2017 一模

1. 设命题 $p:\forall x\in[0.+\infty)$，$e^x\geqslant 1$，则 $\neg p$ 是 ( )

(A) $\exists x_0\notin[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1$

(B) $\forall x_0\notin[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1$

(C) $\exists x_0\in[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1$

(D) $\forall x_0\in[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1$

2. 设 E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB, BC 上的点，且 $AE=\dfrac{1}{2}AB$, $BF=\dfrac{2}{3}BC$, 如果 $\overrightarrow{EF}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$($m,n$为实数)，那么 $m+n$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

3. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，则 ( )

(A) 点 D 不在直线 BC 上　　(B) 点 D 在 BC 的延长线上

(C) 点 D 在线段 BC 上　　(D) 点 D 在 CB 的延长线上

4. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，则 ( )

(A) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta.\end{cases}$($\theta$ 为参数)，则曲线 C 是 ( )

(A) 关于 x 轴对称的图形　　(B) 关于 y 轴对称的图形

(C) 关于原点对称的图形　　(D) 关于直线 $y=x$ 对称的图形

6. 如果 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，那么下列函数中，一定为偶函数的是 ( )

(A) $y=x+f(x)$　　(B) $y=xf(x)$

(C) $y=x^2+f(x)$　　(D) $y=x^2f(x)$

7. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足，若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 $|PF|=$ ( )

(A) $4\sqrt{3}$　　(B) 6　　(C) 8　　(D) 16

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_4 x\right|, & 0<x\leqslant 4,\\ x^2-10x+25, & x>4.\end{cases}$ 若 a, b, c, d 是互不相同的正数，且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $abcd$ 的取值范围是 ( )

(A) $(24,25)$　　(B) $(18,24)$　　(C) $(21,24)$　　(D) $(18,25)$

9. 小明和父母、爷爷奶奶一同参加《中国诗词大会》的现场录制，5 人坐成一排. 若小明的父母至少有一人与他相邻，则不同的坐法的总数为 ( )

(A) 60　(B) 72　(C) 84　(D) 96

10. 甲、乙、丙、丁、戊五人排成一排，甲和乙都排在丙的同一侧，拍法种数为 ( )

(A) 12　(B) 40　(C) 60　(D) 80

11. 已知曲线 $C:\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)，$A(-1,\ 0)$, $B(1,0)$. 若曲线 C 上存在点 P 满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$, 则实数 a 的取值范围为 ( )

(A) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(B) $[-1,\ 1]$　(C) $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$　(D) $[-2,\ 2]$

12. 现有 10 支队伍比赛，规定：比赛采取单循环比赛制，每支队伍与其他 9 支队伍各比赛一场，每场比赛中，胜方得 2 分，负方得 0 分，平局双方各得 1 分. 下面关于这 10 支队伍得分的叙述正确的是( )

(A) 可能有两支队伍得分都是 18 分　(B) 各队得分总和为 180 分

(C) 各支队伍中最高得分不少于 10 分　(D) 得偶数分的队伍必有偶数个

13. 一次猜奖游戏中，1,2,3,4 四扇门里摆放了 a, b, c, d, 四件奖品 (每扇门内仅放一件). 甲同学说：1 号门里是 b, 3 号门里是 c; 乙同学说：2 号门里是 b, 3 号门里是 d; 丙同学说：4 号门里是 b, 2 号门里是 c; 丁同学说：4 号门里是 a, 3 号门里是 c; ，如果他们每个人都猜对了一半，那么 4 号门里是 ( )

(A) a　(B) b　(C) c　(D) d

14. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})$, 点 $A(m,\ n)$, $B(m+\pi,\ n)(|n|\neq 1)$ 都在曲线 $y=f(x)$ 上，且线段 AB 与曲线 $y=f(x)$ 有五个公共点，则 ω 的值为 ( )

(A) 4　(B) 2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

15. 将函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $m\ (m>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 图象在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减，则 m 的最小值为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

16. 函数 $f(x)$ 的图象上任意一点 $A(x,\ y)$ 的坐标满足条件 $|x|\geqslant|y|$，称函数 $f(x)$ 具有性质 P. 下列函数中具有性质 P 的是 ( )

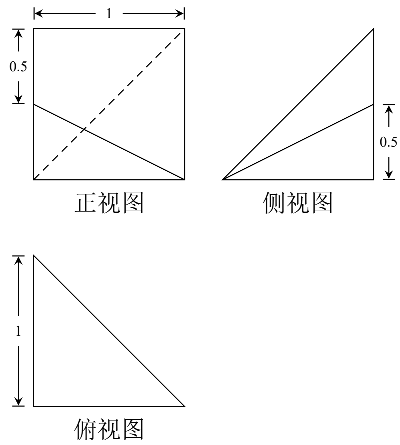
(A) $f(x)=x^2$　(B) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(C) $f(x)=\sin x$　(D) $f(x)=\ln(x+1)$

17. 如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a,\ b]$，使 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的值域为 $[2a,\ 2b]$，那么称 $f(x)$ 为"倍增函数". 若函数 $f(x)=\ln(e^x+m)$ 为"倍增函数"，则 m 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　(C) $(-1,0)$　(D) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$

18. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的底面的面积是 (　　)



(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

19. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = |n - c|$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 则“$c \leqslant 1$”是“$\{a_n\}$ 是递增数列”的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

20. 有五个 1，五个 2，五个 3，五个 4，五个 5 共 25 个数填入一个五行五列的表格中 (每格填入一个数)，使得同一行中任意两个数之差的绝对值不超过 2. 考察每行中五个数之和，记这五个数和的最小值为 m，则 m 的最大值为 (　　)

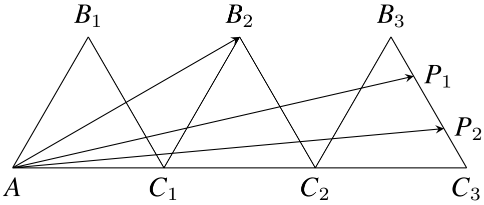
(A) 8　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 11

21. 为了促销某电子产品，商场进行降价，设 $m > 0$, $n > 0$, $m \neq n$, 有三种降价方案：
方案①: 先降 $m\%$, 再降 $n\%$;
方案②: 先降 $\dfrac{m+n}{2}\%$，再降 $\dfrac{m+n}{2}\%$
方案③: 一次性降价 $(m+n)\%$.
则降价幅度最小的方案是______.(填出正确的序号)

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，动点 $P(x, y)$ 到两坐标轴的距离之和等于它到定点 $(1, 1)$ 的距离，记点 P 的轨迹为 C，给出下面四个结论：
① 曲线 C 关于原点对称；
② 曲线 C 关于 $y = x$ 对称；
③ 点 $(-a^2, 1)(a \in \mathbf{R})$ 在曲线 C 上；
④ 在第一象限内，曲线 C 与 x 轴的非负半轴、y 轴的非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\dfrac{1}{2}$.
其中所有的正确结论的序号是______.

23. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 下列命题正确的有______.(写出所有正确命题的编号)
①$f(x)$ 是奇函数；
②$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数；
③方程 $f(x) = x^2 + 2x$ 有且仅有 1 个实数根；
④如果对于任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > kx$, 那么 k 的最大值为 2.

24. 如图，$\triangle AB_1C_1$, $\triangle C_1B_2C_2$, $\triangle C_2B_3C_3$ 是三个边长为 2 的等边三角形，且有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有两个不同的点 P_1, P_2, 则 $\overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) =$______.



25. 在三角形 $\triangle ABC$ 中，若 $b^2=ac$, $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\angle A=$______.

26. 若非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0, 2|a|=|b|$，则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角的大小为______.

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1: x+y=4$, 曲线 $C_2:\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$ (θ 为参数), 过原点 O 的直线 l 分别交 C_1, C_2 于 A, B 两点，则 $\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值为______.

28. 已知 $x>1$，则函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+x$ 的最小值为______.

29. 实数 a, b 满足 $0<a\leqslant 2$, $b\geqslant 1$，若 $b\leqslant a^2$，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是______.

30. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-2a)(a-x), & x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}+a-1, & x>1.\end{cases}$

(1) 若 $a=0$, $x\in[0,4]$, 则 $f(x)$ 的值域为______;

(2) 若 $f(x)$ 恰有三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

31. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\geqslant 0,\\ \cos\pi x, & x<0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x+a)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根，则实数 a 的最小值是______.

32. 已知实数 u,v,x,y 满足 $u^2+v^2=1$, $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0,\\ x-2y+2\geqslant 0,\\ x\leqslant 2.\end{cases}$ 则 $z=ux+vy$ 的最大值是______.

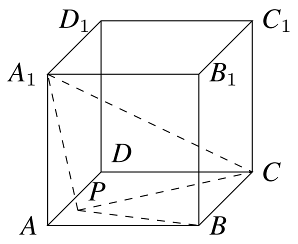
33. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 0, & x<0 或 x\geqslant 1\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x<0 或 x\geqslant 1.\end{cases}$ 则：

(1) $g(2x)=$______;

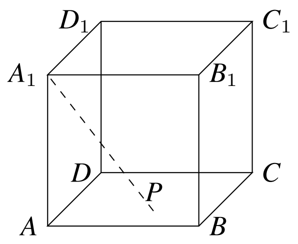
(2) 若 m, $n\in\mathbf{Z}$ 且 $m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=f(x)$，则 $m+n=$______.

34. 已知甲, 乙, 丙三人组成考察小组，每个组员最多可以携带供本人在沙漠中生存 36 天的水和食物，且计划每天向沙漠深处走 30 公里，每个人都可以在沙漠中将部分水和食物交给其他人然后独自返回，若组员甲与其他两个人合作，且要求三个人都能够安全返回，则甲最远能深入沙漠______ 公里.

35. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，平面区域 W 由所有满足 $A_1P\leqslant\sqrt{5}$ 的点 P 组成，则 W 的面积是______；四面体 $P-A_1BC$ 的体积的最大值是______.



36. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，平面区域 W 由所有满足 $A_1P \geqslant \sqrt{5}$ 的点 P 组成，则 W 的面积是______.



37. 数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，$a_{11}=8$，设 $b_n=\log_2 a_n$，且 $b_4=17$.

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是以 -2 为公差的等差数列；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 S_n 的最大值.

38. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 ω 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

39. 已知 $\dfrac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=2\cos^2 x+a\sin 2x+1$ 的一个零点.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

40. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，且 $a\tan C = 2c\sin A$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 求 $\sin A + \sin B$ 的取值范围.

41. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 1\ (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = xf(x) + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a = 1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m, m+1)\ (m \in \mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值.

42. 已知函数 $f(x) = \ln(kx) + \dfrac{1}{x} - k\ (k > 0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 对任意 $x \in \left[\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}\right]$, 都有 $x\ln(kx) - kx + 1 \leqslant mx$, 求 m 的取值范围.

43. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, $A(x_1,m)$, $B(x_2,m)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的两个不同的点.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间，并写出实数 m 的取值范围

(2) 证明：$x_1+x_2>0$

44. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$.

(1) 判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由;

(2) 若 $f(x)\leqslant 0$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

45. 已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(1,f(1)\big)$ 处的切线方程；

(2) 求证：$f(x)\geqslant x-1$;

(3) 若 $f(x)\geqslant ax^2+\dfrac{2}{a}\ (a\neq 0)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小值.

46. 已知函数 $f(x)=e^x-x^2+ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1) 求 a 的值；

(2) 若 $g(x)=e^x-2x-1$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

(3) 求证: 存在 $c<0$，当 $x>c$ 时，$f(x)>0$.

47. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{2}x^2-x-\ln x$.

(1) 求曲线 $C: y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线 l 的方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 在定义域内是单调函数，求 m 的取值范围;

(3) 当 $m>-1$ 时，(1) 中的直线 l 与曲线 $C: y=f(x)$ 有且仅有一个公共点，求 m 的取值范围.

48. 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,\ 1]$.

(1) 求直线 l 的方程 (用 x_0 表示)；

(2) 设 O 为坐标原点，直线 $x=1$ 分别与直线 l 和 x 轴交于 A, B 两点，求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值.

(3) 求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

(4) 设 $y=a$ 分别与直线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1$ $(x\in[0,\ +\infty))$ 交于 M, N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.

49. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 直线 $l: x=my+1$ 与 x 轴交于点 A，与椭圆 C 交于点 E, F 两点. 自点 E, F 分别向直线 $x=3$ 做垂线，垂足分别为 E_1, F_1.

(1) 求椭圆 C 的方程及焦点坐标；

(2) 记 $\triangle AEE_1$, $\triangle AE_1F_1$, $\triangle AFF_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3，试证明 $\frac{S_1S_3}{S_2^2}$ 为定值.

50. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F，点 $P(0,1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点，交直线 $x=2$ 于点 P, 设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$, 求证:$\lambda+\mu$ 为定值.

51. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，与 x 轴不重合的直线 l 经过左焦点 F_1，且与椭圆 G 相交于 A, B 两点，弦 AB 的中点为 M, 直线 OM 与椭圆 G 相交于 C, D 两点.

(1) 若直线 l 的斜率为 1，求直线 OM 的斜率；

(2) 是否存在直线 l，使得 $|AM|^2=|CM|\cdot|DM|$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

52. 已知点 P 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上一点，点 P 到椭圆 C 的两个焦点的距离之和为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 A, B 是椭圆 C 上异于点 P 的两点，直线 PA 与直线 $x=4$ 交于点 M, 是否存在点 A, 使得 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABM}$？若存在，求出点 A 的坐标；若不存在，说明理由.

53. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 短半轴长为 1.

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 设椭圆 G 的短轴端点分别为 A, B，点 P 是椭圆 G 上异于点 A, B 的一动点，直线 PA, PB 分别与直线 $x=4$ 交于 M, N 两点，以线段 MN 为直径作圆 C.

① 当点 P 在 y 轴的左侧时，求圆 C 半径的最小值；

② 问：是否存在一个圆心在 x 轴上的定圆与圆 C 相切？若存在，指出该定圆的圆心和半径，并证明你的结论；若不存在，说明理由.

54. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A, B 且 $|AB|=4$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 $Q(4,0)$，若点 P 在直线 $x=4$ 上，直线 BP 与椭圆交于另一点 M. 判断是否存在点 P，使得四边形 $APQM$ 为梯形？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，说明理由.