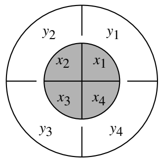
1 选填

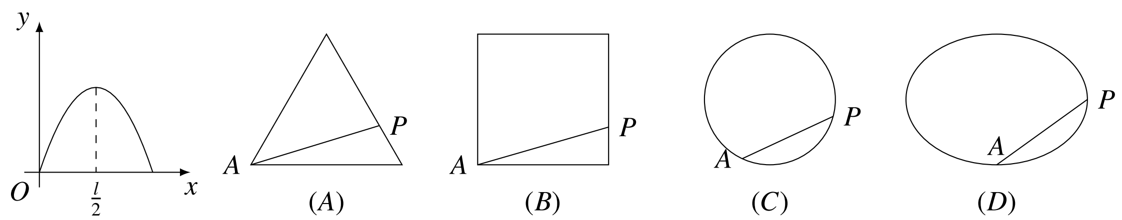
1. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起 (有一轴穿过它们的圆心)，两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上缩写的实数分别记为 x_1, x_2, x_3, x_4，大圆盘上所写的实数分别记为 y_1, y_2, y_3, y_4，如图所示，将小圆盘逆时针旋转 $i(i = 1, 2, 3, 4)$ 次，每次旋转 $90°$，记 $T_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ 为转动 i 次后各区域内两数乘积之和，例如 $T_1 = x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$. 若 $x_1+x_2+x_3+x_4 < 0$, $y_1+y_2+y_3+y_A4 < 0$，则下列结论正确的是 (　　)



(A) T_1, T_2, T_3, T_4 中至少有一个为正数　　(B) T_1, T_2, T_3, T_4 中至少有一个为负数

(C) T_1, T_2, T_3, T_4 中至多有一个为正数　　(D) T_1, T_2, T_3, T_4 中至多有一个为负数

2. 动点 P 从 A 出发，按逆时针方向沿周长为 l 的平面图形运动一周，A, P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示，那么动点 P 所走的图形可能是 (　　)



3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & x > 0, \\ |x+3|, & -4 \leqslant x < 0. \end{cases} (a > 0且a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上有且仅有两个点关于 y 轴对称，则 a 的取值范围是 (　　)

(A) $(0, 1)$　　(B) $(1, 4)$　　(C) $(0, 1) \bigcup (1, +\infty)$　　(D) $(0, 1) \bigcup (1, 4)$

4. $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和，且 $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，若 $S(A)$ 能被 3 整除，则符合条件的非空集合 A 的个数是 (　　)

(A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 13

5. 已知一位手机用户前四次输入四位数字手机密码均不正确，第五次输入密码正确，手机解锁. 事后发现前四次输入的密码中，每次都有两个数字正确，但它们各自的位置均不正确. 已知前四次输入的密码分别为 3406, 1630, 7364, 6173, 则正确的密码中一定含有的数字为 (　　)

(A) 4, 6　　(B) 3, 6　　(C) 3, 7　　(D) 1, 7

6. 据统计某超市两种蔬菜 A, B 连续 n 天价格分别为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$，令 $M = \{m | a_m < b_m,\ m = 1, 2, \cdots, n\}$，若 M 中元素个数大于 $\frac{3}{4}n$，则称蔬菜 A 在这 n 天的价格低于蔬菜 B 的价格，记作 $A \prec B$，现有三种蔬菜 A, B, C，下列说法正确的是 (　　)

(A) 若 $A \prec B, B \prec C$, 则 $A \prec C$

(B) 若 $A \prec B, B \prec C$ 同时不成立，则 $A \prec C$ 不成立

(C) $A \prec B, B \prec A$ 可同时不成立

(D) $A \prec B, B \prec A$ 可同时成立

7. 已知甲、乙两个容器，甲容器的容量为 x，装满纯酒精，乙容器容量为 z，其中装有体积为 y 的水 ($x, y < z$，单位：L). 现将甲容器中的液体倒入乙容器中，直至甲容器中液体倒完或乙容器盛满，搅拌使乙容器中两种液体充分混合，再将乙容器中的液体倒入甲容器中直至倒满，搅拌使甲容器中液体充分混合，如此称为一次操作，假设操作过程中溶液体积变化忽略不计，设经过 $n\,(n \in \mathbf{N}^+)$ 次操作之后，乙容器中含有纯酒精 a_n(单位：L). 下列关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是 ( )

(A) 当 $x = y = a$ 时，数列 $\{a_n\}$ 有最大值 $\dfrac{a}{2}$

(B) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n\,(n \in \mathbf{N}^+)$，则数列 $\{b_n\}$ 为递减数列

(C) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，始终有 $a_n \leqslant \dfrac{xy}{z}$

(D) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，始终有 $a_n \leqslant \dfrac{xy}{x+y}$

8. 中国古代儒学家要求学生掌握六种基本才艺，礼、乐、射、御、书、数，简称“六艺”. 某中学为弘扬“六艺”的传统文化，分别进行了主题为”礼、乐、射、御、书、数”六场传统文化知识的比赛. 现有甲、乙、丙三位选手进入了前三名的最后角逐，规定：每场知识竞赛前三名的得分都分别是 $a, b, c(a > b > c$且$a, b, c \in \mathbf{N}^*)$；选手最后得分为各场得分之和. 在六场比赛后，已知甲最后得分为 26 分，乙和丙最后得分都为 11 分，且乙在其中一场比赛中获得第一名，则下列说法中正确的是 ( )

(A) 每次比赛第一名得分 a 为 4

(B) 甲可能有一场比赛获得第二名

(C) 乙有四场比赛获得第三名

(D) 丙可能有一场比赛获得第一名

9. 有三只股票 A, B, C, 共28 位股民的持有情况如下：每位股民至少持有其中一支股票，在不持有 A 股票的人中，持有 B 股票的人数是持有 C 股票的人数的 2 倍. 在持有 A 股票的人中，只持有 A 股票的人数比除了持有 A 股票外，同时还持有其它股票的人数多 1. 在只持有一支股票的人中，有一半持有 A 股票. 则只持有 B 股票的股民人数是 ( )

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

10. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB = 2$. 若 $\overrightarrow{DA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$______.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x < 0$ 时，$f(x) = \ln(-x) + x$; 当 $-e \leqslant x \leqslant e$ 时，$f(-x) = -f(x)$；当 $x > 1$ 时，$f(x+2) = f(x)$，则 $f(8) =$______.

12. 已知 O 为坐标原点，点 P 为直线 $2x + y - 2 = 0$ 上的任意一点，非零向量 $\boldsymbol{a} = (m, n)$. 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{a}$ 恒为定值，则 $\dfrac{m}{n} =$______.

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点在区间 $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内，那么 $k =$______.

14. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$.

① 若 $\angle C=90^\circ$，则 $\lambda+\mu=$______;

② 若 $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\lambda+\mu$ 的最大值是______.

15. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \left(0<b<\sqrt{6}\right)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2，短轴的两个端点分别为 B_1, B_2，点 P 在椭圆 G 上，且满足 $|PB_1|+|PB_2|=|PF_1|+|PF_2|$. 当 b 变化时，给出下列三个命题:

① 点 P 的轨迹关于 y 轴对称;

② 存在 b 使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有 2 个;

③ $|OP|$ 的最小值为 2.

其中，所有正确命题的序号是______.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1.\end{cases}$ 下列四个命题:

① $f(f(1))>f(3)$;

② $\exists x_0\in(1,+\infty), f'(x_0)=-\dfrac{1}{3}$;

③ $f(x)$ 的极大值点为 $x=1$;

④ $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty), \left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leqslant 1$.

其中正确的有______.(写出所有正确命题的序号)

17. 若 x,y 满足 $\begin{cases}y\geqslant 1,\\ y\leqslant x-1,\\ x+y\leqslant m.\end{cases}$ 且 $z=x^2+y^2$ 的最大值为 10，则 $m=$______.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 不与点 O 重合，称射线 OM 与圆 $x^2+y^2=1$ 的交点 N 为点 M 的“中心投影点”.

(1) 点 $M(1,\sqrt{3})$ 的“中心投影点”为______;

(2) 曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 上的“中心投影点”构成的曲线的长度是______.

19. 设 P 为曲线 C_1 上的动点，Q 为曲线 C_2 上的动点，则称 $\left|PQ\right|$ 的最小值为曲线 C_1,C_2 之间的距离，记作 $d(C_1,C_2)$. 若 $C_1:x^2+y^2=2, C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=2$, 则 $d(C_1,C_2)=$______; 若 $C_3:e^x-2y=0, C_4:\ln x+\ln 2=y$，则 $d(C_3,C_4)=$______.

20. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & x\in(0,2],\\ min\{|x-1|,|x-3|\}, & x\in(2,4],\\ min\left\{|x-3|,|x-5|\right\}, & x\in(4,+\infty).\end{cases}$

① 若 $f(x)=a$ 有且只有 1 个实根，则实数 a 的取值范围是______;

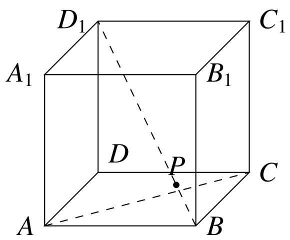
② 若关于 x 的方程 $f(x+T)=f(x)$ 有且只有 3 个不同的实根，则实数 T 的取值范围是______.

21. 已知两个集合 A,B 满足 $B\subseteq A$. 若对任意的 $x\in A$，存在 $a_i,a_j\in B(i\neq j)$, 使得 $x=\lambda_1a_i+\lambda_2a_j(\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\})$，则称 B 为 A 的一个基集. 若 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，则其基集 B 的元素个数的最小值是______.

22. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 BD_1 上的动点，当 $\triangle PAC$ 在平面 DC_1, BC_1, AC 上的正投影都为三角形时，将它们的面积分别记为 S_1, S_2, S_3.

(1) 当 $BP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，S_1______S_2 (填“>”或“=”或“<”);

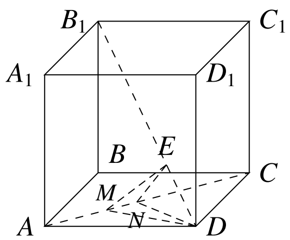
(2) $S_1+S_2+S_3$ 的最大值是______.



23. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是对角线 B_1D 上的一点，M,N 为对角线 AC 上的两个动点，且线段 MN 的长度为 1.

(1) 当 N 为对角线 AC 的中点且 $DE=\sqrt{2}$ 时，则三棱锥 $E-DMN$ 的体积是______;

(2) 当三棱锥 $E-DMN$ 的体积为 $\frac{1}{3}$ 时，则 $DE=$______.



2 解答题

24. 已知动点 M 到点 $N(1,0)$ 和直线 $l: x=-1$ 的距离相等.

(1) 求动点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 已知不与 l 垂直的直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A,且与直线 l 的交点为 P,以线段 AP 为直径的作圆 C. 判断点 N 和圆 C 的位置关系,并证明你的结论.

25. 已知 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 分别是椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1\ (a>0)$ 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 A, B 分别在直线 $x=-2$ 和 $x=2$ 上,且 $AF_1 \perp BF_1$.

(i) 当 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形时,求 $\triangle ABF_1$ 的面积;

(ii) 求点 F_1, F_2 到直线 AB 距离之和的最小值.

26. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$,右焦点为 $F(1,0)$,点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A, B 的一点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 AM 与直线 $x=2$ 交于点 N,线段 BN 的中点为 E. 证明:点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上.

27. 已知椭圆 $E: mx^2+y^2=1(m>0)$.

(1) 若椭圆 E 的右焦点坐标为 $\left(\sqrt{3},0\right)$，求 m 的值；

(2) 由椭圆 E 上不同三点构成的三角形称为椭圆的内接三角形. 若以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆 E 的内接等腰直角三角形恰有三个，求 m 的取值范围.

28. 已知椭圆 E 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设 $P(-4,0)$，直线 $y=kx+1$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点，若直线 PA，PB 均与圆 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 相切，求 k 的值.

29. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，点 $P(4,0)$，过右焦点 F 作与 y 轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 求证: 以坐标原点 O 为圆心与直线 PA 相切的圆，必与直线 PB 相切.

30. 已知椭圆 W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的上下顶点分别为 A,B，且点 $B(0,-1)$.F_1,F_2 分别为椭圆 W 的左、右焦点，且 $\angle F_1BF_2=120°$.

(1) 求椭圆 W 的方程；

(2) 点 M 是椭圆上异于 A,B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N, E 为线段 MN 的中点. 直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C, G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点，求 $\angle OEG$ 的大小.

31. 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点坐标为 $\left(\sqrt{3},0\right)$.

(1) 求椭圆 W 的方程和离心率；

(2) 若椭圆 W 与 y 轴交于 A,B 两点 (A 点在 B 点上方)，M 是椭圆上异于 A,B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于点 N, E 为线段 MN 的中点. 直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C, G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点，求 $\angle OEG$ 的大小.

32. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C 的顶点是原点，以 x 轴为对称轴，且经过点 $P(1,2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 设点 A,B 在抛物线 C 上，直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M,N, $|PM|=|PN|$. 求直线 AB 的斜率.

33. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $0<a<\frac{5}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值.

34. 已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线 l 与直线 $x+2y+3=0$ 垂直，求 a 的值；

(2) 当 $a\neq 1$ 时，求证：存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$.

35. 设函数 $f(x)=(x^2+ax-a)e^{-x}(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

(2) 设 $g(x)=x^2-x-1$，若对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$ 使得 $f(s)\geqslant g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

36. 设函数 $f(x)=(x-a)e^x, a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 试求 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值；

(3) 当 $a=1$ 时，求证：对于 $\forall x\in[-5,+\infty)$，$f(x)+x+5\geqslant-\dfrac{6}{e^5}$ 恒成立.

37. 已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x-a$.

(1) 当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 证明：对于 $\forall a\in(0,e)$，$f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{a}{e},1\right)$ 上有极小值，且极小值大于 0.

38. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}(a>0)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 证明：总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $f(x)<1$.

39. 已知函数 $f(x)=e^x+x^2-x$, $g(x)=x^2+ax+b(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

(3) 若 $f(x)>g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

40. 已知函数 $f(x)=x\ln x$, $g(x)=\dfrac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 若直线 $x=m\ (m>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M,N 两点. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1，$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

(i) 当 $m=e$ 时，若 $l_1\perp l_2$, 求 a 的值；

(ii) 若 $l_1\parallel l_2$，求 a 的最大值；

(2) 设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$. 若 $\lambda>0$, 且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

41. 已知函数 $f(x)=\left(x^2+ax-a\right)\cdot e^{1-x}$, 其中$a\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f'(x)$ 的零点个数；

(2) 证明：$a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件.