数学试卷

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每一小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，答案填写在答题卷上)

1．设集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（）.

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1,2\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．函数 $y=\sqrt{x+2}+\lg(3-x)$ 的定义域为（　　）

A．$[-2,3]$　B．$(3,+\infty)$　C．$[-2,3)$　D．$(-\infty,-2]$

3．下列各组函数中，表示为同一个函数的是(　　)

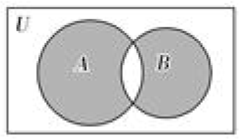
A．$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$　　B．$y=1$ 与 $y=x^0$

C．$f(x)=lnx^2, g(x)=2\ln x$　　D．$y=x$ 与 $y=\log_a a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-2(x\le 2) \\ \ln x+1(x>2) \end{cases}$，那么 $f(\ln 3)$ 的值是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. $\ln(\ln 2)$　　D. 2

5．已知全集 U=R，集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}, B=\{x|2<x\le 4\}$，则图中的阴影部分表示的集合为(　　)



A．$[1,2]\cup(3,4]$　B．$[1,2]\cup[3,4]$　C．$[1,2)\cup(3,4]$　D．$(1,2)\cup(3,4]$

6．设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(-1)=$（　　）

A. -2　B. 1　C. -1　D. 2

7．为了得到函数 $y=\ln\frac{x}{e}$ 的图像，可以把函数 $y=\ln x$ 的图像（）

A．向下平移一个单位　　B．向上平移一个单位

C．向左平移一个单位　　D．向右平移一个单位

8. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 R，值域为 $[-1,2]$，则值域也为 $[-1,2]$ 的函数是（　）

A．$y=2f(x)+1$　B．$y=-f(x)$　C．$y=|f(x)|$　D．$y=f(2x+1)$

9．已知幂函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，则 $\log_4 f(8)$ 的值为(　　)

A．$\frac{3}{4}$　B．$-\frac{3}{4}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$-\frac{1}{2}$

10. 设 $f(x)(x\in R)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(-2)$，$f(-\pi)$，$f\left(\frac{1}{e}\right)$ 的大小顺序是( )

A．$f(-\pi)>f\left(\frac{1}{e}\right)>f(-2)$　B．$f(-\pi)>f(-2)>f\left(\frac{1}{e}\right)$

C．$f(-\pi)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(-2)$　D．$f(-\pi)<f(-2)<f\left(\frac{1}{e}\right)$

11. 集合 $P=\{(x,y)|y=2\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=a^x+m\}$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 已知 $P\cap Q$ 有两个子集，那么实数 m 的取值范围是（　　）

A．(－∞，2]　B．(－∞，2)　C．(2，+∞)　D．[2，+∞)

12. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x\in R$，用 $[x]$ 表示不超过 $[x]$ 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，例如：$[-2.1]=-3$，$[3.1]=3$，已知函数 $f(x)=\frac{2^x+3}{1+2^{x+1}}$，则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},3\right)$　B. $\{0,1\}$ C. $\{0,1,2\}$　D. $\{0,1,2,3\}$

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．答案填写在答题卷上)

13．集合 $M=\{x\in Z\,|\,-2\le x\le 0\}$ 的真子集个数为________.

14．16/17 世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易以及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急，约翰•纳皮尔正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数. 后来天才数学家欧拉发现了对数与指数的关系，即 $a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$. 现在已知 $2^a=3$，$3^b=4$，则 $ab=$________.

15．若定义域为 $[a-2,\ a+4]$ 的函数 $f(x)=-(a+2)x^2+(k-1)x-a$ 是偶函数，则 $y=|f(x)|$ 的递减区间是________.

16. 已知函数 $f(x)=2020^x+\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-2020^{-x}+1$，若 $f(\lg 2)=-1$，则 $f(\lg\frac{1}{2})=$________.

三、解答题(共 6 小题，其中第 17 题 10 分,其余每题 12 分,共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (每小题 5 分，共 10 分)不用计算器求下列各式的值。

（1）$(6\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}-(-0.6)^0-(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}+(1.5)^{-2}$；

（2）$\log_3\frac{\sqrt[4]{27}}{3}+\lg 25+\lg 4+7^{\log_7 2}$。

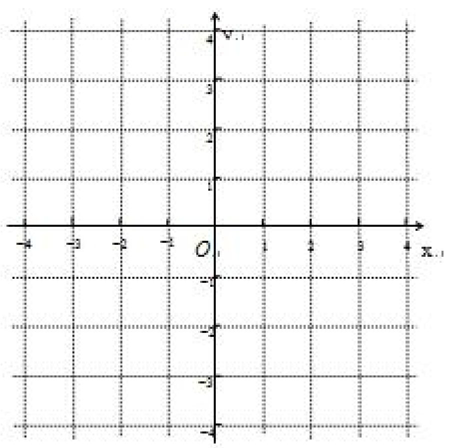
18.（本小题 12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\log_2\left(x-1\right)}$ 的定义域为 A，函数 $g\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\left(-1\le x\le 0\right)$ 的值域为 B．

（Ⅰ）求 $A\cap B$；

（Ⅱ）若 $C=\left\{x\middle|a\le x\le 2a-1\right\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

19. （本小题 12 分）已知函数 f(x) 是定义在 [-3, 3] 上的奇函数，且当 x ∈ [0, 3] 时，

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2x,\left[0,2\right)\\ x^2-2x,\left[2,3\right]\end{cases}$$



⑴ 平面直角坐标系中，画出函数 f(x) 的图像

⑵ 据图像，写出 f(x) 的单调增区间，同时写出函数的值域.

20.(本小题 12 分)经过市场调查,某种商品在销售中有如下关系:第 $x(1\leqslant x\leqslant 30, x\in\mathbb{N}_+)$ 天的销售价格(单位:元/件)000000 为 $f(x)=\begin{cases}30+x, 1\leqslant x\leqslant 10,\\ 50-x, 10<x\leqslant 30,\end{cases}$ 第 x 天的销售量(单位:件)为 $g(x)=a-x$(a 为常数),且在第 20 天该商品的销售收入为 600 元(销售收入=销售价格×销售量).

(1)求 a 的值,并求第 15 天该商品的销售收入;

(2)求在这 30 天中,该商品日销售收入 y 的最大值.

21.（本小题 12 分）若 $A=\left\{x\in R\middle|0\le\log_3 x\le 1\right\}$，函数 $f(x)=4^x-3m\cdot 2^{x+1}+5$（其中 $x\in A$，$m\in R$）

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域;

（2）求函数 $f(x)$ 的最小值.

22.（本小题 12 分）定义在 D 上的函数 $f\left(x\right)$，如果满足：对任意 $x\in D$，存在常数 $M\geqslant 0$，都有 $\left|f\left(x\right)\right|\le M$ 成立，则称 $f\left(x\right)$ 是 D 上的有界函数，其中 M 称函数 $f\left(x\right)$ 的一个上界. 已知函数 $f\left(x\right)=1+a\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}$，$g\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{mx-1}$.

（1）若函数 $g\left(x\right)$ 为奇函数，求实数 m 的值；

（2）在第（1）的条件下，求函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{9}{7},3\right]$ 上的所有上界构成的集合；

（3）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是以 3 为上界的有界函数，求实数 a 的取值范围.

答案

会昌中学　刘江：15083578596　　　瑞金一中　温庆文：13970715871

一、选择题：1-5 BCDBA　6-10 CADAB　11-12 BC

二、填空题

13．7

14．2

15. $(-3,-1)$，$(0,1)$（或者$[-3,-1]$，$[0,1]$），出现并集不给分.

16. 3

三、解答题(共 6 小题，其中第 17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．（每小题 5 分，共 10 分）不用计算器求下列各式的值。

解析：（1）原式$=(\frac{25}{4})^{\frac{1}{2}}-1-(\frac{37}{8})^{-\frac{2}{3}}+(\frac{3}{2})^{-2}$

$=(\frac{5}{2})^{2\times\frac{1}{2}}-1-(\frac{3}{2})^{-3\times\frac{2}{3}}+(\frac{3}{2})^{-2}$……………………………………3 分

$=\frac{5}{2}-1-(\frac{3}{2})^{-2}+(\frac{3}{2})^{-2}$…………………………………4 分

$=\frac{3}{2}$…………………………………………………………………5 分

（2）原式$=\log_3\frac{3^{\frac{3}{4}}}{3}+\lg(25\times4)+2$……………………………………7 分

$=\log_3 3^{\frac{1}{4}}+\lg10^2+2$…………………………………9 分

$=-\frac{1}{4}+2+2=\frac{15}{4}$…………………………………………………10 分

18．（Ⅰ）由题意得：$A=\{x|x\geq 2\}$………2分，$B=\{y|1\leq y\leq 2\}$……………4分，

$A\cap B=\{2\}$ ……………………………………………6 分

（Ⅱ）由(1)知：

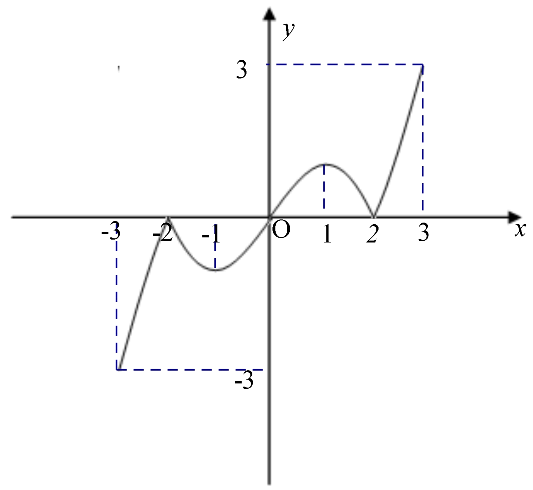
$B=\{y|1\leq y\leq 2\}$又$C\subseteq B$

(1)当$2a-1<a$即$a<1$时：$C=\Phi$，满足……………8分

(2)当$2a-1\geq a$即$a\geq 1$时：要使$C\subseteq B$则$\begin{cases}a\geq 1\\2a-1\leq 2\end{cases}$…….10分

解得$1\leq a\leq\frac{3}{2}$………..11分，综上，$a\in(-\infty,\frac{3}{2}]$…………12分

19.（1）图见；



…………………………………………6 分

（2）单调增区间为$[-3,-2]$，$[-1,1]$，$[2,3]$　（开区间也给满分）…………9 分

（3）　值域为$[-3,3]$．…………12 分

20. 解析:(1)当 $x=20$ 时，由 $f(20)g(20)=(50-20)(a-20)=600$，

解得 $a=40$.

从而可得 $f(15)g(15)=(50-15)(40-15)=875$(元)，

即第 15 天该商品的销售收入为 875 元. ………5 分

(2)由题意可知

$y=\begin{cases}(30+x)(40-x),1\leqslant x\leqslant 10,\\(50-x)(40-x),10<x\leqslant 30,\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}-x^2+10x+1200,1\leqslant x\leqslant 10,\\x^2-90x+2000,10<x\leqslant 30,\end{cases}$ ………7 分

当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时，$y=-x^2+10x+2000=-(x-5)^2+1225$.

故当 $x=5$ 时 y 取最大值，$y_{max}=-5^2+10\times5+1200=1225$. ………9 分

当 $10<x\leqslant 30$ 时，$y<10^2-90\times 10+2000=1200$. ………11 分

故当 $x=5$ 时，该商品日销售收入最大，最大值为 1225 元. ………12 分

21. 解析：(1) 在 A 中由 $0\le \log_3 x\le 1$ 得 $\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 3$，…………2 分

$\therefore 1\le x\le 3$，…………3 分

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,3]$. …………4 分

(2) $y=f(x)=(2^x)^2-6m\cdot 2^x+5$ …………5 分

令 $t=2^x(2\le t\le 8)$，则 $y=t^2-6mt+5=(t-3m)^2-9m^2+5$，…………7 分

若 $3m\le 2$ 即 $m\le \frac{2}{3}$，则 $y_{\min}=f(2)=4-12m+5=9-12m$，…………9 分

若 $2<3m<8$ 即 $\frac{2}{3}<m<\frac{8}{3}$，则 $y_{\min}=f(3m)=5-9m^2$，…………10 分

若 $3m\ge 8$ 即 $m\ge \frac{8}{3}$，则 $y_{\min}=f(8)=64-48m+5=69-48m$，…………11 分

综上所述，…………12 分

$$f(x)_{\min}=\begin{cases}9-12m(m\le \frac{2}{3})\\ 5-9m^2(\frac{2}{3}<m<\frac{8}{3})\\ 69-48m(m\ge \frac{8}{3})\end{cases}$$

22. （1）方法一：$\because$ 函数 $g(x)$ 是奇函数，$\therefore g(-x)=-g(x)$，即

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{-x+1}{-mx-1}=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{mx-1}$，…1 分

$\therefore \frac{-x+1}{-mx-1}=\frac{mx-1}{x+1}$，$\therefore (m^2-1)x^2=0$，解得 $m=\pm 1$，………2 分

当 $m=-1$ 时，$\frac{x+1}{mx-1}=\frac{x+1}{-x-1}=-1$，不合题意，舍去. $\therefore m=1$. ………3 分

方法 2:根据奇函数的定义域必须关于原点对称得 m=1 同样给分。

（2）由（1）得 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}$，设 $u(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，……4 分

令 $x_1,x_2\in D$，且 $1<x_1<x_2$，$\because u(x_1)-u(x_2)=1+\frac{2}{x_1-1}-1-\frac{2}{x_2-1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$；

$\therefore u(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数（画出 $u(x)$ 图像，判断单调性也给分）

$\therefore g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增函数，……5 分

$\therefore g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}$ 在区间 $\left[\frac{9}{7},3\right]$ 上是单调递增，

$\therefore g\left(\frac{9}{7}\right)\le g(x)\le g(3)$，即 $-3\le g(x)\le -1$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $\left[\frac{9}{7},3\right]$ 上的值域为 $[-3,-1]$，……6 分

$\therefore |g(x)|\le 3$，

故函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{9}{7},3\right]$ 上的所有上界构成的集合为 $[3,+\infty)$. ……7 分

（3）由题意知，$|f(x)|\le 3$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore -3\le f(x)\le 3$，……8 分

$\therefore -3\le 1+ae^{-x}+e^{-2x}\le 3$，

因此 $-4e^x-e^{-x}\le a\le 2e^x-e^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore \left(-4e^x-e^{-x}\right)_{\max}\le a\le \left(2e^x-e^{-x}\right)_{\min}$ ……9 分

设 $t=e^x$，$h(t)=-4t-\frac{1}{t}$，$p(t)=2t-\frac{1}{t}$，由 $x\in[0,+\infty)$ 知 $t\ge 1$，

设 $1\le t_1<t_2$，则

$h(t_1)-h(t_2)=\frac{(t_2-t_1)(4t_1t_2-1)}{t_1t_2}>0$，$p(t_1)-p(t_2)=\frac{(t_1-t_2)(2t_1t_2+1)}{t_1t_2}<0$，……10 分

$\therefore h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$p(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，($\left(2e^x-e^{-x}\right)$ 利用函数单调性的运算，增函数加增函数是增函数，说明 $\left(2e^x-e^{-x}\right)$ 是增函数也给分）……11 分

$\therefore h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-5$，$p(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $p(1)=1$，

$\therefore -5\le a\le 1$. $\therefore a$ 的取值范围 $[-5,1]$. ……12 分