2020 级高一年级阶段学情检测（一）

数学试卷

（考试时间：120 分钟　总分：150 分　命题人：　　　　审核人：　　　）

一、单项选择题： 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $C=\{x\in\mathbf{Z}|-1<x<3\},a=0.2$, 则下列结论正确的是　(　　)

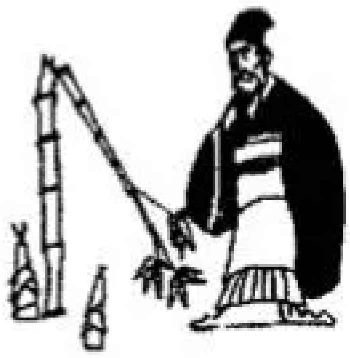
A. $\{a\}\subsetneqq C$　　B. $a\subseteq C$　　C. $\{a\}\in C$　　D. $a\notin C$

2. 命题“$\exists x>0,x^2+x+1<0$”的否定是　(　　)

A. $\forall x>0,x^2+x+1\geqslant 0$　　B. $\forall x\leqslant 0,x^2+x+1<0$

C. $\forall x>0,x^2+x+1<0$　　D. $\forall x\leqslant 0,x^2+x+1\geqslant 0$

3. 如图，《九章算术》中记载了一个“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？意思是：有一根竹子原高一丈（一丈 =10 尺），现被风折断，尖端落在地上，竹尖与竹根的距离三尺，问折断处离地面的高度是　(　　)



A. 2.55 尺　　B. 4.55 尺　　C. 5.55 尺　　D. 6.55 尺

4. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+2x+c<0$ 的解集为 $\{x|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\}$, 则 $a+c$ 的值为　(　　)

A. 6　　B. 10　　C. 8　　D. 7

5. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, 集合 $B=\{2,4\}$, 定义 A、B 间的运算 $A\otimes B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$, 则 $A\otimes B=$　(　　)

A. $\{2,4\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{2\}$

6. 已知 a 是实数，那么“$a<2$”是“$a^2<1$”的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $x=1+3^m,y=1+3^{-m}$, 那么用 x 表示 y 为　(　　)

A. $\dfrac{x+1}{x-1}$　　B. $\dfrac{x+1}{x}$　　C. $\dfrac{x-1}{x+1}$　　D. $\dfrac{x}{x-1}$

8. 研究问题：“已知关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$, 解关于 x 的不等式 $cx^2-bx+a>0$”, 解法为：由 $ax^2-bx+c>0$ 得 $a-b\dfrac{1}{x}+c(\dfrac{1}{x})^2>0$, 令 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $\dfrac{1}{2}<y<1$, 所以不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集为 $\{x|\dfrac{1}{2}<x<1\}$. 参考上述解法,已知关于 x 的不等式 $\dfrac{k}{x+a}+\dfrac{x+b}{x+c}<0$ 的解集为 $\{x|-2<x<-1$ 或 $2<x<3\}$, 则关于 x 的不等式 $\dfrac{kx}{ax-1}+\dfrac{bx-1}{cx-1}<0$ 的

解集为 ( )

A. $\{x|-1<x<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$ B. $\{x|1<x<2$ 或 $-3<x<-2\}$

C. $\{x|-1<x<2$ 或 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$ D. $\{x|\frac{1}{2}<x<1$ 或 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\}$

二、多项选择题： 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分．

9. 已知集合 $A=\{2,4,m^2\}$,$B=\{2,m\}$,$A\cup B=A$, 则实数 m 的值可能为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

10. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2>m.$”是真命题，则实数 m 的值可能为 ( )

A. -1 B. 2 C. 0 D. 3

11. 已知 a,b,c,d 均为实数，则下列命题正确的是 ( )

A. 若 $a>b,c>d$, 则 $ac>bd$ B. 若 $ab>0,bc-ad>0$, 则 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$

C. 若 $a>b,c>d$, 则 $a-d>b-c$ D. 若 $a>b,c>d>0$, 则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

12. 设 a,b,c 为实数，$y_1=(x+a)(x^2+bx+c)$, $y_2=(ax+1)(cx^2+bx+1)$, 记集合 $S=\{x|y_1=0,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{x|y_2=0,x\in\mathbf{R}\}$, 若 $Card(S)$、$Card(T)$ 分别表示集合 S、T 的元素的个数，则下列结论能成立的是 ( )

A. $Card(S)=1,Card(T)=0$ B. $Card(S)=2,Card(T)=3$

C. $Card(S)=2,Card(T)=2$ D. $Card(S)=1,Card(T)=1$

三、填空题： 本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填写在题中的横线上．

13. 函数 $y=x^2-7x-8$ 的零点为 ________.

14. 若集合 $A=\{(x,y)|y=ax^2-1\}$, 集合 $B=\{(x,y)|y=3x-3\}$, 若 $A\cap B$ 中元素只有一个, 则实数 a 组成的集合为 ________.

15. 国家原计划以 2400 元/吨的价格收购某种农副产品 m 吨，按规定，农户向国家纳税为：每收入 100 元纳税 8 元（称作税率为 8 个百分点，即 8%）. 为减少农民负担，制定积极收购政策，根据市场规律，税率降低 x 个百分点 $(x>0)$，收购量增加 $2x$ 个百分点，为使得税率调低后，国家此项税收总收入不低于原计划的 78%，则 x 的取值范围为 ________.

16. 若 $3s+4t=st(s>0,t>0)$, 则 st 的最小值是 ________, $2s+t$ 的最小值是 ________.

四、解答题： 本大题共 6 小题、共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

(Ⅰ) 求值：$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(-2020)^0-4\times(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$.

(Ⅱ) 已知 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=4$, 求值：① $a+a^{-1}$; ② $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$.

18. (12 分) 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}, B=\{x|x>2\}$.

(I) 分别求 $A\cap B, (\complement_R B)\cup A$;

(II) 已知集合 $C=\{x|1<x<a\}$, 若 $C\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) 已知 $ab\neq 0$, 求证：$a^3-2a^2b+2ab^2-b^3=0$ 成立的充要条件是 $a-b=0$.

20. (12 分) 在 ①$A\cap B=B$,②$A\cap B=\varnothing$,③$B\subseteq \complement_R A$ 这三个条件中任选一个，补充在下列问题 (II) 中，若实数 a 存在, 求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

已知集合 $A=\{x|\dfrac{x-2}{x-8}<0\}$, 集合 $B=\{x|x^2-(a^2+a+2)x+a^3+2a\leqslant 0\}$.

(I) 当 $a=3$ 时，求 $A\cap B$;

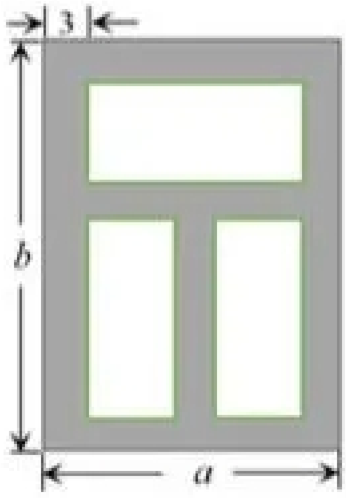
(II) 当 __________ 时，求实数 a 的取值范围.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

21. (12 分) 如图，一个铝合金窗分为上、下两栏，四周框架和中间隔栏的材料为铝合金，宽均为 $3cm$，上栏和下栏的框内高度（不含铝合金部分）的比为 $1:2$，此铝合金窗占用的墙面面积为 $16200cm^2$，设该铝合金窗的宽和高分别为 $a\ cm$ ，$b\ cm$ ，铝合金的透光部分的面积为 $\mathbf{S}\ cm^2$

(Ⅰ) 试用 a,b 表示 $\mathbf{S}$;

(Ⅱ) 若要使 $\mathbf{S}$ 最大，则铝合金窗的宽和高分别为多少?



22. (12 分) 已知关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $\{x|x<1\}$.

(Ⅰ) 求关于 x 的不等式 $\dfrac{x-2}{ax+b}\leqslant 0$ 的解集;

(Ⅱ) 求关于 x 的不等式 $acx^2-(2b+bc)x+2b>0(c\in\mathbf{R})$ 的解集;

(Ⅲ) 若关于 x 的一元二次不等式 $3x^2-6ax-1\leqslant 0$ 的解集中有且只有 2 个整数，求实数 a 的取值范围.

2020 级高一年级阶段数学学情检测（一）参考答案

一、单选

1.D　2.A　3.B　4.B　5.B　6.C　7.D　8.D

二、多选

9.ABD　10.AC　11.BC　12.ACD

三、填空

13.-1,8 （-1 和 8）　14. $\{0,\frac{9}{8}\}$　15.（0,2]　16.48, $11+4\sqrt{6}$

解答

17. (1) $99+\pi$, (2) $2\sqrt{5}$.(需交代 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$，否则要扣分）

18. （1） $A=[1,3],\ A\cap B=(2,3],(C_R B)\cup A=(-\infty,3]$

（2） 由 $C\subseteq A$ 知 $C=\varnothing$ 或 $C\neq\varnothing$

当 $C=\varnothing$ 时， $a\le 1,$

当 $C\neq\varnothing$ 时， $a>1,$ 则 $1<a\le 3,$

综上：实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$.

19. 证明：（1）充分性（条件→结论）

因为 $a-b=0$，

而 $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$

所以 $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)=0$；

（2）必要性（结论→条件）

因为 $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)=0$，

而 $a^2-ab+b^2=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4},$

又 $ab\neq 0$，所以 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$

从而 $(a-\frac{b}{2})^2\ge 0,\ \frac{3b^2}{4}>0,$

所以 $a^2-ab+b^2=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}>0,$

所以 $a-b=0$.

综上： $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3=0$ 成立的充要条件是 $a-b=0$.

20. 解（1）[3,8)

(2) 我选的是①，

在 B 中，$(x-a)(x-a^2-2)\le 0,$

对应的方程的根为 $x_1=a$，$x_2=a^2+2,$

因为 $a^2+2-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

所以 $a^2+2>a,$

这样 $B=[a,a^2+2].$

由 $A\cap B=B$ 知，$B\subseteq A$，

所以 $\begin{cases}a>2\\a^2+2<8\end{cases}$

解得：$2<a<\sqrt{6}.$

我选的是②，

在 B 中，$(x-a)(x-a^2-2)\le 0,$

对应的方程的根为 $x_1=a$，$x_2=a^2+2,$

因为 $a^2+2-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

所以 $a^2+2>a,$

这样 $B=[a,a^2+2].$

由 $A\cap B=\varnothing$ 知，

所以 $\begin{cases}a\ge 8\\a^2+2\le 2\end{cases}$

解得：$a\ge 8$ 或 $a=0.$

我选的是③，

在 B 中，$(x-a)(x-a^2-2)\le 0$,

对应的方程的根为 $x_1=a$，$x_2=a^2+2$,

因为 $a^2+2-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

所以 $a^2+2>a$,

这样 $B=[a,a^2+2]$. $C_R A=(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$.

由 $B\subseteq C_R A$ 知，

所以 $\begin{cases} a\ge 8 \\ a^2+2\le 2 \end{cases}$

解得：$a\ge 8$ 或 $a=0$.

21.（1）$S=16272-(9a+8b), a>0, b>9.$

（2）$S=16272-(9a+8b)\le 16272-2\sqrt{9a8b}=16272-2\sqrt{72\times 16200}.$

当且仅当 $9a=8b$ 取等号，又 $ab=16200$, 解得 $a=120, b=135$. $S\le 14112$.

答: (1) $S=16272-(9a+8b), a>0, b>9.$

(2)要使 S 最大，铝合金窗的宽为 120cm,高为 135cm.

22. (1) $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$;

（2）综上： $c<0$ 时，不等式的解为 $(-\infty,\frac{2}{c})\cup(1,+\infty)$;

$c=0$ 时，不等式的解为 $(1,+\infty)$;

$0<c<2$ 时，不等式的解为 $(1,\frac{2}{c})$;

$c=2$ 时，不等式的解为 $\varnothing$;

$c>2$ 时，不等式的解为 $(\frac{2}{c},1)$.

（3）（用函数的观点看一元二次不等式，从函数的图像分析问题）

对应的一元二次函数为 $y=3x^2-6ax-1$，与 y 轴的交点为 $(0,-1)$

所以 0 是不等式解集中的一个整数解，另一个整数解为 -1 或 1.由二次函数图像得：

若为-1，则 $\begin{cases}3-6a-1>0\\3+6a-1\le 0\\12+12a-1>0\end{cases}$ ，解得 $-\frac{11}{12}<a\le-\frac{1}{3}$；

若为 1，则 $\begin{cases}3-6a-1\le 0\\3+6a-1>0\\12-12a-1>0\end{cases}$ ，无解.

又 $a<0$　　综上：$-\frac{11}{12}<a\le-\frac{1}{3}$.