导数模拟

1. (2016 海淀一模) 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，$g(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$.

   (1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

   (2) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

   (3) 求证: 直线 $y=x$ 不是曲线 $g(x)$ 的切线.

2. 已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+a)$.

   (1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间;

   (2) 若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant e^a$ 在 $[a,\infty)$ 上有解，求实数 a 的取值范围;

   (3) 若曲线 $y=f(x)$ 存在两条互相垂直的切线，求实数 a 的取值范围.(只需直接写出结果)

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 的零点和极值；

(3) 若对任意 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$，都有 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant-\dfrac{1}{e^2}$ 成立，求实数 a 的最小值.

4. 已知函数 $f(x)=xe^x-ae^{x-1}$，且 $f'(1)=e$.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的单调区间

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=kx^2-2\ (k>2)$ 存在两不相等的正实数根 x_1, x_2，证明：$|x_1-x_2|>\ln\dfrac{4}{e}$

5. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}\ (a\neq 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若存在两条直线 $y=ax+b_1, y=ax+b_2\ (b_1\neq b_2)$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $\left\{x \,\middle|\, f(x)\leqslant 0\right\}\subseteq(0,1)$，求实数 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+ax^2}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=-\dfrac{1}{4}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a>0$ 时，证明：存在实数 $m>0$, 使得对于任意的实数 x, 都有 $\left|f(x)\right|\leqslant m$ 成立.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的零点及单调区间；

(2) 求证：曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在斜率为 6 的切线，且切点的纵坐标 $y_0<-1$.

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$, $g(x)=-\ln x$.

(1) 当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

(2) 用 $min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=min\left\{f(x),g(x)\right\}$ $(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & x>a,\\ -x^2+2x-3, & x\leqslant a,\end{cases}$, 其中 $a\geqslant 0$.

(1) 当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 如果对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，求 a 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 如果对于任意 $x\in(1,+\infty)$, 都有 $f(x)>-x+2$，求 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{ax^2+4x+4}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $a>1$ 时，试确定函数 $f(x)$ 的单调区间.

12. 已知曲线 $C: y=e^{ax}$.

(1) 若曲线 C 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=2x+m$，求实数 a 和 m 的值；

(2) 对任意实数 a，曲线 C 总在直线 $l: y=ax+b$ 的上方，求实数 b 的取值范围.

13. 已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\dfrac{1}{x}-k\ (k>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}\right]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\leqslant mx$, 求 m 的取值范围.

14. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \dfrac{x-a}{(x+a)^2}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y = 3x - 2$ 平行，求 a 的值；

(2) 若对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f(x_2) < f(x_1)$，求 a 的取值范围.

15. 已知函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{a}{x} - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 -1 的切线，求实数 a 的取值范围;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 设函数 $g(x) = \dfrac{x+a}{\ln x}$, 求证：当 $-1 < a < 0$ 时，$g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在极小值.

16. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 1\ (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = xf(x) + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a = 1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m, m+1)\ (m \in \mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, $A(x_1,m)$, $B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的两个不同的点.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围

(2) 证明：$x_1+x_2>0$

18. 已知函数 $f(x)=\ln x-a\cdot\sin(x-1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 如果曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 -1，求 a 的值;

(2) 如果 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为增函数，求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=x\cos x+a$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率；

(2) 判定方程 $f'(x)=0$ ($f'(x)$为$f(x)$ 的导数) 在区间 $(0,1)$ 内的根的个数，说明理由.

(3) 若函数 $F(x)=x\sin x+\cos x+ax$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个极值点，求 a 的值.