(3)$ 与 $e^3f(0)$ 的大小关系是 ( )

   (A) $f(3)<e^3f(0)$ (B) $f(3)=e^3f(0)$ (C) $f(3)>e^3f(0)$ (D) 不能确定

9. 若 $0<x_1<x_2<1$，则 ( )

   (A) $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$ (B) $e^{x_2}-e^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

   (C) $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$ (D) $x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$

10. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$，若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$，则必有 ( )

    (A) $f(0)+f(2)<2f(1)$

    (B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

    (C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$

    (D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax-5$.

(1) 若函数的单调递减区间是 $(-3,1)$，则 a 的值是______;

(2) 若函数在 $[1,+\infty)$ 上是单调增函数，则 a 的取值范围是______.

12. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3x+1$.

(1) 当 $a=-\sqrt{2}$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $x\in[2,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

13. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

14. (2011 理) 已知函数 $f(x)=(x-k)^2e^{\frac{x}{k}}$.

(1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) (8 分) 若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{e}$, 求 k 的取值范围

15. (2011 文) 已知函数 $f(x)=(x-k)e^x$.

(1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

16. (2016 理) 设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$.

(1) (5 分) 求 a,b 的值；

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 的单调区间.

17. (2010 理) 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{k}{2}x^2\ (k\geqslant 0)$

(1) (5 分) 当 $k=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) (8 分) 求 $f(x)$ 的单调区间.

4 函数极值、最值问题

4.1 可导函数的极值

1. 极值的概念
   设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，且若对 x_0 附近的所有的点都有 $f(x) < f(x_0)$ (或$f(x) > f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大 (小) 值，称 x_0 为极大 (小) 值点.

2. 求可导函数 $f(x)$ 极值的步骤
   ① 求导数 $f'(x)$;
   ② 求方程 $f'(x) = 0$;
   ③ 检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x) = 0$ 的根的左右的符号，如果在根的左侧附近为正，右侧附近为负，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果在根的左侧附近为负，右侧附近为正，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极小值.

4.2 函数的最大值和最小值

1. 设 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，$y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有导数，求函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，可分两步进行：
   ① 求 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;
   ② 将 $y = f(x)$ 在各极值点的极值与 $f(a)$, $f(b)$ 比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

2. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调增加，则 $f(a)$ 为函数的最小值，$f(b)$ 为函数的最大值；若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减，则 $f(a)$ 为函数的最大值，$f(b)$ 为函数的最小值.

4.3 注意：

(以下将导函数 $f'(x)$ 取值为 0 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点)
可导函数的极值点一定是它的驻点 (函数 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 处有极小值 $f(0) = 0$，可是这里的 $f'(0)$ 根本不存在，所以点 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的驻点)

1. 可导函数的驻点可能是它的极值点,也可能不是极值点,例如 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处导函数为 $f'(0) = 0$，但是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数.

2. 求一个函数的极值时，常常把驻点附近的函数值的讨论情况列成表格，这样可使函数在各单调区间的增减情况一目了然.

3. 在求实际问题中的最大值和最小值时，一般先找出自变量，因变量，建立函数关系式，并确定其定义域. 如果定义域是一个开区间，函数在定义域内可导 (其实只要是初等函数，它在自己的定义域内必然可导)，并按常理分析，此函数在此开区间内应该有最大 (小) 值 (如果定义域是闭区间，那么只要已知函数在此闭区间上连续，它就一定有最大 (小) 值. 切记)，然后通过对函数求导，发现定义域内只有一个驻点，那么立即可以断定在这个驻点处的函数值就是最大 (小) 值，知道这点很重要，因为省去了讨论驻点是否为极值点，求导数在端点的值以及同函数在极值点处的值进行比较等步骤.

4.4 极值与最值的区别

极值是局部性概念，最大 (小) 值可以看作整体性概念，因而在一般情况下，两者是有区别的. 函数的极大值未必大于其极小值，而最大值必大于其最小值. 极大 (小) 值不一定是最大 (小) 值，最大 (小) 值不一定是极大 (小) 值，但如果连续函数在 (a, b) 上只有一个极值，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值.

4.5 练习

1. 函数 $f(x)=x^3-2ax+a$ 在 $(0,1)$ 内有极小值，则实数 a 的取值范围是 ( )

   (A) $(0,3)$ (B) $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,3)$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, x_0 $(x_0 \neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点，以下结论正确的是 ( )

   (A) $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \leqslant f(x_0)$ (B) $-x_0$是$f(-x)$的极小值点

   (C) $-x_0$是$-f(x)$的极小值点 (D) $-x_0$是$-f(-x)$的极小值点

3. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是

   ( )

   (A) $(2,+\infty)$ (B) $(-\infty,-2)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)$

4. 函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 有极值的充要条件是 ( )

   (A) $a>0$ (B) $a\geqslant 0$ (C) $a<0$ (D) $a\leqslant 0$

5. 设 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=e^{ax}+3x, x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点，则 ( )

   (A) $a>-3$ (B) $a<-3$ (C) $a>-\dfrac{1}{3}$ (D) $a<-\dfrac{1}{3}$

6. 若函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)$ $(a>0且a\neq 1)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内单调递增，则 a 的取值范围是 ( )

   (A) $\left[\dfrac{1}{4},\ 1\right)$ (B) $\left[\dfrac{3}{4},\ 1\right)$ (C) $\left(\dfrac{9}{4},\ +\infty\right)$ (D) $\left(1,\ \dfrac{9}{4}\right)$

7. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M, N，则当 $|MN|$ 达到最小值时 t 的值为 ( )

   (A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$. 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+\left[f(x_0)\right]^2<m^2$，则 m 的取值范围是( )

   (A) $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$ (B) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

   (C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

9. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 x_1,x_2，若 $f(x_1)=x_1<x_2$，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实数根的个数为 ( )

   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

10. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$, $a<b<c$, 且 $f(a)=f(b)=f(c)=0$. 现给出以下如下结论：
    ①$f(0)f(1)>0$; ②$f(0)f(1)<0$;
    ③$f(0)f(3)>0$; ④$f(0)f(3)<0$.

其中正确的结论序号是 ( )

(A) ①② (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-2a)(a-x), & x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}+a-1, & x>1.\end{cases}$

(1) 若 $a=0$, $x\in[0,4]$，则 $f(x)$ 的值域为______;

(2) 若 $f(x)$ 恰有三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

12. (2015 文) 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-k\ln x, k>0$.

(1) (5 分) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) (8 分) 证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

13. (2010 文) 设定函数 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$，且方程 $f'(x)-9x=0$ 的两个根分别为 1，4.

(1) (5 分) 当 $a=3$ 且曲线 $y=f(x)$ 过原点时，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) (8 分) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无极值点，求 a 的取值范围.

14. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

15. 已知两个函数 $f(x)=8x^2+16x-k$, $g(x)=2x^3+5x^2+4x$，其中 k 是实数.

(1) 对于任意 $x\in[-3,3]$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，求 k 的取值范围；

(2) 存在 $x\in[-3,3]$，使得 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，求 k 的取值范围；

(3) 对于任意 $x_1,x_2\in[-3,3]$，都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，求 k 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax-1\ (a\in\mathbf{R})$, $g(x)=xf(x)+\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m,m+1)\ (m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

17. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{k}{x}+1\,(k\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $k=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(1,f(1)\big)$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值点；

(3) 若函数 $g(x)=(x+k)\ln x$ 只存在两个极值点，求实数 k 的取值范围.

5　导数证明不等式问题

5.1　问题分析

5.1.1　恒成立问题

1) $\forall x \in D$, 均有 $f(x) > A$ 恒成立，则 $f(x)_{min} > A$;

2) $\forall x \in D$, 均有 $f(x) < A$ 恒成立，则 $f(x)_{max} < A$;

3) $\forall x \in D$, 均有 $f(x) > g(x)$ 恒成立，则 $F(x) = f(x) - g(x) > 0$ 恒成立，即 $F(x)_{min} > 0$;

4) $\forall x \in D$, 均有 $f(x) < g(x)$ 恒成立，则 $F(x) = f(x) - g(x) < 0$ 恒成立，即 $F(x)_{max} < 0$;

5) $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in E$, 均有 $f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立，则 $f(x)_{min} > g(x)_{max}$;

6) $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in E$, 均有 $f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立，则 $f(x)_{max} < g(x)_{min}$;

5.1.2　存在性问题

1) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) > A$ 成立，则 $f(x)_{max} > A$;

2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) < A$ 成立，则 $f(x)_{min} < A$;

3) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立，设 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x)_{max} > 0$;

4) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立，设 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x)_{min} < 0$;

5) $\exists x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{max} > g(x)_{min}$;

6) $\exists x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{min} < g(x)_{max}$;

5.1.3　相等问题

若 $f(x), g(x)$ 的值域分别是 A, B 则：

1) $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $A \subseteq B$;

2) $\exists x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $A \cap B \neq \varnothing$;

5.1.4　恒成立与存在性综合问题

1) $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{min} > g(x)_{min}$

2) $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{max} < g(x)_{max}$

5.2　解法举例

5.2.1　分离参数法

分离参数法确定不等式 $f(x, \lambda) \geqslant 0$ $(x \in D, \lambda$为实数$)$ 恒成立问题中的参数 λ 的取值范围的基本步骤：

1) 将参数和变量分离，即化为 $g(\lambda) \geqslant f(x)$或$g(\lambda) \leqslant f(x)$ 恒成立的形式;

2) 求 $f(x)$ 在 $x \in D$ 上的最大 (小) 值；

3) 解不等式 $g(\lambda) \geqslant f(x)_{max}$或$g(\lambda) \leqslant f(x)_{min}$，得到 λ 的取值范围.

例 1: 已知函数 $f(x) = ax + x\ln x$ 的图象在 $x = e$ 处的切线斜率为 3.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 若 $f(x) \leqslant kx^2$ 对任意 $x > 0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

分析. (1) 由 $f'(x) = a + \ln x + 1$ 结合条件 $f(x) = ax + x\ln x$ 的图象在点 $x = e$ 处的切线的斜率为 3，可知 $f'(e) = 3$，建立方程解得 $a = 1$

(2) 要使 $f(x) \leqslant kx^2$ 对任意的 $x \geqslant 0$ 恒成立，只需 $k \geqslant \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)_{max}$ 即可，

而由 (1) 可知 $f(x) = x + x\ln x$，所以问题等价于求函数 $g(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ 的最大值.

求导可得：

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

令 $g'(x) = 0$ 解得 $x = 1$. 经过检验可得 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值 $g(1) = 1$，故 $k \geqslant 1$ 即为所求.

□

5.2.2 主参换位法

例 2: 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ (a为常数) 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，函数 $g(x) = \lambda f(x) + \sin x$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的减函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $g(x) \leqslant t^2 + \lambda t + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立，求 t 的取值范围.

解析. (1) a=1;

(2) 由 (1) 知，$f(x) = x$, $g(x) = \lambda x + \sin x$.

因为 $g(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上单调递减，所以有

$$g'(x) = \lambda + \cos x \leqslant 0.$$

所以 $\lambda \leqslant -\cos x$ 在 $[-1,\ 1]$ 上恒成立

所以

$$\lambda \leqslant -1,\ g(x)_{max} = -\lambda - \sin 1$$

只需要 $-\lambda - \sin 1 \leqslant t^2 + \lambda t + 1$ 即 $(t+1)\lambda + t^2 + \sin 1 + 1 \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant -1$) 恒成立.

可令 $f(\lambda) = (t+1)\lambda + t^2 + \sin 1 + 1 \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant -1$)，则有：

$$\begin{cases} t+1 \leqslant 0, \\ -t-1+t^2+\sin 1+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

解得 $t \leqslant -1$.

□

5.2.3 存在性之常用模型及方法

例 3: 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx$, $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 1$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(1,f(1)\big)$ 处的切线的斜率为 0.

(1) 求 b 的值;

(2) 若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x)<\dfrac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围.

解析. (1) $b=1$;

(2) 若存在 $x\in[1,+\infty)$ 使得不等式 $f(x)<\dfrac{a}{a-1}$ 成立，只需 $\dfrac{a}{a-1}>f(x)_{min}$ 即可. 因此可通过探求 $f(x)$ 的单调性进而求得 $f(x)$ 的最小值，进而得到关于 a 的不等式即可.

而由 (1) 可知 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，则

$$f'(x)=\frac{(x-1)\big[(1-a)x-a\big]}{x}$$

对 a 的取值范围进行分类讨论并判断 $f(x)$ 的单调性，

从而可以解得 a 的取值范围是 $\big(-\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1\big)\cup(1,+\infty)$.

□

5.3 习题

1. (2013 新课标理) 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

    (1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

    (2) 当 $m\leqslant 2$ 时，证明 $f(x)>0$

2. (2012 新课标理) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$.

    (1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

    (2) 若 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值.

3. (2015 理) 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

    (1) (3 分) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(0,f(0)\big)$ 处的切线方程；

    (2) (5 分) 求证：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$；

    (3) (5 分) 设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 k 的最大值.

4. (2014 理) 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x,x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

    (1) (5 分) 求证：$f(x)\leqslant 0$;

    (2) (8 分) 若 $a<\dfrac{\sin x}{x}<b$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上恒成立，求 a 的最大值和 b 的最小值

5. (2014 新课标理) 设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

    (1) 求 a,b;

    (2) 证明:$f(x)>1$.

6. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

7. 设函数 $f(x)=e^x-ax-2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$，求 k 的最大值.

8. 已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}\right]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\leqslant mx$, 求 m 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, $A(x_1,m)$, $B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的两个不同的点.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围

(2) 证明：$x_1+x_2>0$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$，$g(x)=x^2-2x$，若对任意的 $x_1\in(0,2]$，均存在 $x_2\in(0,2]$ 使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.