

长郡中学高一年级适应性调查

数 学

时量:120 分钟

满分:100 分

得分_____

一、单项选择题:本大题共 12 个小题,每小题 3 分,共 36 分,在每个小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{3,5\}$, 则 $A \cup B=$

- A. $\{3\}$
- B. $\{2,3,4,5\}$
- C. $\{2,3,4\}$
- D. $\{3,5\}$

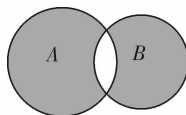
2. 命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定是

- A. 所有不能被 2 整除的整数都是偶数
- B. 所有能被 2 整除的整数都不是偶数
- C. 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数
- D. 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

3. 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的公共点数目是

- A. 1
- B. 0
- C. 0 或 1
- D. 1 或 2

4. 已知集合 $A=\{x|0 \leq x \leq 2\}$, $B=\{x|x^2-x>0\}$, 则图中的阴影部分表示的集合为



- A. $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$
- B. $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$
- C. $[1, 2)$
- D. $(1, 2]$

5. 已知集合 $A=\{1,4,x\}$, $B=\{x^2,1\}$, 且 $A \cap B=B$, 则满足条件的实数 x 的值为

- A. 1 或 0
- B. 1, 0 或 2
- C. 0, 2 或 -2
- D. 0, -1, 2 或 -2

6. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是

A. $a + c \geq b - c$

B. $ac > bc$

C. $\frac{c^2}{a-b} > 0$

D. $(a-b)c^2 \geq 0$

7. “ $x > 2$ ”是“ $x > 3$ ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知对 $\forall x \in \{x \mid 1 \leq x < 3\}$, 都有 $m > x$, 则 m 的取值范围为

A. $m \geq 3$

B. $m > 3$

C. $m > 1$

D. $m \geq 1$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 + ax - 3}$ 的定义域是 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是

A. $a > \frac{1}{3}$

B. $-12 < a \leq 0$

C. $-12 < a < 0$

D. $a \leq \frac{1}{3}$

10. 已知圆的直径为 2, 则其内接矩形 $ABCD$ 的周长的最大值为

A. $4\sqrt{2}$

B. 8

C. $8\sqrt{2}$

D. 12

11. 已知方程 $x^2 + 2(m-1)x + 2m + 6 = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 , 且满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 4$, 则 m 的取值范围是

A. $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{5}{4}\right)$

B. $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

C. $\left(-3, -\frac{7}{5}\right)$

D. $\left(-3, -\frac{5}{4}\right)$

12. 在 \mathbf{R} 上定义运算 $\otimes: x \otimes y = \frac{x}{2-y}$, 若关于 x 的不等式 $x \otimes (x+1-a) > 0$

的解集是集合 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集, 则实数 a 的取值范围是

A. $-2 \leq a \leq 2$

B. $-1 \leq a \leq 2$

C. $-3 \leq a < -1$ 或 $-1 < a \leq 1$

D. $-3 \leq a \leq 1$

二、多项选择题:本大题共 3 个小题,每小题 3 分,共 9 分,在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求,全部选出得 3 分,漏选得 2 分,选错或多选得 0 分.

13. 下列函数中,对任意 x ,满足 $2f(x)=f(2x)$ 的是

A. $f(x)=|x|$ B. $f(x)=-2x$

C. $f(x)=x-|x|$ D. $f(x)=x-1$

14. 小王从甲地到乙地往返的速度分别为 a 和 b ($a < b$),其全程的平均速度为 v ,则

A. $a < v < \sqrt{ab}$ B. $v = \sqrt{ab}$

C. $\sqrt{ab} < v < \frac{a+b}{2}$ D. $v = \frac{2ab}{a+b}$

15. 当一个非空数集 F 满足条件“若对任意 $a, b \in F$,则 $a+b, a-b, ab \in F$,且当 $b \neq 0$ 时, $\frac{a}{b} \in F$ ”时,称 F 为一个数域. 以下四个关于数域的命题中,真命题为

A. 0 是任何数域的元素

B. 若数域 F 有非零元素,则 $2020 \in F$

C. 集合 $P = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为数域

D. 有理数集为数域

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
题号	9	10	11	12	13	14	15	得分
答案								

三、填空题:本大题共 5 个小题,每小题 3 分,共 15 分,将答案填在答题纸上.

16. 若 $2 < a < 5, 3 < b < 10$,则 $a-2b$ 的范围为_____.

17. 若集合 $A = \{x | |2x-1| < 3\}, B = \left\{x \mid \frac{2x+1}{3-x} < 0\right\}$,则 $A \cap B =$ _____.

18. 若关于 x 的不等式 $mx^2 + mx - 1 > 0$ 的解集为 \emptyset ,则实数 m 的取值范围为_____.

19. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1| & (0 < x < 2), \\ 2-|x-1| & (x \leq 0, \text{ 或 } x \geq 2), \end{cases}$ 则函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 的图象的交点个数是_____.

20. 已知函数 $f(x)=x^2-2x, g(x)=ax+2(a>0)$,对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$ 都存在 $x_0 \in [-1, 2]$,使得 $g(x_1)=f(x_0)$,则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本大题共 5 个小题，每小题 8 分，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. (本小题满分 8 分)

已知集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x | 1 < x < 7\}$, $C = \{x | x > a\}$, $U = \mathbf{R}$.

(1) 求 $(\complement_U A) \cap B$;

(2) 若 $A \cap C \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

22. (本小题满分 8 分)

已知 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 求证:

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8;$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

23. (本小题满分 8 分)

某企业生产 A, B 两种产品, 根据市场调查和预测, A 产品的利润与投资额成正比, 设比例系数为 k_1 , 其关系如图 1 所示; B 产品的利润与投资额的算术平方根成正比, 设比例系数为 k_2 , 其关系如图 2 所示 (注: 利润与投资额单位是万元).

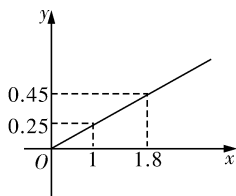


图1

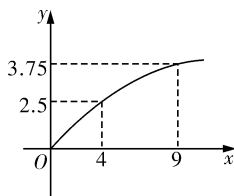


图2

- (1) 分别将 A, B 两种产品的利润表示为投资额的函数, 并求出 k_1, k_2 的值, 写出它们的函数关系式;
- (2) 该企业已筹集到 10 万元资金, 并全部投入 A, B 两种产品的生产, 问: 怎样分配这 10 万元投资额, 才能使企业获得最大利润, 其最大利润为多少万元.

24. (本小题满分 8 分)

已知 $f(x)$ 是二次函数, 且满足 $f(0)=2, f(x+1)-f(x)=2x+3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $h(x)=f(x)-2tx$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 求函数 $h(x)$ 的最小值.

25. (本小题满分 8 分)

对于函数 $f(x)$, 若 $f(x)=x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”, 若 $f(f(x))=x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”, 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B , 即 $A=\{x|f(x)=x\}$, $B=\{x|f(f(x))=x\}$.

(1) 求证: $A \subseteq B$;

(2) 若 $f(x)=ax^2-1$ ($a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$), 且 $A=B \neq \varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

长郡中学高一年级适应性调查

数学参考答案

一、单项选择题:本大题共 12 个小题,每小题 3 分,共 36 分,在每个小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	B	D	C	A	C	D	B	A	B	A	A	D	ABC	AD	ABD

1. B

2. D 【解析】命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”是一个全称命题,

其否定一定是一个特称命题,故排除 A,B;

结合全称命题的否定方法,我们易得命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定应为“存在一个能被 2 整除的整数不是偶数”.

故选 D.

3. C 【解析】若函数在 $x=1$ 处有意义,则函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的公共点数目是 1;

若函数在 $x=1$ 处无意义,则二者没有公共点.

所以有可能没有交点,如果有交点,那么仅有一个.

故选 C.

4. A 【解析】 $B=\{x|x^2-x>0\}=\{x|x>1 \text{ 或 } x<0\}$,

由题意可知阴影部分对应的集合为 $\complement_{A\cup B}(A\cap B)$,

$\because A\cap B=\{x|1<x\leq 2\}, A\cup B=\mathbf{R}$,

$\therefore \complement_{A\cup B}(A\cap B)=\{x|x\leq 1 \text{ 或 } x>2\}$,即 $(-\infty, 1]\cup(2, +\infty)$.

故选 A.

5. C 【解析】 $\because A\cap B=B, \therefore B\subseteq A$,且 $B=\{x^2, 1\}, A=\{1, 4, x\}$,

$\therefore x^2=4$,或 $x^2=x$,解得 $x=-2, 2, 0$ 或 1 ,

$\because x=1$ 时不满足集合元素的互异性, $\therefore x=1$ 舍去,

\therefore 满足条件的实数 x 的值为 $-2, 2$ 或 0 .

故选 C.

6. D 【解析】A. 当 $a=-1, b=-2, c=-3$ 时, $a+c=-4, b-c=1, a+c<b-c$, 本选项不一定成立;

B. 当 $c=0$ 时, $ac=bc$, 本选项不一定成立;

C. 当 $c=0$ 时, $\frac{c^2}{a-b}=0$, 本选项不一定成立;

D. $\because a>b, \therefore a-b>0$, 又 $c^2\geq 0, \therefore (a-b)c^2\geq 0$, 本选项一定成立.

故选 D.

7. B

8. A

9. B

10. A

11. A 【解析】设 $f(x)=x^2+2(m-1)x+2m+6$,

∵关于实数 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+6=0$ 的两个实根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 4$,

$$\therefore \begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(4) > 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2m+6 > 0, \\ 4m+5 < 0, \\ 10m+14 > 0, \end{cases} \text{解得} -\frac{7}{5} < m < -\frac{5}{4}.$$

故选 A.

12. D 【解析】由运算 \otimes , 关于 x 的不等式 $x \otimes (x+1-a) > 0$ 化为 $\frac{x}{2-(x+1-a)} > 0$, 化为 $x(x-a-1) < 0$,

①当 $a+1 > 0$ 时, 其解集是 $\{x | 0 < x < a+1\}$, 由于其解集是 $\{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集,

$\therefore a+1 \leq 2$, 解得 $a \leq 1$, $\therefore -1 < a \leq 1$.

②当 $a+1 < 0$ 时, 其解集是 $\{x | a+1 < x < 0\}$, 由于其解集是 $\{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集,

$\therefore a+1 \geq -2$, 解得 $a \geq -3$, $\therefore -3 \leq a < -1$.

③当 $a+1 = 0$ 时, 其解集是 \emptyset , 由于其解集是 $\{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集,

$\therefore a+1 = 0$, 解得 $a = -1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-3, 1]$.

故选 D.

二、多项选择题: 本大题共 3 个小题, 每小题 3 分, 共 9 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求, 全部选出得 3 分, 漏选得 2 分, 选错或多选得 0 分.

13. ABC

14. AD 【解析】设甲、乙两地之间的距离为 s , 则全程所需的时间为 $\frac{s}{a} + \frac{s}{b}$, $\therefore v = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

∵ $b > a > 0$, 由基本不等式可得 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, $\therefore v = \frac{2ab}{a+b} < \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$,

另一方面, $v = \frac{2ab}{a+b} < \frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2}$, $v - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{ab - a^2}{a+b} > \frac{a^2 - a^2}{a+b} = 0$,

$\therefore v > a$, 则 $a < v < \sqrt{ab}$.

故选 AD.

15. ABD

三、填空题: 本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分, 将答案填在答题纸上.

16. $(-18, -1)$

17. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

18. $[-4, 0]$

19. 4 【解析】当 $x \in (0, 2)$ 时, $|x-1| = \frac{1}{2}$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$,

当 $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ 时, $2 - |x-1| = \frac{1}{2}$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$,

综上所述函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 的图象的交点的个数是 4.

故答案为: 4.

20. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【解析】∵ 函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 的图象是开口向上的抛物线, 且关于直线 $x = 1$ 对称,

∴ $x_0 \in [-1, 2]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = -1$, 最大值为 $f(-1) = 3$,

可得 $f(x_0)$ 的值域为 $[-1, 3]$.

又 ∵ $g(x) = ax + 2 (a > 0)$, ∴ $g(x)$ 为单调递增函数,

∴ $x_1 \in [-1, 2]$ 时, $g(x_1)$ 的值域为 $[g(-1), g(2)]$,

即 $g(x_1) \in [2 - a, 2a + 2]$.

∵ 对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$ 都存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使得 $g(x_1) = f(x_0)$,

$$\therefore \begin{cases} 2 - a \geq -1, \\ 2a + 2 \leq 3, \\ a > 0, \end{cases} \therefore 0 < a \leq \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

四、解答题: 本大题共 5 个小题, 每小题 8 分, 共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. 【解析】(1) ∵ 全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x | 1 < x < 7\}$,

∴ $\complement_U A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 8\}$, 2 分

∴ $(\complement_U A) \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ 4 分

(2) ∵ $A \cap C \neq \emptyset$, $C = \{x | x > a\}$.

可得 a 在小于等于 8 的范围内,

即 $a \leq 8$,

当 $a = 8$ 可得 $C = \{x | x > 8\}$, 此时不满足题意,

∴ $a < 8$ 8 分

22. 【证明】(1) ∵ $a + b = 1$,

$$\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{ab} \geq 4,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = \frac{2}{ab} \geq 8. \text{ 当且仅当 } a = b = \frac{1}{2} \text{ 时等号成立.} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + 1,$$

$$\text{由 (1) 可知 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + 1 \geq 9,$$

$$\text{即 } \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9. \text{ 当且仅当 } a = b = \frac{1}{2} \text{ 时等号成立.} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

23. 【解析】(1) 设投资额为 x 万元, A 产品的利润为 $f(x)$ 万元, B 产品的利润为 $g(x)$ 万元,

由题设 $f(x) = k_1 x$, $g(x) = k_2 \sqrt{x}$,

由图可知 $f(1) = \frac{1}{4}$, 所以 $k_1 = \frac{1}{4}$, 又 $g(4) = \frac{5}{2}$, 所以 $k_2 = \frac{5}{4}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{4}x (x \geq 0)$, $g(x) = \frac{5}{4}\sqrt{x} (x \geq 0)$ 4 分

(2) 设 A 产品投入 x 万元, 则 B 产品投入 $(10-x)$ 万元, 设企业的利润为 y 万元,

$$y = f(x) + g(10-x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\sqrt{10-x} \quad (0 \leq x \leq 10),$$

令 $\sqrt{10-x} = t$, 则 $y = \frac{10-t^2}{4} + \frac{5}{4}t = -\frac{1}{4}\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{65}{16} \quad (0 \leq t \leq \sqrt{10})$, 6 分

所以当 $t = \frac{5}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{65}{16}$, 此时 $x = 10 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} = 3.75$,

所以当 A 产品投入 3.75 万元, B 产品投入 6.25 万元时, 企业获得最大利润为 $\frac{65}{16}$ 万元, 即 4.0625 万元. 8 分

24. 【解析】(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

$$\because f(0) = c = 2, f(x+1) - f(x) = 2x + 3,$$

$$\therefore a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x + 3,$$

$$\therefore 2ax + a + b = 2x + 3,$$

$$\therefore c = 2, a = 1, b = 2,$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意得 $h(x) = x^2 + 2(1-t)x + 2$, 对称轴为直线 $x = t-1$,

① 当 $t-1 \leq 1$, 即 $t \leq 2$ 时, 函数在 $[1, +\infty)$ 单调递增, $h(x)_{\min} = h(1) = 5-2t$; 6 分

② 当 $t-1 > 1$, 即 $t > 2$ 时, 函数在 $[1, t-1]$ 单调递减, 在 $[t-1, +\infty)$ 单调递增,

$$h(x)_{\min} = h(t-1) = -t^2 + 2t + 1,$$

综上所述: $h(x)_{\min} = \begin{cases} 5-2t, & t \leq 2, \\ -t^2 + 2t + 1, & t > 2. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

25. 【解析】(1) 若 $A = \emptyset$, 则 $A \subseteq B$ 显然成立;

若 $A \neq \emptyset$, 设任意 $t \in A$, 则 $f(t) = t, f(f(t)) = f(t) = t$,

$$\therefore t \in B, \text{ 故 } A \subseteq B. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $\because A \neq \emptyset, \therefore ax^2 - 1 = x$ 有实根,

$$\therefore a \geq -\frac{1}{4}.$$

又 $A \subseteq B$, 所以 $a(ax^2 - 1)^2 - 1 = x$, 5 分

即 $a^3x^4 - 2a^2x^2 - x + a - 1 = 0$ 的左边有因式 $ax^2 - x - 1$,

从而有 $(ax^2 - x - 1)(a^2x^2 + ax - a + 1) = 0$.

$$\therefore A = B,$$

$$\therefore a^2x^2 + ax - a + 1 = 0 \text{ 要么没有实根, 要么实根是方程 } ax^2 - x - 1 = 0 \text{ 的根.}$$

若 $a^2x^2 + ax - a + 1 = 0$ 没有实根, 则 $a < \frac{3}{4}$;

若 $a^2x^2 + ax - a + 1 = 0$ 有实根且实根是方程 $ax^2 - x - 1 = 0$ 的根,

则由方程 $ax^2 - x - 1 = 0$, 得 $a^2x^2 = ax + a$,

代入 $a^2x^2 + ax - a + 1 = 0$, 有 $2ax + 1 = 0$.

由此解得 $x = -\frac{1}{2a}$, 再代入得 $\frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} - 1 = 0$, 由此 $a = \frac{3}{4}$,

故 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ 8 分