田家炳中学 2020-2021 高一秋上第一次月考试卷

一、单选题（每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$， $B=\{x\mid -1\le x<1\}$，则 $A\cap B=($　　$)$

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 不等式 $2x^2-x-3>0$ 的解集是 $($　　$)$

A. $\{x\mid x<-1\}$　　B. $\left\{x\mid x>\frac{3}{2}\right\}$　　C. $\left\{x\mid -1<x<\frac{3}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\mid x<-1或x>\frac{3}{2}\right\}$

3. 设集合 $A=\{3,m,m-1\}$，集合 $B=\{3,4\}$，若 $\complement_A B=\{5\}$，则实数 m 的值为 $($　　$)$

A.　4　　B.　5　　C.　6　　D.　5 或 6

4. 如果“$1\le x<4$”是“$x<m$”的充分条件，则实数 m 的取值范围是 $($　　$)$

A. $\{m\mid m<1\}$　　B. $\{m\mid m\le 1\}$　　C. $\{m\mid m>4\}$　　D. $\{m\mid m\ge 4\}$

5. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x^2-ay+b=0\}$，若 $(1,2)\in A\cap B$，

则 $a+b=($　　$)$

A.　$\frac{2}{3}$　　B.　$\frac{5}{3}$　　C.　$\frac{7}{3}$　　D.　4

6. 如果不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则实数 a 的取值范围是 $($　　$)$

A. $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}\le a\le \frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{2}<a或a<\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}\le a或a\ge \frac{1}{2}$

7. 命题 $p:ax^2+2x-1=0$ 有实数根，若 $\neg p$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是 $($　　$)$

A. $\{a\mid a<1\}$　　B. $\{a\mid a\le -1\}$　　C. $\{a\mid a\ge -1或a=0\}$　　D. $\{a\mid a\ge -1\}$

8. 设 U 为全集，A，B 是集合，则“存在集合 C 使得 $A\subseteq C$，$B\subseteq \complement_U C$”是“$A\cap B=\varnothing$”的 $($　　$)$

A. 充分而不必要的条件　　B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、多选题（每题 5 分，共 20 分，选不全得 3 分，全对得 5 分，选错得 0 分）

9. 已知集合 $\{x\mid ax^2-2x+1=0\}=\{b\}$，则 $a+b$ 的值可能为 $($　　$)$

A.　0　　B.　$\frac{1}{2}$　　C.　1　　D.　2

10. 已知 $A\subseteq\{x\mid x\ge 1\}$，则集合 A 可能是 $($　　$)$

A. $\{x\mid x>1\}$　　B. $\{x\mid x\ge 1\}$　　C. $\{x\mid x\ge 2\}$　　D. $\{x\mid x\ge 0\}$

11. 下列说法正确的是 $($　　$)$

A. “$a>1,b>1$”是“$ab>1$”成立的充分条件

B. 命题 $p:\forall x\in R,x^2>0$，则 $\neg p:\exists x\in R,x^2<0$

C. 命题“若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的否定是假命题

D. “$a>b$”是“$a^2>b^2$”成立的充分不必要条件

12. 设 a，b 为非零实数，给出下列不等式，其中恒成立的不等式是(　　)

A. $\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab$　　B. $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$　　C. $\frac{a+b}{2}\ge\frac{ab}{a+b}$　　D. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $60<a<84$，$28<b<33$，则 $a-b$ 的范围是________

14. 已知集合 $A=\{0,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-5,1-a,9\}$，且 $9\in(A\cap B)$，则 a 的值为________

15. 集合 $A=\{x\mid x<1或x\ge 2\}$，$B=\{x\mid a<x<2a+1\}$，若 $A\cup B=R$，则实数 a 的取值范围是________

16. 对于集合 M，N，定义 $M-N=\{x\mid x\in M,且x\notin N\}$，$M\oplus N=(M-N)\cup(N-M)$，设 $A=\left\{x\mid x\ge-\frac{9}{4},x\in R\right\}$，$B=\{x\mid x<0,x\in R\}$，则 $A\oplus B=$__________

四、解答题（本题共 6 题，满分 70 分）

17.（本小题满分 10 分）

（1）求函数 $y=x+\frac{4}{x-1}(x>1)$ 的最小值及此时 x 的值;

（2）已知函数 $y=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$，$x\in(-2,+\infty)$，求此函数的最小值及此时 x 的值.

18. （本小题满分 12 分）

若集合 $A=\{x|x^2+5x-6=0\}$，$B=\{x|x^2+(2m+1)x+m^2-3=0\}$.

（1）若 $m=0$，写出 $A\cup B$ 的子集;

（2）若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

19. （本小题满分 12 分）

（1）若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\{x\left|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right.\}$，求实数 a,b 的值；

（2）已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，求不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

20.（本小题满分 12 分）

（1）已知关于 x 的不等式 $ax^2-ax-1<0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）解关于 x 的不等式 $x^2-(2+a)x+2a>0$

21.（本小题满分 12 分）

经过长期观测得到：在交通繁忙的时段内，某公路段汽车的车流量 y（千辆/小时）与汽车的平均速度 v（千米/小时）之间的函数关系为：$y=\dfrac{700v}{v^2+2v+900}(v>0)$

（1）在该时段内，当汽车的平均速度为多少时，车流量最大？最大车流量为多少？（结果保留分数形式）

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时，则汽车的平均速度应在什么范围内？

22.（本小题满分 12 分）

（1） $a>0,b>0$，求证：$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$（用比较法证明）

（2）除了用比较法证明，还可以有如下证法：

$$\because \frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\ge 2\sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}\ge 2\sqrt{a}$$

$$\therefore \frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{a}+\sqrt{b}=\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)+\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}\right)\ge 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$$

当且仅当$a=b$时等号成立

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

学习以上解题过程，尝试解决下列问题：

1） 证明：若$a>0,b>0,c>0,$则$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c,$并指出等号成立的条件。

2） 试讲上述不等式推广到$n\left(n\ge 2\right)$个正数a_1、a_2、…、a_{n-1}、a_n的情形，并证明。

田家炳中学 2020-2021 高一秋上第一次月考试卷解析

【答案】

一、单选（每题 5 分，共 40 分）

1. B
2. D
3. B
4. D
5. D
6. B
7. C
8. A

二、多选（每题 5 分，共 20 分，选不全得 3 分，全对得 5 分，选错得 0 分）

9. BD
10. ABC
11. AC
12. AB

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. $(27,56)$

14. $-3或5$

15. $\left[\frac{1}{2},1\right)$

16. $\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right)\cup\left[0,+\infty\right)$

四、解答题（本题共 6 题，满分 70 分）

17. 【解析】

（1）$\because x>1$，$\therefore y=x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=4+1=5$，当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$ 即 $x=3$ 时，等号成立。故函数 y 的最小值为 5，此时 $x=3$；

（2）令 $t=x+2\left(t>0\right)$，将 $x=t-2$ 代入得

$y=\frac{\left(t-2\right)^2+5\left(t-2\right)+10}{t}=t+\frac{4}{t}+1$，$\because t>0$，$\therefore y=t+\frac{4}{t}+1\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+1=4+1=5$，当且仅当 $t=\frac{4}{t}$ 即 $x+2=\frac{4}{x+2}$ 即 $x=0$ 时，等号成立。故函数 y 的最小值为 5，此时 $x=0$.

18. 【解析】

（1）$A=\{x\left|x^2+5x-6=0\right\}=\{x\left|(x-1)(x+6)=0\right\}=\left\{1,-6\right\}$，

若 $m=0$，则 $B=\{x\left|x^2+2x-3=0\right\}=x\left|(x-1)(x+3)=0\right\}=\left\{1,-3\right\}$

此时 $A\cup B=\left\{1,-3,-6\right\}$，其子集为：$\varnothing,\left\{1\right\},\left\{-3\right\},\left\{-6\right\},\left\{1,-3\right\},\left\{1,-6\right\},\left\{-3,-6\right\},\left\{1,-3,-6\right\}$；

（2）若 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$

①若 B 中没有元素即 $B=\varnothing$，则 $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2-3)<0$，此时 $m<-\dfrac{13}{4}$， $B\subseteq A$；

②若 B 中只有一个元素，则 $\Delta=0$，此时 $m=-\dfrac{13}{4}$，集合 $B=\left\{\dfrac{11}{4}\right\}$，故舍;

③若 B 中有两个元素，则 $\Delta>0$，此时 $m>-\dfrac{13}{4}$。因为 A 中也有两个元素，且 $B\subseteq A$，则必有 $B=A=\{1,-6\}$，由韦达定理得 $\begin{cases}1+(-6)=-(2m+1)\\1\times(-6)=m^2-3\end{cases}$，无解，故舍。

综上所述，当 $m<-\dfrac{13}{4}$ 时， $A\cap B=B$.

19. 【解析】

（1）设函数 $f(x)=ax^2+bx+2$，由题意可知 $\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}a-\dfrac{1}{3}b+2=0\\f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-12\\b=2\end{cases}$；

（2）设函数 $g(x)=ax^2+bx+c$，由题意可知 $\begin{cases}a<0\\g(1)=a+b+c=0\\g(2)=4a+2b+c=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3a\\c=2a\end{cases}$，

设函数 $h(x)=cx^2-bx+a=2ax^2+3ax+a=a(2x+1)(x+1)$，则 $h(-\dfrac{1}{2})=h(-1)=0$，因为 $a<0$，二次函数 $h(x)$ 开口向下，故 $h(x)=cx^2-bx+a>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<-\dfrac{1}{2}\}$.

20. 【解析】

（1）①当 $a=0$，$-1<0$，满足提议

②当 $a\neq0$，依题意得：$\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$，即 $-4<a<0$

综上 a 的取值范围为 $(-4,0]$

（2）依题意得：$(x-a)(x-2)>0$

①当 $a>2$，此时不等式的解集为 $\{x|x>a,\text{或}x<2\}$

②当 $a=2$，此时不等式的解集为 $\{x|x\neq2\}$

③当 $a<2$，此时不等式的解集为 $\{x|x>2,\text{或}x<a\}$

21. 【解析】

（1）　依题意得 $y=\dfrac{700v}{v^2+2v+900}=\dfrac{700}{2+\left(v+\dfrac{900}{v}\right)}\le\dfrac{700}{2+2\sqrt{v\bullet\dfrac{900}{v}}}=\dfrac{350}{31}$

当且仅当 $v=\dfrac{900}{v}$，即 $v=30$ 时，上述等号成立

$\therefore y_{\max}=\dfrac{350}{31}$（千辆/时）

$\therefore v=30km/h$ 时，车流量最大，最大车流量约为 $\dfrac{350}{31}$（千辆/时）

（2）　依题意得:

$\dfrac{700v}{v^2+2v+900}>10$

$\because v^2+2v+900>0$

$\therefore v^2-68v+900<0$

$\therefore (v-18)(v-50)<0$

$\therefore 18<v<50$

所以，若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时，则汽车的平均速度应大于 $18km/h$ 且小于 $50km/h$。

22. 【解析】

（1）

$\because b+\dfrac{a^2}{b}+c+\dfrac{b^2}{c}+a+\dfrac{c^2}{a}\ge 2a+2b+2c$

$\therefore \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c,$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立

（2）

$\because \dfrac{{a_1}^2}{a_2}+a_2+\dfrac{{a_2}^2}{a_3}+a_3+\ldots+\dfrac{{a_{n-1}}^2}{a_n}+a_n+\dfrac{{a_n}^2}{a_1}+a_1\ge 2a_1+2a_2+\ldots+2a_{n-1}+2a_n$

$\therefore \dfrac{{a_1}^2}{a_2}+\dfrac{{a_2}^2}{a_3}+\ldots+\dfrac{{a_{n-1}}^2}{a_n}+\dfrac{{a_n}^2}{a_1}\ge a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$

当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=a_n$ 时取等