仁寿一中南校区 2020 级第二次质量检测数学科试题

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列四个关系中，正确的是（A　）

A. $a\in\{a,b\}$　　B. $\{a\}\in\{a,b\}$　　C. $a\notin\{a\}$　　D. $a\notin\{a,b\}$

2. 下列选项中，表示的是同一函数的是（　B　）.

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$　$,g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$，$g(t)=|t|$

C. $f(x)=(x-1)^2$　$,g(x)=(x-2)^2$　　D. $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$　$,g(x)=\sqrt{x^2-1}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，非空集合 B 满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则集合 B 的个数为（ C）

A．3　　B．6　　C．7　　D．8

4. 已知 $f(x-3)=2x^2-3x+1$，则 $f(1)=$　（　B　）

A．15　　B．21　　C．3　　D．0

5. 函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$ 的定义域为（C ）

A. $\{x\mid x\geq 0\}$　　B. $\{x\mid x\geq 1\}$

C. $\{x\mid x\geq 1\}\cup\{0\}$　　D. $\{x\mid 0\leq x\leq 1\}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leq 1,\\ \dfrac{2}{x},x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(3))=$　（　D）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B．3　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{13}{9}$

7. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3)$，则 $f(x-2)$ 的定义域为（　A　）

A. $[1,6)$　　B. $[-2,3)$　　C $[-1,4)$.　　D. $[0,5)$

8. 二次函数 $f(x)=ax^2+2a$ 是区间 $[-a，a^2]$ 上的偶函数，又 $g(x)=f(x-1)$，则 $g(0)$，$g\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$g(3)$ 的大小关系为(　A　)

A. $g\left(\frac{3}{2}\right)<g(0)<g(3)$　　B. $g(0)<g\left(\frac{3}{2}\right)<g(3)$

C. $g\left(\frac{3}{2}\right)<g(3)<g(0)$　　D. $g(3)<g\left(\frac{3}{2}\right)<g(0)$

9. 已知函数$f\left(x\right)$满足$f\left(2x\right)=2f\left(x\right)$，且当$1\le x<2$时，$f\left(x\right)=x^2$，则$f\left(3\right)=$（　C）

A. $\frac{9}{8}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 9

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}1，x>0，\\0，x=0，\\-1，x<0，\end{cases}$ 设$F(x)=x^2f(x)$，则对$F(x)$描述正确的是(　B　)

A．是奇函数，在(－∞，＋∞)上递减

B．是奇函数，在(－∞，＋∞)上递增

C．是偶函数，在(－∞，0)上递减，在(0，＋∞)上递增

D．是偶函数，在(－∞，0)上递增，在(0，＋∞)上递减

11. 已知定义在R上的奇函数$f\left(x\right)$,当$x>0$时，$f\left(x\right)=x^2+x-1$,那么当$x<0$时，$f\left(x\right)$的解析式为（　D　）.

A. $f\left(x\right)=x^2+x+1$　　B. $f\left(x\right)=-x^2-x+1$

C. $f\left(x\right)=-x^2+x-1$　　D. $f\left(x\right)=-x^2+x+1$

12. 若函数$f\left(x\right)=\sqrt{ax^2-2ax+2}$的值域为$\left[0,+\infty\right)$，则实数$a$的取值范围是（　D　）

A. $0<a<2$　　B. $0\le a\le 2$　　C. $a\le 0,或a\ge 2$　　D. $a\ge 2$

第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每题5分，共20分。请将正确答案直接答在答题卡相应的位置上。

13. 若全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,2,5\}$，则$\complement_U\left(A\cup B\right)=$_$\{3,6\}$____.

14.若$f\left(x+1\right)=x^2+3x+2$，则$f\left(x\right)$的解析式为________________. $f\left(x\right)=x^2+x$

15. 函数$f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2+x-1(x>2)\\-x+1\left(x\le 2\right)\end{cases}$是$R$上的单调递减函数，则实数$a$的取值范围是_____

_$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

16. 如果函数 $y=f(x)$在区间 I 上是增函数，且函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 I 上是减函数，那么称函数 $y=f(x)$是区间 I 上的“缓增函数”，区间 I 叫做“缓增区间”．若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$ 是区间 I 上的“缓增函数”，则“缓增区间”I 为______．$[1,\ \sqrt{3}\ ]$

三、解答题：本大题 6 个小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题 10 分） 已知二次函数 $f(x)$的最小值为 1，且 $f(0)=f(2)=3$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)若 $f(x)$在区间$[2a,\ a+1]$上不单调，求实数 a 的取值范围；

解：(1)由题意设 $f(x)=a(x-1)^2+1(a\neq 0)$，

将点$(0,3)$的坐标代入得 $a=2$，

所以 $f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$.　　.........................5 分

(2)由(1)知，$f(x)$的对称轴为直线 $x=1$，

所以 $2a<1<a+1$，

所以 $0<a<\frac{1}{2}$　　. ....10 分

18．（本小题 12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x}$，且 $f(1)=2$.

（1）证明函数 $f(x)$是奇函数；

（2）证明函数 $f(x)$在 $(1,+\infty)$ 上是增函数；

证明：（1）由题意，函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称，. 2 分

又由 $f(-x)=\dfrac{x^2+a}{-x}=-\dfrac{x^2+a}{x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$是定义域上的奇函数. . . . 4 分

（2）因为 $f(1)=2$，可得 $\dfrac{1+a}{1}=2$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$，. . . . . 6 分

任取 $x_2>x_1>1$，

则 9 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}=(x_1-x_2)+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)(1-\dfrac{1}{x_1x_2})$，. . . . 9 分

因为 $x_2>x_1>1$，所以 $x_1x_2>1$，可得 $0<\dfrac{1}{x_1x_2}<1$，即 $1-\dfrac{1}{x_1x_2}>0$ 且 $x_1-x_2<0$，

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上是增函数…………………12 分

19. （本小题 12 分）已知集合 $A=\left\{x\middle|-3<x<4\right\}$， $B=\left\{x\middle|x^2-4ax+3a^2=0\right\}$.

（1）若 $A\bigcap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围;

（2）若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

解:方程 $x^2-4ax+3a^2=0$ 可得 $x=a$ 或 $x=3a$，

当 $a=0$ 时， $B=\left\{0\right\}$；当 $a\neq 0$ 时， $B=\left\{a,3a\right\}$ ....2 分

（1）由题可知 $A=\left\{x\middle|-3<x<4\right\}$，当 $a=0$ 时， $A\cap B=\left\{0\right\}$，显然不符合 $A\bigcap B=\varnothing$；

当 $a\neq 0$ 时，因为 $A\bigcap B=\varnothing$，所以 $a\notin A$，$3a\notin A$，所以 $\begin{cases}a\le -3\text{或}a\ge 4\\3a\le -3\text{或}3a\ge 4\end{cases}$，所以 $a\le -3$

或 $a\ge 4$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-3\right]\bigcup\left[4,+\infty\right)$. …………7 分

（2）因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，当 $a=0$ 时， $B=\left\{0\right\}$ 显然满足题意； ……..9 分

当 $a\neq 0$ 时，由 $B=\left\{a,3a\right\}$，所以 $a\in A$，$3a\in A$，所以 $\begin{cases}-3<a<4\\-3<3a<4\end{cases}$，所以 $-1<a<\dfrac{4}{3}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(-1,\dfrac{4}{3}\right)$. ……………12 分

20. （本小题 12 分）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 是单调递增函数，满足 $f(3)=6$． 且

$f(x+y)=f(x)+f(y)(x,y\in R)$，

（1）求 $f(0),\ f(1)$；

（2）解关于 x 不等式 $f\left(2x-x^2\right)+f\left(kx-2k\right)>0$.

（1）令 x=y=0, 得 $f(0)=0,$ ....1 分

$令x=1,y=2,得f\left(1\right)+f\left(2\right)=f\left(3\right)=6$；

又 $f\left(2\right)=2f\left(1\right)$ ， $\therefore f\left(3\right)=3f\left(1\right),\therefore f\left(1\right)=2$ …………4 分

（2）$\because f(x)$ 是奇函数，且 $f\left(2x-x^2\right)+f\left(kx-2k\right)>0$，

$\therefore f\left(2x-x^2\right)>f\left(2k-kx\right)$，且 $f(0)=0<f(1)=2$； ……………6 分

$\therefore f(x)$在R上是增函数，

$\therefore 2x-x^2>2k-kx$, 即$(x-2)(x-k)<0$ .... 9 分

当$k<2$时，原不等式的解集为$(k,2)$ ....10 分

当$k=2$时，原不等式的解集为ϕ ....11 分

当$k>2$时，原不等式的解集为$(2,k)$ ....12 分

21.（本小题 12 分）2020 年 9 月 19-20 日我校举办主题为“壮丽七十周年，young 出青春色彩”运动会，期间学生对瓶装水需求量增大，经调查发现，学校小卖部瓶装水在过去的 100 天内的销售量（单位：件）和价格（单位：元）均为时间t（单位：天）的函数，且销售量近似地满足 $f(t)=\begin{cases}60+t,1\le t\le 60\\150-\frac{1}{2}t,61\le t\le 100\end{cases}$ $(t\in N)$，价格为 $g(t)=200-t$ $(1\le t\le 100,t\in N)$.

（1）求该种商品的日销售额$h(t)$与时间t的函数关系；

（2）求t为何值时，日销售额最大.

解：(1)由题意知，

当$1\le t\le 60,t\in N$时

$h(t)=f(t)\cdot g(t)=(60+t)\cdot(200-t)=-t^2+140t+12000$， ....2 分

当$61\le t\le 100,t\in N$时

$h(t)=f(t)\cdot g(t)=\left(150-\frac{1}{2}t\right)\cdot(200-t)=\frac{1}{2}t^2-250t+30000$， .... 4 分

所以，所求函数关系为$h(t)=\begin{cases}-t^2+140t+12000,(1\le t\le 60,t\in N),\\\frac{1}{2}t^2-250t+30000,(61\le t\le 100,t\in N).\end{cases}$ ...... 6 分

(2) 当 $1\le t\le 60$， $t\in N$时， $h(t)==-t^2+140t+12000=-(t-70)^2+16900$，

所以，函数$h(t)$在$[1,60]$上单调递增，故$h(t)_{\max}=h(60)=16800$（元），.......... 8 分

当$61\le t\le 100$， $t\in N$时， $h(t)=\frac{1}{2}t^2-250t+30000=\frac{1}{2}(t-250)^2-1250$，

所以，函数 $h(t)$ 在 $[61,100]$ 上单调递减，故 $h(t)_{\max}=h(61)=16610.5$（元），..............10 分

因为 $16610.5<16800$，所以，当 t 为 60 时，日销售额最大. ....12 分

22.（本小题 12 分）已知 $y=f(x)$（$x\in D$，D 为此函数的定义域）同时满足下列两个条件：①函数 $f(x)$ 在 D 内单调递增或单调递减；②如果存在区间 $[a,b]\subseteq D$，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[a,b]$，那么称 $y=f(x)$，$x\in D$ 为闭函数

（1）判断函数 $f(x)=1+x-x^2(x\in(0,+\infty))$ 是否为闭函数？并说明理由；

（2）求证：函数 $y=-x^3$（$x\in[-1,1]$）为闭函数；

（3）若 $y=k+\sqrt{x}(k<0)$ 是闭函数，求实数 k 的取值范围.

（1）函数 f（x）在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

所以，函数在定义域上不是单调递增或单调递减函数，从而该函数不是闭函数. ....3 分

（2）先证 $y=-x^3$ 符合条件①：对于任意 x_1，$x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，

有 $y_1-y_2=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$，

∴$y_1>y_2$，故 $y=-x^3$ 是 R 上的减函数. ....5 分

又因为 $y=-x^3$ 在 $[-1,1]$ 上的值域是 $[-1,1]$. ....6 分

所以函数 $y=-x^3$（$x\in[-1,1]$）为闭函数；..............7 分

（3）易知 $y=k+\sqrt{x}$ 是（0，+∞）上的增函数，符合条件①；

设函数符合条件②的区间为 [a，b]，则有 $\begin{cases}a=k+\sqrt{a}\\ b=k+\sqrt{b}\end{cases}$；..............8 分

故 a，b 是 $x=k+\sqrt{x}$ 的两个不等根，即方程组为：$\begin{cases}x^2-(2k+1)x+k^2=0\\ x\geqslant 0\\ x\geqslant k\end{cases}$ 有两个不等非负实根；..............10 分

设 x_1，x_2 为方程 $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ 的二根，则 $\begin{cases}\Delta=(2k+1)^2-4k^2>0\\ x_1+x_2=2k+1>0\\ x_1x_2=k^2\geqslant 0\\ k<0\end{cases}$，解得：$-\frac{1}{4}<k<0$

∴k 的取值范围：$\left(-\frac{1}{4},0\right)$. ....12 分