

山东省日照市莒县第一中学 2019-2020 学年

高一 10 月月考数学试题

第 I 卷（选择题共 52 分）

一、单项选择题：本题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，有且只有一个符合要求。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()

A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $(C_U A) \cap (C_U B)$ D. $(C_U A) \cup (C_U B)$

2. 已知集合 $A = \{0, 1, a^2\}$, $B = \{1, 0, 2a + 3\}$, 若 $A = B$, 则 a 等于 ()

A. -1 或 3 B. 0 或 1 C. 3 D. -1

3. 命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$, 则 $\neg p$ ()

A. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x + |x| > 0$ B. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$

C. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \leq 0$ D. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$

4. 祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”，它是中国古代一个涉及几何体体积的原理，意思是两个等高的几何体，若在同高处的截面积恒相等，则体积相等。设 A , B 为两个等高的几何体， $p: A, B$ 的体积相等. $q: A, B$ 在同高处的截面积恒相等. 根据祖暅原理可知， q 是 p 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

6. 已知 a, b 为非零实数，且 $a < b$, 则下列命题成立的是

A. $a^2 < b^2$ B. $ab^2 < a^2b$ C. $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ D. $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$



7. 已知不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A , $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B , 不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$, 则 $a + b =$ ()

- A. -3 B. 1 C. -1 D. 3

8. 已知集合 $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\}$, $B = \{(x,y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbb{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ().

- A. 77 B. 49 C. 45 D. 30

9. 设 $x, y \in \mathbb{R}^+$, $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

10. 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0, x \in \mathbb{R}\right\}$, $P = \left\{x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbb{Z}\right\}$ 则 $M \cap P =$ ()

- A. $\{x | 0 < x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{x | -1 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 0, x \in \mathbb{Z}\}$

二、多项选择题, 本题共 3 个小题, 每小题 4 分, 共 12 分在每小题. 给出的选项中, 有多个符合要求. 全部选对得 4 分, 部分选对得 2 分, 错选得 0 分.

11. 下列命题正确的是 ()

- A. $\exists a, b \in \mathbb{R}, |a-2| + (b+1)^2 \leq 0$ B. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $ax > 2$
C. $ab \neq 0$ 是 $a^2 + b^2 \neq 0$ 的充要条件 D. $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

12. 已知 $x + y = 1, y > 0, x \neq 0$, 则 $\frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1}$ 的值可能是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

13. 设 $0 < a < b, a + b = 1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a^2 + b^2 < b$ B. $a < a^2 + b^2$ C. $a < 2ab < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} < a^2 + b^2 < 1$



第 II 卷 (非选择题, 共 98 分)

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

14. 已知集合 $A = \{a+1, a-1, a^2-3\}$, 若 $1 \in A$, 则实数 a 的值为_____.

15. $A = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x = 4t + \frac{1}{t}, t \in (0, +\infty)\}$. 则 $A \cap B =$ _____.

16. 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | (x-1) \cdot (x-a) \geq 0\}$, $B = \{x | x \geq a-1\}$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 a 的取值范围为_____.

17. 已知正实数 a, b 满足 $a+b=4$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3}$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本大题共有 6 个小题, 满分 82 分. 解答题应写出必要的文字说明、证明过程和演算步骤.

18. 解关于 x 的不等式:

(1) $-2x^2 + 5x + 7 \geq 0$

(2) $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$

19. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2m < x < 1-m\}$.

(1) 当 $m = -1$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值范围.

20. 正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$.

(1) 求 xy 的最小值;

(2) 求 $x+2y$ 的最小值.

21. 已知 $p: -x^2 + 8x + 20 \geq 0$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$.

(1) 若 p 是 q 充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若“非 p ”是“非 q ”的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.



22. 2016年11月3日20点43分我国长征运载火箭在海南文昌发射中心成功发射，它被公认为我国已从航天大国向航天强国迈进的重要标志。长征五号运载火箭的设计生产采用很多新材料，甲工厂承担了某种材料的生产，并以 x 千克/时的速度匀速生产（为保证质量要求 $1 \leq x \leq 10$ ），每小时可消耗A材料 $kx^2 + 9$ 千克，已知每小时生产1千克该产品时，消耗A材料10千克。

（1）设生产 m 千克该产品，消耗A材料 y 千克，试把 y 表示为 x 的函数。

（2）要使生产1000千克该产品消耗的A材料最少，工厂应选取何种生产速度？并求消耗的A材料最少为多少？

23. （1）不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$ ，求不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集。

（2）当 $-1 < x < 3$ 时，不等式 $x^2 - mx + (m - 7) < 0$ 恒成立，求 m 的范围。



莒县第一中学高一数学月考

第 I 卷（选择题共 52 分）

一、单项选择题：本题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，有且只有一个符合要求。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $A = \{3, 4, 5\}$ ， $B = \{1, 3, 6\}$ ，那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是（ ）

- A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $(C_U A) \cap (C_U B)$ D. $(C_U A) \cup (C_U B)$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据集合的交集、并集和补集的运算，即可求解，得到答案.

【详解】由题意，全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $A = \{3, 4, 5\}$ ， $B = \{1, 3, 6\}$ ，

由 $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ ，排除 A；

由 $A \cap B = \{3\}$ ，排除 B；

由 $(C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，排除 D，

由 $(C_U A) \cap (C_U B) = C_U(A \cup B) = \{2, 7, 8\}$ ，所以 C 满足题意，

故选 C.

【点睛】本题主要考查了集合的基本运算，熟记集合的交集、并集和补集的概念，准确运算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

2. 已知集合 $A = \{0, 1, a^2\}$ ， $B = \{1, 0, 2a + 3\}$ ，若 $A = B$ ，则 a 等于（ ）

- A. -1 或 3 B. 0 或 1 C. 3 D. -1

【答案】C

【解析】



【分析】

由 $A=B$ 则集合的元素完全相同, 则 $a^2=2a+3$, 求出 a 的值, 再检验可得答案.

【详解】 由 $A=B$ 有 $a^2=2a+3$, 则 $a=-1$, $a=3$.

当 $a=-1$ 时, $A=\{0,1,1\}$ 与集合元素的互异性矛盾, 所以舍去.

当 $a=3$ 时, $A=\{0,1,9\}=B$ 满足条件.

故选: C.

【点睛】 本题考查两集合相等, 集合元素的特性, 属于基础题.

3. 命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x+|x| \geq 0$, 则 $\neg p$ ()

A. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x+|x| > 0$

B. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x+|x| < 0$

C. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x+|x| \leq 0$

D. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x+|x| \geq 0$

【答案】B

【解析】

【分析】

全称命题的否定是特称命题, 根据已知写出即可.

【详解】 解: 命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x+|x| \geq 0$, 则 $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x+|x| < 0$,

故选 B.

【点睛】 本题考查全称命题否定的书写, 是基础题.

4. 祖暅原理: “幂势既同, 则积不容异”, 它是中国古代一个涉及几何体体积的原理, 意思是两个等高的几何体, 若在同高处的截面积恒相等, 则体积相等. 设 A, B 为两个等高的几何体, $p: A, B$ 的体积相等. $q: A, B$ 在同高处的截面积恒相等. 根据祖暅原理可知, q 是 p 的 ()



A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】

根据 p, q 之间的推出关系可得正确的选项.

【详解】设 A 为正方体，其棱长为 2，体积为 8， B 为长方体，底面为边长为 1 的正方形，高为 8，显然 A, B 在等高处的截面面积不相等，若 q 是 p 的不必要条件，当 A, B 在同高处的截面积恒相等时，根据祖暅原理有 A, B 的体积相等，所以充分性成立，因此 q 是 p 的充分不必要条件. 故选 A.

【点睛】两个条件之间的关系判断，可依据命题“若 p 则 q ”、“若 q 则 p ”真假来判断，此类问题属于基础题.

5. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$

B. $\{x | -4 < x < -2\}$

C. $\{x | -2 < x < 2\}$

D. $\{x | 2 < x < 3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查集合的交集和一元二次不等式的解法，渗透了数学运算素养. 采取数轴法，利用数形结合的思想解题.

【详解】由题意得， $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | -2 < x < 3\}$, 则 $M \cap N = \{x | -2 < x < 2\}$. 故选 C.



【点睛】不能领会交集的含义易致误，区分交集与并集的不同，交集取公共部分，并集包括二者部分。

6. 已知 a, b 为非零实数，且 $a < b$ ，则下列命题成立的是

- A. $a^2 < b^2$ B. $ab^2 < a^2b$ C. $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ D. $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

【答案】C

【解析】

【详解】若 $a < b < 0$ ，则 $a^2 > b^2$ ，A 不成立；若 $\begin{cases} ab > 0 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow a^2b < ab^2$ ，B 不成立；若 $a=1$ ， $b=2$ ，则 $\frac{b}{a}=2$ ， $\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{a}{b}$ ，所以 D 不成立，故选 C。

7. 已知不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A ， $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B ，不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$ ，则 $a+b =$ ()

- A. -3 B. 1 C. -1 D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】

根据题意先求出集合 A, B ，然后求出 $A \cap B = (-1, 2)$ ，再根据三个二次之间的关系求出 a, b ，可得答案。

【详解】由不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 有 $-1 < x < 3$ ，则 $A = (-1, 3)$ 。

由不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 有，则 $-3 < x < 2$ ，则 $B = (-3, 2)$ 。所以 $A \cap B = (-1, 2)$ 。

因为不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$ ，

所以方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两个根为 $-1, 2$ 。

由韦达定理有： $\begin{cases} -1+2=-a \\ -1 \times 2=b \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$ 。所以 $a+b = -3$ 。故选：A。



【点睛】本题考查二次不等式的解法和三个二次之间的关系，属于中档题.

8. 已知集合 $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\}$, $B = \{(x,y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1+x_2, y_1+y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ().

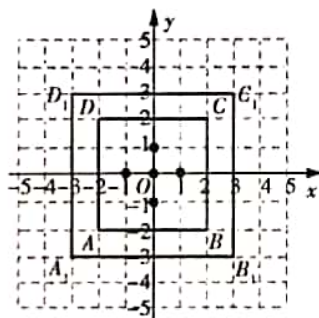
- A. 77 B. 49 C. 45 D. 30

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意作出图示表示集合 A 、 B 所表示的点，由数形结合思想可得出 $A \oplus B$ 表示的点集的横坐标和纵坐标的范围，从而可得出 $A \oplus B$ 中元素的个数.



【详解】集合 A 中有 5 个元素，即 5 个点，如下图中黑点所示. 集合 $B = \{(x,y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$ 中有 25 个元素 (即 25 个点)，即下图中正方形 $ABCD$ 内部及正方形 $ABCD$ 边上的整点.

所以 $x_1+x_2 = -3$ 或 -2 或 -1 或 0 或 1 或 2 或 3 ，共 7 个值；

所以 $y_1+y_2 = -3$ 或 -2 或 -1 或 0 或 1 或 2 或 3 ，共 7 个值，

所以集合 $A \oplus B = \{(x_1+x_2, y_1+y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$ 中的元素可看作下图中正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内部及正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 边上除去四个顶点外的整点，共 $7 \times 7 - 4 = 45$ (个).

故选 C.

【点睛】本题考查集合中的元素所表示的具体含义，关键在于理解新定义的集合中元素的构成，准确求出集合 A 和集合 B 所表示的点，借助平面直角坐标系更清楚地看出集合中元素的构成是解决此类问题的常用方法，属于难度题.



9. 设 $x, y \in R^+, (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】

将不等式左边展开, 然后利用基本不等式求得其最小值, 由此求得 a 的最大值.

【详解】由于 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 4$, 当且仅当 $x = y = 1$ 时等号成立, 而 $x, y \in R^+, (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq a$ 恒成立, 故 $a \leq 4$, 也即 a 的最大值为 4.

故选 B.

【点睛】本小题主要考查利用基本不等式求最小值, 考查恒成立问题的求解策略, 属于基础题.

10. 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0, x \in R\right\}$, $P = \left\{x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in Z\right\}$ 则 $M \cap P =$ ()

- A. $\{x \mid 0 < x \leq 3, x \in Z\}$ B. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in Z\}$
C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 0, x \in Z\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x < 0, x \in Z\}$

【答案】B

【解析】

【分析】

先解分式不等式求出集合 M, P , 然后再求交集.

【详解】由 $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$ 得 $-1 < x \leq 3$, 即 $M = (-1, 3]$.
由 $\frac{5}{x+1} \geq 1$, 即 $\frac{4-x}{x+1} \geq 0$, 有 $-1 < x \leq 4$,



又 $P = \left\{ x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbb{Z} \right\}$, 所以 $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

所以 $M \cap P = \{0, 1, 2, 3\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$.

故选: B.

【点睛】 本题考查分式不等式的解法和集合求交集. 属于基础题.

二、多项选择题, 本题共 3 个小题, 每小题 4 分, 共 12 分在每小题. 给出的选项中, 有多个符合要求. 全部选对得 4 分, 部分选对得 2 分, 错选得 0 分.

11. 下列命题正确的是 ()

A. $\exists a, b \in \mathbb{R}, |a-2| + (b+1)^2 \leq 0$

B. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $ax > 2$

C. $ab \neq 0$ 是 $a^2 + b^2 \neq 0$ 的充要条件

D. $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

【答案】 AD

【解析】

【分析】

对 A. 当 $a=2, b=-1$ 时, 可判断真假, 对 B. 当 $a=0$ 时, $0 \cdot x = 0 < 2$, 可判断真假,

对 C. 当 $a=0, b \neq 0$ 时, 可判断真假, 对 D 可用作差法判断真假.

【详解】 A. 当 $a=2, b=-1$ 时, 不等式成立, 所以 A 正确.

B. 当 $a=0$ 时, $0 \cdot x = 0 < 2$, 不等式不成立, 所以 B 不正确.

C. 当 $a=0, b \neq 0$ 时, $a^2 + b^2 \neq 0$ 成立, 此时 $ab=0$, 推不出 $ab \neq 0$. 所以 C 不正确.

D. 由 $\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a(1+b) - b(1+a)}{(1+a)(1+b)} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)}$, 因为 $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$, 所以 D 正确.

故选: AD.

本题考查命题真假的判断, 充要条件的判断, 作差法比较大小, 属于中档题.



12. 已知 $x+y=1, y>0, x \neq 0$, 则 $\frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1}$ 的值可能是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

【答案】CD

【解析】

【分析】

$x+y=1, y>0, x \neq 0$, 有 $y=1-x>0$ 则 $x<1$ 且 $x \neq 0$, 分 $0<x<1$ 和 $x<0$ 打开 $|x|$, 然后用重要不等式求出其最值, 从而得到答案.

【详解】由 $x+y=1, y>0, x \neq 0$, 得 $y=1-x>0$, 则 $x<1$ 且 $x \neq 0$.

$$\text{当 } 0<x<1 \text{ 时, } \frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2-x} = \frac{x+2-x}{4x} + \frac{x}{2-x}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2-x}{4x} + \frac{x}{2-x} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{2-x}{4x} \cdot \frac{x}{2-x}} = \frac{5}{4}.$$

当且仅当 $\frac{2-x}{4x} = \frac{x}{2-x}$ 即 $x = \frac{2}{3}$ 时取等号.

$$\text{当 } x<0 \text{ 时, } \frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1} = \frac{1}{-2x} + \frac{-x}{2-x} = \frac{2-x+x}{-4x} + \frac{-x}{2-x}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{2-x}{-4x} + \frac{-x}{2-x} \geq -\frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{2-x}{-4x} \cdot \frac{-x}{2-x}} = \frac{3}{4}.$$

当且仅当 $\frac{2-x}{-4x} = \frac{-x}{2-x}$ 即 $x = -2$ 时取等号.

$$\text{综上, } \frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1} \geq \frac{3}{4}.$$

故选: CD.

13. 设 $0<a<b, a+b=1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a^2+b^2<b$ B. $a<a^2+b^2$ C. $a<2ab<\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}<a^2+b^2<1$

【答案】ABCD



【解析】

【分析】

对于 A 由 $a+b=1$ 两边平方得 $a^2+b^2=1-2ab=b+a-2ab=b+a(1-2b)<b$ ，可判断；对于 B $\frac{1}{2}<b\Rightarrow 1<2b\Rightarrow a<2ab<a^2+b^2$ ，可判断；对于 C $a-2ab=a(1-2b)<0$ ，右边用重要不等式可判断；对于 D 左边用重要不等式，右边用不等式性质可判断。

【详解】由 $0<a<b, a+b=1$ ，则 $0<a<\frac{1}{2}<b<1$ 。

对 A，由 $a+b=1$ 两边平方得 $a^2+b^2=1-2ab=b+a-2ab=b+a(1-2b)<b$ ，所以 A 正确。

对 B， $\frac{1}{2}<b\Rightarrow 1<2b\Rightarrow a<2ab<a^2+b^2$ ，所以 B 正确。

对 C，由 B 有 $a<2ab$ ，又 $2ab<2\times(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{2}$ ，所以 C 正确。

对 D，因为 $a^2+b^2>\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}$ ，又 $a^2<a, b^2<b\Rightarrow a^2+b^2<a+b=1$ ，所以 D 正确。

故选: ABCD

【点睛】本题考查用重要不等式证明不等式，应用不等式性质判断不等式是否成立，属于中档题。

第 II 卷（非选择题，共 98 分）

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分。

14. 已知集合 $A=\{a+1, a-1, a^2-3\}$ ，若 $1\in A$ ，则实数 a 的值为_____。

【答案】0 或 -2

【解析】

【分析】

根据 $1\in A$ ，得 $a+1=1$ 或 $a-1=1$ 或 $a^2-3=1$ ，分别解之，得 a 的值，注意将解出的 a 的值代回集合中验证是否满足元素的互异性。



【详解】若 $a+1=1$ ，则 $a=0$ ，此时 $A=\{1,-1,-3\}$ ，符合题意；

若 $a-1=1$ ，则 $a=2$ ，此时 $a^2-3=1$ ，不满足集合中元素的互异性，舍去；

若 $a^2-3=1$ ，则 $a=-2$ 或 $a=2$ （舍去），当 $a=-2$ 时， $A=\{-1,-3,1\}$ ，符合题意。

综上， $a=0$ 或 -2 。

故填：0 或 -2。

【点睛】本题考查元素与集合的关系，此类问题注意将解出的参数值代回集合中验证是否满足元素的互异性和题目的条件，属于基础题。

15. $A=\{x|x^2-7x+10\leq 0\}$, $B=\{x\in R|x=4t+\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty)\}$. 则 $A\cap B=$ _____.

【答案】[4,5]

【解析】

【分析】

分别求出集合 A, B ，集合 A 是不等式 $x^2-7x+10\leq 0$ 的解集， B 是函数 $x=4t+\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty)$ 的值域，然后在求交集。

【详解】由 $x^2-7x+10\leq 0$ 有 $(x-2)(x-5)\leq 0$ ，即 $2\leq x\leq 5$ 。

所以 $A=[2, 5]$ 。

由 $x=4t+\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty)$ 有 $x=4t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{4t\cdot\frac{1}{t}}=4$ 。

当且仅当 $4t=\frac{1}{t}$ ，即 $t=\frac{1}{2}$ 时取等号。

所以 $B=[4, +\infty)$ 。

所以则 $A\cap B=[4, 5]$

故答案为：[4, 5]。

【点睛】本题考二次不等式解法，集合的交集。



16. 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | (x-1) \cdot (x-a) \geq 0\}$, $B = \{x | x \geq a-1\}$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $\{a | a \leq 2\}$

【解析】

当 $a > 1$ 时, $A = (-\infty, 1] \cup [a, +\infty)$, $B = [a-1, +\infty)$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 $a-1 \leq 1$, $\therefore 1 < a \leq 2$; 当 $a = 1$ 时, 易得 $A = \mathbb{R}$, 此时 $A \cup B = \mathbb{R}$; 当 $a < 1$ 时, $A = (-\infty, a] \cup [1, +\infty)$, $B = [a-1, +\infty)$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 $a-1 \leq a$, 显然成立, $\therefore a < 1$, 综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$, 故答案为 $\{a | a \leq 2\}$.

17. 已知正实数 a, b 满足 $a+b=4$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

由已知得 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} \right) [(a+1) + (b+3)] = \frac{1}{8} \left(\frac{a+1}{b+3} + \frac{b+3}{a+1} + 2 \right)$, 由此利用均值不等式能求出结果.

【详解】解: \because 正实数 a, b 满足 $a+b=4$,

$$\therefore a+1 > 1, b+3 > 3, a+1+b+3=8,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} \right) [(a+1) + (b+3)] = \frac{1}{8} \left(\frac{a+1}{b+3} + \frac{b+3}{a+1} + 2 \right) \\ &\geq \frac{1}{8} \left(2\sqrt{\frac{a+1}{b+3} \times \frac{b+3}{a+1}} + 2 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{a+1}{b+3} = \frac{b+3}{a+1}$ 时, 取等号,

$$\therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2}. \text{ 故答案为 } \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查利用基本不等式求最值, 对代数式进行灵活配凑是解本题的关键, 属于中等题.



四、解答题：本大题共有 6 个大题，满分 82 分。解答题应写出必要的文字说明、证明过程和演算步骤.

18. 解关于 x 的不等式：

(1) $-2x^2 + 5x + 7 \geq 0$

(2) $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$

【答案】(1) $\{x | -1 \leq x \leq \frac{7}{2}\}$;

(2) 当 $a > 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | 1 \leq x \leq a\}$.

当 $a = 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | x = 1\}$.

当 $a < 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | a \leq x \leq 1\}$.

【解析】

【详解】(1) 由 $-2x^2 + 5x + 7 \geq 0$ 即 $2x^2 - 5x - 7 \leq 0$.

所以 $(2x-7)(x+1) \leq 0$, 则 $-1 \leq x \leq \frac{7}{2}$.

所以不等式 $-2x^2 + 5x + 7 \geq 0$ 的解集为： $\{x | -1 \leq x \leq \frac{7}{2}\}$.

(2) $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$ 即 $(x-a)(x-1) \leq 0$.

当 $a > 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | 1 \leq x \leq a\}$.

当 $a = 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | x = 1\}$.

当 $a < 1$ 时，不等式的解集为： $\{x | a \leq x \leq 1\}$.

19. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2m < x < 1-m\}$.

(1) 当 $m = -1$ 时，求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \subseteq B$ ，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$ (2) $(-\infty, -2]$

【解析】



【分析】

(1) 解一元二次不等式, 得集合 A , 把 $m = -1$ 代入, 得集合 B , 求出 A 并 B 即可;

(2) 根据子集的定义, 结合数轴, 得到关于 m 的不等式组, 即可得到 m 的取值范围.

【详解】 (1) 由 $x^2 - 4x + 3 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 0$ 得 $A = \{x | 1 < x < 3\}$,

当 $m = -1$ 时, $B = \{x | -2 < x < 2\}$,

则 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$.

(2) 由 $A \subseteq B$, 则有 $\begin{cases} 2m < 1-m \\ 3 \leq 1-m \\ 1 \geq 2m \end{cases}$, 解方程组知得 $m \leq -2$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

【点睛】 本题考查了集合的运算和集合之间的关系, 属于基础题.

20. 正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$.

(1) 求 xy 的最小值;

(2) 求 $x + 2y$ 的最小值.

【答案】 (1) 36; (2) $19 + 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

(1) 由基本不等式可得 $1 = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{9}{y}}$, 再求解即可;

(2) 由 $x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \right) = 19 + \frac{2y}{x} + \frac{9x}{y} \geq 19 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{9x}{y}}$, 再求解即可.

【详解】 解: (1) 由 $1 = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{9}{y}}$ 得 $xy \geq 36$, 当且仅当 $\frac{1}{x} = \frac{9}{y}$, 即 $x = 2, y = 18$ 时取等号,



故 xy 的最小值为 36.

$$(2) \text{ 由题意可得 } x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=19+\frac{2y}{x}+\frac{9x}{y} \geq 19+2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{9x}{y}}=19+6\sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{9x}{y}$, 即 $9x^2=2y^2$ 时取等号,

故 $x+2y$ 的最小值为 $19+6\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了基本不等式的应用, 重点考查了拼凑法构造基本不等式, 属中档题.

21. 已知 $p: -x^2+8x+20 \geq 0$, $q: x^2-2x+1-m^2 \leq 0 (m > 0)$.

(1) 若 p 是 q 充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若“非 p ”是“非 q ”的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $m \geq 9$; (2) $0 < m \leq 3$

【解析】

试题分析: (1) 因为 P 是 Q 的充分不必要条件, 所以 $P \subseteq Q$. 先解出 P 的集合: $-2 \leq x \leq 10$, 再因式分解 $Q: 1-m \leq x \leq 1+m$, 利用数轴列出不等关系: $m > 0, 1-m \leq -2, 1+m \geq 10$, 解出实数 m 的取值范围: $m \geq 9$. (2) 若“非 P ”是“非 Q ”的充分不必要条件, 则 Q 是 P 的充分不必要条件. 利用数轴列出不等关系: $m > 0, 1-m \geq -2, 1+m \leq 10$, 解出实数 m 的取值范围: $0 < m \leq 3$. 解答本题时, 不必要条件的理解为不等式组中等于号不能同时取到, 从区间长度可知, 两个等号不可同时取到, 因此必要性不成立.

试题解析: 解: $P: -2 \leq x \leq 10$, $Q: 1-m \leq x \leq 1+m$ 2 分

(1) $\because P$ 是 Q 的充分不必要条件,



$$m > 0,$$

$\therefore [-2, 10]$ 是 $[1-m, 1+m]$ 的真子集. $\therefore \begin{cases} 1-m \leq -2, \\ 1+m \geq 10, \end{cases} \therefore m \geq 9.$

$$1+m \geq 10,$$

\therefore 实数 m 的取值范围为 $m \geq 9$. 7 分

(2) \because “非 P ” 是 “非 Q ” 的充分不必要条件,

$\therefore Q$ 是 P 的充分不必要条件.

$$m > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 1-m \geq -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases} \therefore 0 < m \leq 3.$$

$$1+m \leq 10,$$

\therefore 实数 m 的取值范围为 $0 < m \leq 3$. 12 分

考点: 充要关系, 逆否命题与原命题等价性

22. 2016 年 11 月 3 日 20 点 43 分我国长征运载火箭在海南文昌发射中心成功发射, 它被公认为我国已从航天大国向航天强国迈进的重要标志. 长征五号运载火箭的设计生产采用很多新材料, 甲工厂承担了某种材料的生产, 并以 x 千克/时的速度匀速生产 (为保证质量要求 $1 \leq x \leq 10$), 每小时可消耗 A 材料 $kx^2 + 9$ 千克, 已知每小时生产 1 千克该产品时, 消耗 A 材料 10 千克.

(1) 设生产 m 千克该产品, 消耗 A 材料 y 千克, 试把 y 表示为 x 的函数.

(2) 要使生产 1000 千克该产品消耗的 A 材料最少, 工厂应选取何种生产速度?

并求消耗的 A 材料最少为多少?

【答案】 (1) $y = \frac{m}{x}(kx^2 + 9) = m(x + \frac{9}{x})$, $x \in [1, 10]$.; (2) 3 千克/时, 6000.

【解析】

【分析】

(1) 先由条件求出 $k=1$, 然后由消耗 A 材料 = 生产时间 \times 每小时可消耗 A 材料, 即可得出答案.



(2) 将 $m=1000$ 代入 (1) 中的不等式, 然后求出函数取最小值时, x 对应的值即可;

【详解】 (1) 由题意, 得 $k+9=10$, 即 $k=1$.

生产 m 千克该产品需要的时间是 $\frac{m}{x}$.

所以 $y = \frac{m}{x}(kx^2 + 9) = m(x + \frac{9}{x})$, $x \in [1, 10]$.

(2) 由 (1) 知, 生产 1000 千克该产品消耗的 A 材料为:

$$y = 1000(x + \frac{9}{x}) \geq 1000 \times 2\sqrt{9} = 6000$$

(当且仅当 $x = \frac{9}{x}$ 时, 即 $x=3 \in [1, 10]$ 时等号成立)

故工厂应选取 3 千克/时的速度匀速, 消耗的 A 材料最少, 最少为 6000 克.

【点睛】 本题考查函数在实际问题中的应用问题, 解决这类问题要认真仔细读懂题意, 弄清题目的条件和所求问题, 属于中档题.

23. (1) 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$, 求不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集.

(2) 当 $-1 < x < 3$ 时, 不等式 $x^2 - mx + (m-7) < 0$ 恒成立, 求 m 的范围.

【答案】 (1) $\{x | \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$; (2) $1 < m < 3$

【解析】

【分析】

(1) 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则 2, 3 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根且 $a < 0$, 由韦达定理可得 a, b, c 的关系, 再代入 $cx^2 + bx + a > 0$ 中可解出答案.

(2) 不等式 $x^2 - mx + (m-7) < 0$ 恒成立, $f(x) = x^2 - mx + (m-7)$ 即 $f(x) = x^2 - mx + (m-7)$, 讨论函数 $f(x)$ 的最大值即可.

【详解】 (1) 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$

所以 2, 3 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根且 $a < 0$.



所以由韦达定理有: $\begin{cases} 2+3=-\frac{b}{a} \\ 2\times 3=\frac{c}{a} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} b=-5a \\ c=6a \end{cases}$.

则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 化为 $6ax^2-5ax+a>0$.

即 $6x^2-5x+1<0$, 即 $(2x-1)(3x-1)<0$, 则 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为: $\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$.

(2) 设 $f(x)=x^2-mx+(m-7)$.

不等式 $x^2-mx+(m-7)<0$ 恒成立, 即 $f(x)_{\max}<0$ ($-1<x<3$).

函数 $f(x)=x^2-mx+(m-7)$ 的开口向上, 对称轴为 $x=\frac{m}{2}$.

当 $\frac{m}{2}\geq 1$, 即 $m\geq 2$ 时, $f(x)_{\max}=f(-1)=1+m+m-7<0$, 则 $m<3$,

所以 $2\leq m<3$.

当 $\frac{m}{2}<1$, 即 $m<2$ 时, $f(x)_{\max}=f(3)=9-3m+m-7<0$, 则 $m>1$,

所以 $1<m<2$.

综上, $1<m<3$.

【点睛】 本题考查三个二次间的关系, 不等式恒成立求参数的范围, 二次函数在闭区间上的最值, 考查分类讨论思想, 属于中档题.

