高一数学10月月考试卷

一、单选题

1．设集合$U=\{0,1,3,5,6,8\}$，　$\mathrm{A}=\{1,5,8\}$，$\mathrm{B}=\{2\}$，则$\left(\complement_U A\right)\cup B=$（　　）

A．$\{0,2,3,6\}$　　　　B．$\{0,3,6\}$　　　　C．$\{1,2,5,8\}$　　　　D．$\varnothing$

2．函数$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-3}}$定义域是（　　）

A．$[-2,-1)$　　　　B．$[-2,-1]\cup[2,3]$　　C．$[-2,-1)\cup[2,3)$　　D．$[-2,-1]$

3．下列各组中的两个函数是同一函数的为（　　）

A．$y=(\sqrt{x})^2$与$y=x$

B．$y=\sqrt{x^2}$与$y=(\sqrt{x})^2$

C．$y=\sqrt[3]{x^3}$与$y=\dfrac{x^2}{x}$

D．$y=(\sqrt[3]{x})^3$与$y=x$

4．已知$f(x)=\begin{cases}x+5,x>1\\2x^2+1,x\le 1\end{cases}$，则$f[f(1)]=$（　　）

A．3　　　　B．13　　　　C．8　　　　D．18

5．已知函数$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3,$ 则$f(3)=$（　　）

A．8　　　　B．9　　　　C．10　　　　D．11

6．若函数$f(x)$满足$f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-8$，则$f(1)$的值为（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

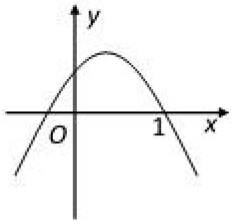
7．如果函数$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$在区间$(-\infty,4]$上是减函数，那么实数a的取值范围是（　）

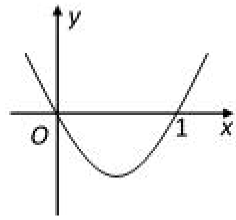
A．$a\le -3$　　　　B．$a\ge -3$　　　　C．$a\le 5$　　　　D．$a\ge 5$

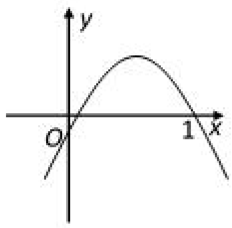
8．函数$f(x)=\sqrt{2x+1}+x$的值域是（　　）

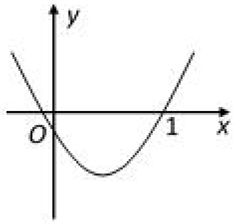
A．[0，+∞)　　　　B．(－∞，0]　　　　C．$\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　　　D．[1，+∞)

9．已知函数 $y=ax^2+bc+c$，如果 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$，则它的图象可能是( )

A. 

B. 

C. 

D. 

10．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{ax^2+4ax+3}$ 的定义域为（－∞，+∞），则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（－∞，+∞）　　B．[0，$\dfrac{3}{4}$）　　C．（$\dfrac{3}{4}$，+∞）　　D．[0，$\dfrac{3}{4}$]

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{a}{x},x\le -1\\(3-2a)x+2,x>-1\end{cases}$，在（—∞，+∞）上为增函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$　　B．$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$　　C．$\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$

12．设集合 $A=\left[0,\dfrac{1}{2}\right),B=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2},x\in A\\2(1-x),x\in B\end{cases}$,若 $x_0\in A$,且 $f\left[f\left(x_0\right)\right]\in A$,则 x_0 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$　　B．$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left[0,\dfrac{3}{8}\right]$

二、填空题

13．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(2)=p,f(3)=q$, 那么 $f(36)$=__________.

14．函数 $f(x)=x^2-4x+5$ 在区间 $[0,m]$上的最大值为 5，最小值为 1，则 m 的取值范围是_______

15．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2x+3$，若函数 $y=f\left(x-a\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是______.

16. 函数 $f(x)$与 的定义域为 D，若对于任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称函数 $f(x)$与 在 D 上为非减函数；设函数 $f(x)$与 在[0，1]上为非减函数，且满足以下三个条件：①f(0)=0；② $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$；③f(1−x)=1−f(x)，则

$f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{8})$ =________

三、解答题

17．已知全集 U＝{1,2,3,4,5,6,7,8}，A＝{x| $x^2-3x+2=0$}，B＝{x|1≤x≤5，x∈Z}，C＝{x|2<x<9，x∈Z}．求

(1)A∪(B∩C)；(2) $(C_U B)\cup(C_U C)$.

18． 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2$, $x\in\left[-5,5\right]$.

(1)当 a=-1 时，求函数的最大值和最小值；

(2) 若 y=f(x)在区间 $\left[-5,5\right]$ 上是单调 函数，求实数 a 的取值范围.

19．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，对于任意的 $x,y\in R$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，若 $f(-1)=2$.

（1） 求证：$f(x)$ 是 R 上的减函数；

（2） 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的值域.

20．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，满足 $f(0)=2$ ，$f(x+1)-f(x)=2x-1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1]$ 上单调，求实数 a 的取值范围.

21．已知二次函数 f（x）的最小值为 1，且 f（0）＝f（2）＝3.

（1）求 f（x）的解析式；

（2）在区间[－1，1]上，y＝f（x）的图象恒在 y＝$2x+2m+1$ 的图象上方，试确定实数 m 的取值范围.

22．对于定义域为 D 的函数 y=f（x），如果存在区间[m，n]⊆D，同时满足：

①f（x）在[m，n]内是单调函数；

②当定义域是[m，n]时，f（x）的值域也是[m，n]．则称[m，n]是该函数的"和谐区间".

（1）证明：[0，1]是函数 y=f（x）=x^2 的一个"和谐区间".

（2）求证：函数 $y=g\left(x\right)=3-\dfrac{5}{x}$ 不存在"和谐区间".

（3）已知：函数 $y=h\left(x\right)=\dfrac{\left(a^2+a\right)x-1}{a^2x}$（a∈R，a≠0）有"和谐区间"[m，n]，当 a 变化时，求出 n﹣m 的最大值.

参考答案

1．A

【解析】

【分析】

根据集合的补集、并集运算即可得到结论.

【详解】

解：$\because U=\{0,1,3,5,6,8\}$， $A=\{1,5,8\}$， $B=\{2\}$，

$\therefore \complement_U A=\{0,3,6\}$

$\therefore \left(\complement_U A\right)\cup B=\{0,2,3,6\}$

故选： A.

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算，属于基础题.

2．A

【解析】

由题意$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\x^2-2x-3>0\end{cases}$,解得$\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\x>3或x<-1\end{cases}$,即$x\in[-2,-1)$,故选 A.

3．D

【解析】

试题分析：A 中两函数定义域不同；B 中两函数定义域不同；C 中两函数定义域不同；D 中两函数定义域相同，对应关系相同，因此是同一函数

考点：判断两函数是否为同一函数

4．C

【解析】

【分析】

由已知中$f(x)=\begin{cases}x+5,x>1\\2x^2+1,x\leq 1\end{cases}$，将$x=1$代入，可得$f(1)=3$，进而可求得$f[f(1)]$的值.

【详解】

解：$\because f(x)=\begin{cases}x+5,x>1\\2x^2+1,x\leq 1\end{cases}$，

$f(1)=3$，

$\therefore f[f(1)]=f(3)=8$，

故选：C．

【点睛】

本题考查的知识点是分段函数的应用，函数求值，难度不大，属于基础题目．

5．C

【解析】

【分析】

先求出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，然后再求出函数值．

【详解】

由题意得 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1$，

$\therefore f\left(x\right)=x^2+1\left(x\le -2或x\ge 2\right)$，

$\therefore f\left(3\right)=3^2+1=10$．

故选 C．

【点睛】

解答本题的关键是求出函数的解析式，已知 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 的解析式，求 $f\left(x\right)$ 的解析式时，一般用换元法求解，即令 $\mathrm{t}=g\left(x\right)$，然后用 t 表示出 x，得到 $f\left(t\right)$ 的解析式，再把 t 换为 x 即可，解题中要注意新元的范围．

6．B

【解析】

令 x=1， $f\left(1\right)-2f\left(1\right)=-1+8-8=-1$，则 $f\left(1\right)=1$，故选 B．

7．A

【解析】

【分析】

根据开口向上的二次函数在对称轴左边单调递减，即可求出 a 的取值范围。

【详解】

$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{2(a-1)}{2}=1-a$ ，

又 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 开口向上，即在 $(-\infty,1-a]$ 上单调递减

即 $\left(-\infty,4\right]\subseteq(-\infty,1-a]$

即 $4\le 1-a\Rightarrow a\le -3$

故选 A

【点睛】

本题考查二次函数的单调性与单调区间的子区间，主要注意区分函数在 (a,b) 上是减函数与函数的单调递减区间为 (a,b)，属于基础题。

8．C

【解析】

【分析】

用换元法转化为求二次函数的值域求解或根据函数的单调性求解.

【详解】

方法一：设 $t=\sqrt{2x+1}\left(t\ge 0\right)$，则 $x=\dfrac{t^2-1}{2}$，

$\therefore g\left(t\right)=\mathrm{t}+\dfrac{t^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}t^2+t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1$，

$\therefore$ 函数 $g\left(t\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g\left(t\right)\ge g(0)=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

故选 C.

方法二：由 $2x+1\ge 0$ 得 $x\ge -\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

又由题意得函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2x+1}+x$ 为增函数，

$\therefore f\left(x\right) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

$\therefore$函数$f\left(x\right)$的值域是$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

故选C.

【点睛】

对于一些无理函数，可通过换元转化为有理函数（如二次函数），再利用有理函数求值域的方法解决问题，“换元法”的实质是等价转化的思想方法，解题中要注意新元的范围.

9．D

【解析】

【分析】

根据$a>b>c$且$a+b+c=0$即可判断出a与c的符号，结合图像即可得选项.

【详解】

因为$a>b>c$且$a+b+c=0$

则$a>0,c<0$

所以对应二次函数图像开口向上，与 y 轴交点在原点下方

对比函数图像，D 选项符合要求

所以选 D

【点睛】

本题考查了二次函数图像与a、b、c的关系，根据条件选择函数图像，关键是根据所给条件分析出a、b、c的符号，属于基础题.

10．B

【解析】

【分析】

根据函数的定义域的定义，即$ax^2+4ax+3\neq 0$的解集为R，即方程$ax^2+4ax+3=0$无解，根据二次函数的性质，即可得到答案.

【详解】

由题意，函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,

即$ax^2+4ax+3\neq 0$的解集为R，即方程$ax^2+4ax+3=0$无解，

当$a=0$时，$3=0$，此时无解，符合题意；

当$a\neq 0$时，$\Delta=(4a)^2-4a\times 3<0$，即$16a^2-12a<0$，所以$0<a<\dfrac{3}{4}$，

综上可得，实数a的取值范围是$[0,\dfrac{3}{4})$，故选B.

【点睛】

本题主要考查了函数的定义域的应用，以及二次函数图象与性质的应用问题，其中把函数的定义域转化为一元二次方程无解，利用二次函数的图象与性质是解答的关键，着重考查了转化思想的应用，以及推理与运算能力.

11．C

【解析】

【分析】

若函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{a}{x}，x\leq -1\\ \left(3-2a\right)x+2，x>-1\end{cases}$是$R$上的增函数，则$\begin{cases}a>0\\ 3-2a>0\\ a\leq 2a-3+2\end{cases}$，解得答案.

【详解】

$\because$函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{a}{x}，x\leq -1\\ \left(3-2a\right)x+2，x>-1\end{cases}$是$R$上的增函数,，

$\therefore\begin{cases}a>0\\ 3-2a>0\\ a\leq 2a-3+2\end{cases}$，

解得$a\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$，

故选：C.

【点睛】

本题考查的知识点是分段函数单调性的性质，首先保证每一段单增，再保证分段点处增，属于中档题.

12．C

【解析】

【分析】

根据 $x_0 \in A$ 以及 $A=\left[0,\frac{1}{2}\right)$,可以求出 $f\left[f\left(x_0\right)\right]$ 的表达式,再根据 $f\left[f\left(x_0\right)\right]\in A$ 求出 x_0 的取值范围.

【详解】

$\because 0\leqslant x_0<\frac{1}{2}$, $\therefore f\left(x_0\right)=x_0+\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$,

$\therefore f\left[f\left(x_0\right)\right]=2\times\left[1-f\left(x_0\right)\right]=2\times\left[1-\left(x_0+\frac{1}{2}\right)\right]=2\times\left(\frac{1}{2}-x_0\right)$

$\therefore f\left[f\left(x_0\right)\right]\in A$, $\therefore 0\leqslant 2\times\left(\frac{1}{2}-x_0\right)<\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{1}{4}<x_0\leqslant\frac{1}{2}$，又$\because 0\leqslant x_0<\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{1}{4}<x_0<\frac{1}{2}$.

故选 C

【点睛】

本题考查了复合函数与分段函数的综合应用,考查了数学运算能力.

13．$2(p+q)$

【解析】

试题分析：由已知得 $f(6)=f(2\times 3)=f(2)+f(3)=p+q$，所以 $f(36)=f(6\times 6)=2f(6)=2p+2q$

考点：抽象函数

14．[2,4]

【解析】

【分析】

【详解】

函数 $f(x)=x^2-4x+5$

则对称轴为 x＝2，f（2）＝1，f（0）＝f（4）＝5

又∵函数 $f(x)=x^2-4x+5$ 在区间[0，m]上的最大值为 5，最小值为 1

∴m 的取值为[2，4]；

15．$(-\infty,1]$

【解析】

【分析】

根据 $f\left(x\right)=x^2-2x+3$，表示出 $f\left(x-a\right)$ 的解析式，根据二次函数的对称轴求出 a 的取值范围.

【详解】

因为 $f\left(x\right)=x^2-2x+3$

所以 $f\left(x-a\right)=\left(x-a\right)^2-2\left(x-a\right)+3$

化简得 $f\left(x-a\right)=x^2-\left(2a+2\right)x+a^2+2a+3$

函数对称轴为 $x=-\dfrac{-\left(2a+2\right)}{2}=a+1$

因为函数 $y=f\left(x-a\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上是增函数

所以 $a+1\le 2$ ，得 $a\le 1$ 即 a 的取值范围为 $\left(-\infty,1\right]$

【点睛】

本题考查了二次函数的单调性与对称轴的关系，函数解析式的求法，属于基础题.

16．$\dfrac{3}{4}$

【解析】

【分析】

【详解】

$\because f(0)=0, f(1-x)=1-f(x)$，

令 $x=1$,则 $f(0)=1-f(1)$,解得 $f(1)=1$，

令 $x=\dfrac{1}{2}$,则 $f(\dfrac{1}{2})=1-f(\dfrac{1}{2})$,解得：$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$.

又 $\because f(\dfrac{x}{3})=\dfrac{1}{2}f(x)$，

$\therefore f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{2}f(1)=\dfrac{1}{2}, f(\dfrac{1}{9})=\dfrac{1}{2}f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{4}, f(\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{2}f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，

又由 $f(x)$ 在[0,1]上为非减函数，$\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{6}$

故$f(\frac{1}{8})=\frac{1}{4}$，

$\therefore f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{8})=\frac{3}{4}$.

故答案为$\frac{3}{4}$.

17.（1）$A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5\}$.（2）$(\complement_U B)\cup(\complement_U C)=\{1,2,6,7,8\}$.

【解析】

试题分析：（1）先求集合A,B,C；再求$B\cap C$，最后求$A\cup(B\cap C)$（2）先求$\complement_U B$，$\complement_U C$；再求$(\complement_U B)\cup(\complement_U C)$.

试题解析：解：(1)依题意有：$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，$C=\{3,4,5,6,7,8\}$，$\therefore B\cap C=\{3,4,5\}$，故有$A\cup(B\cap C)=\{1,2\}\cup\{3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$.

(2)由$\complement_U B=\{6,7,8\}$，$\complement_U C=\{1,2\}$；

故有$(\complement_U B)\cup(\complement_U C)=\{6,7,8\}\cup\{1,2\}=\{1,2,6,7,8\}$.

18.（1）最大值37,　最小值1；（2）$a\geq 5$或$a\leq -5$

【解析】

（1）因为对称轴为x=1,所以当x=-5时，f(x)取最大值；当x=1时，f(x)取最小值.

(2)因为二次函数对称轴一侧的区间为单调区间，因而可得$-a\leq -5$或$-a\geq 5$可得a的取值范围.

19.（1）详见解析；（2）$[-8,4]$.

【解析】

试题分析：（1）设$x_2>x_1$，$x_2=x_1+(x_2-x_1)$，那么$f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)+f(x_2-x_1)$，再根据已知条件证明$f(x_2)-f(x_1)<0$；（2）由（1）证明函数是奇函数，并且是减函数，所以求$f(-2)$和$f(4)$的值.

试题解析：（1）证明：$\because f(x)$的定义域为R，令$x=y=0$，则$f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，

$\therefore f(0)=0$．令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$，

即 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$．$\therefore f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数．

任取 $x_1,x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)$．

又$\because x_2-x_1>0$，$\therefore f(x_2-x_1)<0$，$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$．

故 $f(x)$ 是 R 上的减函数．

（2）$\because f(-1)=2$，$\therefore f(-2)=f(-1)+f(-1)=4$．

又 $f(x)$ 为奇函数$\therefore f(2)=-f(-2)=-4$，$\therefore f(4)=f(2)+f(2)=-8$．

由(1)知 $f(x)$ 是 R 上的减函数，所以当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 $f(-2)=4$；

当 $x=4$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(4)=-8$．

所以函数 $f(x)$ 在区间[－2, 4]上的值域为[－8, 4]．

考点：1.抽象函数；2.函数的性质．

20.（1）$f(x)=x^2-2x+2$；；（2）$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$．

【解析】

【分析】

（1）根据已知条件，待定系数，即可求得函数解析式；

（2）讨论 $f\left(x\right)$ 的对称轴和区间位置关系，列出不等式即可求得参数范围.

【详解】

（1）由 $f(0)=2$，得 $c=2$，

由 $f(x+1)-f(x)=2x-1$，得 $2ax+a+b=2x-1$，

故$\begin{cases}2a=2\\a+b=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$，

所以 $f(x)=x^2-2x+2$．

（2）由于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1]$ 上单调，

因为 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$，

所以 $a\ge1$ 或 $a+1\le1$，解得：$a\le0$ 或 $a\ge1$，

因此a的取值范围为：$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

【点睛】

本题考查二次函数解析式的求解，在区间上最值得求解，以及根据其单调性情况求参数范围的问题，属综合基础题.

21．（1）$f\left(x\right)=2x^2-4x+3$；（2）$m<-1$.

【解析】

【分析】

（1）根据题意，设$f\left(x\right)=a(x-1)^2+1$，根据$f\left(0\right)=3$，求得$a=2$，即可得到函数的解析式；

（2）把区间$[-1,1]$上，$y=f\left(x\right)$的图象恒在$y=2x+2m+1$的图象上方，转化为不等式$m<x^2-3x+1$在区间$[-1,1]$上恒成立，令$g\left(x\right)=x^2-3x+1$，结合二次函数的性质，即可求解.

【详解】

（1）由题意，函数$f\left(x\right)$是二次函数，且$f\left(0\right)=f\left(2\right)$，可得函数$f\left(x\right)$对称轴为$x=1$，

又由最小值为1，可设$f\left(x\right)=a(x-1)^2+1$，

又$f\left(0\right)=3$，即$a\times(0-1)^2+1=3$，解得$a=2$，

所以函数的解析式为$f\left(x\right)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$.

（2）由在区间$[-1,1]$上，$y=f\left(x\right)$的图象恒在$y=2x+2m+1$的图象上方，

可得$2x^2-4x+3>2x+2m+1$在区间$[-1,1]$上恒成立，

化简得$m<x^2-3x+1$在区间$[-1,1]$上恒成立，

设函数$g\left(x\right)=x^2-3x+1$，

则$g\left(x\right)$在区间$[-1,1]$上单调递减

$\therefore g\left(x\right)$在区间$[-1,1]$上的最小值为$g\left(1\right)=-1$，

$\therefore m<-1$.

【点睛】

本题主要考查了二次函数解析式的求解，以及二次函数的图象与性质综合应用，其中解答中熟练应用二次函数的图象与性质，合理转化是解答的关键，着重考查了转化思想，以及推理与运算能力，属于中档试题.

22．（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

试题分析：（1）根据二次函数的性质,在区间$\left[0,1\right]$上单调递增,且值域也为$\left[0,1\right]$满足“和谐区间”的定义,即可得到结论；（2）该问题是一个确定性问题,从正面证明有一定的难度,故可采用反证法来进行证明；（3）设$\left[m,n\right]$是已知函数定义域的子集,我们可以用a表示出$n-m$的取值,转化为二次函数的最值问题后,根据二次函数的性质,可以得到答案.

试题解析：（1）∵ y=x^{2}在区间[0，1]上单调递增.

又 f（0）=0，f（1）=1，

∴值域为[0，1]，

∴区间[0，1]是 y=f（x）=x^{2}的一个“和谐区间”.

（2）设[m，n]是已知函数定义域的子集.

∵ $x\neq 0, [m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$ 故函数$y=3-\frac{5}{x}$在[m，n]上单调递增.

若[m，n]是已知函数的“和谐区间”，则$\begin{cases} g(m)=m \\ g(n)=n \end{cases}$

故 m、n 是方程$3-\frac{5}{x}=x$的同号的相异实数根.

∵ x^2﹣3x+5=0 无实数根，

∴函数$y=3-\frac{5}{x}$不存在“和谐区间”.

（3）设[m，n]是已知函数定义域的子集.

∵ x≠0，$x\neq 0, [m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$

故函数$y=\frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$在[m，n]上单调递增.

若[m，n]是已知函数的“和谐区间”，则$\begin{cases} h(m)=m \\ h(n)=n \end{cases}$

故m、n是方程$\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$，即$a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$的同号的相异实数根.

$\because mn=\frac{1}{a^2}>0$，

$\therefore$m，n同号，只须$\Delta=a^2(a+3)(a-1)>0$，即a＞1或a＜﹣3时，

已知函数有“和谐区间”[m，n]，

$n-m=\sqrt{(n+m)^2-4mn}=\sqrt{-3(\frac{1}{a}-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}}$

$\therefore$当a=3时，n﹣m取最大值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

考点：1.函数的单调性的性质；2.集合的关系；3.二次函数的图象和性质.

【方法点睛】(1)根据二次函数的性质，我们可以得出$y=f(x)=x^2$区间$[0,1]$上单调递增，且值域也为$[0,1]$满足“和谐区间”的定义，即可得到结论.（2）该问题是一个确定性问题，从正面证明有一定的难度，故可采用反证法来进行证明，即先假设区间$[m,n]$为函数的“和谐区间”，然后根据函数的性质得到矛盾，进而得到假设不成立，原命题成立.（3）设$[m,n]$是已知函数定义域的子集，我们可以用a表示出$n-m$的取值，转化为二次函数的最值问题后，根据二次函数的性质，可以得到答案.