

# 数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | -2 < x < 2\}$ ,  $B = \{-1, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
- A.  $\{1\}$                   B.  $\{0, 1\}$                   C.  $\{-1, 1\}$                   D.  $\{0, 1, 2, 3\}$
2. 命题“对任意  $x \in R$ , 都有  $x^2 + 2x < 1$ ”的否定是 ( )
- A. 存在  $x \in R$ , 使得  $x^2 + 2x > 1$                   B. 存在  $x \in R$ , 使得  $x^2 + 2x \geq 1$
- C. 对任意  $x \in R$ , 都有  $x^2 + 2x > 1$                   D. 对任意  $x \in R$ , 都有  $x^2 + 2x \geq 1$
3. 集合  $\{(x, y) | xy \leq 0, x \in R, y \in R\}$  是指 ( )
- A. 第二象限内的所有点                  B. 第四象限内的所有点
- C. 第二象限和第四象限内的所有点                  D. 不在第一、第三象限内的所有点
4. 若集合  $A = \{x | x > 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x \leq 0\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )
- A.  $\{x | 0 < x < 4\}$                   B.  $\{x | 0 < x \leq 4\}$
- C.  $\{x | x > 0\}$                   D.  $\{x | x \geq 0\}$
5. 若  $-2x^2 + 5x - 2 > 0$ , 则  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2|x - 2|$  等于 ( )
- A.  $4x - 5$                   B.  $-3$                   C.  $3$                   D.  $5 - 4x$
6. “ $x > 0$ ”是“ $x^2 + x > 0$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件                  B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件                  D. 既不充分也不必要条件
7. 若函数  $y = x + \frac{1}{x-2} (x > 2)$  在  $x = a$  处取最小值, 则  $a =$  ( )
- A.  $1 + \sqrt{2}$                   B.  $1 + \sqrt{3}$                   C.  $3$                   D.  $4$

8. “ $-1 \leq x < 2$ ”的一个必要不充分条件是 ( )
- A.  $-1 \leq x \leq 2$       B.  $-1 \leq x < 2$       C.  $0 \leq x < 2$       D.  $0 \leq x < 3$
9. 已知命题“ $\exists x \in R$ , 使  $2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} \leq 0$ ”是假命题, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )
- A.  $a < -1$       B.  $-1 < a < 3$       C.  $a > -3$       D.  $-3 < a < 1$
10. 设集合  $A = \{x | x^2 - (a+3)x + 3a = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$ , 集合  $A \cup B$  中所有元素之和为 8, 则实数  $a$  的取值集合为 ( )
- A.  $\{0\}$       B.  $\{0, 3\}$       C.  $\{0, 1, 3, 4\}$       D.  $\{1, 3, 4\}$
11. 集合  $A = \{x | -2 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | m < x < m+9\}$ . 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )
- A.  $m < 3$       B.  $m \geq -11$   
C.  $-11 \leq m \leq 3$       D.  $-11 < m < 3$
12. 设  $a, b, c$  均为正数, 则“ $a+b > c$ ”是“ $a^2 + b^2 > c^2$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不修要条件

**二、填空题:共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分..**

13. 已知  $x \in (-2, 5)$ , 则  $y = (2+x)(5-x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 对任意实数  $a, b, c$ , 给出下列命题:
- ①“ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充要条件; ②“ $a+5$  是无理数”是“ $a$  是无理数”的充要条件;
- ③“ $a < 4$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件; ④“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件,
- 其中真命题是\_\_\_\_\_.
15. 集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x > a\}$ , 若  $A \cup B = R$ , 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
16. 集合  $A = \{(x, y) | y = ax^2 - 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = 3x - 3\}$ , 若  $A \cap B$  的元素只有一个, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

三、解答题:共 6 小题, 共 70 分.解答题写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知集合  $A = \{a-3, 2a+1, a^2+1\}$ , 集合  $B = \{0, 1, x\}$ .

(1) 若  $-3 \in A$ , 求  $a$  的值;

(2) 是否存在实数  $a, x$ , 使  $A = B$ .

18. (12 分) 求下列函数的最值

(1) 求函数  $y = 2x + \frac{1}{x-1} (x > 1)$  的最小值.

(2) 求函数  $y = \frac{x^2+2}{x-1} (x > 1)$  的最小值.

19. (12 分) 设集合  $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + (m+1)x + m = 0\}$ .

(1) 用列举法表示集合  $A$ ;

(2) 若  $x \in B$  是  $x \in A$  的充分条件, 求实数  $m$  的值.

20. (12 分) 已知  $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m\}$ , 若  $A \cup B = A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

21. (12 分) 某工厂要建造一个长方形无盖蓄水池, 其容积为  $3200m^3$  立方米, 深为  $2m$ . 如果池底每平方米的造价为 150 元, 池壁每平方米的造价为 120 元, 那么怎样设计水池能使总造价最低(设蓄水池池底的相邻两边边长分别为  $x$ ,  $y$ )? 最低总造价是多少?

22. (12 分) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - (a+1)x + b < 0$ .

(1) 若不等式的解集是  $\{x | 1 < x < 5\}$ , 求  $a+b$  的值;

(2) 若  $a > 0$ ,  $b = 1$ , 求此不等式的解集.

## 数学参考答案

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	D	C	A	C	A	B	C	D	B

二、填空题：共 4 小题，每小题 5 分.

13.  $\frac{49}{4}$     14. ② ③    15.  $a \leq -1$     16. 0 或  $\frac{9}{8}$

三、解答题：共 6 小题，共 70 分.

17. (10 分) 已知集合  $A = \{a-3, 2a+1, a^2+1\}$ ，集合  $B = \{0, 1, x\}$ .

(1) 若  $-3 \in A$ ，求  $a$  的值；

(2) 是否存在实数  $a, x$ ，使  $A = B$  .

【解】(1)  $a-3 = -3$  或  $2a+1 = -3$ ，解得  $a = 0$  或  $a = -2$ ，

当  $a = 0$  时，不成立；当  $a = -2$  时， $A = \{-5, -3, 5\}$ ，成立.  $\therefore a = -2$ .

(2)  $a^2 + 1 \neq 0$ ，

若  $a-3 = 0$ ，则  $a = 3$ ， $A = \{0, 7, 10\} \neq B$ ，

若  $2a+1 = 0$ ，则  $a = -\frac{1}{2}$ ， $A = \left\{0, -\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right\} \neq B$ ，

$\therefore$  不存在实数  $a, x$ ，使  $A = B$  .

18. (12 分) 求下列函数的最值

(1) 求函数  $y = 2x + \frac{1}{x-1} (x > 1)$  的最小值.

(2) 求函数  $y = \frac{x^2+2}{x-1} (x > 1)$  的最小值.

【解】(1)  $y = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$ ，故函数  $y$  的最小值为  $2\sqrt{2} + 2$ ，

当且仅当  $2(x-1)^2 = 1$ ，即  $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  时取得；

$$(2) y = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 3}{x-1} = (x-1) + \frac{3}{x-1} + 2 \geq 2\sqrt{3} + 2, \text{ 故函数 } y \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{3} + 2,$$

当且仅当  $(x-1)^2 = 3$  即  $x = \sqrt{3} + 1$  时取得;

19. (12 分) 设集合  $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + (m+1)x + m = 0\}$ .

(1) 用列举法表示集合  $A$ ;

(2) 若  $x \in B$  是  $x \in A$  的充分条件, 求实数  $m$  的值.

【解】(1)  $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0$ , 即  $x = -1$  或  $x = -2$ ,  $A = \{-1, -2\}$ .

(2) 若  $x \in B$  是  $x \in A$  的充分条件, 则  $B \subseteq A$ ,

$$x^2 + (m+1)x + m = 0 \Rightarrow (x+1)(x+m) = 0, \text{ 解得 } x = -1 \text{ 或 } x = -m,$$

当  $m = 1$  时,  $B = \{-1\}$ , 满足  $B \subseteq A$ ;

当  $m = 2$  时,  $B = \{-1, -2\}$ , 同样满足  $B \subseteq A$ ,

所以  $m = 1$  或  $m = 2$ .

20. (12 分) 已知  $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m\}$ , 若  $A \cup B = A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

【解】由  $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$

当  $B = \emptyset$  时,  $m+1 > 2m \Rightarrow m < 1$

$$\text{当 } B \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} m+1 \leq 2m \\ m+1 \geq -2 \\ 2m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{5}{2}$$

综上所述  $m$  的取值范围为  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

21. (12 分) 某工厂要建造一个长方形无盖蓄水池, 其容积为  $3200m^3$  立方米, 深为  $2m$ .

如果池底每平方米的造价为 150 元, 池壁每平方米的造价为 120 元, 那么怎样设计水池能使总造价最低(设蓄水池池底的相邻两边边长分别为  $x$ ,  $y$ )? 最低总造价是多少?

【解】由体积为  $3200m^3$  可知:  $2xy = 3200 \Rightarrow xy = 1600$ ,

设总造价为  $z$ .

$$\text{又} \because z = 150 \times 1600 + 120(4x + 4y),$$

$$\therefore z = 240000 + 480(x + y) \geq 240000 + 480 \times 2\sqrt{xy} = 278400,$$

当且仅当,  $x = y = 40$  时, 上式成立, 此时  $z = 278400$ .

22. (12 分) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - (a+1)x + b < 0$ .

(1) 若不等式的解集是  $\{x | 1 < x < 5\}$ , 求  $a+b$  的值;

(2) 若  $a > 0$ ,  $b = 1$ , 求此不等式的解集.

【解】(1) 由题意知  $a > 0$ , 且 1 和 5 是方程  $ax^2 - (a+1)x + b = 0$  的两根,

$$\therefore 1+5 = -\frac{-(a+1)}{a}, \text{ 且 } 1 \times 5 = \frac{b}{a}, \quad \text{解得 } a = \frac{1}{5}, \quad b = 1, \quad \therefore a+b = \frac{6}{5}.$$

(2) 若  $a > 0$ ,  $b = 1$ , 原不等式为  $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$ ,

$$\therefore (ax-1)(x-1) < 0, \quad \therefore a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0.$$

$$\therefore a > 1 \text{ 时}, \quad \frac{1}{a} < 1, \quad \text{原不等式解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\},$$

$$a = 1 \text{ 时}, \quad \frac{1}{a} = 1, \quad \text{原不等式解集为 } \emptyset,$$

$$0 < a < 1 \text{ 时}, \quad \frac{1}{a} > 1, \quad \text{原不等式解集为 } \left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\},$$

$$\text{综上所述: 当 } a > 1 \text{ 时, 原不等式解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\},$$

当  $a = 1$  时, 原不等式解集为  $\emptyset$ .

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, 原不等式解集为 } \left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\}.$$