# 江苏省通州高级中学高一年级第一次阶段性测试

## 数学试题

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

**1**．已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cap B=$　　( ▲ )

A． $3$　　B． $\{3\}$　　C． $\{1,2,3\}$　　D． $\{1,2\}$

**2**．函数 $y=x+\dfrac{4}{x}\left(x>0\right)$ 的最小值为　　( ▲ )

A． 2　　B． 4　　C． 8　　D． 1

**3**．下列一定正确的是　　( ▲ )

A． $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}$（$a>0$）　　B． 若 $x^2=1$，则 $x=1$

C． 若 $x=y$，则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D． 若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

**4**．设全集 $U$＝{1，3，5，7，9}，集合 $A$＝{1，$a$－5，9}，$\complement_U A$＝{5，7}，则 $a$ 的值是( ▲ )

A．2　　B．－2　　C．8　　D．－8

**5**．已知不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $\left(-1,2\right)$，则 $a-b$ 的值为　　( ▲ )

A． 3　　B． $-1$　　C． $-3$　　D．1

**6**．不等式 $ax^2+ax+1>0$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是　　( ▲ )

A．$\left(0,4\right)$　　B．$\left[0,4\right]$

C．$\left[0,4\right)$　　D．$\left(-\infty,0\right]\cup\left(4,+\infty\right)$

**7**．已知 $1\leqslant a+b\leqslant 4$，$-1\leqslant a-b\leqslant 2$，则 $3a-b$ 的取值范围是　　( ▲ )

A．$\left[-\dfrac{5}{2},\dfrac{19}{2}\right]$　　B．$\left[-8,1\right]$　　C．$\left[-1,8\right]$　　D．$\left[1,8\right]$

**8**．在班级文化建设评比中，某班设计的班徽是一个直角三角形图案．已知该直角三角形的面积为 50，则它周长的最小值为　( ▲ )

A．20　　B．$10\sqrt{2}$　　C．40　　D．$10\sqrt{2}$+20

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 3 分，有选错得 0 分．请把答案填涂在答题卡相应位置上）

9. 已知集合 $A=\{2,a+1,a^2+3a+3\}$，且 $1\in A$，则实数 $a$ 的可能值为 (▲)

A．0　　B． −1　　C． 1　　D．−2

10. 集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$ 中有且仅有一个元素，则实数 $a$ 的值为 (▲)

A．1　　B．−1　　C．0　　D．2

11. 下列命题为真命题的是 (▲)

A．“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件；

B．命题“$\forall\ x<1$，$x^2<1$”的否定是“$\exists\ x<1$，$x^2\geqslant 1$”；

C．若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$；

D．设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a\neq 0$ 或 $b\neq 2$”的必要不充分条件是“$a+b\neq 2$”．

12. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+bx+c\leqslant 0\ (a<b)\}$ 中有且仅有一个元素，则 $M=\frac{a+3b+4c}{b-a}$ 的可能取值为 (▲)

A． $\sqrt{3}+1$　　B． $2\sqrt{6}+5\sqrt{13}$　　C． $2\sqrt{5}+5$　　D． 11

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知集合 $A=\{1,2,m\}$，$B=\{1,3,n\}$，若 $A=B$，则 $m+n=$__▲__．

14. $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}=$__▲__．（用分数指数幂表示）

15. 若命题“$\exists x\in[1,4]$，$x^2-2ax+4\leqslant 0$”为假命题，则实数 $a$ 的取值范围是__▲__．

16. 设 $a>0$，$b>0$，$a+2b=2$，若不等式 $(1-tb)a+4\geqslant 0$ 恒成立，则实数 $t$ 的取值范围是__▲__．

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）

设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|\ ax+1=0\}$．

（1）若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 $a$ 的值；

（2）若 $A\cup B=A$，求实数 $a$ 的值．

**18．**（本小题满分 12 分）

已知命题 $p$：实数 $x$ 满足不等式 $\left(x-a\right)\left(x-3a\right)<0\left(a>0\right)$，命题 $q$：实数 $x$ 满足不等式 $\left|x-5\right|<3$．

（1）当 $a=1$ 时，命题 $p$，$q$ 均为真命题，求实数 $x$ 的取值范围；

（2）若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，求实数 $a$ 的取值范围.

**19．**（本小题满分 12 分）

（1）已知 $a+a^{-1}=4$，求 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$ 的值；

（2） 计算：$(-1.8)^{0}+1.5^{-2}\cdot(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ .

**20．**（本小题满分 12 分）

解下列关于 $x$ 的不等式：

（1）$\frac{2}{x-1}\leqslant 3$；

（2）$ax^{2}+(2a-1)x-2<0$ .

**21．**（本小题满分 12 分）

已知 $M$ 是满足下列条件的集合：① $0 \in M$，$1 \in M$；② 若 $x$，$y \in M$，则 $x-y \in M$；

③ 若 $x \in M$ 且 $x \neq 0$，则 $\dfrac{1}{x} \in M$．

（1）判断 $-1 \in M$ 是否正确，说明理由；

（2）证明：$\dfrac{1}{3} \in M$；

（3）证明：若 $x$，$y \in M$，则 $x+y \in M$ 且 $xy \in M$．

**22．**（本小题满分 12 分）

已知 $a$，$b \in (0,+\infty)$，$a+b=1$，求 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值．

**解法如下：** $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)(a+b)=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}+3 \geqslant 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$ 时取到等号，

则 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$．

应用上述解法，求解下列问题：

（1）已知 $a$，$b$，$c \in (0,+\infty)$，$a+b+c=1$，求 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值；

（2）已知 $x \in \left(0,\dfrac{1}{8}\right)$，求 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{8}{1-2\cdot\sqrt[3]{x}}$ 的最小值；

（3）已知正数 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$\cdots$，$a_n$，满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$．

求证：$\dfrac{a_1^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dfrac{a_3^2}{a_3+a_4}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \dfrac{1}{2}$．

# 江苏省通州高级中学高一年级第一次阶段性测试答案

## 数学试题

命题人：高一数学备课组　　审题人：高一数学备课组

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cap B=$　　( ▲ )B

A． 3　　B． $\{3\}$　　C． $\{1,2,3\}$　　D． $\{1,2\}$

2．函数 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 的最小值为　　( ▲ )B

A． 2　　B． 4　　C． 8　　D． 1

3．下列一定正确的是　　( ▲ )A

A． $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}$（$a>0$）　　B． 若 $x^2=1$，则 $x=1$

C． 若 $x=y$，则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D． 若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

4．设全集 $U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，集合 $A=\{1, a-5, 9\}$，$\complement_U A=\{5, 7\}$，则 $a$ 的值是( ▲ )C

A．2　　B．－2　　C．8　　D．－8

5．已知不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(-1,2)$，则 $a-b$ 的值为　( ▲ )D

A． 3　　B． $-1$　　C． $-3$　　D． 1

6．不等式 $ax^2+ax+1>0$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是　( ▲ )　C

A．$(0,4)$　　B．$[0,4]$

C．$[0,4)$　　D．$(-\infty,0]\cup(4,+\infty)$

7．已知 $1\leqslant a+b\leqslant 4$，$-1\leqslant a-b\leqslant 2$，则 $3a-b$ 的取值范围是　( ▲ )　C

A．$\left[-\frac{5}{2},\frac{19}{2}\right]$　　B．$[-8,1]$　　C．$[-1,8]$　　D．$[1,8]$

8．在班级文化建设评比中，某班设计的班徽是一个直角三角形图案．已知该直角三角形的面积为 50，则它周长的最小值为　( ▲ )　D

A．20　　B．$10\sqrt{2}$　　C．40　　D．$10\sqrt{2}+20$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 3 分，有选错得 0 分．请把答案填涂在答题卡相应位置上）

9． 已知集合 $A=\{2,a+1,a^2+3a+3\}$，且 $1\in A$，则实数 $a$ 的可能值为　( ▲ )　ABD

A．0　　B．$-1$　　C．1　　D．$-2$

**10**．集合 $A=\left\{x \mid a x^{2}+2x+1=0\right\}$ 中有且仅有一个元素，则实数 $a$ 的值为　( ▲ )AC

A．1　　B．－1　　C．0　　D．2

**11**．下列命题为真命题的是　( ▲ )　AB

A．“$a>1$”是“$\dfrac{1}{a}<1$”的充分不必要条件；

B．命题“$\forall\ x<1$，$x^{2}<1$”的否定是“$\exists\ x<1$，$x^{2}\geqslant 1$”；

C．若 $a>b>0$，则 $ac^{2}>bc^{2}$；

D．设 $a, b\in \mathbf{R}$，则“$a\neq 0$ 或 $b\neq 2$”的必要不充分条件是“$a+b\neq 2$”．

**12**．已知集合 $A=\left\{x \mid ax^{2}+bx+c\leqslant 0\ (a<b)\right\}$ 中有且仅有一个元素，则 $M=\dfrac{a+3b+4c}{b-a}$ 的可能取值为( ▲ )BCD

A．$\sqrt{3}+1$　　B．$2\sqrt{6}+5\sqrt{13}$　　C．$2\sqrt{5}+5$　　D．11

**三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）**

**13**．已知集合 $A=\{1, 2, m\}$，$B=\{1, 3, n\}$，若 $A=B$，则 $m+n=$____▲____．5

**14**．$\dfrac{a}{\sqrt[5]{a^{3}}}=$____▲____．（用分数指数幂表示）$a^{\frac{2}{5}}$

**15**．若命题“$\exists x\in[1,4], x^{2}-2ax+4\leqslant 0$”为假命题，则实数 $a$ 的取值范围是____▲____．$a<2$

**16**．设 $a>0$，$b>0$，$a+2b=2$，若不等式 $(1-tb)a+4\geqslant 0$ 恒成立，则实数 $t$ 的取值范围是____▲____．$t\leqslant 5+2\sqrt{5}$

**四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

**17**．（本小题满分 10 分）

设集合 $A=\{x|x^{2}-3x+2=0\}$，$B=\{x|\ ax+1=0\}$．

（1）若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 $a$ 的值；　$-\dfrac{1}{2}$

（2）若 $A\cup B=A$，求实数 $a$ 的值．　$-\dfrac{1}{2}, -1, 0$

**18.** （本小题满分 12 分）

已知命题 $p$∶实数 $x$ 满足不等式 $\left(x-a\right)\left(x-3a\right)<0\left(a>0\right)$，命题 $q$∶实数 $x$ 满足不等式 $\left|x-5\right|<3$.

（1）当 $a=1$ 时，命题 $p$，$q$ 均为真命题，求实数 $x$ 的取值范围；

（2）若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，求实数 $a$ 的取值范围.

**解答：**（1）（2，3）　　（2）$\left[2,\frac{8}{3}\right]$

**19.** （本小题满分 12 分）

（1）已知 $a+a^{-1}=4$，求 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$ 的值；

（2） 计算：$(-1.8)^0+1.5^{-2}\cdot(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ .

**解答：**（1）$\sqrt{6}$　　（2）$\sqrt{5}$

**20.** （本小题满分 12 分）

解下列关于 $x$ 的不等式：

（1）$\frac{2}{x-1}\leqslant 3$；　　$\left(-\infty,1\right)\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$

（2）$ax^2+(2a-1)x-2<0$ .

**21.** （本小题满分 12 分）

已知 $M$ 是满足下列条件的集合：① $0\in M,1\in M$；② 若 $x,y\in M$，则 $x-y\in M$；

③ 若 $x\in M$ 且 $x\neq 0$，则 $\frac{1}{x}\in M$ .

（1）判断 $-1\in M$ 是否正确，说明理由；

（2）证明：$\frac{1}{3}\in M$；

（3）证明：若 $x,y\in M$，则 $x+y\in M$ 且 $xy\in M$ .

**解答：【答案】（1）**$\frac{1}{3}\in M$ **正确。证明如下：由①知** $0\in M,1\in M$

由②可得 $0-1=-1\in M \therefore 1-(-1)=2\in M, 2-(-1)=3\in M$

由③得 $\frac{1}{3}\in M$

（2）证明：由①知 $0\in M$

由题知 $y\in M$， $\therefore$ 由②可得 $0-y=-y\in M$

又 $\because x\in M \therefore x-(-y)\in M$，即 $x+y\in M$

（3）证明：$x\in M, y\in M$，由②可得 $x-1\in M$，再由③可得 $\frac{1}{x}\in M, \frac{1}{x-1}\in M$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\in M$ 即 $\frac{1}{x(x-1)}\in M$，

$\therefore x(1-x)\in M$ 即 $x-x^2\in M$，

$\therefore x^2\in M$ 即当 $x\in M, x^2\in M$

由（2）可知，当 $x, y\in M, x+y\in M$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\in M$ $\therefore \frac{2}{x}\in M$

$\therefore$ 当 $x, y\in M$，可得 $x^2, y^2, \frac{(x+y)^2}{2}, \frac{x^2+y^2}{2}\in M$

$\therefore \frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}=xy\in M$

**22．**（本小题满分 12 分）

已知 $a, b\in(0, +\infty)$， $a+b=1$，求 $y=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值.

**解法如下：** $y=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}+3\geqslant 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}-1, b=2-\sqrt{2}$ 时取到等号，

则 $y=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$ .

应用上述解法，求解下列问题：

（1）已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，$a+b+c=1$，求 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值；

（2）已知 $x\in\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$，求 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{8}{1-2\cdot\sqrt[3]{x}}$ 的最小值；

（3）已知正数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$．

求证：$\dfrac{a_1^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dfrac{a_3^2}{a_3+a_4}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\dfrac{1}{2}$．

【知识点】 基本不等式

【答案】（1）9；（2）18；（3）证明见解析.

【分析】利用"乘1法"和基本不等式即可得出．

【详解】解（1）$\because a+b+c=1$，

$\therefore y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c})\geq 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号．即 $y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为9．

（2）$y=\frac{2}{2x}+\frac{8}{1-2x}=(\frac{2}{2x}+\frac{8}{1-2x})(2x+1-2x)=10+2\cdot\frac{1-2x}{2x}+8\cdot\frac{2x}{1-2x}$，

而 $x\in(0,\frac{1}{2})$，$\therefore 2\cdot\frac{1-2x}{2x}+8\cdot\frac{2x}{1-2x}\geq 2\sqrt{\frac{2(1-2x)}{2x}\cdot\frac{8\cdot 2x}{1-2x}}=8$，

当且仅当 $\frac{2(1-2x)}{2x}=\frac{8\cdot 2x}{1-2x}$；即 $x=\frac{1}{6}\in(0,\frac{1}{2})$ 时取到等号，则 $y\geq 18$，

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{x}+\frac{8}{1-2x}$ 的最小值为18．

（3）$\because a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1$，

$\therefore 2S=(\frac{a_1{}^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2{}^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3{}^2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{a_n+a_1})[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_n+a_1)]$

$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+[\frac{a_1^2}{a_1+a_2}(a_2+a_3)+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}(a_1+a_2)+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}(a_1+a_2)+$

$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}(a_3+a_4)+\cdots]$

$\geq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(2a_1a_2+2a_2a_3+\cdots+2a_na_1)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=1$．

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取到等号，则 $S\geq\frac{1}{2}$．

【点睛】本题考查了"乘1法"和基本不等式的性质，考查了推理能力和计算能力，属于中档题．