2020-2021年上海市交大附中高一上10月月考

一、填空题（每小题5分，共50分）

1.若$a\in R$，则$|a+3|+|3-a|$________$2|a|$.（填入等号或者不等号）

2.二次不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，则$a+b=$______.

3.不等式组$\begin{cases}|x-1|\le 2\\ \dfrac{5}{x+1}\ge 1\end{cases}$的解集为______.

4.已知$x<0.\dfrac{x^2+2}{x}$的最大值为______.

5.不等式$-1<x+\dfrac{1}{x}+1\le 3$的解集为______.

6.已知$a\in R$.若关于x的不等式$|x-1|+|x+1|\le a$有实数解，则a的取值范围为______.

7.已知关于x的不等式$\dfrac{mx-5}{x^2-m}<0$的解集为S，若$5\in S$且$6\notin S$，则实数m的取值范围为______.

8.设$f(x)=ax^2+bx$，且$1\le f(-1)\le 2,2\le f(1)\le 4$，则$f(-2)$的最大值为______.

9.设$A=\left\{x\,|\,\dfrac{2x-1}{x^2+3x+2}>0\right\},B=\left\{x\,|\,x^2+ax+b\le 0\right\}$，若$A\cap B=\left\{x\,|\,\dfrac{1}{2}<x\le 3\right\}$，则实数$a$的取值范围为______.

10.已知实数a,b,c满足$|a+b|<-c$，给出下列不等式：①$a<-b-c$；②$a>-b+c$；③$a<b-c$；④$|a|<|b|-c$；⑤$|a|<-|b|-c$；其中必定成立的不等式是__________（填写你认为正确的所有不等式的编号）

二、解答题（共50分）

11.（本题满分10分，其中第1题4分，第2题6分）

有10辆货车从A站匀速驶往2000千米的B站，其时速都是v千米/小时，为安全起见，要求每两辆货车的间隔等于kv^2千米（k为正常数，货车长度不计）.设第一辆货车从A站出发到最后一辆货车到达B站所需时间为t小时.

（1）求t（用含有v和k的代数式表示）；

（2）假设$k=1$，试确定当v为何值时，t取得最小值，并求出t的最小值.

12.（本题满分10分） 求关于x的不等式$ax^2-2(a+1)x+4>0$的解集.

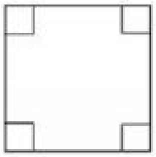
13.（本题满分 14 分，其中第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，第 3 题 6 分）

已知a,b,c,d为正实数，利用平均值不等式证明（1）（2）并指出等号成立条件，然后解决（3）中的实际问题.

（1）求证：$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$；

（2）利用（1）中结论证明：$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$；

（3）如图，将边长为 1 的正方形纸片的四个角都沿实线减去一个边长为 x 的小正方形，再将四条边都折起，做成一个无盖长方形盒子.求该长方体盒子的容积V的最大值，以及取得最大值时实数x的值.



14.（本题满分 16 分，其中第 1 题 6 分，第 2 题 10 分）

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{m}{x}+2$（m为实常数）.

（1）若函数 $y=f(x)$ 图像上动点 P 到定点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为$\sqrt{2}$，求实数m的值；

（2）设$m<0$，若不等式 $f(x)\leq kx$ 在 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$有解，求 k 的取值范围.

2020-2021 年上海市交大附中高一上 10 月月考

一、填空题（每小题 5 分，共 50 分）

1.若 $a\in R$，则 $|a+3|+|3-a|$ ________ $2|a|$.（填入等号或者不等号）

【答案】：$\geq$

2.二次不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，则 $a+b=$ ______.

【答案】：-14

3.不等式组 $\begin{cases}|x-1|\leq 2\\ \dfrac{5}{x+1}\geq 1\end{cases}$ 的解集为______.

【答案】：$(-1,3]$

4.已知 $x<0$.$\dfrac{x^2+2}{x}$ 的最大值为______.

【答案】：$-2\sqrt{2}$

5.不等式 $-1<x+\frac{1}{x}+1\leq 3$ 的解集为______.

【答案】：$\{1\}$

6.已知 $a\in R$.若关于 x 的不等式 $|x-1|+|x+1|\leq a$ 有实数解，则 a 的取值范围为______.

【答案】：$[2,+\infty)$

7.已知关于 x 的不等式 $\dfrac{mx-5}{x^2-m}<0$ 的解集为 S，若 $5\in S$ 且 $6\notin S$，则实数 m 的取值范围为______.

【答案】：$\left[\frac{5}{6},1\right)\cup(25,36]$

8.设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leq f(-1)\leq 2, 2\leq f(1)\leq 4$，则 $f(-2)$ 的最大值为______.

【答案】：10

【详解】：$f(-1)=a-b, f(1)=a+b, f(-2)=4a-2b$，

设 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a+(n-m)b$，

所以 $m+n=4, n-m=-2$，解得 $m=3, n=1$，即 $4a-2b=3(a-b)+(a+b)$ 即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$

故 $f(-2)$ 的最大值为 10.

9.设 $A=\left\{x\,|\,\dfrac{2x-1}{x^2+3x+2}>0\right\}, B=\{x\,|\,x^2+ax+b\leq 0\}$，若 $A\cap B=\left\{x\,|\,\frac{1}{2}<x\leq 3\right\}$，则实数 a 的取值范围为______.

【答案】：

【详解】：$\frac{2x-1}{x^2+3x+2}>0$ 解得 $x\in(-2,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

又 $A\cap B=\left\{x\,|\,\frac{1}{2}<x\le 3\right\}$

所以方程 $x^2+ax+b=0$ 的一根 $x_1=3$，另一根 $x_2\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，

由韦达定理，得 $x_1+x_2=-a=3+x_2$，所以 $x_2=-a-3\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，解得 $a\in\left[-\frac{7}{2},-2\right]$.

10.已知实数 a,b,c 满足 $|a+b|<-c$，给出下列不等式：①$a<-b-c$；②$a>-b+c$；③$a<b-c$；④$|a|<|b|-c$；

⑤$|a|<-|b|-c$；其中必定成立的不等式是__________（填写你认为正确的所有不等式的编号）

【答案】：①②④

【详解】：由 $|a+b|<-c$ 得 $c<a+b<-c$，所以 $c-b<a<-c-b$，所以①②正确；

又由 $|a|-|b|\le|a+b|<-c$ 得 $|a|<|b|-c$，所以④正确；

③⑤均可举出反例，反例为 $a=3,b=-1,c=-3$；
综上，必定成立的不等式是①②④.

二、解答题（共 50 分）

11.（本题满分 10 分，其中第 1 题 4 分，第 2 题 6 分）
有10辆货车从 A 站匀速驶往 2000 千米的 B 站，其时速都是 v 千米/小时，为安全起见，要求每两辆货车的间隔等于 kv^2 千米（k 为正常数，货车长度不计）.设第一辆货车从 A 站出发到最后一辆货车到达 B 站所需时间为 t 小时.

（1）求 t（用含有 v 和 k 的代数式表示）；
（2）假设 $k=1$，试确定当 v 为何值时，t 取得最小值，并求出 t 的最小值.
【答案】：

【详解】：（1）由题意得 $t=\frac{2000+9kv^2}{v}$，$v>0$；

（2）由题意得 $t=\frac{2000+9v^2}{v}=9v+\frac{2000}{v}\ge 2\sqrt{18000}=120\sqrt{5}$，

当且仅当 $9v=\frac{2000}{v}$，即 $v=\frac{20\sqrt{5}}{3}$ 时取等号.

12.（本题满分 10 分） 求关于 x 的不等式 $ax^2-2(a+1)x+4>0$ 的解集.

【答案】：

【详解】：根据题意得：$(ax-2)(x-2)>0$，

（i）当$a=0$时，$x-2<0$，解集为$(-\infty,2)$；

（ii）当$0<a<1$时，$\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x-2)>0$，解集为$(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$；

（iii）当$a=1$时，$(x-2)^2>0$，解集为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$；

（iv）当$a>1$时，$\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x-2)>0$，解集为$\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)\cup(2,+\infty)$；

（v）当$a<0$时，$\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x-2)<0$，解集为$x\in\left(\dfrac{2}{a},2\right)$.

13.（本题满分 14 分，其中第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，第 3 题 6 分）

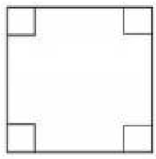
已知a,b,c,d为正实数，利用平均值不等式证明（1）（2）并指出等号成立条件，然后解决（3）中的实际问题.

（1）求证：$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$；

（2）利用（1）中结论证明：$\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$；

（3）如图，将边长为 1 的正方形纸片的四个角都沿实线减去一个边长为x的小正方形，再将四条边都折起，做成一个无盖长方形盒子.求该长方体盒子的容积V的最大值，以及取得最大值时实数x的值.

【答案】：见详解



【详解】：（1）因为$a,b,c,d>0$，所以$a+b\geqslant2\sqrt{ab},c+d\geqslant2\sqrt{cd}$，

所以$a+b+c+d\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\geqslant4\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=4\sqrt[4]{abcd}$，

所以$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$，当且仅当$a=b=c=d$时取等号.

（2）令$d=\dfrac{a+b+c}{3}$，则$d=\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$，

所以$d\geqslant\sqrt[4]{abcd}$，所以$d^4\geqslant abcd$，所以$d^3\geqslant abc$，所以$d\geqslant\sqrt[3]{abc}$，

即$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当$a=b=c$时取等号.

（3）由题意得$V=x(1-2x)^2$，所以$4V=(1-2x)(1-2x)\cdot4x$，

由（2）得$4V=(1-2x)(1-2x)\cdot4x\leq\left(\dfrac{1-2x+1-2x+4x}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，

所以$V\leq\dfrac{2}{27}$，当且仅当$1-2x=4x$，即$x=\dfrac{1}{6}$时取等号.

14.（本题满分 16 分，其中第 1 题 6 分，第 2 题 10 分）

已知函数$f(x)=x+\dfrac{m}{x}+2$（m为实常数）.

（1）若函数$y=f(x)$图像上动点P到定点$Q(0,2)$的距离的最小值为$\sqrt{2}$，求实数m的值；

（2）设 $m<0$，若不等式 $f(x)\le kx$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 有解，求 k 的取值范围.

【答案】：见详解

【详解】：（1）设 $P(x,y)$，则 $y=x+\frac{m}{x}+2$，

$|PQ|^2=x^2+(y-2)^2=2x^2+\frac{m^2}{x^2}+2m\geqslant 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{m^2}{x^2}}+2m=2\sqrt{2}\,|m|+2m=2$

当 $m>0$ 时，$2\sqrt{2}m+2m=2$，解得 $m=\sqrt{2}-1$，

当 $m<0$ 时，$-2\sqrt{2}m+2m=2$，解得 $m=-\sqrt{2}-1$，

所以 $m=\sqrt{2}-1$ 或 $m=-\sqrt{2}-1$；

（2）由 $f(x)\le kx$，得 $x+\frac{m}{x}+2\le kx$，

因为 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以 $k\ge\frac{m}{x^2}+\frac{2}{x}+1$，

令 $t=\frac{1}{x}$，则 $t\in[1,2]$，所以 $k\ge mt^2+2t+1$，令 $g(t)=mt^2+2t+1$，$t\in[1,2]$，

于是，要使原不等式在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 有解，当且仅当 $k\ge g(t)_{\min}$（$t\in[1,2]$），

因为 $m<0$，所以 $g(t)=m\left(t+\frac{1}{m}\right)^2+1-\frac{1}{m}$ 图像开口向下，对称轴为直线 $t=-\frac{1}{m}>0$，

因为 $t\in[1,2]$，故当 $0<-\frac{1}{m}\le\frac{3}{2}$，即 $m\le-\frac{2}{3}$ 时，$g(t)_{\min}=g(2)=4m+5$；

当 $-\frac{1}{m}>\frac{3}{2}$，即 $-\frac{2}{3}<m<0$ 时，$g(t)_{\min}=g(1)=m+3$.

综上，当 $m\le-\frac{2}{3}$ 时，$k\in[4m+5,+\infty)$；当 $-\frac{2}{3}<m<0$ 时，$k\in[m+3,+\infty)$.