

江苏省南通中学 2020 学年第一学期

高一阶段性质量检测

数 学

命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、指数与对数

试卷分值：150 分

考试时间：120 分钟

班级_____ 姓名_____ 2020 年 10 月 9 日

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | -2 < x < 2\}$ 的真子集个数是（ ▲ ）

A. 8; B. 7; C. 4; D. 3.

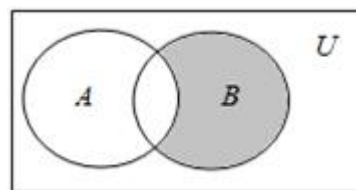
2. 下列表述正确的是（ ▲ ）

A. $\emptyset \subseteq \{0\}$ B. $\emptyset \in \{0\}$ C. $0 \in \emptyset$ D. $\{0\} \subseteq \emptyset$

3. 已知集合 $A = \{a-2, a^2+4a, 10\}$ ，若 $-3 \in A$ ，则实数 a 的值为（ ▲ ）

A. -1; B. -3; C. -3 或 -1; D. 无解

4. 如图， U 是全集，集合 A 、 B 是集合 U 的两个子集，则图中阴影部分所表示的集合是（ ▲ ）



A. $A \cap (\complement_U B)$; B. $B \cap (\complement_U A)$; C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; D. $\complement_U (A \cap B)$.

5. 命题 $P: \forall x \in \mathbb{R}, 2x+1 > 0$ ，则 $\neg P$ （ ▲ ）

A. $\neg P: \exists x_0 \in \mathbb{R}, 2x_0+1 > 0$; B. $\neg P: \exists x_0 \in \mathbb{R}, 2x_0+1 \leq 0$;

C. $\neg P: \exists x_0 \in \mathbb{R}, 2x_0+1 \geq 0$; D. $\neg P: \exists x_0 \in \mathbb{R}, 2x_0+1 < 0$.

6. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数，则下列等式中恒成立的是（ ▲ ）

A. $\log_a b \cdot \log_c b = \log_c a$; B. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$;

$$C. \log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c;$$

$$D. \log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c.$$

7. 下列说法中正确的是 (▲)

$$A. \text{当 } x > 1 \text{ 时, } x + \frac{1}{x} \text{ 的最小值为 } 2;$$

$$B. \text{当 } x < 0 \text{ 时, } x + \frac{1}{x} \text{ 的最小值为 } -2;$$

$$C. \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ 的最小值为 } 2;$$

$$D. \text{当 } x > 2 \text{ 时, } \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2}.$$

8. 已知二次函数 $y = x^2 + ax + b$ ($a, b \in R$) 的最小值为 0, 若关于 x 的不等式 $y < c$ 的解集为区间 $(m, m+6)$, 则实数 c 的值为 (▲)

$$A. 9;$$

$$B. 6;$$

$$C. 3;$$

$$D. \frac{1}{3}.$$

二、多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.)

9. 设 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | mx - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 m 的值可以为 (▲)

$$A. \frac{1}{2};$$

$$B. -1;$$

$$C. 0;$$

$$D. -\frac{1}{2}.$$

10. 下列说法正确的是 (▲)

A. 设 $a, b, c \in R$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根为 -1 的一个充要条件是

$$a - b + c = 0;$$

B. $\forall a \in R, \exists x \in R$, 使得 $ax > 2$;

C. 函数 $y = x^2 + x + 1$ 没有零点;

D. 方程 $\log_{\sqrt{x}}(2x) = 4$ 的解为 $x = 2$.

11. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, 则 (▲)

$$A. a > 0;$$

$$B. \text{不等式 } bx + c > 0 \text{ 的解集是 } \{x | x < -6\};$$

$$C. a + b + c > 0;$$

$$D. \text{不等式 } cx^2 - bx + a < 0 \text{ 的解集为 } (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$$

12. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则 (▲)

$$A. \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2;$$

$$B. a^2 + b^2 \geq 4;$$

$$C. a^{-1} + b^{-1} \geq 2;$$

$$D. a^3 + b^3 \geq 2.$$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 某班 45 名学生中, 有围棋爱好者 22 人, 足球爱好者 30 人, 同时爱好这两项的人最少有 ▲ 人.

14. 最新版高中数学教材必修第一册 P_{42} 的(阅读题)《墨经》上说: “小故, 有之不必然, 无之必不然. 体也, 若有端. 大故, 有之必然, 若见之成见也.” 这一段文字蕴含着十分丰富的逻辑思想. 请问, 文中的“小故”指的是逻辑中的 ▲ (选“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”之一填空).

15. 最新版高中数学教材必修第一册 P_{92} 的(探究题)告诉我们: 任何一个正实数 N 可以表示成

$N = a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$), 此时 $\lg N = n + \lg a$ ($0 \leq \lg a < 1$), 当 $n > 0$ 时, N 是 $n+1$ 位数. 据此, 可判断数 $2^{2^{10}}$ 的位数是 ▲ (取 $\lg 2 = 0.3010$).

16. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 6$, 则 $\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y$ 的最大值为 ▲.

四、解答题 (本大题共 6 个大题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本题满分 5+5 分)

已知集合 $A = \{x | x < a\}$, $B = \{x | 1 < x < 6\}$.

(1) 若 $a = 5$ 时, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

(2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本题满分 5+7 分)

给出如下三个条件: ①充分不必要; ②必要不充分; ③充要. 请从中选择一个条件补充到下面的横线上.

已知集合 $P = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, $S = \{x | 1-m \leq x \leq 1+m\}$, 则 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的 ▲ 条件.

若存在实数 m , 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本题满分 6+6 分)

(1) 不查表计算: $\lg^2 5 - \lg^2 2 + \lg 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(-\frac{5}{8}\right)^0 - \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}$;

(2) 已知 $\log_{18} 9 = a$, $18^b = 5$, 试用 a, b 表示 $\log_{36} 5$.

20. (本题满分 6+6 分)

已知 $y = \frac{ax-3}{x+1}$ ($a \in R$).

- (1) 若关于 x 的不等式 $y < 1$ 的解集为区间 $(-1, 4)$, 求 a 的值;
 (2) 设 $a \leq 0$, 解关于 x 的不等式 $y > 0$.

21. (本题满分 6+6 分)

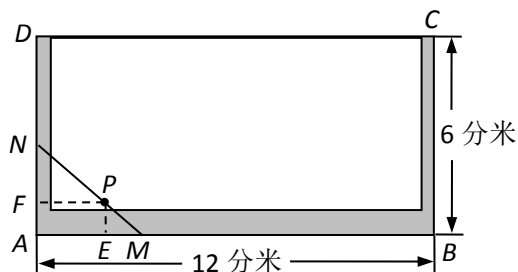
已知 $y = a^2x + \frac{c^2}{x-b}$ (a, b, c 为常数, 且 $a > 0, c > 0$).

- (1) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求证: $|y| \geq 2c$;
 (2) 当 $b = 1$ 时, 如果对任意的 $x > 1$ 都有 $y > a$ 恒成立. 求证: $a + 2c > 1$.

22. (本题满分 4+4+4 分)

如图, 长方形 $ABCD$ 表示一张 6×12 (单位: 分米) 的工艺木板, 其四周有边框 (图中阴影部分), 中间为薄板. 木板上一瑕疵 (记为点 P) 到外边框 AB, AD 的距离分别为 1 分米, 2 分米. 现欲经过点 P 锯掉一块三角形废料 MAN , 其中 M, N 分别在 AB, AD 上. 设 AM, AN 的长分别为 m 分米, n 分米.

- (1) 求证: $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$;
 (2) 为使剩下木板 $MBCDN$ 的面积最大, 试确定 m, n 的值;
 (3) 求剩下木板 $MBCDN$ 的外边框长度 (MB, BC, CD, DN 的长度之和) 的最大值及取得最大值时 m, n 的值.



江苏省南通中学 2020 学年第一学期

高一阶段性质量检测答案

数 学

命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、指数与对数

试卷分值：150 分

考试时间：120 分钟

班级_____ 姓名_____ 2020 年 10 月 9 日

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 集合 $A = \{x \in N | -2 < x < 2\}$ 的真子集个数是（ ▲ ）

A. 8;

B. 7;

C. 4;

D. 3.

【答案】D.

2. 下列表述正确的是（ ▲ ）

A. $\emptyset \subseteq \{0\}$

B. $\emptyset \in \{0\}$

C. $0 \in \emptyset$

D. $\{0\} \subseteq \emptyset$

【答案】A.

3. 已知集合 $A = \{a-2, a^2+4a, 10\}$ ，若 $-3 \in A$ ，则实数 a 的值为（ ▲ ）

A. -1;

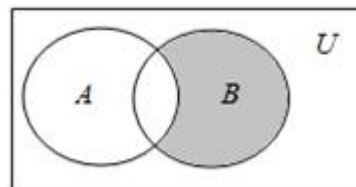
B. -3;

C. -3 或 -1;

D. 无解

【答案】B.

4. 如图， U 是全集，集合 A 、 B 是集合 U 的两个子集，则图中阴影部分所表示的集合是（ ▲ ）



A. $A \cap (\complement_U B)$;

B. $B \cap (\complement_U A)$;

C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

D. $\complement_U (A \cap B)$.

【答案】B.

5. 命题 $P: \forall x \in R, 2x+1 > 0$ ，则 $\neg P$ （ ▲ ）

A. $\neg P: \exists x_0 \in R, 2x_0+1 > 0$;

B. $\neg P: \exists x_0 \in R, 2x_0+1 \leq 0$;

C. $\neg p: \exists x_0 \in R, 2x_0 + 1 \geq 0;$

D. $\neg p: \exists x_0 \in R, 2x_0 + 1 < 0.$

【答案】B.

6. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数, 则下列等式中恒成立的是 (▲)

A. $\log_a b \cdot \log_c b = \log_c a;$

B. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b;$

C. $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c;$

D. $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c.$

【答案】B.

7. 下列说法中正确的是 (▲)

A. 当 $x > 1$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2;

B. 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 -2;

C. 当 $0 < x < 1$ 时, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的最小值为 2;

D. 当 $x > 2$ 时, $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}.$

【答案】B.

8. 已知二次函数 $y = x^2 + ax + b$ ($a, b \in R$) 的最小值为 0, 若关于 x 的不等式 $y < c$ 的解集为区间 $(m, m+6)$, 则实数 c 的值为 (▲)

A. 9;

B. 6;

C. 3;

D. $\frac{1}{3}.$

【答案】A.

二、多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.)

9. 设 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | mx - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 m 的值可以为 (▲)

A. $\frac{1}{2};$

B. -1;

C. 0;

D. $-\frac{1}{2}.$

【答案】A. B. C.

10. 下列说法正确的是 (▲)

A. 设 $a, b, c \in R$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根为 -1 的一个充要条件是

$a - b + c = 0;$

B. $\forall a \in R, \exists x \in R$, 使得 $ax > 2;$

C. 函数 $y = x^2 + x + 1$ 没有零点;

D. 方程 $\log_{\sqrt{x}}(2x) = 4$ 的解为 $x = 2$.

【答案】A. C. D.

11. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, 则 (▲)

A. $a > 0$;

B. 不等式 $bx + c > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < -6\}$;

C. $a + b + c > 0$;

D. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

【答案】A. B. D.

12. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则 (▲)

A. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$;

B. $a^2 + b^2 \geq 4$;

C. $a^{-1} + b^{-1} \geq 2$;

D. $a^3 + b^3 \geq 2$.

【答案】A. C. D.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 某班 45 名学生中, 有围棋爱好者 22 人, 足球爱好者 30 人, 同时爱好这两项的人最少有 ▲ 人.

【答案】当围棋爱好者的集合与足球爱好者的集合的并集为全集时, 同时爱好这两项的人最少,

设其为 x , 则 $(22 - x) + x + (30 - x) = 45$, 所以 $x = 7$.

14. 最新版高中数学教材必修第一册 P_{42} 的 (阅读题) 《墨经》上说: “小故, 有之不必然, 无之必

不然. 体也, 若有端. 大故, 有之必然, 若见之成见也.” 这一段文字蕴含着十分丰富的逻辑思想.

请问, 文中的“小故”指的是逻辑中的 ▲ (选“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”之一填空).

【答案】必要条件

15. 最新版高中数学教材必修第一册 P_{92} 的 (探究题) 告诉我们: 任何一个正实数 N 可以表示成

$N = a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$), 此时 $\lg N = n + \lg a$ ($0 \leq \lg a < 1$), 当 $n > 0$ 时, N 是 $n + 1$

位数. 据此, 可判断数 $2^{2^{10}}$ 的位数是 ▲ (取 $\lg 2 = 0.3010$).

【答案】因为 $2^{10} = 1024$, 所以 $\lg 2^{2^{10}} = \lg 2^{1024} = 1024 \lg 2 = 1024 \times 0.3010 = 308.224$, 所以,

数 $2^{2^{10}}$ 的位数是 309.

16. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 6$, 则 $\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y$ 的最大值为 ▲.

【答案】因为 $\sqrt{2}xy \leq \frac{x^2}{2} + y^2$, $4x \leq x^2 + 4$, $\sqrt{2}y \leq \frac{y^2}{2} + 1$,

$$\text{所以 } \sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y \leq \left(\frac{x^2}{2} + y^2\right) + (x^2 + 4) + \left(\frac{y^2}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 5 = 14,$$

当且仅当 $x = 2$, $y = \sqrt{2}$ 时取 “=”,

所以 $\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y$ 的最大值为 14.

另解: 因为 $x^2 + y^2 = 6$, 由三元柯西不等式 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$

$$\text{得 } (2x^2 + 4^2 + 2y^2)(y^2 + x^2 + 1^2) \geq (\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y)^2,$$

$$\text{即 } 14^2 = 28 \times 7 = (2x^2 + 4^2 + 2y^2)(y^2 + x^2 + 1^2) \geq (\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y)^2,$$

所以 $\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y \leq 14$, 故 $\sqrt{2}xy + 4x + \sqrt{2}y$ 的最大值为 14.

四、解答题 (本大题共 6 个大题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本题满分 5+5 分)

已知集合 $A = \{x | x < a\}$, $B = \{x | 1 < x < 6\}$.

(1) 若 $a = 5$ 时, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

(2) 若 $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq {}_{\mathbb{R}} B$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $a = 5$ 时, $A = \{x | x < 5\}$, $B = \{x | 1 < x < 6\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x | 1 < x < 5\}, A \cup B = \{x | x < 6\}.$$

$$(2) \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x \geq a\}, \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 6\},$$

$$\because \complement_{\mathbb{R}} A \subseteq {}_{\mathbb{R}} B, \therefore a \geq 6, \text{ 故实数 } a \text{ 的取值范围是 } [6, +\infty).$$

18. (本题满分 5+7 分)

给出如下三个条件: ①充分不必要; ②必要不充分; ③充要. 请从中选择一个条件补充到下面的横线上.

已知集合 $P = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, $S = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$, 则 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的 ▲ 条件.

若存在实数 m , 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

【解析】若选择①，即 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充分不必要条件，则 $P \subsetneq S$ ，则 $S \neq \emptyset$ 即 $1-m \leq 1+m$

且 $\begin{cases} 1-m \leq 1 \\ 1+m \geq 4 \end{cases}$ ，两个等号不同时成立，解得 $m \geq 3$ ，故 $m \geq 3$ ，即实数 m 的取值范围是 $[3, +\infty)$ ；

若选择②，即 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要不充分，则 $S \subsetneq P$ ，

当 $S = \emptyset$ 时， $1-m > 1+m$ ，解得 $m < 0$ ，

当 $S \neq \emptyset$ 时， $1-m \leq 1+m$ ，解得 $m \geq 0$ 且 $\begin{cases} 1-m \geq 1 \\ 1+m \leq 4 \end{cases}$ ，两个等号不同时成立，解得 $m \leq 0$ ，

综上，实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 0]$ ；

若选择③，即 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充要条件，则 $P = S$ ，即 $\begin{cases} 1-m=1 \\ 1+m=4 \end{cases}$ ，此方程组无解，则不存在实数 m ，使 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充要条件。

19. (本题满分 6+6 分)

(1) 不查表计算： $\lg^2 5 - \lg^2 2 + \lg 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(-\frac{5}{8}\right)^0 - \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}$ ；

(2) 已知 $\log_{18} 9 = a$ ， $18^b = 5$ ，试用 a ， b 表示 $\log_{36} 5$ 。

【解析】(1) 原式 = 1；

(2) 由 $18^b = 5$ 得 $\log_{18} 5 = b$ ， $\log_{36} 5 = \frac{\log_{18} 5}{\log_{18} 36} = \frac{\log_{18} 5}{\log_{18} (4 \times 9)} =$

$$\frac{\log_{18} 5}{2\log_{18} 2 + \log_{18} 9} = \frac{\log_{18} 5}{2(1 - \log_{18} 9) + \log_{18} 9} = \frac{b}{2-a}.$$

20. (本题满分 6+6 分)

已知 $y = \frac{ax-3}{x+1}$ ($a \in \mathbb{R}$)。

(1) 若关于 x 的不等式 $y < 1$ 的解集为区间 $(-1, 4)$ ，求 a 的值；

(2) 设 $a \leq 0$ ，解关于 x 的不等式 $y > 0$ 。

【解析】(1) 由 $y < 1$ 得 $\frac{ax-3}{x+1} < 1$ ，即 $\frac{ax-3}{x+1} - 1 < 0$ ，即 $\frac{(a-1)x-4}{x+1} < 0$ ，

所以 $[(a-1)x-4](x+1) < 0$ ，由题意得 $\frac{4}{a-1} = 4$ ，则 $a = 2$ ；

(2) $y > 0$ 即 $\frac{ax-3}{x+1} > 0$, 即 $(ax-3)(x+1) > 0$.

① 当 $a=0$ 时, 不等式即为 $-3(x+1) > 0$, 则 $x < -1$, 此时原不等式解集为 $(-\infty, -1)$;

② 当 $a < 0$ 时, 不等式即为 $(x - \frac{3}{a})(x+1) < 0$.

1° 若 $a < -3$, 则 $\frac{3}{a} > -1$, 所以 $-1 < x < \frac{3}{a}$, 此时原不等式解集为 $(-1, \frac{3}{a})$;

2° 若 $a = -3$, 则 $\frac{3}{a} = -1$, 不等式为 $(x+1)^2 < 0$, x 不存在, 此时原不等式解集为 \emptyset ;

3° 若 $-3 < a < 0$, 则 $\frac{3}{a} < -1$, 所以 $\frac{3}{a} < x < -1$, 此时原不等式解集为 $(\frac{3}{a}, -1)$.

21. (本题满分 6+6 分)

已知 $y = a^2x + \frac{c^2}{x-b}$ (a, b, c 为常数, 且 $a > 0, c > 0$).

(1) 当 $a=1, b=0$ 时, 求证: $|y| \geq 2c$;

(2) 当 $b=1$ 时, 如果对任意的 $x > 1$ 都有 $y > a$ 恒成立. 求证: $a+2c > 1$.

【解析】(1) 当 $a=1, b=0$ 时, $y = x + \frac{c^2}{x}$.

当 $x > 0$ 时, $|y| = |x + \frac{c^2}{x}| = x + \frac{c^2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{c^2}{x}} = 2c$, 当且仅当 $x = \frac{c^2}{x}$ 即 $x = c$ 时取 “=”;

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $|y| = |x + \frac{c^2}{x}| = -x + \frac{c^2}{-x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{c^2}{-x}} = 2c$, 当且仅当 $-x = \frac{c^2}{-x}$

即 $x = -c$ 时取 “=”.

综上, $|y| \geq 2c$;

(2) 当 $b=1$ 时, 对任意的 $x > 1$ 都有 $y > 0$ 恒成立, 即 $y = a^2x + \frac{c^2}{x-1} > 0$ 对任意的 $x > 1$ 恒成

立, 即 $y_{\min} > a$.

因为 $x > 1$, 所以 $y = a^2x + \frac{c^2}{x-1} = a^2(x-1) + \frac{c^2}{x-1} + a^2 \geq 2\sqrt{a^2(x-1) \cdot \frac{c^2}{x-1}} + a^2 = 2ac + a^2$,

当且仅当 $a^2(x-1) = \frac{c^2}{x-1}$ 即 $x = 1 + \frac{c}{a}$ 时取 “=”，所以 $2ac + a^2 > a$ ，又 $a > 0$ ，

所以 $a + 2c > 1$ 。

22. (本题满分 4+4+4 分)

如图，长方形 $ABCD$ 表示一张 6×12 (单位：分米) 的工艺木板，其四周有边框 (图中阴影部分)，中间为薄板。木板上一瑕疵 (记为点 P) 到外边框 AB ， AD 的距离分别为 1 分米，2 分米。现欲经过点 P 锯掉一块三角形废料 MAN ，其中 M ， N 分别在 AB ， AD 上。设 AM ， AN 的长分别为 m 分米， n 分米。

(1) 求证： $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ；

(2) 为使剩下木板 $MBCDN$ 的面积最大，试确定 m ， n 的值；

(3) 求剩下木板 $MBCDN$ 的外边框长度 (MB ， BC ， CD ， DN 的长度之和) 的最大值及取得最大值时 m ， n 的值。

【解析】(1) 证明：过点 P 分别作 AB ， AD 的垂线，垂足分别为 E ， F ，则 $\triangle PNF$ 与 $\triangle MPE$ 相似，

从而 $\frac{PF}{ME} = \frac{NF}{PE}$ ，所以 $\frac{2}{m-2} = \frac{n-1}{1}$ ，

即 $mn = m + 2n$ ，所以 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$ 。

(2) 欲使剩下木板的面积最大，即要锯掉的三角形废料 MAN 的面积 $S = \frac{1}{2}mn$ 最小。由 (1) 知，

$1 = \frac{2}{m} + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{1}{n}}$ ，得 $mn \geq 8$ (当且仅当 $\frac{2}{m} = \frac{1}{n}$ ，即 $m = 4$ ， $n = 2$ 时，“=” 成立)，此

时 $S_{\min} = 4$ (平方分米)。

(3) 欲使剩下木板的外边框长度最大，即要 $m + n$ 最小。

而 $m + n = (m + n)(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}) = 3 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 3 + 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{m}{n}$ ，

即 $m = 2 + \sqrt{2}$ ， $n = \sqrt{2} + 1$ 时，“=” 成立)，此时剩下木板外边框长度最大，为 $33 - 2\sqrt{2}$ 分米。

答：(2) m ， n 的值分别为 4，2；

(3) 剩下木板的外边框长度的最大值为 $33 - 2\sqrt{2}$ 分米，此时 $m = 2 + \sqrt{2}$ ， $n = \sqrt{2} + 1$ 。

