

## 一、填空题（每题3分，共42分）

1. 设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
2. 不等式  $x(x-2) < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_.
3. 已知集合  $A = \{x | (x-1)^2 \leq 0\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.
4. 设集合  $A = \{\sqrt{x}, 2\}$ ,  $B = \{3, -5, y\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $xy =$  \_\_\_\_\_.
5. 用描述法表示被3除余2的所有自然数组成的集合 \_\_\_\_\_.
6. 满足  $\{a, b\} \subset M \subseteq \{a, b, c, d, e\}$  的集合  $M$  的个数是 \_\_\_\_\_ 个.
7. 已知  $\alpha: x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ,  $\beta: x < a$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 则满足条件的最小的整数  $a$  为 \_\_\_\_\_.
8. 已知集合  $P = \{x | 2x^2 + x - 3 = 0\}$ ,  $Q = \{x | mx = 1\}$ , 若  $Q \subset P$ , 则实数  $m$  的取值集合为 \_\_\_\_\_.
9. 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + 2 > 0$  的解集是  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , 则  $bx^2 + ax < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_.
10. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + ax + 3a = 0$  的两个实根为  $x_1, x_2$ ,  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -9$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.
11. 有四个命题: ①  $a > b \Rightarrow c - a < c - b$ ; ②  $a > b, c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ ; ③  $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$ ; ④  $a^3 > b^3 \Rightarrow a > |b|$ ;  
其中正确的命题是 \_\_\_\_\_ (填序号)
12. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} x-1 > a^2 \\ x-4 \leq 2a \end{cases}$  的解集非空, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
13. 若关于  $x$  的不等式  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 2 > 0$  对一切实数  $x$  都成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
14. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $x > 0$  时, 均有  $(ax-1)(x^2-3ax-1) \geq 0$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

## 二、选择题（每题3分，共12分）

15. 若  $\alpha: (x-1)(x+3) \geq 0$ ,  $\beta: x-1 \geq 0$ , 则  $\alpha$  是  $\beta$  的 ( )  
A. 必要不充分条件    B. 充分不必要条件    C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
16. 已知集合  $A = \{(x, y) | |x+1| + (y-2)^2 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) | xy \leq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ , 则 ( )  
A.  $A \in B$     B.  $A \subseteq B$     C.  $A \supseteq B$     D.  $A \cap B = \emptyset$
17. “对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 \geq 0$ ”的否定形式为 ( )  
A. 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 < 0$ ;    B. 不存在  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 < 0$   
C. 存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $x_0^2 \geq 0$ ;    D. 存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $x_0^2 < 0$
18. 设  $U$  为全集,  $S_1, S_2, S_3$  是  $U$  的三个非空子集, 且  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = U$ , 则下列论断正确的是 ( )  
A.  $\overline{S_1} \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$     B.  $S_1 \subseteq \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$     C.  $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} = \emptyset$     D.  $S_1 \subseteq \overline{S_2} \cup \overline{S_3}$

三、解答题（本大题共 46 分，解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要步骤。）

19、（本题共 6 分）设集合  $A = \{x^2, 2x-1, -4\}$ ,  $B = \{x-5, 1-x, 9\}$ ，若  $A \cap B = \{9\}$ ，求实数  $x$  的值。

20、（本题共 8 分，第一小题 4 分，第二小题 4 分）

设全集  $U = \mathbb{R}$ ， $P = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ， $Q = \{x | -3 \leq x - a \leq 3\}$ 。

（1）若集合  $P \cup Q = Q$ ，求实数  $a$  的取值范围；

（2）若  $\overline{P \cap Q} = U$ ，求实数  $a$  的取值范围。

21、（本题共 8 分，第一小题 3 分，第二小题 5 分）

已知卡车从踩刹车到停车所滑行的距离  $s$ （米）与速度  $v$ （千米/小时）的平方和卡车总质量  $m$ （吨）的乘积成正比，设某辆卡车不装货物以 60 千米/小时的速度行驶时，从刹车到停车滑行了 20 米。

（1）当这辆卡车不装货物以 36 千米/小时的速度行驶，从刹车到停车所滑行的距离为多少米？

（2）如果这辆卡车装着等同于车重的货物行驶时，发现前面 20 米处有障碍物，卡车司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 秒，这时为了能在离障碍物 5 米以外处停车，最大限制时速应是多少千米/小时？（结果精确到 0.1）

22、（本题共 12 分，第一小题 3 分，第二小题 4 分，第三小题 5 分）

设集合  $S = \{a | a = m^2 - n^2, m, n \in \mathbb{Z}\}$ 。

（1）判断元素 3 是否属于集合  $S$ ，并说明理由；

（2）设集合  $P = \{b | b = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}\}$ ，证明： $P \subset S$ ；

（3）设  $c = 4k - 2 (k \in \mathbb{Z})$ ，证明： $c \notin S$ 。

23、（本题共 12 分，第一小题 3 分，第二小题 4 分，第三小题 5 分）

符号  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数 ( $x \in R$ )，例如  $[1.3] = 1$ ,  $[2] = 2$ ,  $[-1.2] = -2$ .

(1) 解方程  $[x] = 2$ ;

(2) 设  $A = \{x \mid [x^2] \leq 8\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 7kx + 10k^2 \geq 0\}$ ,  $A \cup B = R$ , 求实数  $k$  的取值范围;

(3) 求方程  $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$  的实数解.

## 一、填空题(每题3分,共42分)

1、设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

【答案】:  $\{1\}$

2、不等式  $x(x-2) < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_.

【答案】:  $(0, 2)$

3、已知集合  $A = \{x | (x-1)^2 \leq 0\}$ ,  $B = (1, 2]$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.

【答案】:  $[1, 2]$

4、设集合  $A = \{\sqrt{x}, 2\}$ ,  $B = \{3, -5, y\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $xy =$  \_\_\_\_\_.

【答案】: 18

5、用描述法表示被3除余2的所有自然数组成的集合 \_\_\_\_\_.

【答案】:  $\{x | x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$

6、满足  $\{a, b\} \subset M \subseteq \{a, b, c, d, e\}$  的集合  $M$  的个数是 \_\_\_\_\_ 个.

【答案】: 7

7、已知  $\alpha: x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ,  $\beta: x < a$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 则满足条件的最小的整数  $a$  为 \_\_\_\_\_.

【答案】: 3

8、已知集合  $P = \{x | 2x^2 + x - 3 = 0\}$ ,  $Q = \{x | mx = 1\}$ , 若  $Q \subset P$ , 则实数  $m$  的取值集合为 \_\_\_\_\_.

【答案】:  $\left\{0, 1, -\frac{2}{3}\right\}$

9、若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + 2 > 0$  的解集是  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , 则  $bx^2 + ax < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_.

【答案】:  $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

10、已知关于  $x$  的方程  $x^2 + ax + 3a = 0$  的两个实根为  $x_1, x_2$ ,  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -9$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

【答案】:  $-\sqrt{3}$

11、有四个命题: ①  $a > b \Rightarrow c - a < c - b$ ; ②  $a > b, c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ ; ③  $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$ ; ④  $a^3 > b^3 \Rightarrow a > |b|$ ;

其中正确的命题是 \_\_\_\_\_ (填序号)

【答案】: ①③

12、若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} x-1 > a^2 \\ x-4 \leq 2a \end{cases}$  的解集非空, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】:  $(-1, 3)$

13、若关于  $x$  的不等式  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 2 > 0$  对一切实数  $x$  都成立，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】：  $[1, 9)$

14、设  $a \in \mathbb{R}$ ，若  $x > 0$  时，均有  $(ax-1)(x^2-3ax-1) \geq 0$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】：  $\frac{1}{2}$

## 二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

15、若  $\alpha: (x-1)(x+3) \geq 0$ ， $\beta: x-1 \geq 0$ ，则  $\alpha$  是  $\beta$  的（ ）

A. 必要不充分条件      B. 充分不必要条件      C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

【答案】： A

16、已知集合  $A = \{(x, y) \mid |x+1| + (y-2)^2 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{(x, y) \mid xy \leq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ，则（ ）

A.  $A \in B$       B.  $A \subseteq B$       C.  $A \supseteq B$       D.  $A \cap B = \emptyset$

【答案】： B

17、“对任意  $x \in \mathbb{R}$ ，都有  $x^2 \geq 0$ ”的否定形式为（ ）

A. 对任意  $x \in \mathbb{R}$ ，都有  $x^2 < 0$ ；      B. 不存在  $x \in \mathbb{R}$ ，都有  $x^2 < 0$   
C. 存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得  $x_0^2 \geq 0$ ；      D. 存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得  $x_0^2 < 0$

【答案】： D

18、设  $U$  为全集， $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  是  $U$  的三个非空子集，且  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = U$ ，则下列论断正确的是（ ）

A.  $\overline{S_1} \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$       B.  $S_1 \subseteq \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$       C.  $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} = \emptyset$       D.  $S_1 \subseteq \overline{S_2} \cup \overline{S_3}$

【答案】： C

## 三、解答题（本大题共 46 分，解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要步骤。）

19、（本题共 6 分）设集合  $A = \{x^2, 2x-1, -4\}$ ， $B = \{x-5, 1-x, 9\}$ ，若  $A \cap B = \{9\}$ ，求实数  $x$  的值.

【答案】： 见解析

【解析】： 由题意知，需满足： $x^2 = 9$  或  $2x-1 = 9$ ，即  $x = \pm 3$  或  $5$ .      2 分

检验：当  $x = 3$  时， $A = \{9, 5, -4\}$ ， $B = \{-2, -2, 9\}$ ，集合  $B$  无意义，舍去；      (1 分)

当  $x = -3$  时， $A = \{9, -7, -4\}$ ， $B = \{-8, 4, 9\}$ ，此时  $A \cap B = \{9\}$ ，满足题意；      (1 分)

当  $x = 5$  时， $A = \{25, 9, -4\}$ ， $B = \{0, -4, 9\}$ ，此时  $A \cap B = \{-4, 9\}$ ，不符合题意，舍去.      (1 分)

综上， $x = -3$ .      (1 分)

20、（本题共 8 分，第一小题 4 分，第二小题 4 分）

设全集  $U = \mathbb{R}$ ， $P = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$ ， $Q = \{x \mid -3 \leq x - a \leq 3\}$ .

(1) 若集合  $P \cup Q = Q$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $\overline{P \cap Q} = U$ , 求实数  $a$  的取值范围.

【答案】: 见解析

【解析】: (1)  $P = (-2, 3)$ ,  $Q = [a-3, a+3]$  (2分)

由题意知:  $P \subseteq Q$ , 故  $\begin{cases} a-3 \leq -2 \\ a+3 \geq 3 \end{cases}$ ,  $\therefore -1 \leq a \leq 0$ . (2分)

(2) 由题意知:  $P \cap Q = \emptyset$ , 故  $a+3 \leq -2$  或  $a-3 \geq 3$ ,  $\therefore a \leq -5$  或  $a \geq 6$ . (4分)

21、(本题共 8 分, 第一小题 3 分, 第二小题 5 分)

已知卡车从踩刹车到停车所滑行的距离  $s$  (米) 与速度  $v$  (千米/小时) 的平方和卡车总质量  $m$  (吨) 的乘积成正比, 设某辆卡车不装货物以 60 千米/小时的速度行驶时, 从刹车到停车滑行了 20 米.

(1) 当这辆卡车不装货物以 36 千米/小时的速度行驶, 从刹车到停车所滑行的距离为多少米?

(2) 如果这辆卡车装着等同于车重的货物行驶时, 发现前面 20 米处有障碍物, 卡车司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 秒, 这时为了能在离障碍物 5 米以外处停车, 最大限制时速应是多少千米/小时? (结果精确到 0.1)

【答案】: 见解析

【解析】: (1) 由题意知:  $s = kv^2m$ , 设卡车的不装货物的重量为  $m_0$ , 则  $20 = 3600km_0$ , 得:  $k = \frac{1}{180m_0}$ ,

当  $v = 36$  千米/小时,  $s = \frac{1}{180m_0} \cdot 36^2 \cdot m_0 = 7.2$  (米).

所以当这辆卡车不装货物以 36 千米/小时的速度行驶, 从刹车到停车所滑行的距离为 7.2 米. (3 分)

(2) 卡车司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 秒, 行驶的路程为  $v \cdot \frac{1}{3600} \cdot 1000 = \frac{5}{18}v$  (米),

刹车后滑行的距离为  $\frac{1}{180m_0} \cdot v^2 \cdot 2m_0 = \frac{1}{90}v^2$  (米),

故需满足:  $\frac{5}{18}v + \frac{1}{90}v^2 < 15$ , (2分)

整理得:  $v^2 + 25v - 1350 < 0$ , 又  $v > 0$ ,

解得:  $0 < v < \frac{-25 + 5\sqrt{241}}{2} \approx 26.31$ . (2分)

所以最大限制时速应是 26.3 千米/小时. (1分)

22、(本题共 12 分, 第一小题 3 分, 第二小题 4 分, 第三小题 5 分)

设集合  $S = \{a | a = m^2 - n^2, m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

(1) 判断元素 3 是否属于集合  $S$ , 并说明理由;

(2) 设集合  $P = \{b | b = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}\}$ , 证明:  $P \subset S$ ;

(3) 设  $c = 4k - 2 (k \in \mathbb{Z})$ , 证明:  $c \in S$ .

【答案】：见解析

【解析】：(1)  $\because 3 = 2^2 - 1^2, 2 \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z}, \therefore 3 \in S$ . (3分)

(2) 证明：对于任意的  $b \in P$ ，存在  $t \in \mathbb{Z}$ ，使得  $b = 2t + 1 = (t+1)^2 - t^2$ ，

$\because t \in \mathbb{Z}, \therefore t+1 \in \mathbb{Z}, \therefore b \in S, \therefore P \subseteq Q$ . (3分)

又  $\because 0 = 0^2 - 0^2, \therefore 0 \in S, 0 \notin P$ , (1分)

$\therefore P \subset S$ .

(3) 反证法：若  $c \in S$ ，则存在  $m, n \in \mathbb{Z}$ ，使得  $c = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ . (1分)

1° 若  $m, n$  其中一个为奇数，一个为偶数，则  $m+n, m-n$  都为奇数，则  $c$  为奇数，与已知  $c = 4k - 2 (k \in \mathbb{Z})$  是偶数矛盾. (2分)

2° 若  $m, n$  两个数都是奇数或两个数都是偶数，则  $m+n, m-n$  都为偶数，则  $c$  为4的倍数，与已知  $c = 4k - 2 (k \in \mathbb{Z})$  矛盾. (2分)

故假设不成立，即  $c \notin S$

### 23、(本题共12分，第一小题3分，第二小题4分，第三小题5分)

符号  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数 ( $x \in \mathbb{R}$ )，例如  $[1.3] = 1, [2] = 2, [-1.2] = -2$ .

(1) 解方程  $[x] = 2$ ;

(2) 设  $A = \{x | [x^2] \leq 8\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 7kx + 10k^2 \geq 0\}$ ,  $A \cup B = \mathbb{R}$ ，求实数  $k$  的取值范围;

(3) 求方程  $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$  的实数解.

【答案】：见解析

【解析】：(1)  $x \in [2, 3)$ ; (3分)

(2)  $\because [x^2] \leq 8, \therefore x^2 < 9, \therefore -3 < x < 3, \therefore A = (-3, 3)$  (1分)

$$B = \{x | (x - 2k)(x - 5k) \geq 0\}$$

① 当  $k = 0$  时， $B = \mathbb{R}$ ，满足题意; (1分)

② 当  $k > 0$  时， $B = (-\infty, 2k] \cup [5k, +\infty)$ ，需满足  $5k \leq 3$ ，得  $0 < k \leq \frac{3}{5}$ ; (1分)

③ 当  $k < 0$  时， $B = (-\infty, 5k] \cup [2k, +\infty)$ ，需满足  $-3 \leq 5k$ ，得  $-\frac{3}{5} \leq k < 0$ . (1分)

综上， $k \in \left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$

(3) 当  $x \leq 0$ ， $[x] \leq 0$ ，显然不满足方程; (1分)

当  $x > 0$  时， $[x] \geq 0$ ，由  $[x] \leq x < [x] + 1$ ，可得： $[x]^2 \leq x^2 < ([x] + 1)^2$ , (1分)

---


$$\therefore [x]^2 \leq \frac{40[x]-51}{4} < ([x]+1)^2, \text{ 令 } t=[x],$$

$$\text{整理可得: } \begin{cases} 4t^2 - 32t + 55 > 0 \\ 4t^2 - 40t + 51 \leq 0 \end{cases}, \text{ 求解得: } \begin{cases} t < \frac{5}{2} \text{ 或 } t > \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{17}{2} \end{cases}, \text{ 即 } t \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right], \text{ 又 } t \in \mathbb{N},$$

$$\therefore t = 2, 6, 7, 8 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } [x] = 2 \text{ 时, } 4x^2 - 29 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{29}}{2}; \text{ 当 } [x] = 6 \text{ 时, } 4x^2 - 189 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{3\sqrt{21}}{2};$$

$$\text{当 } [x] = 7 \text{ 时, } 4x^2 - 229 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{229}}{2}; \text{ 当 } [x] = 8 \text{ 时, } 4x^2 - 269 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{269}}{2}.$$

经检验, 以上四个解都是方程的解. (1 分)