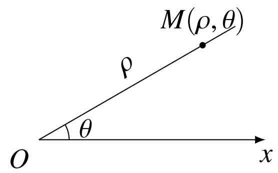
极坐标和参数方程

目录

1 极坐标

1.1 极坐标的定义

在平面内取一个定点 O , 叫做极点, 自极点 O 引一条射线 Ox, 叫做极轴; 再选定一个长度单位, 一个角度单位 (通常取弧度) 及其正方向 (通常取逆时针方向), 这样就建立了一个极坐标系. 如下图：



极坐标系四要素：①极点；　② 极轴；　③长度单位；　④ 角度单位和正方向.

点 M 的极坐标：设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径，记为 ρ；以极轴为始边，射线 OM 为终边的 M 叫做点 M 的极角，记为 θ. 有序数对 (ρ,θ) 叫做点 M 的极坐标，记为 $M(\rho,\theta)$.

注：①极坐标 (ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 表示同一个点。极点 O 的坐标为 $(0,\theta)(\theta\in\mathbf{R})$;

②一般的，不做特殊说明情况下，$\rho\geqslant 0$.

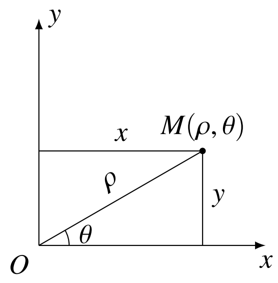
1.2 极坐标与直角坐标的互化

互化的前提条件:

1) 极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合；

2) 极轴与 x 轴的正半轴重合；

3) 两种坐标系中取相同的长度单位.



互化公式：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \\ x = \rho \cos\theta \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}(x \neq 0) \end{cases}$$

1.3 常用极坐标方程

1) 直线的极坐标方程：若直线过点 $M(\rho_0, \theta_0)$，且极轴到此直线的角为 α，则它的方程为:

$$\rho \sin(\theta - \alpha) = \rho_0 \sin(\theta_0 - \alpha)$$

特别的：

a) 当直线 l 过极点，即 $\rho_0 = 0$ 时，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha(\rho \in \mathbf{R})$ 或写成：$\theta = \alpha$ 及 $\theta = \alpha + \pi$;

b) 直线过点 $M(a, 0)$ 且垂直于极轴时，直线 l 的极坐标方程为:$\rho\cos\theta = a$;

c) 直线过 $M(a, \dfrac{\pi}{2})$ 且平行于极轴时，直线 l 的极坐标方程为:$\rho\sin\theta = b$;

2) 圆的极坐标方程：若圆心为 $M(\rho_0, \theta_0)$，半径为 r 的圆方程为：

$$\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 - r^2 = 0$$

特别的：

a) 圆心在极轴上点 $(a, 0)(a > 0)$ 处，且圆过极点 O 的圆的方程：$\rho = 2a\cos\theta$;

b) 圆心在极轴上点 $(a, \dfrac{\pi}{2})(a > 0)$ 处，且圆过极点 O 的圆的方程：$\rho = 2a\sin\theta$;

注意事项：

1) 极坐标与直角坐标可以相互转化，但是不能直接相互调用化简 (参数方程可以直接代入到直角坐标方程中)；

2) 求解极坐标方程有关问题，主要有两种方法：

(1) 直接解极坐标方程，联立极坐标方程得到 θ 和 ρ，这种方法在解曲线交点时比较方便；

(2) 将极坐标方程转化为直角坐标方程，用直角坐标方程进行求解，这种方法可以避免方程理解错误，但是有些时候计算不是很方便.

1.4 练习

1. 在极坐标系中，圆 $\rho = -2\sin\theta$ 的圆心的极坐标方程是 ( )

(A) $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $(1, 0)$ (D) $(1, \pi)$

2. 在极坐标系中，曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 是 ( )

(A) 过极点的直线 (B) 半径为 2 的圆

(C) 关于极点对称的图形 (D) 关于极轴对称的图形

3. 极坐标方程 $(\rho - 1)(\theta - \pi) = 0\,(\rho \geqslant 0)$ 表示的图形是 ( )

(A) 两个圆 (B) 两条直线

(C) 一个圆和一条射线 (D) 一条直线和一条射线

4. 在极坐标系中，曲线 $\rho = 4\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ 关于 ( )

(A) 直线 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 轴对称

(B) 直线 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 轴对

(C) 点 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 对称

(D) 极点中心对称

5. 若以直角坐标系的原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，则线段 $y = 1 - x(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的极坐标为 ( )

(A) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

(B) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

(C) $\rho = \cos\theta + \sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

(D) $\rho = \cos\theta + \sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

6. 在极坐标系中，点 $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\theta = 2$ 的距离等于______.

7. 在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta - \sqrt{3}\rho\sin\theta - 1 = 0$ 与圆 $\rho = 2\cos\theta$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$______.

8. 在极坐标系中，点 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $\rho\left(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\right) = 6$ 的距离为______.

9. 在极坐标系中，点 A 在圆 $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$ 上，点 P 的坐标为 $(1, 0)$，则 $|AP|$ 的最小值为______.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1 : \begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha. \end{cases}$ (t为参数, $t \neq 0$) 其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2 : \rho = 2\sin\theta$, $C_3 : \rho = 2\sqrt{3}\cos\theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标；

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

2 参数方程

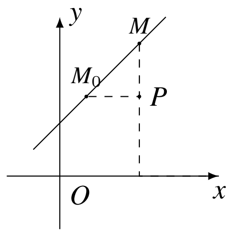
2.1 参数方程的概念

在平面直角坐标系中，若曲线 C 上的点 $P(x,y)$ 满足 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t). \end{cases}$ 该方程叫曲线 C 的参数方程，变量 t 是参变数，简称参数.(在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标都是某个变数的函数 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t). \end{cases}$ 并且对于 t 的每一个允许值，由这个方程所确定的点 $M(x,y)$ 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做这条曲线的参数方程，联系变数 x,y 的变数 t 叫做参变数，简称参数.)

2.2 常用参数方程

1. 直线的参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases} (t\text{为参数})$$



(x_0,y_0) 为直线上定点 M_0 的坐标，(x,y) 为直线上任意一点 M 的坐标，α 为倾斜角,t 为 $|MM_0|$ 长度，若 M_0 所对应的参数为 t_1，M 所对应的参数为 t_2，则有 $|MM_0|=|t_2-t_1|$.

2. 圆的参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta \\ y=y_0+R\sin\theta \end{cases} (\theta\text{为参数})$$

其中 $\theta\in[0,2\pi)$，圆心为 $M_0(x_0,y_0)$，半径为 $R(R\geqslant 0), M(x,u)$ 为圆上任意一点.

3. 椭圆的参数方程：

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases} (\varphi\text{为参数})$$

其中 $\varphi\in[0,2\pi)$，注意 φ 不是椭圆上的点和原点连线的夹角，是椭圆对应的圆的离心角.

4. 双曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases} (\theta\text{为参数})$$

5. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程可表示为:

$$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases} (t\text{为参数})$$

2.3 练习

1. 曲线 $\begin{cases} x = -1 + \cos\theta \\ y = 2 + \sin\theta. \end{cases}$ (θ为参数) 的对称中心 ( )

(A) 在直线 $y = 2x$ 上　　(B) 在直线 $y = -2x$ 上

(C) 在直线 $y = x - 1$ 上　　(D) 在直线 $y = x + 1$ 上

2. 圆 $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数) 被直线 $y = 0$ 截得的劣弧长为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　(B) π　　(C) $2\sqrt{2}\pi$　　(D) 4π

3. 已知曲线 C : $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = a + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\left(t\text{为参数}\right)$, $A(-1, 0), B(1, 0)$. 若曲线 C 上存在点 P 满足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(B) $[-1, 1]$　　(C) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$　　(D) $[-2, 2]$

4. 点 $P(1, 0)$ 到曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t \end{cases}$ (其中参数$t \in \mathbf{R}$) 上的点的最短距离是 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ $\left(\alpha\text{为参数}\right)$. 若以射线 Ox 为极轴建立极坐标系，则曲线 C 的极坐标方程为 ( )

(A) $\rho = \sin\theta$　　(B) $\rho = 2\sin\theta$　　(C) $\rho = \cos\theta$　　(D) $\rho = 2\cos\theta$

6. 曲线 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \end{cases}$ (θ为参数) 与直线 $x + y - 1 = 0$ 相交于 A, B 两点，则 $|AB| =$______.

7. 曲线 C : $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = -1 + \sin\theta. \end{cases}$ (θ为参数) 的普通方程是______；如果曲线 C 与直线 $x + y + a = 0$ 有公共点，那么实数 a 的取值范围是______.

8. 直线 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t \end{cases}$ $\left(t\text{为参数}\right)$ 与曲线 $\begin{cases} x = 2 + \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$ $\left(\theta\text{为参数}\right)$ 的公共点个数为______.

9. 已知动点 P, Q 都在曲线 C : $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$ (t为参数) 上，对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$，$M$ 为 PQ 的中点.

(1) 求 M 的轨迹的参数方程；

(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数，并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

10. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 3\sin\varphi. \end{cases}$ (φ为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2$. 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，且 A, B, C, D 以逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2, \dfrac{\pi}{3})$.

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标；

(2) 设点 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

11. 已知曲线 $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$，直线 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ (t为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任意一点 P 作与直线 l 夹角为 30° 的直线，交 l 于点 A. 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

12. 在直角坐标系中 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$ (α为参数)，M 是 C_1 上的动点，P 点满足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM}$，$P$ 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程；

(2) 在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A，与 C_2 的异于极点的交点为 B，求 $|AB|$.