

# 高一数学试题

试卷满分：150 分

(考试时间：120 分钟)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 计算:  $625^{\frac{1}{4}}$  =  
A. 5                                      B. 25                                      C.  $\pm 5$                                       D.  $\pm 25$
- 若函数  $y = (2m - 1)x + b$  在  $R$  上是减函数,则  
A.  $m > \frac{1}{2}$                                       B.  $m < \frac{1}{2}$                                       C.  $m > -\frac{1}{2}$                                       D.  $m < -\frac{1}{2}$
- 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 且  $A \cap B = A$ , 则集合  $B$  可以是  
A.  $\{x | 2^x > 1\}$                                       B.  $\{x | x^2 > 1\}$                                       C.  $\{x | x > 5\}$                                       D.  $\{1, 2, 3\}$
- 下列四组函数中,  $f(x)$  与  $g(x)$  表示同一函数的是  
A.  $f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$   
B.  $f(x) = |x + 1|, g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x - 1, & x < -1 \end{cases}$   
C.  $f(x) = 1, g(x) = (x + 1)^0$   
D.  $f(x) = \sqrt[3]{x^3}, g(x) = (\sqrt{x})^2$
- 已知  $f(x) = x^2 + x$ , 则  $f(x - 1)$  等于  
A.  $x^2 - x + 1$                                       B.  $x^2 - x$                                       C.  $x^2 - 2x - 1$                                       D.  $x^2 - 2x$
- 函数  $f(x) = \sqrt{3^{2x-1} - \frac{1}{27}}$  的定义域是  
A.  $(-2, +\infty)$                                       B.  $[-1, +\infty)$                                       C.  $(-\infty, -1)$                                       D.  $(-\infty, -2)$
- 已知函数  $f(x) = ax^2 - 2ax - 3 (a > 0)$ , 则下列选项错误的是  
A.  $f(-3) > f(3)$                                       B.  $f(-2) < f(3)$                                       C.  $f(4) = f(-2)$                                       D.  $f(4) > f(3)$
- 设函数  $f(x) = \sqrt{x}$ , 则函数  $f(x - 1) - f^2(x)$  的最大值为  
A.  $\frac{1}{2}$                                       B.  $-\frac{1}{2}$                                       C.  $-\frac{3}{4}$                                       D.  $-1$
- 已知函数  $y = f(x)$  的定义域是  $R$ , 值域为  $[-1, 2]$ , 则值域也为  $[-1, 2]$  的函数是  
A.  $y = 2f(x) + 1$                                       B.  $y = f(2x + 1)$                                       C.  $y = -f(x)$                                       D.  $y = |f(x)|$
- 已知  $1 < b < a$ , 则下列大小关系不正确的是  
A.  $a^b < a^a$                                       B.  $b^a > b^b$                                       C.  $a^b > b^b$                                       D.  $a^b > b^a$
- 设函数  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$  在区间  $[2, 9]$  上的最大值和最小值分别为  $M, m$ , 则  $m + M =$   
A.  $\frac{27}{2}$                                       B. 13                                      C.  $\frac{25}{2}$                                       D. 12

12. 已知函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 满足  $f(-x) = 4 - f(x)$ , 若函数  $y = \frac{2x+1}{x}$  与  $y = f(x)$  图像的交点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ , 则  $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_m + y_m) =$
- A. 0                      B.  $m$                       C.  $2m$                       D.  $4m$

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知函数  $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 是奇函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
14. 方程  $4^x + 2^x - 2 = 0$  的解是 \_\_\_\_\_.
15. 已知  $A = \{x | x^2 + px + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , 若  $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ , 则实数  $p$  的取值集合是 \_\_\_\_\_.
16. 若函数  $f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2})^x + a, & a \leq x < 0 \\ -x^2 + 2x - 3, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$  的值域为  $[-11, -2]$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ .

- (1) 求证:  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  是定值;
- (2) 求  $f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right)$  的值.

18. (本题满分 12 分)

已知全集  $U = \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 5x < 0\}$ ,  $B = \{x | m+1 \leq x \leq 3m-1\}$ .

- (1) 当  $m=2$  时, 求  $\complement_U(A \cap B)$ ;
- (2) 如果  $A \cup B = A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{\sqrt{3-ax}}{a-1} (a \neq 1)$ .

(1) 若  $a > 0$ , 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$  上是减函数, 求实数  $a$  的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$ , 满足  $f(mn) = f(m) + f(n) (m, n > 0)$ , 且当  $x > 1$  时,  $f(x) > 0$ .

(1) 求证:  $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$ ;

(2) 求证:  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数;

(3) 若  $f(2) = 1$ , 解不等式  $f(x+2) - f(2x) > 2$ .

21. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^2 - 2tx + t^2 - 6t + 1$  ( $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ ), 其最小值为  $g(t)$ .

(1) 求  $g(t)$  的表达式;

(2) 当  $t > 1$  时, 是否存在  $k \in \mathbf{R}$ , 使关于  $t$  的不等式  $g(t) < kt$  有且仅有一个正整数解, 若存在, 求实数  $k$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \begin{cases} m(x + \frac{1}{x}) - 2, & x > 0 \\ 2(x + \frac{1}{x}) + n, & x < 0 \end{cases}$  是奇函数.

(1) 求实数  $m, n$  的值;

(2) 若对任意实数  $x$ , 都有  $f(4^x) + \lambda f(2^x) \geq 0$  成立. 求实数  $\lambda$  的取值范围.

# 豫西名校 2020—2021 学年上期第一次联考

## 高一数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	B	B	B	B	C	B	D	C	C

1.

【解析】 $625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5$ ，故选 A.

2.

【解析】根据题意，有  $2m-1 < 0$ ，解得  $m < \frac{1}{2}$ ，故选 B.

3.

【解析】由  $A \cap B = A$  可知， $A \subseteq B$ ，对于 A:  $\{x | 2^x > 1 = 2^0\} = \{x | x > 0\} \supseteq A$ ，符合题意. 对于 B:  $\{x | x^2 > 1\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ，没有元素 1，所以不包含 A. 对于 C、D 显然不合题意；故选 A.

4.

【解析】A 选项中， $f(x)$  定义域为  $R$ ， $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 A 错误；B 选项中， $f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -1-x, & x < -1 \end{cases}$ ，与  $g(x)$  定义域相同，都是  $R$ ，对应法则也相同，所以二者是同一函数，所以 B 正确；C 选项中， $f(x)$  定义域为  $R$ ， $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 C 错误；D 选项中， $f(x)$  定义域为  $R$ ， $g(x)$  的定义域为  $[0, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 D 错误. 故选 B

5.

【解析】因为  $f(x) = x^2 + x$ ，所以  $f(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) = x^2 - x$ . 故选 B

6.

【解析】要使函数有意义，需满足  $3^{2x-1} - \frac{1}{27} \geq 0$ ，即：  $3^{2x-1} \geq 3^{-3}$ ，因为  $y = 3^x$  为增函数，所以  $2x-1 \geq -3$ ，解得：  $x \geq -1$ . 故选 B.

7.

【解析】 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3 (a > 0)$  对称轴为  $x = 1$ ，且在  $[1, +\infty)$  是增函数， $f(-3) = f(5) > f(3)$ ，选项 A 正确； $f(-2) = f(4) > f(3)$ ，选项 B 错误； $f(4) = f(-2)$ ，选项 C 正确； $f(4) > f(3)$ ，选项 D 正确. 故选 B.

8.

【解析】因为  $f(x-1) - f^2(x) = \sqrt{x-1} - x$ ，令  $\sqrt{x-1} = t (t \geq 0)$ ，则  $x = 1 + t^2$ ，所以

$y = -t^2 + t - 1 = -(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$ , 当  $t = \frac{1}{2}$  时, 函数取得最大值  $-\frac{3}{4}$ , 故选 C.

9.

【解析】由于  $y = 2f(x) + 1 \in [-1, 5]$ ,  $\therefore$  A 错误;  $y = f(2x+1) \in [-1, 2]$ ,  $\therefore$  B 正确;  $y = -f(x) \in [-2, 1]$ ,  $\therefore$  C 错误;  $y = |f(x)| \in [0, 2]$ ,  $\therefore$  D 错误. 故选 B.

10.

【解析】 $\because 1 < b < a$ ,  $\therefore y = a^x$  和  $y = b^x$  均为增函数,  $\therefore a^b < a^a$ ,  $b^a > b^b$ , A, B 项正确, 又由  $y = a^x$  和  $y = b^x$  的图像在第一象限内的关系可知:  $a^b > b^b$ , C 项正确;  $a^b$  和  $b^a$  的大小关系不能确定, 如  $a=3, b=2, a^b > b^a$ ;  $a=4, b=2, a^b = b^a$ ;  $a=5, b=2, a^b < b^a$ , 故 D 项不正确, 故选 D.

11.

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 4}{x-1} = (x-1) + \frac{4}{x-1}$ ; 因为  $x \in [2, 9]$ , 所以  $x-1 \in [1, 8]$ , 令  $x-1=t$ , 则  $t \in [1, 8]$ ; 因为  $y = f(x) = t + \frac{4}{t}, t \in [1, 8]$ , 根据对勾函数性质可知当  $t=2$  时, 函数有最小值为 4; 当  $t=8$  时, 函数有最大值为  $\frac{17}{2}$ . 所以  $m+M = \frac{25}{2}$ . 故选 C.

12.

【解析】由  $f(-x) = 4 - f(x)$ , 得  $f(x) + f(-x) = 4$ , 可得  $y = f(x)$  的图象关于  $(0, 2)$  对称, 而  $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ . 所以函数  $y = f(x)$  与  $y = \frac{2x+1}{x}$  的图像都关于点  $(0, 2)$  对称, 所以  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ ,  $y_1 + y_2 + \dots + y_m = \frac{m}{2} \times 4 = 2m$ , 故选 C.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 1

14.  $x=0$

15.  $(-2, +\infty)$

16.  $[-3, -1]$

【解析】

13.

【解析】因为函数  $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1} (a \in \mathbb{R})$  是奇函数,

所以  $f(-x) = a - \frac{2}{e^{-x} + 1} = a - \frac{2e^x}{e^x + 1} = -f(x) = -a + \frac{2}{e^x + 1}$ ,  $2a = 2$ , 解得  $a = 1$ .

14.

【解析】设  $2^x = t$ , 则  $t^2 + t - 2 = 0$ ,  $t = -2$  (舍去),  $t = 1$ , 所以解为  $x = 0$ .

15.

【解析】 $\because A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ ,  $\therefore$  方程  $x^2 + px + 1 = 0$  没有正实数解, 故 A 集合有两种情况:

①若  $A = \emptyset$ , 则  $\Delta = p^2 - 4 < 0$ , 则  $-2 < p < 2$ ;

②若  $A \neq \emptyset$ ，则方程有两个非正数解，且 0 不是其解，则有：
$$\begin{cases} p^2 - 4 \geq 0 \\ -p \leq 0 \end{cases}$$
，解得  $p \geq 2$ 。

综上所述， $p > -2$ ，即实数  $p$  的取值范围是  $(-2, +\infty)$ 。

16.

【解析】当  $0 \leq x \leq 4$  时， $f(x) \in [-11, -2]$ ，

当  $a \leq x < 0$  时， $f(x) \in [-(\frac{1}{2})^a + a, -1 + a]$ ，数形结合只需：
$$\begin{cases} -(\frac{1}{2})^a + a \geq -11 \\ -1 + a \leq -2 \end{cases}$$
，解得

$-3 \leq a \leq -1$ 。所以实数  $a$  的取值范围是  $[-3, -1]$ 。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 【解析】

$$(1) \text{ 证明: } \because f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$\therefore f(i) + f\left(\frac{1}{i}\right) = 1 (i = 2, 3, 4, \dots, 2020) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 2019 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】

$$(1) \text{ 集合 } A = \{x | x^2 - 5x < 0\} = \{x | 0 < x < 5\}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } m=2 \text{ 时, } B = \{x | 3 \leq x \leq 5\},$$

$$\text{所以 } A \cap B = \{x | 3 \leq x < 5\}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \complement_U(A \cap B) = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 5\} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } A \cup B = A,$$

$$\text{所以 } B \subseteq A, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{①当 } B = \emptyset \text{ 时, 有 } m+1 > 3m-1 \text{ 得: } m < 1, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{②当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 有 } \begin{cases} m+1 \leq 3m-1 \\ m+1 > 0 \\ 3m-1 < 5 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 \leq m < 2, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{综合①②得: } m < 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故实数 } m \text{ 的取值范围为: } (-\infty, 2). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



19. 【解析】

(1) 当  $a > 0$  且  $a \neq 1$  时, 由  $3 - ax \geq 0$  得  $x \leq \frac{3}{a}$ ,

即函数  $f(x)$  的定义域是  $\left(-\infty, \frac{3}{a}\right]$  .....4 分

(2) 当  $a - 1 > 0$  即  $a > 1$  时, 令  $t = 3 - ax$ , .....5 分

要使  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上是减函数, 则函数  $t = 3 - ax$  在  $(0, 1]$  上为减函数,

即  $-a < 0$ , 并且  $3 - a \times 1 \geq 0$ , 解得  $1 < a \leq 3$ ; .....7 分

当  $a - 1 < 0$  即  $a < 1$  时, 令  $t = 3 - ax$  .....8 分

要使  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上是减函数, 则函数  $t = 3 - ax$  在  $(0, 1]$  为增函数,

即  $-a > 0$  并且  $3 - a \times 0 \geq 0$ , 解得  $a < 0$  .....10 分

综上可知, 所求实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0) \cup (1, 3]$  .....12 分

20. 【解析】

(1) 由题可得  $f(m) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n)$ , .....2 分

即  $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$  .....4 分

(2) 任取  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $\frac{x_2}{x_1} > 1$ .

由 (1) 得:  $f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$ , 即  $f(x_2) > f(x_1)$ .

$\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数. ....8 分

(3)  $\because f(2) = 1, \therefore 2 = f(2) + f(2) = f(4)$ , .....9 分

$f(x+2) - f(2x) > 2 \Leftrightarrow f(x+2) > f(2x) + f(4) \Rightarrow f(x+2) > f(8x)$  .....10 分

又  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数,

$\therefore \begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x > 0, \\ x+2 > 8x, \end{cases}$  解得  $0 < x < \frac{2}{7}$  .....11 分

故不等式  $f(x+2) - f(2x) > 2$  的解集为  $\left\{x \mid 0 < x < \frac{2}{7}\right\}$  .....12 分

21. 【解析】

(1) 函数  $f(x) = x^2 - 2tx + t^2 - 6t + 1 \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$  的对称轴为  $x = t$ , .....1 分

当  $t \leq -\frac{1}{2}$  时, 区间  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$  为增区间, 可得  $g(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = t^2 - 5t + \frac{5}{4}$ ; .....2 分



当  $-\frac{1}{2} < t < 1$ , 可得  $g(t) = f(t) = -6t + 1$ ; .....3 分

当  $t \geq 1$  时, 区间  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$  为减区间, 可得  $g(t) = f(1) = t^2 - 8t + 2$  .....4 分

$$\text{则 } g(t) = \begin{cases} t^2 - 5t + \frac{5}{4}, & t \leq -\frac{1}{2} \\ 1 - 6t, & -\frac{1}{2} < t < 1 \\ t^2 - 8t + 2, & t \geq 1 \end{cases}; \text{ .....6 分}$$

(2) 当  $t > 1$  时,  $g(t) < kt$  即  $t^2 - 8t + 2 < kt$ ,

可得  $k > t + \frac{2}{t} - 8$ , .....8 分

令  $m(t) = t + \frac{2}{t} (t > 1)$ ,

可得  $m(t)$  在  $(1, \sqrt{2})$  递减, 在  $(\sqrt{2}, +\infty)$  递增,

$m(1) = m(2) = 3$ ,  $m(3) = \frac{11}{3}$ , .....9 分

由图可得  $3 < k + 8 \leq \frac{11}{3}$ , 即  $-5 < k \leq -\frac{13}{3}$ ,

关于  $t$  的不等式  $g(t) < kt$  有且仅有一个正整数解 2, .....10 分

所以  $k$  的范围是  $\left[-5, -\frac{13}{3}\right]$  .....12 分

## 22. 【解析】

(1) 当  $x > 0$  时,  $f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n$ ,

因为  $f(x)$  为奇函数,  $\therefore f(-x) = -f(x)$ ,

$\therefore f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n = -\left[m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]$ , .....2 分

即  $(m-2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (n-2) = 0$  总成立. ....3 分

$\therefore \begin{cases} m-2=0 \\ n-2=0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$ , .....4 分

又当  $x < 0$  时, 同理可得  $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$ , .....5 分

综上:  $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$  .....6分

(2)  $\because 4^x > 0, 2^x > 0,$

原不等式化为  $2\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) - 2 + 2\lambda\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) - 2\lambda \geq 0,$  .....7分

令  $t = 2^x + \frac{1}{2^x}$ , 则  $t \geq 2,$

原不等式进一步化为  $t^2 + \lambda t - \lambda - 3 \geq 0$  在  $t \geq 2$  上恒成立. ....8分

记  $g(t) = t^2 + \lambda t - \lambda - 3, t \in [2, +\infty)$  .....9分

①当  $-\frac{\lambda}{2} \leq 2$  时, 即  $\lambda \geq -4$  时,  $g(t)_{\min} = g(2) = \lambda + 1 \geq 0,$

$\therefore \lambda \geq -1$  合理; .....10分

②当  $-\frac{\lambda}{2} > 2$  时, 即  $\lambda < -4$  时,

$g(t)_{\min} = g\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} - \lambda - 3 \geq 0,$  显然不成立. ....11分

综上实数  $\lambda$  的取值范围为:  $\lambda \geq -1$  .....12分