

重庆一中高 2023 级数学学科入学考试 2020.9

(考生注意: 本试题共 26 个小题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项: 1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试卷上直接作答;

2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项.

参考公式: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$.

一、选择题: (本大题 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分) 在每个小题的下面, 都给出了代号为 A、B、C、D 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑.

1. -2020 绝对值是()

A. -2020

B. $\frac{1}{2020}$

C. 2020

D. $-\frac{1}{2020}$

2. 以下为四个银行的 logo, 其中是中心对称图形是()



A.



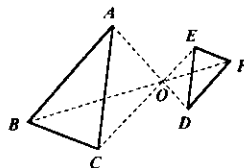
B.



C.



D.



3 题图

3. 如图, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DFE$ 是位似图形, 且位似中心为 O , $OB:OF=3:2$, 若线段 $AC=9$, 则线段 DE 的长为()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

4. 一个凸正多边形的内角是它外角的 1.5 倍, 则该正多边形的边数为()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

5. 下列命题是真命题的是()

A. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形.

B. 有一组邻边相等的平行四边形是矩形.

C. 对角线相互垂直且相等的四边形是矩形.

D. 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

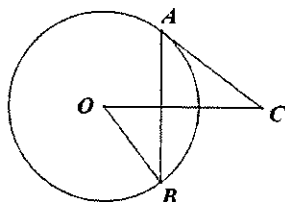
6. 如图, 在 $\odot O$ 中, AB 为弦, $OC \perp AB$, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 OC 于点 C , 若 $\angle BOC=53^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为()

A. 47°

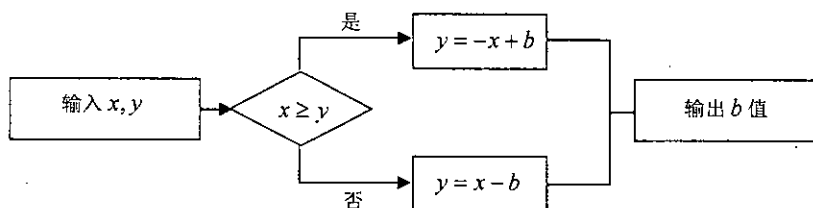
B. 37°

C. 53°

D. 63°



6 题图



7 题图

7. 按如图所示的运算程序, 能使输出的 b 的值为 -1 的是()

A. $x=1, y=2$

B. $x=2, y=0$

C. $x=2, y=1$

D. $x=-1, y=1$

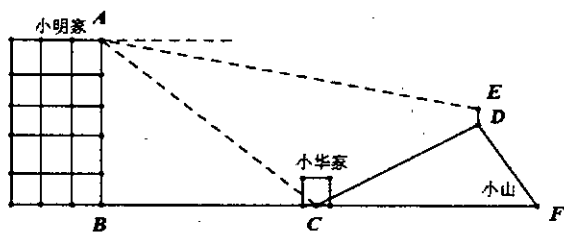
8. 《孙子算经》中有一道题，原文是：“今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺，将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺，问木长多少尺，现设绳长 x 尺，木长 y 尺，则可列二元一次方程组为()

A. $\begin{cases} y-x=4.5 \\ y-\frac{1}{2}x=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y-x=4.5 \\ \frac{1}{2}x-y=1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x-y=4.5 \\ \frac{1}{2}x-y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-y=4.5 \\ y-\frac{1}{2}x=1 \end{cases}$

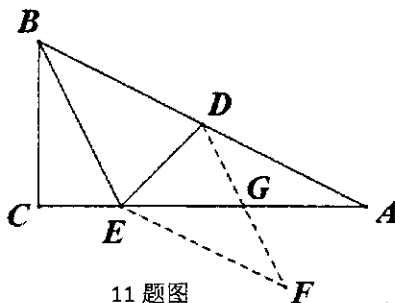
9. 家住重庆两相邻小区的小明和小华在一次数学课后，进行了一次数学实践活动。如图，在同一水平面从左往右依次是小明家所在的居民楼、小华家所在的小洋房、背靠小华家的一座小山，实践内容为测量小山的高度，家住顶楼的小明在窗户 A 处测得小山山顶的一棵大树顶端 E 的俯角为 10° ，小华在自家楼下 C 处测得小明家窗户 A 处的仰角为 37° ，且测得坡面 CD 的坡度 $i=1:2$ ，已知两家水平距离 $BC=120$ 米，大树高度 $DE=3$ 米，则小山山顶 D 到水平地面 BF 的垂直高度约为()

(精确到 0.1 米，参考数据 $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\sin 10^\circ \approx \frac{17}{100}$, $\tan 10^\circ \approx \frac{9}{50}$)

- A. 55.0 米 B. 50.3 米 C. 48.1 米 D. 57.3 米



9 题图



11 题图

10. 如果关于 x 的分式方程 $\frac{ax-5}{x-3} + \frac{10}{3-x} = 3$ 的解为整数，且关于 y 的不等式组 $\begin{cases} 5y-a \leq 4 \\ 5-y > -2(y-\frac{3}{2}) \end{cases}$ 有且仅有 1 个正整数解，则符合条件的所有整数 a 的和是()

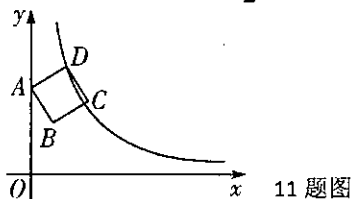
- A. 15 B. 12 C. 7 D. 6

11. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， D 为斜边 AB 的中点， E 为 AC 边上一点，连接 DE ，将 $\triangle BDE$ 沿着 DE 翻折，使点 B 落在 AC 下方的点 F 处， DF 与 AC 相交于点 G ，若 $S_{\triangle ABE} = 4S_{\triangle DEG}$ ， $BE = \sqrt{5}$ ， $AC=4$ ，则 DE 的长为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在 y 轴上，顶点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，已知点 B 的坐标是 $(\frac{6}{5}, \frac{11}{5})$ ，则 k 的值为()

- A. 16 B. 12 C. 8 D. 4



11 题图

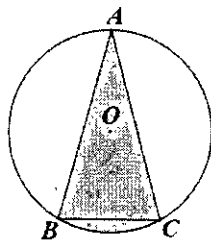
二. 填空题: (本大题 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分) 请将每小题的正确答案直接填在答题卡中对应的横线上.

13. 截至北京时间 8 月 23 日 19 时 30 分, 全球新冠肺炎确诊病例突破 23400000 例, 请将数 23400000 用科学记数表示为_____.

14. 计算: $\sqrt[3]{-8} - (-\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{4} + (\pi - 3.14)^0 =$ _____.

15. 一木盒里装有四个完全相同的小球, 在小球上分别标上 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2, 3 四个数, 搅匀后, 小明先从木盒里随机摸出一个小球, 然后小亮从剩余的小球里随机摸出一个小球, 两人摸出的小球上的数字之积为无理数的概率为_____.

16. 如图, 线段 AB 与 AC 是 $\odot O$ 的两条弦, 且 $AB=AC$, $\angle ABC=75^\circ$, $BC=4$, 则图中阴影部分的面积是_____.



16 题图

17. 新学期开学, 初三(1)班班主任为上学期期末考试取得优异成绩的同学颁发奖品. 他去文具店购买了以下三种奖品, 其中小笔记本每本 5 元, 大笔记本每本 7 元, 钢笔每支 10 元, 购买的大笔记本的数量是钢笔数量的 2 倍, 所有奖品共花费 178 元, 若使购买的奖品总数最多且以上三种奖品都要购买, 则这三种奖品的购买数量之和是_____.

18. 一个多位数 $N(N \geq 10)$ 乘以 11, 得到一个新的数, 我们把新数去掉首位和末位上的数字剩

下的数叫做这个多位数 N 的“C 位数”. 如果两个多位数的“C 位数”的数字之和相同, 我们就称这两个多位数是“黄金搭档”.

例如: $\because 23 \times 11 = 253$, $78 \times 11 = 858$

$\therefore 23$ 和 78 是黄金搭档

$\because 43 \times 11 = 473$, $98 \times 11 = 1078$

$\therefore 43$ 和 98 是黄金搭档

已知一个两位数 M , 十位数字为 a , 个位数字为 b , 满足 $3a + 2b = 13(a \leq b)$, 则不大于 60 的自然数中有_____个数 M 的“黄金搭档”.

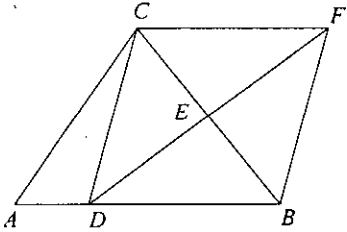
三. 解答题: (本大题 7 个小题, 每小题 10 分, 共 70 分) 解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形(包括辅助线), 请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

19. 计算 (1) $(a-b)(4a-b) - (2a-b)^2$

(2) $\left(m+1 - \frac{3}{m-1}\right) \div \frac{m^2-4m+4}{1-m}$

20. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上任意一点, E 是 BC 边的中点, 过点 C 作 AB 的平行线, 交 DE 的延长线于点 F , 连接 BF , CD .

- (1) 求证: 四边形 $CDBF$ 是平行四边形;
 (2) 若 $DF=8$, $BC=6$, $DB=5$, 求四边形 $CDBF$ 的面积.

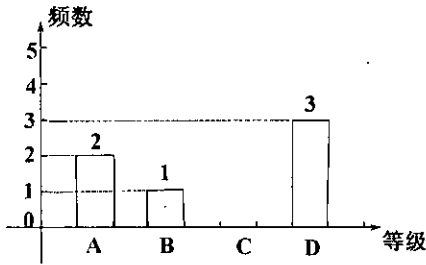


20 题图

21. 每年都有很多人因火灾丧失生命, 某校为提高学生的逃生知识, 开展了“防火灾, 爱生命”的防火安全知识竞赛. 现从该校七、八年级中各抽取 10 名学生的竞赛成绩 (百分制) 进行整理、描述和分析 (成绩得分用 x 表示, 共分成四组: $A: 80 \leq x < 85$, $B: 85 \leq x < 90$, $C: 90 \leq x < 95$, $D: 95 \leq x \leq 100$), 下面给出了部分信息:

七年级抽取的 10 名学生的竞赛成绩是: 100, 81, 84, 83, 90, 89, 89, 98, 97, 99;
 八年级抽取的 10 名学生的竞赛成绩是: 100, 80, 85, 83, 90, 95, 92, 93, 93, 99;

八年级抽取的学生竞赛成绩频数分布直方图



七、八年级抽取的学生竞赛成绩统计表

年级	平均分	中位数	众数	方差
七年级	91	89.5	b	45.2
八年级	91	a	93	39.2

请根据相关信息, 回答以下问题:

- (1) 直接写出表格中 a , b 的值并补全八年级抽取的学生竞赛成绩频数分布直方图;
 (2) 根据以上数据, 你认为该校七、八年级中哪个年级学生掌握防火安全知识较好? 请说明理由 (一条理由即可);
 (3) 该校七、八年级共有 1600 人参加了此次竞赛活动, 估计参加此次竞赛活动成绩非常优秀 ($x \geq 95$) 的学生人数是多少.

22.在学习函数的过程中,我们经历了“确定函数的表达式——利用函数图象研究其性质——运用函数解决问题”的学习过程,根据你所经历的学习过程,现在来解决下面的问题:

在函数 $y_1 = ax^3 - bx + 2$ 中,当 $x = -1$ 时,

$y = 4$; 当 $x = -2$ 时 $y = 0$.

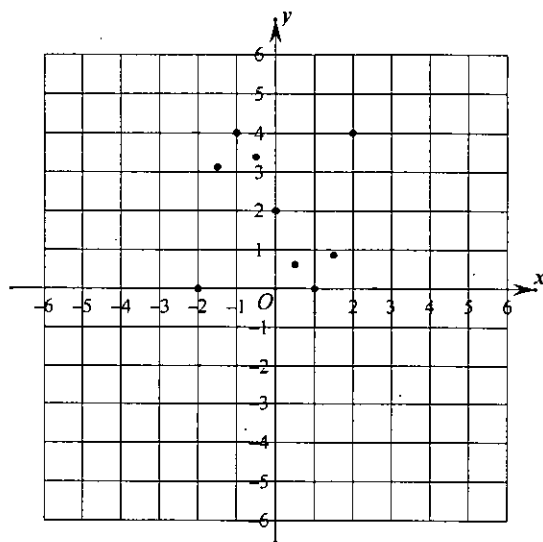
(1) 求这个函数的解析式;

(2) 根据已描出的部分点,画出该函数的图象;求当

$x = -\frac{1}{4}$ 时 y 的值;

(1) 画出直线 $y_2 = x + 3$ 的图像,然后直接写出方程

$ax^3 - bx + 2 = x + 3$ 的近似解.(精确到 0.1)

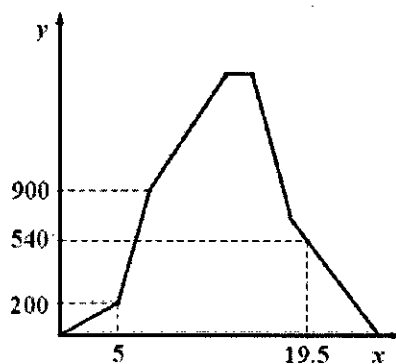


22 题图

23.甲、乙两人沿相同路线同时从 A 地出发去往 B 地,分别以一定的速度匀速步行,出发 5 分钟,甲发现自己有物品落在 A 地,于是立即以之前速度的 2 倍跑回 A 地,在到达 A 地并停留了 8 分钟后骑车以更快的速度匀速驶往 B 地.乙在途中某地停留了 5 分钟,之后以原速继续前进,最终两人同时到达 B 地,甲、乙两人的距离 y (米)与甲行进时间 x (分)之间的关系如图所示,求:

(1) 甲最初的速度和乙的速度;

(2) A 、 B 两地之间的距离为多少米?



23 题图

24.受新型冠状病毒的影响,口罩成为最紧缺的物资之一,因此在2020年初,星星服装厂快速转型生产一次性医用口罩和N95口罩.一次性医用口罩和N95口罩的成本分别为1元/个、8元/个.3月份星星服装厂共生产两种口罩80万个并售完,其中一次性医用口罩的单个售价是1.5元,N95口罩的单个售价是18元,且两种口罩销售总额不低于450万元.

(1)求3月份星星服装厂至多卖出多少万个一次性医用口罩?

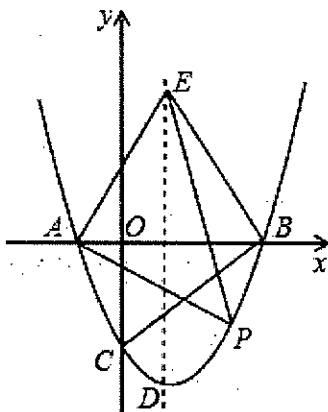
(2)由于国内口罩不再紧缺,而国外疫情逐渐爆发,从4月份起,星星服装厂将生产的口罩全部远销国外.因为将口罩出口销售,所以一次性医用口罩和N95口罩每个的成本均增加50%.4月份该厂生产并销售一次性医用口罩50万个,N95口罩25万个,两种口罩的总利润为425万元,其中一次性医用口罩和N95口罩的单个售价之比为1:6,5月份两种口罩的单个成本与4月份相同,总利润比4月份增加了25万元,一次性医用口罩的单个售价比4月份增加1元,N95口罩的单个售价比4月份降低 $\frac{5}{6}a\%$,同时一次性医用口罩的销量与3月份最大销售量相比增加 $\frac{5}{3}a\%$,N95口罩的销量与3月份最低销售量相比增加 $\frac{1}{4}a\%$.求 a 的值. $(a > 0)$

25.如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $B(3\sqrt{2}, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，抛物线的顶点为点 D ，过点 B 作 BC 的垂线，交对称轴于点 E 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 为第四象限内的抛物线上的一动点，求当 $\triangle PAE$ 的面积最大时，点 P 的坐标；

(3) 在(2)的条件下，即当 $\triangle PAE$ 的面积最大时，在对称轴上找一点 M ，在 y 轴上找一点 N ，使得 $OM + MN + NP$ 最小，求此时点 M 的坐标及 $OM + MN + NP$ 的最小值。



25题图

四. 解答题: (本大题 1 个小题, 共 8 分) 解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形 (包括辅助线), 请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

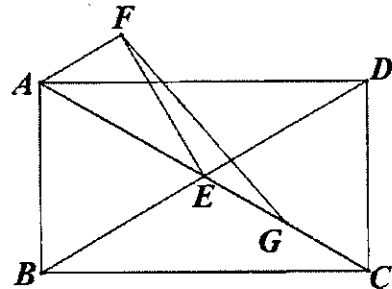
26. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 30^\circ$, $\triangle AEF$ 中, $\angle AFE = 90^\circ$, $\angle AEF = 30^\circ$, $AE = \frac{1}{2}BD$. 连接 EC , 点 G

是 EC 的中点, 将 $\triangle AEF$ 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)

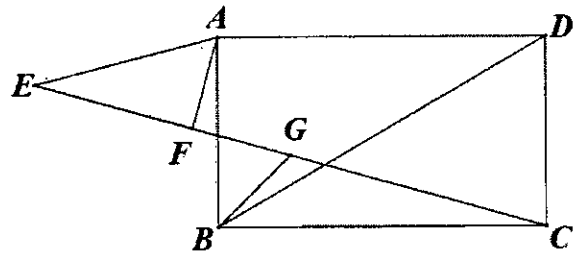
(1) 如图 1, 若 A 恰好在线段 CE 的延长线上, $CD = 2$, 连接 FG , 求 FG 的长度;

(2) 如图 2, 若点 F 恰好落在线段 EC 上, 连接 BG . 证明: $2(GC - GB) = \sqrt{3}DC$;

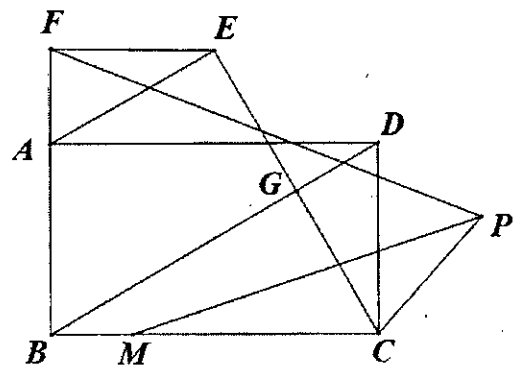
(3) 如图 3, 若点 F 恰好落在线段 BA 的延长线上, M 是线段 BC 上一点, $3BM = CM$, P 是平面内任一点, 满足 $\angle MPC = \angle DCE$, 连接 PF , 已知 $CD = 2$, 求线段 PF 的取值范围.



26 题图 1



26 题图 2



26 题图 3

(2)如图2, 连接AC交BD于点M, 连接BF、GM;

$\because G$ 是EC中点, $\therefore GE = GC$

在Rt $\triangle AEF$ 中, $\angle AEF = 30^\circ$,

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2} AE = \frac{\sqrt{3}}{2} DC \text{ 且 } AF = \frac{1}{2} AE$$

在Rt $\triangle ADB$ 中, $\angle ADB = 30^\circ$

$$\therefore BA = \frac{1}{2} BD = BM$$

在矩形ABCD中, $AM = \frac{1}{2} AC$,

则 $GM = \frac{1}{2} AE$ 且 $GM \parallel AE$,

即 $GM = AF$, $\angle 2 + \angle AMG = 60^\circ$

$\because GM \parallel AE$

$$\therefore 60^\circ + \angle 1 + 60^\circ + \angle AMG = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

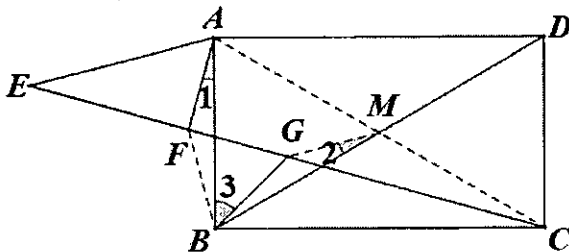
$\because AB = MB \therefore \triangle FAB \cong \triangle GMB$ (SAS)

$\therefore BF = BG$, $\angle FBA = \angle GBM$

则 $\angle FBG = \angle ABM = 60^\circ$

$\therefore \triangle FBG$ 是等边三角形, 则 $GF = GB$

$$\therefore GC - GB = GE - GF = EF = \frac{\sqrt{3}}{2} DC, \text{ 即 } 2(GC - GB) = \sqrt{3} DC \dots\dots\dots 6 \text{分}$$



26 题图 2

(3)如图,P在CM两侧的两端优弧上, 且圆心O是CM的中垂线与CE的交点,

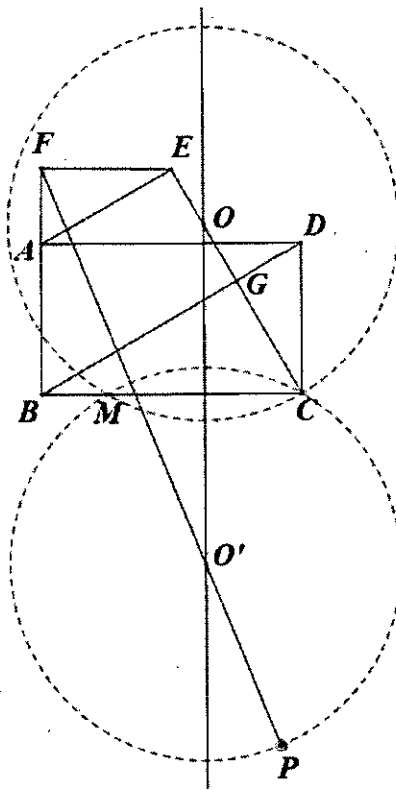
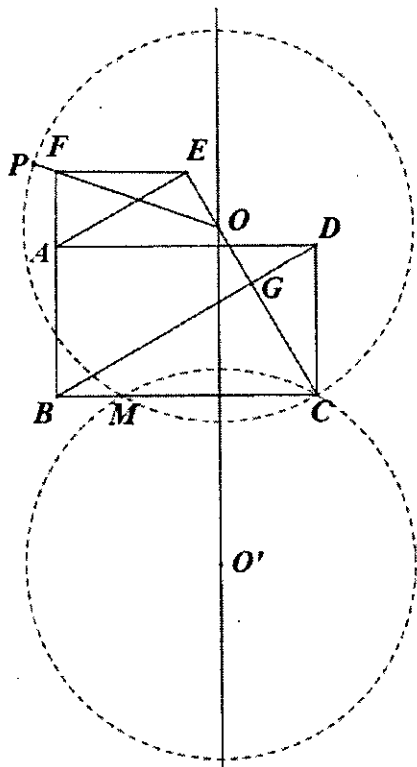
圆心O'是点O关于BC的对称点,

易得 $\angle DCE = 30^\circ$, 则圆心角为 60° , $\triangle COM$ 是等边三角形

$$\text{易得半径 } r_1 = r_2 = CM = \frac{3\sqrt{3}}{2}, OF = \frac{\sqrt{21}}{2}, O'F = \frac{\sqrt{129}}{2}$$

则有 $r_1 - OF \leq PF \leq r_2 + O'F$

$$\text{即 } \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \leq PF \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{129}}{2} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$



26 题图 3