

数学试卷

一、单选题：(本题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 下列表示正确的是()

- A. $\phi \subseteq \{0\}$ B. $a \subseteq \{a\}$ C. $\{a\} \in \{a, b\}$ D. $\{0\} = \phi$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 6, x \in N\}$, 则满足条件 $A \subsetneq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

3. 已知集合 $C = \{(x, y) | y = x\}$, 集合 $D = \{(x, y) | \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}\}$, 则下列正确的是 ()

- A. $C = D$ B. $C \subseteq D$ C. $C \subsetneq D$ D. $D \subsetneq C$

4. 已知 $t = a + 4b$, $s = a + b^2 + 4$, 则 t 和 s 的大小关系是 ()

- A. $t > s$ B. $t \geq s$ C. $t < s$ D. $t \leq s$

5. 下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$
C. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab < b^2$ D. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6. 已知命题 “ $\exists x \in R$, 使 $2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} \leq 0$ ” 是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$ B. $-1 \leq a \leq 3$
C. $a < -1$ 或 $a > 3$ D. $-1 < a < 3$

7. 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则关于 x 的不等式 $bx^2 - ax - c > 0$ 的解集为 ()

- A. $\{x | -2 < x < 1\}$ B. $\{x | -1 < x < 2\}$
C. $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ D. $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$

8. 已知 $m > 0$, $xy > 0$, 当 $x+y=2$ 时, 不等式 $\frac{m}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $\sqrt{2} \leq m < 2$ B. $m \geq 1$ C. $0 < m \leq 1$ D. $1 < m \leq 2$

二、多选题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 选对部分的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$ 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的值可以为 ()

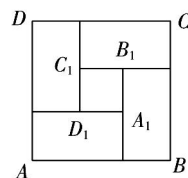
- A. $-\frac{1}{5}$ B. 0 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

10. 命题 “ $\forall 1 \leq x \leq 2, x^2 - a \leq 0$ ” 是真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \geq 4$ B. $a \geq 5$ C. $a \geq 8$ D. $a \leq 4$

11. 如图所示, 4 个长为 a , 宽为 b 的长方形, 拼成一个正方形 $ABCD$, 中间围成一个小正方形 $A_1B_1C_1D_1$, 则以下说法中正确的是 ()

- A. $(a+b)^2 \geq 4ab$
B. 当 $a=b$ 时, A_1, B_1, C_1, D_1 四点重合
C. $(a-b)^2 \leq 4ab$
D. $(a+b)^2 > (a-b)^2$



12. 下列命题正确的是 ()

- A. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $ax > 2$ B. 若 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$
C. $ab \neq 0$ 是 $a^2 + b^2 \neq 0$ 的必要不充分条件 D. 若 $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上。答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分。)

13. $\sqrt{x(10-x)}$ 的最大值为_____

14. 2020 年向阳高中学生运动会, 某班 60 名学生中有一半的学生没有参加比赛, 参加比赛的学生中, 田赛的有 16 人, 径赛的有 20 人, 则田赛和径赛都参加的学生人数为_____

15. 集合 $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, $B = \{x | x-a \geq 0\}$, 若 $A \cup B = B$, 则 a 的取值范围是_____

16. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0 \end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$, 则实数 k 的取值范围是_____

四、解答题(本大题共 6 小题, 满分 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。)

17. (本小题 10 分) 设全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x \mid (x+2)(x-3)<0\}$, $B=\left\{x \mid \frac{x-3}{x+3} \leq 0\right\}$, 求 $\complement_U A$, $A \cap B$, $\complement_U (A \cap B)$, $(\complement_U A) \cap B$.

18. (本小题 12 分) 给定两个命题, P : 对任意实数 x 都有 $ax^2 + ax + 1 > 0$ 恒成立;

Q : 关于 x 的方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根; 如果 P 与 Q 中有且仅有一个为真命题, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题 12 分) 某商品每件成本价 80 元, 售价 100 元时, 每天售出 100 件. 若售价降低 x 成(1 成=10%), 则售出商品的数量就增加 $\frac{8}{5}x$ 成, 要求售价不能低于成本价.

(1) 设该商品一天的营业额为 y , 试求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(2) 若再要求该商品一天的营业额至少 10260 元, 求 x 的取值范围.

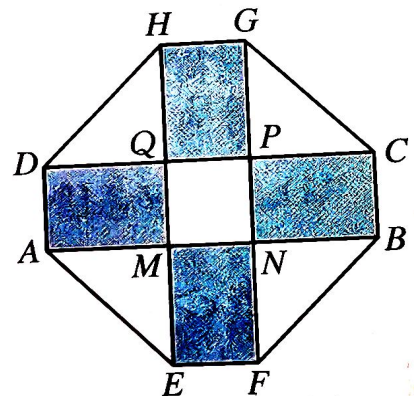
20. (本小题 12 分) 解关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+1) > 0$.

21. (本小题 12 分) 已知 $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + a^2 - 12 = 0\}$

(1) 若 $B \cup A = A$, 求实数 a 的取值范围。

(2) 若 $B \cup A \neq A$, 求实数 a 的取值范围。

22. (本小题 12 分) 如图, 居民小区要建一座八边形的休闲场所, 它的主体造型平面图是由两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成的面积为 200m^2 的十字形地域。计划在正方形 $MNPQ$ 上建一座花坛, 造价为 4200 元 / m^2 ; 在四个相同的矩形 (图中阴影部分) 上铺花岗岩地坪, 造价为 210 元 / m^2 ; 再在四个空角 (图中四个三角形) 上铺草坪, 造价为 80 元 / m^2 。设总造价为 S (单位: 元), AD 长为 x (单位: m)。当 x 为何值时, S 最小? 并求这个最小值。



数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	D	B	A	D	B	ABD	BC	ABD	BD

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上。答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分。)

13. 5 14. 6 15. $(-\infty, 1]$ 16. $-3 \leq k < 2$

四、解答题(本大题共 6 小题, 满分 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。)

17. (本小题 10 分) 设全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x \mid (x+2)(x-3)<0\}$, $B=\{x \mid -3<x\leq 3\}$ $B=\left\{x \mid \frac{x-3}{x+3} \leq 0\right\}$, 求

$\complement_U A$, $A \cap B$, $\complement_U (A \cap B)$, $(\complement_U A) \cap B$.

17. 解: $\because U=\mathbb{R}$, $A=\{x \mid -2<x<3\}$, $B=\{x \mid -3<x\leq 3\}$,2'

$\therefore \complement_U A=\{x \mid x\geq 3, \text{ 或 } x\leq -2\}$,4'

$A \cap B=\{x \mid -2<x<3\}$,6'

$\complement_U (A \cap B)=\{x \mid x\geq 3 \text{ 或 } x\leq -2\}$,8'

$(\complement_U A) \cap B=\{x \mid x\geq 3 \text{ 或 } x\leq -2\} \cap \{x \mid -3<x\leq 3\}=\{x \mid -3<x\leq -2 \text{ 或 } x=3\}$10'

18. (本小题 12 分) 给定两个命题, P : 对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立;

Q : 关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实数根; 如果 P 与 Q 中有且仅有一个为真命题, 求实数 a 的取值范围.

试题解析: 对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立

$\Leftrightarrow a=0$ 或 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq a<4$;3'

关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow 1-4a\geq 0 \Leftrightarrow a\leq \frac{1}{4}$;6'

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 有 $0\leq a<4$, 且 $a>\frac{1}{4} \therefore \frac{1}{4}<a<4$;8'

如果 Q 正确, 且 P 不正确, 有 $a<0$ 或 $a\geq 4$, 且 $a\leq \frac{1}{4} \therefore a<0$10'

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, 4\right)$ 12'

19. (本小题 12 分) 某商品每件成本价 80 元, 售价 100 元时, 每天售出 100 件. 若售价降低 x 成(1

成=10%)，则售出商品的数量就增加 $\frac{8}{5}x$ 成，要求售价不能低于成本价.

(1) 设该商品一天的营业额为 y ，试求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(2) 若再要求该商品一天的营业额至少 10260 元，求 x 的取值范围.

[解] (1) 依题意，得

$$y=100\left(1-\frac{x}{10}\right) \times 100\left(1+\frac{8}{50}x\right). \quad \cdots \cdots 2'$$

又售价不能低于成本价，

$$\text{所以 } 100\left(1-\frac{x}{10}\right)-80 \geq 0, \quad \cdots \cdots 4'$$

解得 $x \leq 2$. 又 $x \geq 0$,

故 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=20(10-x)(50+8x),$$

$$x \text{ 的取值范围为 } 0 \leq x \leq 2. \quad \cdots \cdots 6'$$

$$(2) \text{ 由题意, 得 } 20(10-x)(50+8x) \geq 10260. \quad \cdots \cdots 8'$$

$$\text{化简, 得 } 8x^2-30x+13 \leq 0. \quad \cdots \cdots 10'$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{4}. \quad \cdots \cdots 11'$$

$$\text{所以 } x \text{ 的取值范围是 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2. \quad \cdots \cdots 12'$$

20. (本小题 12 分) 解关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+1) > 0$.

【解析】 若 $a=0$ ，则原不等式为一元一次不等式，解集为 $\{x|x < -1\}$. $\cdots \cdots 2'$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 方程 } (ax-1)(x+1)=0 \text{ 的两根为 } x_1=\frac{1}{a}, x_2=-1 \quad \cdots \cdots 3'$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 解集为 } \left\{x \mid x > \frac{1}{a} \text{ 或 } x < -1\right\}; \quad \cdots \cdots 5'$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, 不等式变为 } \left(x-\frac{1}{a}\right)(x+1) < 0 \quad \cdots \cdots 6'$$

$$\text{若 } -1 < a < 0, \text{ 即 } \frac{1}{a} < -1 \text{ 时, 解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{a} < x < -1\right\}; \quad \cdots \cdots 8'$$

$$\text{若 } a < -1, \text{ 即 } 0 > \frac{1}{a} > -1 \text{ 时, 解集为 } \left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{a}\right\}; \quad \cdots \cdots 10'$$

$$\text{若 } a = -1, \text{ 解集为 } \varnothing. \quad \cdots \cdots 12'$$

21. (本小题 12 分) 已知 $A = \{x|x^2+x-2=0\}$, $B = \{x|x^2+ax+a^2-12=0\}$

(1) 若 $B \cup A = A$ ，求实数 a 的取值范围。

(2) 若 $B \cup A \neq A$ ，求实数 a 的取值范围。

$$\text{解: } A = \{-2, 1\} \quad \cdots \cdots 1'$$

(1) 若 $B \cup A = A$, 则 $B \subseteq A$ 2'

$\therefore B$ 可能为 $\Phi, \{-2\}, \{1\}, \{-2, 1\}$ 3'

I 若 $B = \Phi$, 则 $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 12) < 0 \Rightarrow a > 4$ 或 $a < -4$ 5'

II 若 $B = \{-2\}$, 则 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_1 + x_2 = -4 = -a \Rightarrow \\ x_1 x_2 = 4 = a^2 - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ a = 4 \Rightarrow a = 4 \\ a = \pm 4 \end{cases}$ 6'

III 若 $B = \{1\}$, 则 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 = -a \Rightarrow a \in \Phi \\ x_1 x_2 = 1 = a^2 - 12 \end{cases}$ 7'

IV 若 $B = \{-2, 1\}$, 则 $\begin{cases} a = 1 \\ a^2 - 12 = -2 \end{cases} \Rightarrow a \in \Phi$ 8'

综合得 $a \geq 4$ 或 $a < -4$ 10'

(2) 由 (1) 可知 $-4 \leq a < 4$ 12'

22. (本小题 12 分) 如图, 居民小区要建一座八边形的休闲场所, 它的主体造型平面图是由两个相同的矩形 ABCD 和 EFGH 构成的面积为 200m^2 的十字形地域。计划在正方形 MNPQ 上建一座花坛, 造价为 4200 元 / m^2 ; 在四个相同的矩形 (图中阴影部分) 上铺花岗岩地坪, 造价为 210 元 / m^2 ; 再在四个空角 (图中四个三角形) 上铺草坪, 造价为 80 元 / m^2 。设总造价为 S (单位: 元), AD 长为 x (单位: m)。当 x 为何值时, S 最小? 并求这个最小值。

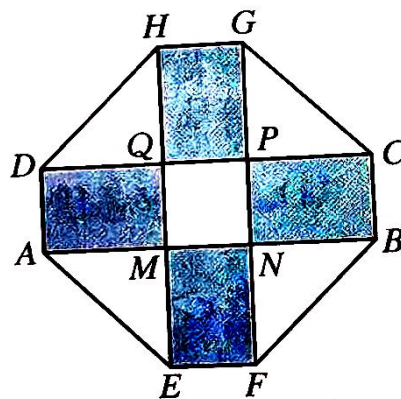
解: 设 $DQ=y$, 则 $x^2 + 4xy = 200$, 2'

$$\therefore y = \frac{200 - x^2}{4x} \quad \dots\dots\dots 3'$$

$$S = 4200x^2 + 210 \times 4xy + \frac{1}{2}y^2 \times 4 \times 80 \quad \dots\dots\dots 6'$$

$$= 38000 + 4000x^2 + \frac{400000}{x^2} \quad \dots\dots\dots 8'$$

$$\geq 38000 + 2\sqrt{4000x^2 \cdot \frac{400000}{x^2}} = 118000 \quad \dots\dots\dots 10'$$



当且仅当 $x = \sqrt{10}$ 时, 等号成立。11'

即当 AD 为 $\sqrt{10}$ 时, 总造价 S 最小, 最小值为 118000 元12'