

2020年南宁三中高一数学第一次月考综合练习题

考试范围：集合与函数、不等式；考试时间：120分钟；

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等相关信息；
2. 请将答案正确填写在答题卡上,填写在本试卷上无效。

一、选择题 (5X12=60 分)

1. 已知集合 $A=\{-2, 3, 1\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B\subseteq A$, 则实数 m 的取值集合为 ()

A. $\{1\}$ B. $\{\sqrt{3}\}$ C. $\{1, -1\}$ D. $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leq 0, x\in Z\}$, 集合 $B=\{x|x>0\}$, 则集合 $A\cap B$ 的子集个数为 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

3. 函数 $y=\sqrt{2x^2+x-6}$ 的定义域是 ()

A. $(-\infty, -2)\cup\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $(-2, \frac{3}{2})$

C. $(-\infty, -2]\cup\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$

4. 若不等式 $ax^2+8ax+21<0$ 的解集是 $\{x|-7<x<-1\}$, 那么 $a=()$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知不等式 $ax^2-bx+1>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$, 则不等式

$bx^2-x+a<0$ 的解集是 ()

A. $\{x|-2<x<3\}$ B. $\{x|-3<x<2\}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}<x<2\right\}$ D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$

6. 已知集合 $A=\left\{x\middle|\frac{x+1}{x-1}\leq 0\right\}$, $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A\cap B=()$

A. $\{-2, 2\}$ B. $\{-2, -1, 2\}$

C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0\}$

7. 若函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 是定义在 $[-1-a, 2a]$ 上的偶函数, 则该函数的最大值为 ()

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

8. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 且 $f(x+2)$ 是偶函数, 若满足 $f(2-a) > f(4)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. 由 b 的范围决定 D. 由 b, c 的范围共同决定

9. 函数 $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x}$ 的定义域为 ()

A. $\{x | x \geq 0\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$
C. $\{x | x \geq 1\} \cup \{0\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax, & (x \leq 1) \\ (2a-1)x - 3a + 6, & (x > 1) \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{2}, 1]$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[1, 2]$

11. 已知函数 $f(x) = 2x - \sqrt{x-1}$, $x \in [1, 5]$, 则 $f(x)$ 的最小值是 ()

A. 1 B. 8 C. $\frac{15}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ()

A. $\frac{15}{16}$ B. $-\frac{27}{16}$ C. $\frac{8}{9}$ D. 18

二、填空题 (5X4=20 分)

13. 若函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 4]$, 则实数 a 的值是_____.

14. 若函数 $f(x) = (a-2)x^2 + (a-1)x + 3$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的增区间是_____.

15. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集是_____.

16. 若函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+1}$ 在 $[-1, 1]$ 上是奇函数, 则 $f(x)$ 的解析式为_____.

三、解答题 (共 6 小题, 满分 70 分)

17. (满分 10 分) 已知不等式 $x^2 + (a+1)x + 4 < 0 (a \in R)$.

(1) 当 $a = -6$ 时, 求此不等式的解集;

(2) 若不等式的解集非空, 求实数 a 的取值范围.

18. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 4$.

(I) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 求 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上的最大值.

19. (满分 12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数, 且

$$x \in [-1,0] \text{ 时, } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(1) 求 $f(0)$, $f(-1)$;

(2) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(3) 判断并证明函数在区间 $[0,1]$ 上的单调性.

20. (满分 12 分) 某汽车租赁公司有 200 辆小汽车. 若每辆车一天的租金为 300 元, 可全部租出; 若将出租收费标准每天提高 $10x$ 元 ($1 \leq x \leq 50$, $x \in \mathbb{N}^*$), 则租出的车辆会相应减少 $4x$ 辆.

(1) 求该汽车租赁公司每天的收入 y (元) 关于 x 的函数关系式;

(2) 若要使该汽车租赁公司每天的收入超过 63840 元, 则每辆汽车的出租价格可定为多少元?

21. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (x \neq 0, a \in R)$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 是增函数, 求实数 a 的范围.

22. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+1)x + 1, a \in R$.

(1) 若不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 求 a 的值;

(2) 若 $a > 0$, 讨论关于 x 不等式 $f(x) > 0$ 的解集.

2020 年南宁三中高一数学第一次月考综合练习题

参考答案

1. C 【解析】集合 $A=\{-2, 3, 1\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B\subseteq A$

则 $m^2=1$ 或 $m^2=-2$, 解得 $m=\pm 1$ 故选: C

2. D 【解析】 $\because A=\{x|x^2-2x-3\leq 0, x\in Z\}=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$B=\{x|x>0\}$, $\therefore A\cap B=\{1, 2, 3\}$, \therefore 集合 $A\cap B$ 的子集个数为 8 个,

故选: D.

3. C 【解析】要使得函数有意义, 则 $2x^2+x-6\geq 0\Leftrightarrow (x+2)(2x-3)\geq 0$

解得 $x\geq \frac{3}{2}$ 或 $x\leq -2$. 故选: C.

4. C 【解析】不等式 $ax^2+8ax+21<0$ 的解集是 $\{x|-7<x<-1\}$,

即有 $-7, -1$ 是 $ax^2+8ax+21=0$ ($a>0$) 的两根,

即有 $-7-1=-\frac{8a}{a}$, $-7\times(-1)=\frac{21}{a}$, 解得 $a=3$, 成立. 故选 C.

5. A 【解析】不等式 $ax^2-bx+1>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$,

所以方程 $ax^2-bx+1=0$ 的根是 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$, 且 $a<0$;

由根与系数的关系, 知 $\begin{cases} \frac{b}{a} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \end{cases}$, 解得 $a=-6$, $b=1$;

所以不等式 $bx^2-x+a<0$ 化为 $x^2-x-6<0$,

即 $(x+2)(x-3)<0$, 解得 $-2<x<3$.

所以不等式的解集是 $\{x|-2<x<3\}$. 故选: A.

6. D 【解析】解不等式 $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$ 得 $-1 \leq x < 1$ ，故集合

$$A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \right\} = \{ x \mid -1 \leq x < 1 \}, \text{ 所以}$$

$$A \cap B = \{ x \mid -1 \leq x < 1 \} \cap \{ -2, -1, 0, 1, 2 \} = \{ -1, 0 \}. \text{ 故选: D.}$$

7. A 【解析】偶函数定义域关于原点对称，所以 $-1-a+2a=0, a=1$ ，

函数开口向上. 由于函数为偶函数，故 $b=0$ ，所以 $f(x)=x^2+1$ ，

最大值为 $f(2)=4+1=5$ 。

8. B 【解析】 $\because f(x+2)$ 是偶函数，

$\therefore f(-x+2)=f(x+2)$ ， \therefore 函数 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，

$$\therefore -\frac{b}{2}=4 \Rightarrow b=-4, \therefore f(x)=x^2-4x+c,$$

$$\therefore f(2-a) > f(4) \Rightarrow (2-a)^2 - 4(2-a) + c > c \Rightarrow a > 2 \text{ 或 } a < -2,$$

9. C 【解析】要使函数有意义，需满足 $\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，解不等式

得 $x \geq 1$ 或 $x=0$ ，所以定义域为 $\{x \mid x \geq 1\} \cup \{0\}$

10. D 【解析】 \because 当 $x \leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=a$ ，

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数，

$$\therefore \begin{cases} a \geq 1 \\ 2a-1 > 0 \\ -1+2a \leq 5-a \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a \geq 1 \\ a > \frac{1}{2} \\ a \leq 2 \end{cases}, \text{ 得 } 1 \leq a \leq 2, \text{ 故选 D.}$$

11. C 【解析】因为函数 $f(x)=2x-\sqrt{x-1}$ ， $x \in [1, 5]$

设 $t = \sqrt{x-1} \in [0, 2]$, 则 $x = t^2 + 1$

所以 $f(t) = 2t^2 - t + 2, t \in [0, 2]$

开口向上, 对称轴为 $t = \frac{1}{4}$,

所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}$. 故选: C.

12. A 【解析】因为 $x > 1$ 时, $f(x) = x^2 + x - 2$,

所以 $f(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4, \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{4}$;

又 $x \leq 1$ 时, $f(x) = 1 - x^2$,

所以 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$. 故选 A.

13. -3 【解析】因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 4]$,

而函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1 - a$, 所以 $1 - a = 4$, 即 $a = -3$.

故答案为: -3.

14. $(-\infty, 0)$. 【解析】由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 故 $a - 1 = 0$,

所以 $a = 1$, 所以 $f(x) = -x^2 + 3$, 二次函数 $f(x)$ 开口向下, 对称轴为 $x = 0$,

所以 $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, 0)$. 故答案为: $(-\infty, 0)$

15. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. 【解析】因为任意的

$x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,

由偶函数的对称性可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(2)=0$ 可得 $f(-2)=0$,

由 $x \square f(x) < 0$ 可得 $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$,

解可得, $x < -2$ 或 $0 < x < 2$. 故答案为: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

16. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. 【解析】

$\because f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数, $\therefore f(0)=0$, $\therefore a=0$, $\therefore f(x) = \frac{x}{x^2+bx+1}$.

又 $f(-1)=-f(1)$, $\therefore \frac{-1}{2-b} = -\frac{1}{2+b}$, 即 $b=0$, $\therefore f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

17. (1) $(1,4)$; (2) $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$

【解析】(1) 当 $a=-6$ 时, 不等式为 $x^2-5x+4 < 0$, 解得 $1 < x < 4$,

故不等式的解集为 $(1,4)$; (来源: 公众号《许兴华数学》)

(2) 不等式 $x^2+(a+1)x+4 < 0$ 的解集非空, 则 $\Delta > 0$,

即 $(a+1)^2-16 > 0$, 解得 $a < -5$, 或 $a > 3$,

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

18. (I) $[4,8]$; (II) $7-2a$.

【解析】(I) 因为函数 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f(-x)=f(x)$, 解得 $a=1$, 即 $f(x)=x^2+4$,

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $4 \leq f(x) \leq 8$,

故值域为: $[4,8]$.

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 则函数对称轴

$$x = a - 1 \geq 2, \text{ 解得 } a \geq 3,$$

因为 $1 < a - 1 < a$, 所以 $x \in [1, a - 1]$ 时, 函数 $f(x)$ 递减,

当 $x \in [a - 1, a]$ 时, 函数 $f(x)$ 递增,

故当 $x \in [1, a]$ 时, $f(x)_{\max} = \{f(1), f(a)\}$,

$$\text{又 } f(1) = 7 - 2a, f(a) = -a^2 + 2a + 4,$$

$$f(1) - f(a) = (7 - 2a) - (-a^2 + 2a + 4) = a^2 - 4a + 3 = (a - 2)^2 - 1$$

由于 $a \geq 3$, 所以 $f(1) - f(a) \geq 0, \therefore f(1) \geq f(a)$,

故 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上的最大值为 $7 - 2a$.

$$19. (1) f(0) = 0, f(-1) = -\frac{1}{2}; (2) f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 + 1}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x}{x^2 + 1}, & x \in [-1, 0) \end{cases}; (3) \text{见解析.}$$

$$\text{【解析】} (1) f(0) = 0, f(-1) = -\frac{1}{2}.$$

(2) 设 $x \in [0, 1]$, 则 $-x \in [-1, 0]$

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

因为函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以有 $f(-x) = f(x)$

$$\text{既 } f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 + 1}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x}{x^2 + 1}, & x \in [-1, 0) \end{cases}.$$

(3) 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{-x_2}{x_2^2 + 1} - \frac{-x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)}$$

$$\because 0 < x_1 < x_2 < 1 \quad \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 < 0$$

$$\therefore f(x_2) < f(x_1) \quad \therefore f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 为单调减函数.}$$

20. 【解析】(1) 由题意可得每辆车一天的租金为 $(300+10x)$ 元,

租出的车辆为 $(200-4x)$ 辆,

故该汽车租赁公司每天的收入

$$y = (300+10x)(200-4x) = -40x^2 + 800x + 60000 \quad (1 \leq x \leq 50, x \in \mathbb{N}^*).$$

$$(2) \text{ 由题意可得 } -40x^2 + 800x + 60000 > 63840, \text{ 即 } x^2 - 20x + 96 < 0,$$

解得 $8 < x < 12$.

因为 $x \in \mathbb{N}^*$, 所以 $x=9$ 或 $x=10$ 或 $x=11$, 则 $300+10x=390$ 或 400 或 410 .

故每辆汽车的出租价格可定在为 390 元或 400 元或 410 元.

21. (1) 答案见解析; (2) $(-\infty, 16]$.

【解析】(1) 当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)=x^2$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

此时, 函数 $y=f(x)$ 为偶函数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)=x^2 + \frac{a}{x}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{a}{-x} = x^2 - \frac{a}{x},$$

此时 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$,

此时, 函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数;

(2) 设 $x_2 > x_1 \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(x_1^2 + \frac{a}{x_1} \right) - \left(x_2^2 + \frac{a}{x_2} \right) = (x_1^2 - x_2^2) + \left(\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2} \right) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 - x_2)[x_1 x_2 (x_1 + x_2) - a]}{x_1 x_2}, \end{aligned}$$

$\because x_2 > x_1 \geq 2$, 可得 $x_1 x_2 (x_1 + x_2) > 16$, $x_1 - x_2 < 0$,

$\because y = f(x)$ 为 $[2, +\infty)$ 上的增函数, $\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$,

则 $x_1 x_2 (x_1 + x_2) - a > 0$, 可得 $a < x_1 x_2 (x_1 + x_2)$, $\therefore a \leq 16$,

因此, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 16]$.

22. (1) $a = 2$ (2) 答案见解析

【解析】(1) 因为 $f(x) < 0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

所以 $\frac{1}{2}$, 1 为方程 $f(x) = 0$ 的两个根

由韦达定理得:
$$\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{a+1}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{解得 } a = 2$$

(2) 由 $f(x) > 0$ 得: $ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$, 所以 $(ax-1)(x-1) > 0$

① 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 不等式的解集是 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\right\}$

② 当 $a = 1$ 时, 不等式可化为 $(x-1)^2 > 0$, 不等式的解集是 $\{x \mid x \neq 1\}$

③ 当 $a > 1$ 时, $0 < \frac{1}{a} < 1$, 不等式的解集是 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$

综上可得，当 $0 < a < 1$ 时，不等式的解集是 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\right\}$ ；

当 $a = 1$ 时，不等式的解集是 $\{x \mid x \neq 1\}$ ；

当 $a > 1$ 时，不等式的解集是 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$ 。