数学

注意事项：

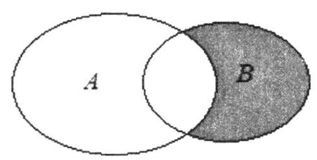
1.本试题满分 150 分，考试时间为 120 分钟．
2.答卷前，务必将姓名和准考证号填涂在答题卡上．
3.使用答题纸时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写，要字迹工整，笔迹清晰．超出答题区书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效．

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}B=\{x\in\mathbf{N}\mid x<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3,4\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x>-1\}$ 和 $B=\{x\mid x<2\}$ 的关系如下图所示，则阴影部分表示的集合为



A. $\{x\mid -1<x<2\}$　　B. $\{x\mid x\le -1\}$

C. $\{x\mid x\ge 2\}$　　D. $\{x\mid x=2\text{或}x\le -1\}$

3. 命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\le 0$”的否定是

A. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2>0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\ge 0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+2>0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\le 0$

4. 设 p：实数 x,y 满足 $x>1$ 且 $y>1$，q：实数 x,y 满足 $x+y>2$，则 p 是 q 的

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5. 某商场有三个门市房间需要粉刷，每个房间只用一种颜色的涂料粉刷，且三个房间的颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积分别为 x,y,z（单位：m^2），且 $x<y<z$，三种颜色涂料的粉刷费用分别为 a,b,c（单位：元/m^2），且 $a<b<c$，在不同的方案中，最低的总费用为

A．$ax+by+cz$　　B．$az+by+cx$　　C．$ay+bz+cx$　　D．$ay+bx+cz$

6. 已知集合 $A=\{x\mid \frac{x-4}{x+1}\le 0\}$，$B=\{x\mid (x-2a)(x-a^2-1)<0\}$，若 $A\cap B=\phi$，则实数 a 的取值范围为

A．$\{a\mid a>2\}$　　B．$\{a\mid a\ge 2\}$　　C．$\{a\mid a=1\text{或}a\ge 2\}$　　D．$\{a\mid a\ge 1\}$

7. 如果对于任意实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则“$[x]=[y]$”是“$|x-y|<1$”成立的

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

8. 设 $a>b>0$，则 $ab+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的有

A. 不等式 $\frac{2x-1}{3x+1}>1$ 的解集为 $\{x\mid -2<x<-\frac{1}{3}\}$

B．“$a<5$”是“$a<3$”的必要不充分条件

C. 命题 p：$\forall x\in\mathbf{R},x^2>0$，则 $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R},x^2<0$

D. 方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 有一正根一负根的充要条件是 $m<0$

10. 给定数集 M，若对于任意 $a,b\in M$，有 $a+b\in M$，且 $a-b\in M$，则称集合 M 为闭集合，则下列说法中不正确的是

A. $M=\{-4,-2,0,2,4\}$ 为闭集合　　B. 正整数集是闭集合

C. $M=\{n\mid n=3k,k\in\mathbf{Z}\}$ 为闭集合　　D. 若集合 A_1,A_2 为闭集合，则 $A_1\cup A_2$ 也为闭集合

11. 若“$x^2+3x-4<0$”是“$x^2-(2k+3)x+k^2+3k<0$”的必要不充分条件，则实数 k 可以是

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 0

12. 设$a>0,b>0$，则下列不等式恒成立的是

A. $\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$　　B. $a>|a-b|-b$　　C. $a^2+b^2>4ab-3b^2$　　D. $ab+\dfrac{2}{ab}>2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 方程组$\begin{cases}x+y=6\\2x-y=3\end{cases}$的解集用列举法表示为

14. 近年由于猪肉涨价太多，更多市民选择购买鸡肉、鸭肉、鱼肉等其他肉类.某日在市场中随机抽取100名市民调查其购买肉类情况，其中不买猪肉的有30位，买了肉的有90位，买了猪肉同时买了其他肉类的人共有25位，则该日只买了猪肉没有买其他肉类的人数为

15. 已知正数a,b满足$a+b=4$，$ab\le t$，则不等式$x^2+3x-t<0$的解集为

16. 定义：关于x的不等式$|x-A|<B$的解集叫做A的B邻域.若$a+b-2$的$a+b$邻域为$\{x|-2<x<2\}$，则a^2+b^2的最小值为

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知集合$A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$，其中$a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}$.

（1）若A为空集，求a的取值范围；

（2）若A中只有一个元素，求a的取值范围；

（3）若A中至多有一个元素，求a的取值范围；

18.（12分）

已知p：$(x+1)(2-x)\ge 0$，q：关于x的不等式$x^2+2mx-m+6>0$.

（1）当$x\in\mathbf{R}$时，q中不等式恒成立，求实数m的取值范围；

（2）若p是q的充分不必要条件，求实数m的取值范围.

19. 已知函数$f(x)=x^2+mx+4$.

（1）当$1<x<2$时，求函数$f(x)$的最大值；

（2）当$1<x<2$时，$f(x)<0$恒成立，求实数m的取值范围.

20. 解关于x的不等式$ax^2+x-a-1<0$（$a\in\mathbf{R}$）.

21.（12分）

已知某著名手机品牌销售公司的年固定成本为40百万元，每生产1万部手机还要另投入16百万元，设该公司一年内生产x万部手机并全部售完，每1万部手机的销售收入为$H(x)$百万元，且$H(x)=\begin{cases}80-4x,0<x\le 40\\ \dfrac{2400}{x}-\dfrac{40000}{x^2},x>40\end{cases}$.

（1）写出年利润y（百万元）关于年产量x（万部）的函数关系式；

（2）当年产量x取何值时，公司能获得最大利润，并求出最大利润.

22. 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$满足：①当$x=1$时，函数$f(x)$的最大值为0；②函数图象与直线$y=-2$交于$A,B$两点，且$|AB|=4$.

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）求最小实数$n(n<-1)$，使得存在实数t，当$n\le x\le -1$时，都有$f(x+t)\ge 2x$成立.

高一期中月考检测参考答案及评分标准

一、单选题（每小题 5 分）

A B C A　　B C A D

二、多选题（每小题 5 分，对而不全得 3 分，选错不得分）

9. ABD　10.CD　11.AB　12.BD

三、填空题（每小题 5 分）

13. $\{(3,3)\}$　　14. 45　　15. $\{x\mid -4<x<1\}$　　16. 2

四、解答题

17. 解：（1）因为 A 为空集，所以方程 $ax^2-3x+2=0$ 无解，…………………………1 分

即 $\Delta=9-8a<0$，解得 $a>\dfrac{9}{8}$，…………………………3 分

（2）A 中只有一个元素，有两种情况，一是 $a=0$，此时，$x=\dfrac{2}{3}$ 满足题意，……4 分

二是 $\Delta=9-8a=0$，$a=\dfrac{9}{8}$，此时 $x=\dfrac{4}{3}$，满足题意，…………………………6 分

综上，A 中只有一个元素，a 的取值范围为 $a=0$ 或 $a=\dfrac{9}{8}$，………………7 分

（3）A 中至多有一个元素，分为两种情况：

一是 A 为空集，二是 A 中只有一个元素，…………………………8 分

由（1）（2）可得，$a=0$ 或 $a\ge\dfrac{9}{8}$.…………………………10 分

18. 解：（1）由题意可知，$\Delta=4m^2+4m-24<0$，…………………………1 分

解得 $-3<m<2$，所以实数 m 的取值范围为 $-3<m<2$，…………………………3 分

（2）由 $(x+1)(2-x)\ge0$，解得 $-1\le x\le2$，…………………………4 分

因为 p 是 q 的充分不必要条件，

由（1）知，$-3<m<2$ 时，q 中不等式的解集为 $\mathbf{R}$，满足题意，…………………………5 分

当 $m=-3$ 时，q 中不等式 $(x-3)^2>0$，$x\ne3$，满足题意，…………………………6 分

当 $m=2$ 时，q 中不等式 $(x+2)^2>0$，$x\ne-2$，满足题意，…………………………7 分

当 $m<-3$ 或 $m>2$ 时，设 $f(x)=x^2+2mx-m+6$，对称轴为 $x=-m$，

要使 p 是 q 的充分不必要条件，只需

$\begin{cases}-m<-1\\ f(-1)>0\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}-m>2\\ f(2)>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m>1\\ -3m+7>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<-2\\ 3m+10>0\end{cases}$，……………9 分

解得 $1<m<\dfrac{7}{3}$ 或 $-\dfrac{10}{3}<m<-2$，

故 $2<m<\frac{7}{3}$ 或 $-\frac{10}{3}<m<-3$，……………………………………………11 分

综上，$-\frac{10}{3}<m<\frac{7}{3}$ ……………………………………………………12 分

19. 解：（1）函数 $f(x)=x^2+mx+4$ 的图象开口向上，对称轴为 $x=-\frac{m}{2}$，…………1 分

因为 $1<x<2$， 所以当 $m>-3$ 时，$-\frac{m}{2}<\frac{3}{2}$，

此时当 $x=2$ 时，函数取得最大值 $8+2m$，……………………………………………3 分

当 $m\le -3$ 时，$-\frac{m}{2}\ge\frac{3}{2}$，此时当 $x=1$ 时，函数取得最大值 $5+m$，………………5 分

所以 $m>-3$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $8+2m$，

当 $m\le -3$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $5+m$，……………………………………………6 分

（2）当 $1<x<2$ 时， $f(x)<0$ 恒成立，只需 $f(x)$ 的最大值小于 0，………………7 分

即 $\begin{cases} f(1)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m<-4 \\ m<-5 \end{cases}$，……………………………………………11 分

所以实数 m 的取值范围为 $m<-5$．………………………………………………12 分

解法二：分离参数 $m<-(x+\frac{4}{x})$，可求解，略.

20. 解：由 $ax^2+x-a-1<0$ 可得，$(ax+a+1)(x-1)<0$，…………………1 分

当 $a=0$ 时，不等式为 $x-1<0$，解得 $x<1$，……………………………2 分

当 $a>0$ 时，不等式为 $(x+\frac{a+1}{a})(x-1)<0$，

显然 $-\frac{a+1}{a}<1$，此时不等式的解为 $-\frac{a+1}{a}<x<1$，……………………………4 分

当 $a<0$ 时，不等式为 $(x+\frac{a+1}{a})(x-1)>0$，……………………5 分

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{a+1}{a}=1$，此时不等式为 $(x-1)^2>0$，$x\neq 1$，………………7 分

当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{a+1}{a}<1$，此时不等式的解为 $-\frac{a+1}{a}<x$ 或 $x>1$，…………9 分

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$-\frac{a+1}{a}>1$，此时不等式的解为 $x>-\frac{a+1}{a}$ 或 $x<1$，………11 分

综上所述，当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|-\frac{a+1}{a}<x<1\}$，当 $a=0$ 时，不等式解集为 $\{x\,|\,x<1\}$，当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x>-\frac{a+1}{a}$ 或 $x<1\}$，当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，解集为 $\{x\,|\,x\neq 1\}$，当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|-\frac{a+1}{a}<x$ 或 $x>1\}$． …12 分

21. 解：设年利润为 y 百万元，

当 $0<x\le 40$ 时，$y=x(80-4x)-16x-40=-4x^2+64x-40$，…………………2 分

当 $x>40$ 时，$y=x(\frac{2400}{x}-\frac{40000}{x^2})-16x-40=-\frac{40000}{x}-16x+2360$，………4 分

所以 $y=\begin{cases}-4x^2+64x-40, 0<x\le 40\\ -\frac{40000}{x}-16x+2360, x>40\end{cases}$，…………………………5 分

（2）当 $0<x\le 40$ 时，$y=-4(x-8)^2+216$，

所以当 $x=8$ 时，y 取得最大值 216，…………………………7 分

当 $x>40$ 时，$y=-\frac{40000}{x}-16x+2360\le -2\sqrt{\frac{40000}{x}\times 16x}+2360=760$……10 分

当且仅当 $\frac{40000}{x}=16x$ 即 $x=50$ 时等号成立，…………………………11 分

所以当 $x=50$ 时，y 取得最大值 760，

综上，当年产量为 50 万部时所获利润最大，最大利润为 760 百万元. …………12 分

22. 解：（1）由题意可知，函数 $f(x)$ 的对称轴为直线 $x=1$，且开口向下，即 $a<0$，

可设 $f(x)=a(x-1)^2(a<0)$，…………………………1 分

令 $a(x-1)^2=-2$，解得 $x=1\pm\sqrt{\frac{-2}{a}}$，…………………………2 分

所以 $|AB|=2\sqrt{\frac{-2}{a}}=4$，$a=-\frac{1}{2}$，…………………………4 分

故 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$. …………………………5 分

（2）由 $f(x+t)\ge 2x$ 可得，$-\frac{1}{2}(x-1+t)^2\ge 2x$，即 $x^2+2(t+1)x+(t-1)^2\le 0$，

解得 $-t-1-2\sqrt{t}\le x\le -t-1+2\sqrt{t}(t\ge 0)$，…………………………7 分

又 $f(x+t)\ge 2x$ 在 $n\le x\le -1$ 时恒成立，

所以 $\begin{cases}-t-1-2\sqrt{t}\le n & ①\\ -t-1+2\sqrt{t}\ge -1 & ②\end{cases}$，…………………………9 分

由②可得，$0\le t\le 4$，…………………………10 分

令 $g(t)=-t-1-2\sqrt{t}$，当 t 逐渐增大时，$g(t)$ 逐渐减小，

所以$g(t)\ge g(4)=-9$，……………………………11 分

故当n取最小时-9时，存在实数$t=4$，

只要$n\le x\le -1$，就有 $f(x+t)\ge 2x$成立. ……………………………………12 分