

## 北京高考分项练习——导数

1. (2018 理) 设函数  $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$ .

- (1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与  $x$  轴平行, 求  $a$ ;
- (2) 若  $f(x)$  在  $x = 2$  处取得极小值, 求  $a$  的范围.

2. (2018 文) 设函数  $f(x) = [ax^2 - (3a + 1)x + 3a + 2]e^x$ .

- (1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 0, 求  $a$ ;
- (2) 若  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极小值, 求  $a$  的取值范围.

3. (2017 文理) 已知函数  $f(x) = e^x \cos x - x$ .

- (1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 求函数  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值和最小值.

4. (2016 理) 设函数  $f(x) = xe^{a-x} + bx$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = (e - 1)x + 4$ .

(1) (5 分) 求  $a, b$  的值;

(2) (8 分) 求  $f(x)$  的单调区间.

5. (2016 文) 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ .

(1) (3 分) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2) (5 分) 设  $a = b = 4$ , 若函数  $y = f(x)$  有三个不同零点, 求  $c$  的取值范围;

(3) (5 分) 求证:  $a^2 - 3b > 0$  是  $y = f(x)$  有三个不同零点的必要而不充分条件.

6. (2015 理) 已知函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

(1) (3 分) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2) (5 分) 求证: 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ ;

(3) (5 分) 设实数  $k$  使得  $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立, 求  $k$  的最大值.

7. (2015 文) 设函数  $f(x) = \frac{x^2}{2} - k \ln x, k > 0$ .

(1) (5 分) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;

(2) (8 分) 证明: 若  $f(x)$  存在零点, 则  $f(x)$  在区间  $(1, \sqrt{e}]$  上仅有一个零点.

8. (2014 理) 已知函数  $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

(1) (5 分) 求证:  $f(x) \leq 0$ ;

(2) (8 分) 若  $a < \frac{\sin x}{x} < b$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上恒成立, 求  $a$  的最大值和  $b$  的最小值.

9. (2014 文) 已知函数  $f(x) = 2x^3 - 3x$ .

(1) (3 分) 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上的最大值;

(2) (5 分) 若过点  $P(1, t)$  存在 3 条直线与曲线  $y = f(x)$  相切, 求  $t$  的取值范围;

(3) (5 分) 问过点  $A(-1, 2), B(2, 10), C(0, 2)$  分别存在几条直线与曲线  $y = f(x)$  相切?(只需写出结论)

10. (2013 理) 设  $l$  为曲线  $C: y = \frac{\ln x}{x}$  在点  $(1, 0)$  处的切线.

(1) (5 分) 求  $l$  的方程;

(2) (8 分) 证明: 除切点  $(1, 0)$  之外, 曲线  $C$  在直线  $l$  的下方.

11. (2013 文) 已知函数  $f(x) = x^2 + x \sin x + \cos x$ .

(1) (5 分) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(a, f(a))$  处与直线  $y = b$  相切, 求  $a$  与  $b$  的值;

(2) (8 分) 若曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = b$  有两个不同的交点, 求  $b$  的取值范围.

12. (2012 理) 已知函数  $f(x) = ax^2 + 1$  ( $a > 0$ ),  $g(x) = x^3 + bx$ .

(1) (5 分) 若曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  在它们的交点  $(1, c)$  处具有公共切线, 求  $a, b$  的值;

(2) (8 分) 当  $a^2 = 4b$  时, 求函数  $f(x) + g(x)$  的单调区间, 并求其在区间  $(-\infty, -1]$  上的最大值.

13. (2012 文) 已知函数  $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0)$ ,  $g(x) = x^3 + bx$ .

(1) (5 分) 若曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  在它们的交点  $(1, c)$  处具有公共切线, 求  $a, b$  的值;

(2) (8 分) 当  $a = 3, b = -9$  时, 若函数  $f(x) + g(x)$  在区间  $[k, 2]$  上的最大值为 28, 求  $k$  的取值范围.

14. (2011 理) 已知函数  $f(x) = (x - k)^2 e^{\frac{x}{k}}$ .

(1) (5 分) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) (8 分) 若对于任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(x) \leq \frac{1}{e}$ , 求  $k$  的取值范围

15. (2011 文) 已知函数  $f(x) = (x - k)e^x$ .

(1) (5 分) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) (8 分) 求  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最小值.

16. (2010 理) 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2$  ( $k \geq 0$ )

(1) (5 分) 当  $k = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) (8 分) 求  $f(x)$  的单调区间.

17. (2010 文) 设定函数  $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a > 0$ ), 且方程  $f'(x) - 9x = 0$  的两个根分别为 1, 4.

(1) (5 分) 当  $a = 3$  且曲线  $y = f(x)$  过原点时, 求  $f(x)$  的解析式;

(2) (8 分) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  无极值点, 求  $a$  的取值范围.

18. (2013 新课标理) 已知函数  $f(x) = e^x - \ln(x+m)$ .

(1) 设  $x = 0$  是  $f(x)$  的极值点, 求  $m$ , 并讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $m \leq 2$  时, 证明  $f(x) > 0$

19. (2012 新课标理) 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式及单调区间;

(2) 若  $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ , 求  $(a+1)b$  的最大值.

20. (2014 新课标理) 设函数  $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = e(x-1) + 2$ .

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 证明:  $f(x) > 1$ .

21. 设函数  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = e^x(cx + d)$ , 若曲线  $y = f(x)$  和曲线  $y = g(x)$  都过点  $P(0, 2)$ , 且在点  $P$  处有相同的切线  $y = 4x + 2$ .

(1) 求  $a, b, c, d$  的值;

(2) 若  $x \geq -2$  时,  $f(x) \leq kg(x)$ , 求  $k$  的取值范围.

22. 已知函数  $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

23. 已知函数  $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ .

(1) 当  $a=4$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 若当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ , 求  $a$  的取值范围.



24. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x + 1$ .

(1) 当  $a = -\sqrt{2}$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $x \in [2, +\infty)$  时,  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.

25. 设函数  $f(x) = e^x - ax - 2$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $a = 1$ ,  $k$  为整数, 且当  $x > 0$  时,  $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$ , 求  $k$  的最大值.

26. 已知函数  $f(x) = x - \ln(x + a)$  的最小值 0, 其中  $a > 0$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若对任意的  $x \in [0, +\infty)$ , 有  $f(x) \leq kx^2$  成立, 求实数  $k$  的最小值.

27. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a - 1)\ln x$ ,  $a > 1$ . 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

28. 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 1$ , 其中  $a > 0$ , 若过点  $(0, 2)$  可作曲线  $y = f(x)$  的三条不同切线, 求  $a$  的取值范围.

29. 设函数  $f(x) = 1 - e^{-x}$ , 设当  $x \geqslant 0$  时,  $f(x) \leqslant \frac{x}{ax+1}$ , 求  $a$  的取值范围.

30. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $g(x) = x^2 - 2x$ , 若对任意的  $x_1 \in (0, 2]$ , 均存在  $x_2 \in (0, 2]$  使得  $f(x_1) < g(x_2)$ , 求  $a$  的取值范围.