函数

目录

1 定义域

1) 分式分母不能为零；

2) 偶次方根的被开方数大于或等于零；

3) 对数的真数大于零；

4) 指数和对数底数大于零且不等于 1；

5) 零次或负次指数次幂的底数不为零；

6) 正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x\in\mathbf{R},\text{ 且}x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}$ 的定义域是 ( )

(A) $[0,+\infty)$ (B) $[1,+\infty)$ (C) $(-\infty,0]$ (D) $(-\infty,1]$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\log_2 x\right)^2-1}}$ 的定义域为 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\bigcup(2,+\infty)$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\bigcup[2,+\infty)$

3. 函数 $y=\lg\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 ( )

(A) $\{x\mid x<0\}$ (B) $\{x\mid x>1\}$ (C) $\{x\mid 0<x<1\}$ (D) $\left\{x \middle| x<0\text{或}x>1\right\}$

4. 函数 $y=\dfrac{1}{\log_2(x-2)}$ 的定义域为 ( )

(A) $(-\infty,2)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $(2,3)\bigcup(3,+\infty)$ (D) $(2,4)\bigcup(4,+\infty)$

5. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$，则 $f(x)$ 的定义域为 ( )

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ (B) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (C) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

6. 设函数 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$，则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为 ( )

(A) $(-4,0)\bigcup(0,4)$ (B) $(-4,-1)\bigcup(1,4)$ (C) $(-2,-1)\bigcup(1,2)$ (D) $(-4,-2)\bigcup(2,4)$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(-1,0)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

8. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 ( )

(A) $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ (B) $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $(-3,2)$ (D) $(-3,3)$

9. 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ( )

(A) $y=x$ (B) $y=\lg x$ (C) $y=2^x$ (D) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2　单调性

2.1　单调性的判定方法

1) 定义法：对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 为增函数；若 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 为减函数.

2) 导数法：设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，则：

   (a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 单调递增 $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$;

   (b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递减，$f(x)$ 单调递减 $\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$;

3) 分段函数单调性：分段函数单调递增 (递减) 意味着每个分段的区间上函数单调递增 (递减) 并且在分段点处函数值的大小关系也满足递增 (递减)

4) 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$，设 $\forall x_1,\ x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2$，则有：

   (a) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 是 D 上的单调递增函数；

   (b) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 是 D 上的单调递减函数；

5) 复合函数单调性判定：同增异减

求单调区间的方法

① 定义法　　②导数法　　③图象法

练习

1. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$，则 $f(x)$ 是 (　　)

   (A) 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数

   (B) 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

   (C) 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数

   (D) 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

2. 设 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 0 \\ (a-3)x + 4a, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 对任意的 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立，则 a 的取值范围是 (　　)

   (A) $\left(0, \dfrac{1}{4}\right]$　　(B) $(0,1)$　　(C) $\left[\dfrac{1}{4}, 1\right)$　　(D) $(0,3)$

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8ax + 3, & x \leqslant 1, \\ \log_a x, & x > 1. \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调，则 a 的取值范围是 (　　)

   (A) $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$　　(C) $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$　　(D) $\left[\dfrac{5}{8}, 1\right)$

4. 设 x_1, x_2, x_3 均为实数，且 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_1} = \log_2(x_1 + 1)$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_2} = \log_3 x_2$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_3} = \log_2 x_3$，则 (　　)

   (A) $x_1 < x_3 < x_2$　　(B) $x_3 < x_2 < x_1$　　(C) $x_3 < x_1 < x_2$　　(D) $x_2 < x_1 < x_3$

5. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0. \end{cases}$ 若 $f(a) > f(-a)$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

   (A) $(-1,0) \bigcup (0,1)$　　(B) $(-\infty,-1) \bigcup (1,+\infty)$

   (C) $(-1,0) \bigcup (1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1) \bigcup (0,1)$

6. 已知函数 $f(x) = \sin x + 3x$ $(x \in (-1,1))$，如果 $f(1-a) < -f(1-a^2)$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

   (A) $\left(1, \sqrt{2}\right)$　　(B) $(-\infty,-2) \bigcup (1,+\infty)$

   (C) $(-\infty,-2)$　　(D) $(1,+\infty)$

7. 若“$x > 1$”是“不等式 $2^x a - x >$ 成立”的必要而不充分条件，则实数 a 的取值范围是 (　　)

   (A) $a > 3$　　(B) $a < 3$　　(C) $a > 4$　　(D) $a < 4$

8. 设 $a > 0$, 且 $a \neq 1$,“函数 $y = log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数”是“函数 $y = (2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数”的 (　　)

   (A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

   (C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，则“$\forall x \in \mathbf{R}, f(x+1) > f(x)$”是“函数 $f(x)$ 是增函数”的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

10. 如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a,\ b]$，使 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的值域为 $[2a,\ 2b]$，那么称 $f(x)$ 为“倍增函数”. 若函数 $f(x)=\ln(e^x+m)$ 为“倍增函数”，则 m 的取值范围是　　(　　)

(A) $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　(B) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　(C) $(-1,0)$　　(D) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$

11. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

①若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

②若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

③若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

④若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

其中，正确的命题是　　(　　)

(A) ①③　　(B) ①④　　(C) ②③　　(D) ②④

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x\leqslant a \\ -2x, & x>a. \end{cases}$

① 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为______；

② 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是______.

13. 已知函数 $f(x)$，对于实数 t，若存在 $a>0$, $b>0$，满足 $\forall x\in[t-a,t+b]$，使得 $\left|f(x)-f(t)\right|\leqslant 2$, 则记 $a+b$ 的最大值为 $H(t)$.

(1) 当 $f(x)=2x$ 时，$H(0)=$______；

(2) 当 $f(x)=x^2$ 且 $t\in[1,2]$ 时，函数 $H(t)$ 的值域为______.

14. 已知函数 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x)=2^x-2$. 若同时满足条件：

① $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)<0$ 或 $g(x)<0$;

② $\exists x\in(-\infty,-4)$, $f(x)g(x)<0$,

则 m 的取值范围是______.

3 奇偶对称

3.1 奇偶性的判断

1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，则 $f(x)$ 是非奇非偶函数；

2) 如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称且满足 $f(x) = f(-x)$，则 $f(x)$ 是偶函数；

3) 如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称且满足 $f(x) = -f(-x)$，则 $f(x)$ 是奇函数，如果定义域包含 $x = 0$，则必有 $f(0) = 0$；

3.2 奇偶性的运算

奇函数左右对应中会有负号，偶函数没有负号，此处的规律可以参考“负负得正”.(以下假设奇偶函数都不恒为 0)

1) 奇 ± 奇 = 奇； 偶 ± 偶 = 偶； 奇 ± 偶 = 非奇非偶

2) 奇 ×(÷) 奇 = 偶； 偶 ×(÷) 偶 = 偶； 奇 ×(÷) 偶 = 奇.

3) 当复合函数的内外两层函数都具有奇偶性时，有偶即偶，两奇为奇.

3.3 奇偶性常见类型

1) 若对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$，有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数；

2) x^n (n为奇数) 是奇函数，x^n (n为偶数) 是偶函数；

3) $\sin kx$ 是奇函数，$\cos kx$ 是偶函数;

4) $a^x - a^{-x}$ 是奇函数，$a^x + a^{-x}$ 是偶函数；

5) $\log_a \dfrac{b+cx}{b-cx}$ ($a \geqslant 0$且$a \neq 1$) 是奇函数，$\log_a\left(\sqrt{1+b^2x^2} \pm bx\right)$ 是奇函数;

6) $|x+a| - |x-a|$ 是奇函数；$|x+a| + |x-a|$ 是奇函数

3.4 奇偶性的单调性

1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 在关于原点对称的区间上单调性一致；

2) 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 在关于原点对称的区间上单调性相反.

练习

1. 如果 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，那么下列函数中一定是偶函数的是 ( )

(A) $x+f(x)$ (B) $xf(x)$ (C) $x^2+f(x)$ (D) $x^2f(x)$

2. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上增函数且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 ( )

(A) $(-1,0)\bigcup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$

(C) $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$ (D) $(-1,0)\bigcup(0,1)$

3. 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=1$，则 $f(8)+f(9)=$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

4. 已知函数 $g(x)=f(x)-x$ 是偶函数，且 $f(3)=4$，则 $f(-3)=$ ( )

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 4

5. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)=$ ( )

(A) -26 (B) -18 (C) -10 (D) 10

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=$( )

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

7. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=e^x$，则 $g(x)=$ ( )

(A) e^x-e^{-x} (B) $\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

(C) $\dfrac{1}{2}\left(e^{-x}-e^x\right)$ (D) $\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数，且函数 $y=f(x+8)$ 为偶函数，则 ( )

(A) $f(6)>f(7)$ (B) $f(6)>f(9)$ (C) $f(7)>f(9)$ (D) $f(7)>f(10)$

9. 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x)g(x)$ 是偶函数 (B) $\left|f(x)\right|g(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)\left|g(x)\right|$ 是奇函数 (D) $\left|f(x)g(x)\right|$ 是奇函数

10. 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x)+\left|g(x)\right|$ 是偶函数 (B) $f(x)-\left|g(x)\right|$ 是奇函数

(C) $\left|f(x)\right|+g(x)$ 是偶函数 (D) $\left|f(x)\right|-g(x)$ 是奇函数

11. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1$，则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)$ 等于 ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\leqslant 2f(1)$，则 a 的取值范围是 ( )

(A) $[1,2]$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ (D) $(0,2]$

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-3x$，则函数 $g(x)=f(x)-x+3$ 的零点的集合为 ( )

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{-3,-1,1,3\}$

(C) $\left\{2-\sqrt{7},1,3\right\}$ (D) $\left\{-2-\sqrt{7},1,3\right\}$

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x)=(x+1)^3 e^{x+1}$. 那么函数 $f(x)$ 的极值点的个数是 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

15. 若 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$______.

16. 若函数 $f(x)=\ln(e^{3x}+1)+ax$ 为偶函数，则 $a=$______.

17. 已知函数 $f(x)=x\left(e^x+ae^{-x}\right)$ 是偶函数，则实数 $a=$______.

18. 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数，且 $f(1)=1$，若 $g(x)=f(x)+2$，则 $g(-1)=$______.

19. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(1)=$______.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，下列函数：
① $y=-\left|f(x)\right|$ ② $y=xf(x^2)$;
③ $y=-f(-x)$ ④ $y=f(x)-f(-x)$.
中必为奇函数的有______.(要求填写正确答案的序号)

21. 已知函数 $f(x)=e^{-|x|}+\cos\pi x$，给出下来命题：
① $f(x)$ 的最大值为 2;
② $f(x)$ 在 $(-10,10)$ 内的零点之和为 0;
③ $f(x)$ 的任何一个极大值都大于 1.
其中，所有正确的命题的序号是______.

22. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，$f(2)=0$，若 $f(x-1)>0$，则 x 的取值范围是______.

4　周期性

4.1　常用周期性模型

1) 若 $f(x+a)+f(x)=C$，其中 C 为常数，则函数 $f(x)$ 的周期为 $T=2|a|$;

2) 若 $f(x+a)f(x)=C$，其中 C 为常数且 $C\neq 0$，则函数 $f(x)$ 的周期为 $T=2|a|$;

3) 若 $f(x)$ 满足 $f(x+2a)=f(x+a)-f(x)$，则 $f(x)$ 的周期为 $T=6|a|$;

4.2　对称性和周期性

1) $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(x+a)=f(a-x)$.

2) $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=-f(2a-x)\Leftrightarrow f(x+a)=-f(a-x)$.

3) $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$.

4) 如果 $f(x)$ 关于 $x=a$ 和 $x=b$ $(a>b)$ 对称，则 $T=2(a-b)$.

5) 如果 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ $(a>b)$ 对称，则 $T=2(a-b)$.

6) 如果 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 和直线 $x=b$ 对称，则 $T=4|a-b|$.

学霸总结

若 $f(A)=f(B)$ 且 $A-B$ 为常数，则 $f(x)$ 是以 $|A-B|$ 为周期的函数；若 $f(A)=f(B)$ 且 $A+B$ 为常数，则 $f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{A+B}{2}$ 对称；若 $f(A)=-f(B)$ 且 $A-B$ 为常数，则 $f(x)$ 是以 $2|A-B|$ 为周期的函数；若 $f(A)=-f(B)$ 且 $A+B$ 为常数，则 $f(x)$ 关于点 $\left(\dfrac{A+B}{2},0\right)$ 中心对称.

练习

1. 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x$, 则 $f(2015)=$ (　　)

   (A) -1　　(B) -2　　(C) 1　　(D) 2

2. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上是增函数，且 $y=f(x+2)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，则 (　　)

   (A) $f(1)<f(5)$　　(B) $f(1)>f(5)$　　(C) $f(1)=f(5)$　　(D) $f(0)=f(5)$

3. 设函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $x=0$ 及直线 $x=1$ 对称，且 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=$ (　　)

   (A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{9}{4}$

4. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则 ( )

(A) $f(x)$ 是偶函数　　(B) $f(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)=f(x+2)$　　(D) $f(x+3)$ 是奇函数

5. $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(10+x)=f(10-x)$, $f(20+x)=-f(20-x)$，则 $f(x)$ 是 ( )

(A) 周期为 20 的奇函数　　(B) 周期为 20 的偶函数

(C) 周期为 40 的奇函数　　(D) 周期为 40 的偶函数

6. 下列函数中，对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 同时满足 $f(x-\pi)=f(x)$ 的函数是 ( )

(A) $f(x)=\sin x$　　(B) $f(x)=\sin x\cos x$

(C) $f(x)=\cos x$　　(D) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2，当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，那么函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\left|\lg x\right|$ 的图象的交点的个数为 ( )

(A) 10 个　　(B) 9 个　　(C) 8 个　　(D) 1 个

8. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内的解的个数的最小值是 ( )

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

9. 函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y=\sin(2\pi x)$ $(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于 ( )

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

10. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上最小正周期为 2 的周期函数，且当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=x^3-x$，则函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[0,6]$ 上与 x 轴的交点的个数为 ( )

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

11. 已知函数 $f(x)\,(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$ ( )

(A) 0　　(B) m　　(C) $2m$　　(D) $4m$

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，下列命题：

① 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称；

② 函数 $f(x)$ 是周期函数；

③ 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值；

④ 函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象没有公共点.

其中正确的命题的序号是：

(A) ①③　　(B) ②③　　(C) ①④　　(D) ②④

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(x)+f(1-x)=2, f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ 时，$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，且 $f\left(\frac{1}{5}\right)=$ ______, $f\left(\frac{1}{2017}\right)=$ ______

5 图象变换

5.1 性质

平移：$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow{\text{左移}a\text{个单位}}y=f(x+a) \\ y=f(x)\xrightarrow{\text{右移}b\text{个单位}}y=f(x-b) \end{cases}$ $\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow{\text{上移}c\text{个单位}}y=f(x)+c \\ y=f(x)\xrightarrow{\text{下移}d\text{个单位}}y=f(x)-d \end{cases}$

对称：$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}y=-f(x) \\ y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}y=f(-x) \end{cases}$

翻折：$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow{\text{留上翻下}}y=\left|f(x)\right| \\ y=f(x)\xrightarrow{\text{去左留右}}y=f\left(|x|\right) \end{cases}$

缩放：$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow{\text{纵坐标伸缩为原来的 }k\text{ 倍}}y=kf(x) \\ y=f(x)\xrightarrow{\text{横坐标伸缩为原来的}\frac{1}{e}\text{倍}}y=f(ex) \end{cases}$

练习

1. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，所得图象与 $y=e^x$ 关于 y 轴对称，则 $f(x)=$ ( )

   (A) e^{x+1} (B) e^{x-1} (C) e^{-x+1} (D) e^{-x-1}

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，则 $a=$( )

   (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

3. 函数 $y=-e^x$ 的图象 ( )

   (A) 与 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称 (B) 与 $y=e^x$ 的图象关于坐标原点对称

   (C) 与 $y=e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称 (D) 与 $y=e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

4. 为了得到 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图象，只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点 ( )

   (A) 向左平移 3 个单位，再向上平移 1 个单位 (B) 向右平移 3 个单位，再向上平移 1 个单位

   (C) 向左平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位 (D) 向右平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位

5. 若函数 $f(x)=a^x+b-1$ $(a>0\text{且}a\neq 1)$ 的图象经过第二、三、四象限，则一定有 ( )

   (A) $0<a<1\text{且}b>0$ (B) $a>1\text{且}b>0$

   (C) $0<a<1\text{且}b<0$ (D) $a>1\text{且}b<0$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \left|\log_2|x-1|\right|, & x\neq 1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$

   (1) 写出函数 $f(x)$ 的单调区间；

   (2) 若关于 x 的方程 $\left[f(x)\right]^2+bf(x)+c=0$ 有 7 个解，求 b, c 满足的条件.

6 分段函数

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\lg x\right|, & 0<x\leqslant 10\\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10.\end{cases}$ 若 a,b,c 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 abc 的取值范围是 ( )

(A) $(1,10)$
(B) $(5,6)$
(C) $(10,12)$
(D) $(20,24)$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_4 x\right|, & 0<x\leqslant 4,\\ x^2-10x+25, & x>4.\end{cases}$ 若 a, b, c, d 是互不相同的正数，且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $abcd$ 的取值范围是 ( )

(A) $(24,25)$
(B) $(18,24)$
(C) $(21,24)$
(D) $(18,25)$

3. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\lg|x-1|\right|, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同的实数解的充要条件是 ( )

(A) $b<0且c>0$
(B) $b>0且c>0$
(C) $b<0且c=0$
(D) $b\geqslant 0且c=0$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0,\\ \ln(x+1), & x>0.\end{cases}$ 若 $\left|f(x)\right|\geqslant ax$，则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,0]$
(B) $(-\infty,1]$
(C) $[-2,-1]$
(D) $[-2,0]$

5. $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0,\\ x+\dfrac{1}{x}+a, & x>0\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围是 ( )

(A) $[-1,2]$
(B) $[-1,0]$
(C) $[1,2]$
(D) $[0,2]$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 2;\\ 2+\log_a x, & x>2\end{cases}$ $\left(a>0且a\neq 1\right)$ 的最大值为 1，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$
(B) $(0,1)$
(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$
(D) $(1,+\infty)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leqslant 4,\\ \log_2 x, & x>4.\end{cases}$ 若 $y=f(x)$ 在区间 $(a,a+1)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1]$
(B) $[1,4]$
(C) $[4,+\infty)$
(D) $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & x\geqslant 2\\ (x-1)^3 & x<2.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是______.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a & x<1;\\ 4(x-a)(x-2a) & x\geqslant 1.\end{cases}$

① 若 $a=1$，则 $f(x)$ 的最小值为______;

② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是______.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a,\\ -2x, & x>a.\end{cases}$

① 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为______;

② 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是______.

11. 关于 x 的方程 $g(x)=t(t\in\mathbf{R})$ 的实数根的个数记为 $f(t)$，若 $g(x)=\ln x$，则 $f(t)=$______; 若 $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0;\\ -x^2+2ax+a, & x\geqslant 0.\end{cases}(a\in\mathbf{R})$，存在 t 使得 $f(t+2)>f(t)$ 成立，则 a 的取值范围是______.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-2a)(a-x), & x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}+a-1, & x>1.\end{cases}$

(1) 若 $a=0$, $x\in[0,4]$, 则 $f(x)$ 的值域为______;

(2) 若 $f(x)$ 恰有三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\geqslant 0,\\ \cos\pi x, & x<0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x+a)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根，则实数 a 的最小值是______.