江苏省太湖高级中学 2020～2021 第一学期阶段性考试

高一数学

2020.10.14

一．单项选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 下列关系：

①$\frac{1}{2}\in \mathbf{Q}$;　　②$\sqrt{2}\notin \mathbf{R}$;　　③$0\in \mathbf{N}^*$;　　④$\pi\in \mathbf{Z}$

中正确的个数是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+x=0\}$，则集合 $A\cup B=$（　）

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1,0,2\}$　　D. $\{0\}$

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$（　）

A. $\{x\mid -1<x<2\}$　　B. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid x<-1或x>2\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant -1或x\geqslant 2\}$

4. 已知命题 p: $\exists n\in \mathbf{N}$，$n^2>2n+5$，则命题 p 的否定为（　）

A. $\forall n\in \mathbf{N}$，$n^2>2n+5$　　B. $\forall n\in \mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2n+5$

C. $\exists n\in \mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2n+5$　　D. $\exists n\in \mathbf{N}$，$n^2>2n+5$

5. 若一次函数的图象经过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,8)$，则该函数的图象还经过点（　）

A. $\left(\frac{1}{2},5\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},4\right)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(-2,1)$

6. 已知函数 $f(2x+1)=3x-5$，若 $f(a)=10$，则实数 a 的值为（　）

A. 5　　B. 10　　C. 11　　D. 2

7. 下列各组函数中，表示同一函数的是（　）

A. $y=\sqrt{x^2}$，$s=\left(\sqrt{t}\right)^2$　　B. $y=|x|$，$s=\left(\sqrt{v^2}\right)$

C. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，$m=n+1$　　D. $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$y=\sqrt{x^2-1}$

8. 已知 $x>2$，则 $\frac{x^2}{x-2}$ 的最小值是（　）

A. 2　　B. 6　　C. 4　　D. 8

二．多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 下列选项中，命题 p 是 q 的充分不必要条件的是（　）

A. p：$1<x<2$，q：$1\leqslant x\leqslant 2$　　B. p：$xy>1$，q：$x>1$，$y>1$

C. p：$\frac{1}{x}>1$，q：$x<1$　　D. p：两直线平行，q：内错角相等

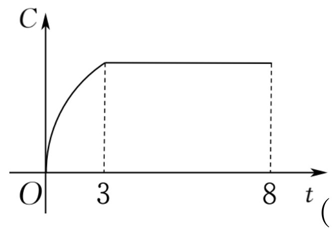
10. 某工厂八年来产品累积产量 C（即前 t 年年产量之和）与时间 t（年）的函数如图，下列四种说法中正确的是（　）

A. 前三年中，产量增长的速度越来越快

B. 前三年中，产量增长的速度越来越慢

C. 第三年后，这种产品停止生产

D. 第三年后，年产量保持不变



11. 下列说法中正确的是　　（　　）

A. 若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$

C. 若 $a>b>0$ 且 $c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

D. 若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $ab>0$

12. 已知 x，y 为正数，且 $xy=1$，$a=x+y$，$b=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$，下列选项中正确的有　（　　）

A. a 的最小值为 2

B. b 的最小值为 4

C. $a+b$ 的最小值为 5

D. ab 的最小值为 9

三. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ 的定义域为__________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1 \end{cases}$，则 $f(f(-2))=$__________.

15. 已知集合 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{y\,|\,y=x^2,\ x\in A\}$，$C=\{y\,|\,y=2x+a,\ x\in A\}$，若满足 $C\subseteq B$，则实数 a 的取值范围为__________.

16. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，则：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$__________；

(2) 若不等式 $\begin{vmatrix} x-1 & a-2 \\ a+1 & x \end{vmatrix}\geqslant 1$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围为__________.

(注：第一个空 2 分，第二个空 3 分.)

四. 解答题：共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求不等式 $\frac{1-ax}{x+1}>a+5$ 的解集.

18.（12 分）设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid 2a\leqslant x<3-a\}$.

(1) 若 $a=-2$ 时，求 $B\cap A$，$B\cap(\complement_U A)$；

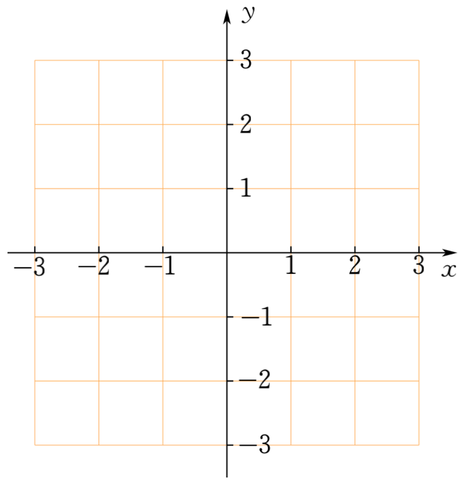
(2) 若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

19.（12 分）已知函数 $f(x)=2+\dfrac{x-2|x|}{3}(-2<x\leqslant 3)$.

(1) 用分段函数的形式表示函数 $y=f(x)$；

(2) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象；

(3) 写出函数 $y=f(x)$ 的值域.



20.（12 分）已知 x,y 均为正数，且 $xy-(x+4y)-5=0$.

(1) 求 xy 的最小值；

(2) 求 $x+y$ 的最小值.

21.（12 分）某厂以 x 千克 / 时的速度匀速生产某种产品 (生产条件要求 $1 \leqslant x \leqslant 10$), 每小时可获得的利润是 $50\left(5x-\frac{3}{x}+1\right)$ 元.

(1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低 1500 元，求 x 的取值范围；

(2) 要使生产 480 千克该产品获得的利润最大，问：该厂应该选取何种生产速度? 并求此最大利润.

22.（12 分）已知 a 为常数，二次函数 $f(x)=x^2-ax+a+3$.

(1) 若该二次函数的图象与 x 轴有交点，求实数 a 的取值范围；

(2) 已知 $f(x) \geqslant 4$, 求 x 的取值范围;

(3) 若对任意的实数 $x \in [2,\ 4]$, , $f(x) \geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

江苏省太湖高级中学高一年级阶段测试

数 学 试 卷

2020 年 10 月

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分．在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求．)

1. 下列关系中正确的个数是 (A)

①$\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$　　②$\sqrt{2}\notin\mathbf{R}$　　③$0\in\mathbf{N}^*$　　④$\pi\in\mathbf{Z}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x=0\}$,$B=\{x|x^2+x=0\}$,则 $A\cup B=$ (C)

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1,0,2\}$　　D. $\{0\}$

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$,则 $\complement_{\mathrm{R}}A=$ (B)

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$　　D. $\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$

4. 已知命题 p:$\exists n\in N,n^2>2n+5$,则 p 的否定为 (B)

A. $\forall n\in\mathbf{N},n^2>2n+5$　　B. $\forall n\in\mathbf{N},n^2\leqslant 2n+5$

C. $\exists n\in\mathbf{N},n^2\leqslant 2n+5$　　D. $\exists n\in\mathbf{N},n^2\leqslant 2n+5$

5. 若一次函数的图象经过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,8)$,则该函数的图象还经过的点的坐标为 (A)

A. $\left(\frac{1}{2},5\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},4\right)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(-2,1)$

6. 已知函数 $f(2x+1)=3x-5$,若 $f(a)=10$,则实数 a 的值为 (C)

A. 5　　B. 10　　C. 11　　D. 2

7. 下列各组函数中,表示同一函数的是 (B)

A. $y=\sqrt{x^2}$,$s=(\sqrt{t})^2$　　B. $y=|x|$,$u=\sqrt{v^2}$

C. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,$m=n+1$　　D. $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$,$y=\sqrt{x^2-1}$

8. 已知 $x>2$,则 $\frac{x^2}{x-2}$ 的最小值是 (D)

A. 2　　B. 6　　C. 4　　D. 8

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分．在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求．全部选对得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分．)

9. 下列选项中 p 是 q 的充分不必要条件的是 (AC)

A. p:$1<x<2$,q:$1\leqslant x\leqslant 2$　　B. p:$xy>1$,q:$x>1,y>1$

C. p:$\frac{1}{x}>1$,q:$x<1$　　D. p:两直线平行,q:内错角相等

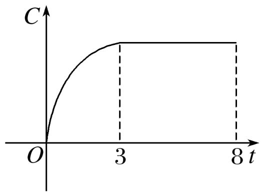
10. 某工厂八年来产品累积产量 C(即前 t 年年产量之和)与时间 t(年)的函数如图,下列四种说法中正确的是　　　　(BC)

A. 前三年中,产量增长的速度越来越快

B. 前三年中,产量增长的速度越来越慢

C. 第三年后,这种产品停止生产

D. 第三年后,年产量保持不变



11. 下列说法中正确的是　　　　(BC)

A. 若 $a>b>0$,则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$

C. 若 $a>b>0$ 且 $c<0$,则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

D. 若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $ab>0$

12. 已知 x,y 为正数,且 $xy=1,a=x+y,b=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$,下列选项中正确的有　　　　(ABD)

A. a 的最小值为 2

B. b 的最小值为 4

C. $a+b$ 的最小值为 5

D. ab 的最小值为 9

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

13. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ 的定义域为 ______.

答案　$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 1,\\ x+\frac{6}{x}-6,x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-2))=$ ______.

答案　$-\frac{1}{2}$

15. 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{y|y=x^2,x\in A\}$, $C=\{y|y=2x+a,x\in A\}$,若 $C\subseteq B$,则实数 a 的取值范围为 ______.

答案　$[2,3]$

16. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算:$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$,则 $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$ ______,若不等式 $\begin{vmatrix}x-1 & a-2\\ a+1 & x\end{vmatrix}\geqslant 1$ 对任意实数 x 恒成立,则实数 a 的取值范围为 ______.

答案　2　$\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

四、解答题(本大题共6小题,共70分请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<2\right\}$,

(1) 求 a 的值;

(2) 求不等式 $\frac{1-ax}{x+1}>a+5$ 的解集.

解析 (1) ∵若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<2\right\}$

∴ $\frac{1}{2}$,2 是方程 $ax^2+5x-2=0$ 的两根且 $a<0$

∴ $\begin{cases}\frac{1}{2}+2=-\frac{5}{a}\\ \frac{1}{2}\times 2=-\frac{2}{a}\end{cases}$ 解得 $a=-2$(满足 $a<0$)∴ a 的值为 -2.

(2) 不等式 $\frac{1-ax}{x+1}>a+5$ 即不等式 $\frac{1+2x}{x+1}>3$, 即 $\frac{1+2x}{x+1}-3>0$,

通分得 $\frac{x+2}{x+1}>0$, 等价于 $(x+2)(x+1)>0$, 解得 $-2<x<-1$,

所以原不等式的解集为 $\{x|-2<x<-1\}$.

18. 设全集 $U=\mathrm{R}$,集合 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$, $B=\{x|2a\leqslant x<3-a\}$.

(1) 若 $a=-2$,求 $B\cap A$, $B\cap(\complement_U A)$;

(2) 若 $A\cup B=A$,求实数 a 的取值范围.

解析 (1)$a=-2$ 时 $B=\{x|-4\leqslant x<5\}$, 又 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$, ∴$\complement_U A=\{x|x<1$ 或 $x\geqslant 4\}$

$B\cap A=\{x|1\leqslant x<4\}$,$B\cap(\complement_U A)=\{x|-4\leqslant x<1$ 或 $4\leqslant x<5\}$.

(2) 若 $A\cup B=A$, 则 $B\subseteq A$

若 $B=\varnothing$, 则 $3-a\leqslant 2a$, 解得 $a\geqslant 1$

若 $B\neq\varnothing$, 则 $\begin{cases}a<1\\ 2a\geqslant 1\\ 3-a\leqslant 4\end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$,

综上, 实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

19. 已知函数 $f(x)=2+\frac{x-2|x|}{3}$ $(-2<x\leqslant 3)$.

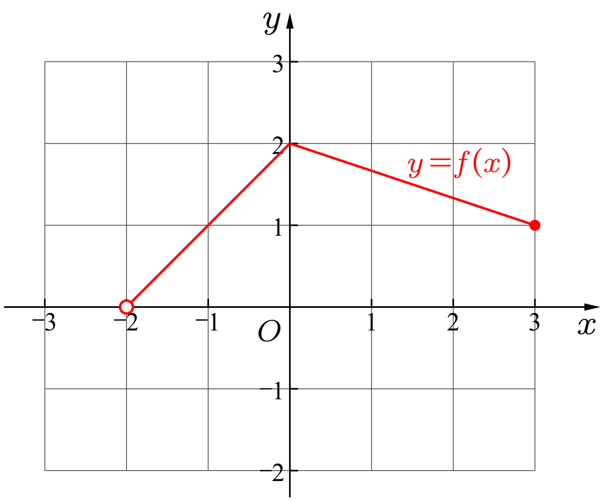
(1) 用分段函数的形式表示函数 $f(x)$;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象;

(3) 写出函数 $f(x)$ 的值域.

解析 (1)$f(x)=\begin{cases}x+2, & -2<x\leqslant 0\\ -\frac{1}{3}x+2, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$

(2) 函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.



(3) 由图得函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,2]$

20. 已知x,y均为正数，且$xy-(x+4y)-5=0$.

(1) 求xy的最小值；

(2) 求$x+y$的最小值.

解析　(1) $\because x,y$ 均为正数，且 $xy-(x+4y)-5=0 \therefore xy-5=x+4y \geqslant 2\sqrt{x\cdot 4y}=4\sqrt{xy}$

当且仅当 $\begin{cases} x=4y \\ xy-(x+4y)-5=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ 取"="

$\therefore xy-4\sqrt{xy}-5 \geqslant 0 \therefore (\sqrt{xy}-5)(\sqrt{xy}+1) \geqslant 0 \therefore \sqrt{xy} \geqslant 5$, 即 $xy \geqslant 25$.

$\therefore xy$ 的最小值为 25.

(2)（方法一）$\because xy-(x+4y)-5=0 \therefore (x-4)y=x+5$

$\because x,y$ 均为正数 $\therefore x>4 \therefore y=\dfrac{x+5}{x-4}$

$\therefore x+y=x+\dfrac{x+5}{x-4}=x+\dfrac{x-4+9}{x-4}=(x-4)+\dfrac{9}{x-4}+5 \geqslant 2\sqrt{(x-4)\cdot\dfrac{9}{x-4}}+5=11$

当且仅当 $x-4=\dfrac{9}{x-4}$ 即 $x=7$ 取"=", 此时 $y=4$

$\therefore x+y$ 的最小值为 11.

（方法二）$\because xy-(x+4y)-5=0 \therefore (x-4)(y-1)=9$

又 $(x-4)y=x+5$ 且 x,y 均为正数 $\therefore x>4, y>1$

$\therefore x+y=(x-4)+(y-1)+5 \geqslant 2\sqrt{(x-4)(y-1)}+5=2\sqrt{9}+5=11$

当且仅当 $\begin{cases} (x-4)=(y-1) \\ (x-4)(y-1)=9 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$ 取"=",

$\therefore x+y$ 的最小值为 11.

21. 某厂以x千克/时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求$1\leqslant x\leqslant 10$），每小时可获得的利润是$50\left(5x-\dfrac{3}{x}+1\right)$元.

(1) 要使生产该产品2小时获得的利润不低于1 500元，求x的取值范围；

(2) 要使生产480千克该产品获得的利润最大，问：该厂应该选取何种生产速度？并求此最大利润.

解析　(1) 要使生产该产品2小时获得的利润不低于1 500元，求x的取值范围；

(2) 要使生产480千克该产品获得的利润最大，问：该厂应该选取何种生产速度？并求此最大利润.

(1) 要使生产该产品2小时获得的利润不低于1 500元，即 $50\left(5x-\dfrac{3}{x}+1\right)\cdot 2 \geqslant 1500$

即 $5x-\dfrac{3}{x}-14 \geqslant 0$，即 $5x^2-14x-3 \geqslant 0$, 即 $(x-3)(5x+1) \geqslant 0$, 解得 $x \geqslant 3$ 或 $x \leqslant -\dfrac{1}{5}$

又 $1 \leqslant x \leqslant 10$, 所以 $3 \leqslant x \leqslant 10$, 即 x 的取值范围为 $[3,10]$.

(2) 生产480千克该产品所需时间为 $\dfrac{480}{x}$ 小时，所获得的利润为 y 元，则

$y=50\left(5x-\dfrac{3}{x}+1\right)\cdot\dfrac{480}{x}=24000(-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x}+5)$

$=24000[-3(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6})^2+\dfrac{61}{12}]=-72000(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6})^2+122000$

$\therefore$ 当 $\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$ 即 $x=6\in[1,10]$ 时，$y_{max}=122000$

答：该厂应该选取6千克/时的生产速度，此时利润最大，最大利润为122000元.

22. 已知 a 为常数，二次函数 $f(x)=x^2-ax+a+3$.

(1) 若该二次函数的图象与 x 轴有交点，求 a 的取值范围；

(2) 已知 $f(x)\geqslant 4$，求 x 的取值范围；

(3) 若对任意的实数 $x\in[2,4]$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析 (1) 若该二次函数的图象与 x 轴有交点，则 $\Delta=a^2-4(a+3)>=0$

$\therefore (a-6)(a+2)\geqslant 0 \therefore a\geqslant 6$ 或 $a\leqslant 2$

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$

(2) $\because f(x)=x^2-ax+a+3\geqslant 4 \therefore x^2-ax+a-1\geqslant 0$ 即 $(x-1)[x-(a-1)]\geqslant 0$

当 $a-1=1$ 即 $a=2$ 时，$(x-1)^2\geqslant 0$，解集为R；

当 $a-1>1$ 即 $a>2$ 时，$x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant a-1$

当 $a-1<1$ 即 $a<2$ 时，$x\leqslant a-1$ 或 $x\geqslant 1$

综上，当 $a=2$ 时，不等式的解集为R；当 $a>2$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1]\cup[a-1,+\infty)$；

当 $a<2$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,a-1]\cup[1,+\infty)$.

(3) 若对任意的实数 $x\in[2,4]$，$f(x)=x^2-ax+a+3\geqslant 0$ 恒成立，即 $a(x-1)\leqslant x^2+3$ 恒成立，

$\because x\in[2,4] \therefore x-1\in[1,3] \therefore a\leqslant(\frac{x^2+3}{x-1})_{min}$

设 $t=x-1\in[1,3]$，则 $x=t+1 \therefore \frac{x^2+3}{x-1}=\frac{(t+1)^2+3}{t}=t+\frac{4}{t}+2\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+2=6$

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$ 即 $t=2$ 取"="，此时 $x=3$

$\therefore a\leqslant(\frac{x^2+3}{x-1})_{min}=6$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,6]$.