高一数学9月月考

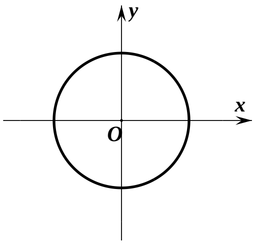
一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 下列集合 M 与 N 表示同一集合的是（　）.

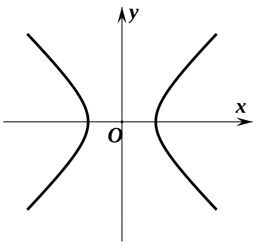
A. $M=\{(3,2)\},N=\{(2,3)\}$　　B. $M=\{3,2\},N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\},N=\{y|x+y=1\}$　　D. $M=\{2,3\},N=\{(2,3)\}$

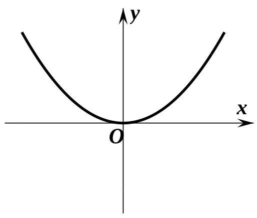
2. 下列图象表示函数图象的是（　）



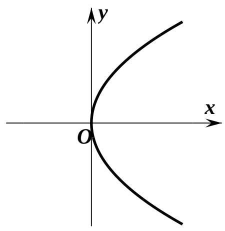
A.



B.



C.



D.

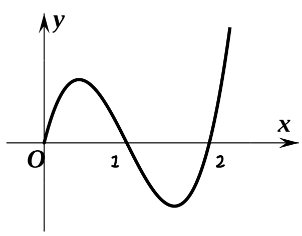
3. 设集合 $A=\{1,2,4\}$， $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　）.

A. $\{1,3\}$　　B. $\{1,0\}$　　C. $\{1,-3\}$　　D. $\{1,5\}$

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-x^2(0\le x\le 3)\\ x^2+6x(-2\le x<0)\end{cases}$ 的值域是（　）.

A. $\mathbf{R}$　　B. $[-8,1]$　　C. $[-9,+\infty)$　　D. $[-9,1]$

5. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x\ge 0$ 时的图象如图所示，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为（　）.



A. $(1,2)$　　B. $(-2,-1)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-1,1)$

6. 若函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，则 m 的取值范围是（　）.

A. $[0,4]$　　B. $\left[\frac{3}{2},4\right]$　　C. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2},3\right]$

7. 若函数 $f\left(x\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x<0$ 时， $f\left(x\right)$ 为增函数，若 $x_1<0, x_2>0$，且 $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$，则（　）.

A. $f\left(-x_1\right)>f\left(-x_2\right)$　　B. $f\left(-x_1\right)<f\left(-x_2\right)$

C. $-f\left(x_1\right)>f\left(-x_2\right)$　　D. $-f\left(x_1\right)<f\left(-x_2\right)$

8. 设函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的增函数，实数 a 使得 $f\left(1-ax-x^2\right)<f\left(2-a\right)$ 对任意 $x\in\left[0,1\right]$ 都成立，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $\left(-\infty,1\right)$　　B. $\left[-2,0\right]$　　C. $\left(-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}\right)$　　D. $\left[0,1\right]$

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

9. 下列四个关系中错误的是（　）.

A. $1\subseteq\left\{1,2,3\right\}$　　B. $\left\{1\right\}\in\left\{1,2,3\right\}$　　C. $\left\{1,2,3\right\}\subseteq\left\{1,2,3\right\}$　　D. $\varnothing\subseteq\left\{1\right\}$

10. 已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时， $f\left(x\right)=x-x^2$，则下列说法正确的是（　）.

A. $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$　　B. $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right)$ 是增函数

C. $f\left(x\right)>0$ 的解集为 $\left(-1,1\right)$　　D. $f\left(x\right)+2x\geq 0$ 的解集为 $\left[0,3\right]$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

11. 已知集合 $A=\left\{x\left|ax+1=0\right.\right\}$， $B=\left\{-1,1\right\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的所有可能取值的集合为____________.

12. 函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域是____________.

13. 函数 $y=\left|x^2-4x\right|$ 的单调递减区间为____________.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f\left(x\right)$，满足 $x>0$ 时， $f\left(x\right)=x\left(1-x\right)$，则当 $x\leq 0$ 时， $f\left(x\right)=$____________.

四、解答题（本大题共 3 小题，共 38 分）

15. **（本小题满分 10 分）**

已知集合 $A=\left\{x\left|x^2-4>0\right.\right\}$，$B=\left\{x\mid 2x^2+x-6>0\right\}$，求 $A\cup\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)$，$A\cap\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)$.

16. **（本小题满分 14 分）**

小张周末自驾游，早上 8 点从家出发，驾车 $3h$ 到达景区停车场，已知小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家的时间 t（单位：h）的函数关系为 $s\left(t\right)=-5t\left(t-13\right)$，由于景区内不能驾车，小张把车停在景区停车场．在景区玩到 16 点，小张开车从停车场以 $60km/h$ 的速度沿原路返回．

⑴ 求这天小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家的时间 t（单位：h）的函数解析式；

⑵ 在距离小张家 $60km$ 处有一加油站，求这天小张的车途经该加油站的时间．

17. **（本小题满分 14 分）**

已知定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意 $a,b\in\left(0,+\infty\right)$，都有 $f\left(a\cdot b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)$ 恒成立，当 $x>1$ 时，满足 $f\left(x\right)>0$．

⑴ 判断 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调性并用定义证明；

⑵ 若 $f\left(4\right)=4$，解关于实数 m 的不等式 $f\left(m^2-2m-1\right)<2$．

金陵中学 2019 级高一阶段考试

一、选择题（本大题共 12 小题,每小题 4 分,计 48 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

1. 设集合 $A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　）.

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,3,4\}$

2. 一元二次不等式 $x^2-2019x-2020<0$ 的解集为（　）

A. $(-1,2020)$　　B. $(-2020,1)$　　C. $(-\infty,-1)\cup(2020,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2020)\cup(1,+\infty)$

3. 下列函数中，在定义域上既是奇函数又是增函数的为（　）.

A. $y=x+1$　　B. $y=-x^3$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x|x|$

4. 若集合 $A=\{x\mid mx^2+2x+m=0,m\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素，则实数 m 的取值范围是（　）.

A. $\{1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域为（　）.

A. $[-3,+\infty)$　　B. $[-3,-2)$　　C. $[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$　　D. $(-2,+\infty)$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x,x\ge 0\\ x^2,x<0\end{cases}$，则 $f(f(-2))$ 的值为（　）.

A. 4　　B. 12　　C. 16　　D. 36

7. 若对任意的 $x\in[1,3]$，不等式 $x^2-3x-m<0$ 都成立，则实数 m 的取值范围为（　）.

A. $(-2,+\infty)$　　B. $\left(-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(-\dfrac{9}{4},0\right)$　　D. $(0,+\infty)$

8. 已知 $A=\{x\mid x<-2或x>3\},B=\{x\mid a\le x\le 2a-1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值范围为（　）.

A. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

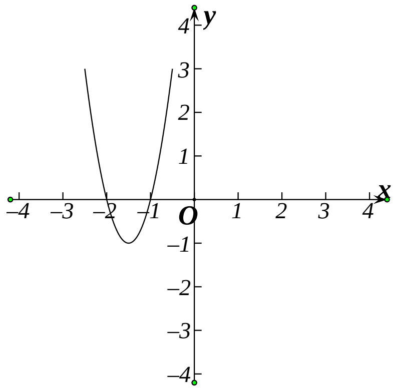
C. $\left(-\infty.-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

9. 若函数 $f\left(x\right)=ax^2+\left(a+3\right)x-1$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 是增函数，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $\left[-1,+\infty\right)$　　B. $\left[-1,0\right]$

C. $\left[0,1\right]$　　D. $\left[0,+\infty\right)$

10. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，函数的图象如图所示，则不等式 $xf\left(x\right)>0$ 的解集为（　）.



A. $\left(-2,-1\right)\cup\left(1,2\right)$　　B. $\left(-2,-1\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(1,2\right)$　　D. $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

11. 设 $f\left(x\right)=x^3+\dfrac{k}{x}+2$，其中 k 为参数，且 $k\in\mathbf{R}$，若 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-2,-1\right]$ 上的最大值为 4，则函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上有（　）.

A. 最小值 -2　　B.最小值 0　　C. 最小值 4　　D. 最大值 2

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-6x+6,x\geq 0\\ 3x+4,x<0\end{cases}$，若互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 满足 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是（　）.

A. $\left(\dfrac{11}{3},6\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　　C. $\left(\dfrac{11}{3},6\right]$　　D. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题（共 4 小题，每题 4 分，共 16 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

13. 若 $1\in\left\{x+2,x^2\right\}$，则实数 x 的值为____________.

14. 若定义运算 $a\odot b=\begin{cases}a,a\geq b\\ b^2,a<b\end{cases}$，则函数 $f\left(x\right)=x\odot\left(2-x\right)$ 的值域为____________.

15. 若函数 $f\left(x\right)=\left(a^2+a\right)x+1$ 在区间 $\left[a,a+1\right]$ 上最大值和最小值的差为 2，则实数 a 的值为__________.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-\dfrac{1}{\left|x\right|+1}-2$，若 $f\left(2a\right)\leq f\left(a-2\right)$，则实数 a 的取值范围为____________.

三、填空题：本题共 6 小题，共记 56 分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 8 分)

在实数范围内解下列不等式或方程.

⑴ $3x^2-x-4>0$； ⑵ $x^3-2x+1=0$.

18. (本小题满分 8 分)

已知集合 $A=\left\{x\mid x^2-8x+7<0\right\},B=\left\{x\mid x^2-2x-a^2-2a<0\right\}$.

⑴ 当 $a=4$ 时，求 $A\cap B$；

⑵ 若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

19. （本小题满分 10 分）

如图，$\triangle OAB$ 是边长为 2 的正三角形，记 $\triangle OAB$ 位于直线 $x=t\left(t\in\left(0,+\infty\right)\right)$ 左侧的图形的面积为 $f\left(t\right)$，试求 $y=f\left(t\right)$ 的解析式，并画出函数 $y=f\left(t\right)$ 的图象.

20. （本小题满分 10 分）

设函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{a}{x}$，其中 $a>0$.

⑴ 证明：函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 是单调减函数，在区间 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上是单调增函数;

⑵ 若函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,a\right]$ 上的最小值为 4，求实数 a 的值.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+2x+c\left(a,c\in\mathbf{N}^*\right)$，满足① $f\left(1\right)=5$； $6<f\left(2\right)<11$.

⑴ 求实数 a,c 的值;

⑵ 设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2x-3+\left|x-1\right|$，求 $g\left(x\right)$ 的最小值.

22. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax-b}{4-x^2}$ 是定义在 $\left(-2,2\right)$ 上的奇函数，且 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}$.

⑴ 求 $y=f\left(x\right)$ 的解析式;

⑵ 判断并证明函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上的单调性;

⑶ 解不等式 $f\left(t-1\right)+f\left(t\right)<0$.

南京一中 2019~2020 学年第一学期十月阶段性检测
高一数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知全集$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，集合$A=\{1,3,5\}$，$B=\{0,2,3\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　）.

A. $\{2,4\}$　　B. $\{0,2,4\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{1,2,4\}$

2. 已知集合$A=\{x\,|\,2x+1>0\}$，$B=\{x\,|\,(x+1)(x-1)>0\}$，则$A\cup B=$（　）

A. $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,-1)$

3. 适合条件$\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$A$的个数是（　）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 已知集合$A=\{x\,|\,ax^2+2x-1=0,x\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}\}$只有一个元素，则$a$的值为（　）.

A. 0　　B. 0或-1

C. -1　　D. 0或1

5. 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x>6\\ f(x+3),x\le 6\end{cases}$，则$f(-5)=$（　）.

A. 42　　B. 30

C. 12　　D. 6

6. 已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$和偶函数$g(x)$满足$f(x)+g(x)=2x^3+x^2-x+1$，则$f(3)=$（　）.

A. 55　　B. 51

C. 10　　D. 61

二、填空题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

7. 已知二次函数$f(x)$的图象过点$(3,5)$，$(-3,5)$，$(0,-4)$，则$f(x)$的解析式为____________.

8. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}-(x-5)^0$的定义域是____________.（用区间表示）

9. 函数$f(x)=2x+\sqrt{1-x}$，$f(x)$的值域是____________.（用区间表示）

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f\left(x\right)$在$\left[-2,+\infty\right)$上为增函数，且$y=f\left(x-2\right)$是偶函数，则$f\left(-5\right)$，$f\left(-3\right)$，$f\left(0\right)$的大小关系为____________.（从小到大排列）

11. 已知$f\left(x\right)=ax^3-bx+5$，且$f\left(1\right)=6$，则$f\left(-1\right)=$____________.

12. 已知函数$f\left(x\right)=x^2+\left(a^2-a\right)x-2$在区间$\left(-1,+\infty\right)$上是增函数，则实数$a$的取值范围是____________.

13. 若不等式$-3x^2+ax+b>0$的解集为$\left(-1,3\right)$，则$a+b$的值是____________.

14. 若不等式$\left(m-1\right)x^2-\left(m-1\right)x+3\left(m+1\right)>0$对一切实数$x$均成立，则$m$的取值范围为____________.

15. 已知函数$f\left(x\right)$是定义在$\left[-3,3\right]$上的偶函数，当$x\in\left[-3,0\right]$时$f\left(x\right)$是增函数，若不等式$f\left(1-m\right)>f\left(m\right)$成立，则$m$的取值范围是____________.

16. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+ax+1,x\geq 1\\ ax^2+2x-1,x<1\end{cases}$，对任意$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$成立，则实数$a$的取值范围是____________.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分）

17. (10 分)已知集合$A=\left\{x\mid x^2-6x+5\leq 0\right\}$，$B=\left\{x\mid 6+x-x^2>0\right\}$.

⑴ 求$A\cup B$；

⑵ 若$C=\left\{x\mid x\in A\cap B,且x\in\mathbf{Z}\right\}$，试写出集合$C$的所有子集.

18. (10 分)已知集合$A=\left\{x\mid\left|x-1\right|\leq 2\right\}$，$B=\left\{x\mid m<x<2m-1\right\}$，若$A\cap B=B$，求实数$m$的取值范围.

19. (10 分)已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+9}{x}$.

⑴ 判断函数$f\left(x\right)$的奇偶性；

⑵ 用函数单调性的定义证明函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,3\right)$上是减函数.

20. (12 分)学校欲在甲、乙两店采购某款投影仪，该投影仪原价为每台 2000 元，甲店用如下方法促销：买一台单价为 1950 元，买两台单价为 1900 元，每多买一台，则所购买各台单价再减少 50 元，但每台不能低于 1200 元；乙店一律按原价的 75% 销售，学校需购买 x 台投影仪，若在甲店购买总费用记为 $f\left(x\right)$ 元，在乙店购买总费用记为 $g\left(x\right)$ 元.

⑴ 分别求 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 的解析式；

⑵ 当购买 x 台时，在哪家店买更省钱？

21. (14 分)已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时有 $f\left(x\right)=\dfrac{3x+m}{x+2}$，（$m$ 为常数）.

⑴ 求 m 的值，并求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

⑵ 求 $f\left(x\right)$ 的值域；

⑶ 若 $f\left(3a+1\right)+f\left(a^2-4a-13\right)<0$，求实数 a 的取值范围.

22. (14 分)已知函数 $f\left(x\right)=ax^2-2\left|x-1\right|+2a$，且 $a\geq 0$.

⑴ 若 $a=1$时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间；

⑵ 设 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上的最小值为 $g\left(a\right)$，求 $g\left(a\right)$ 的表达式；

⑶ 求 $g\left(a\right)$ 的最小值.

高一年级二十九中等五校联考

一、选择题（本大题共 12 小题,每小题 5 分,计 60 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

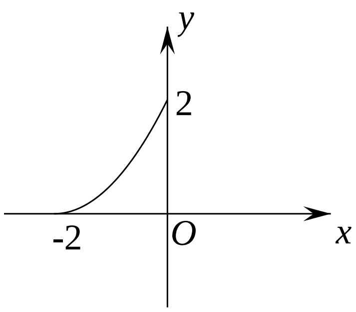
1. 已知全集$U=\{x\in\mathbf{N}^*\mid -3<x<5\}$，集合$A=\{1,2\}$，则$\complement_U A$等于（　）.

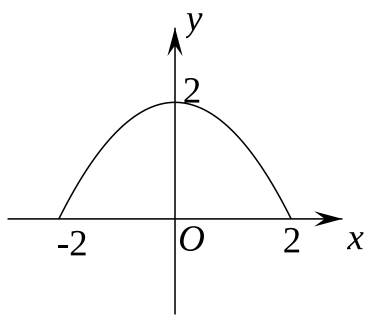
A. $\{0,3,4,5\}$　　B. $\{-1,0,3,4\}$　　C. $\{0,3,4\}$　　D. $\{3,4\}$

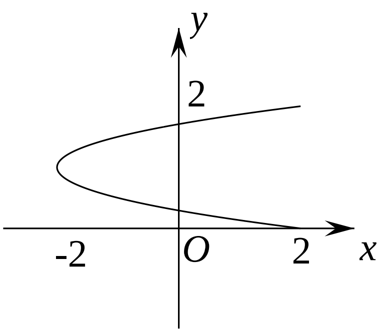
2. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}+(x-1)^0$的定义域为（　）

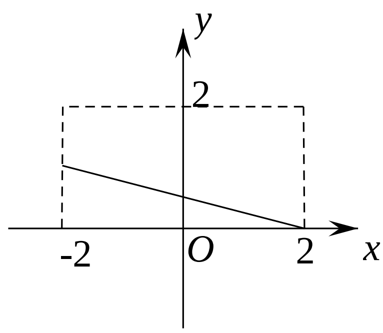
A. $\{x\mid x>1且x\neq 2\}$　　B. $\{x\mid x>1\}$　　C. $\{x\mid x\geq 1且x\neq 2\}$　　D. $\{x\mid x\geq 1\}$

3. 若函数$y=f(x)$的定义域为$M=\{x\mid -2\leq x\leq 2\}$，值域为$N=\{y\mid 0\leq x\leq 2\}$，则函数$y=f(x)$的图象可能是（　）.

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 已知一个等腰三角形的周长为 20，底边长y关于腰长x的函数解析式是（　）.

A. $y=\dfrac{20-x}{2}$　　B. $y=20-2x$

C. $y=\dfrac{20-x}{2}(0<x<10)$　　D. $y=20-2x(0<x<10)$

5. 若函数$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$在区间$(-\infty,4]$上是减函数，则实数a的取值范围是（　）.

A. $[-3,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3]$

C. $(-\infty,5]$　　D. $[5,+\infty)$

6. 函数 $y=\dfrac{3-x}{2+x}$ 的值域为（　）.

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $\mathbf{R}$

7. 已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x))=4x+9$，则 $f(x)$ 的解析式为（　）.

A. $f(x)=2x-3$　　B. $f(x)=-2x-9$

C. $f(x)=2x+3$　　D. $f(x)=2x+3$或$f(x)=-2x-9$

8. 已知函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+6(a\in\mathbf{R})$，若函数 $f(x)$ 的值域为$[0,+\infty)$，则实数 a 的取值集合为（　）.

A. $(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$

C. $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D. $\left\{-1,\dfrac{3}{2}\right\}$

9. 若函数 $y=x^2-2|x|+1$ 与 $y=a$ 的图象有 4 个交点，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,1)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

10. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，并且这两个实数根的平方和比这两个根的积大 21，则实数 m 的值是（　）.

A. 17　　B. -1

C. 17 或 -1　　D. -17 或 1

11. 已知 $f(x)=3-2|x|$， $g(x)=x^2-2x$， $F(x)=\begin{cases}g(x),若f(x)\ge g(x)\\ f(x),若f(x)<g(x)\end{cases}$，则 $F(x)$ 的最大值为（　）.

A. $2\sqrt{7}-1$　　B. $3-2\sqrt{3}$　　C. $7-2\sqrt{7}$　　D. 3

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}a(x-1)^2+1,x<1\\ (a+3)x+4a,x\ge 1\end{cases}$，满足对任意实数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $(-3,0)$　　B. $\left(-\dfrac{2}{5},0\right)$　　C. $\left[-\dfrac{2}{5},0\right)$　　D. $\left(-3,-\dfrac{2}{5}\right]$

二、填空题（共 4 小题，每题 5 分，共 20 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

13. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{(x,y)\mid y=-x^2+2x+\dfrac{3}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $A\cap B=$____________.

14. 已知方程 $x^2+4x+1=0$ 有两实根 x_1,x_2，则 $x_1^3+x_2^3$ 的值等于____________.

15. 国家为了加强对烟酒生产的宏观管理，实行征收附加税政策．已知某种酒每瓶 70 元，不加收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若政府征收附加税，每销售 100 元要征税 R 元（叫税率 $\mathrm{R}\%$），则每年的销售量将减少 $10\mathrm{R}$ 万瓶．要使每年在此项经营中所收取的附加税不少于 112 万元，则 R 的取值范围是____________.

16. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)+1$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=|3x-1|-1$，若对任意实数 x，都有 $f(x-t)<f(x)$ 成立，则实数 t 的取值范围为____________.

17. (本小题满分 10 分)

设全集 $U=\mathbf{R}$，已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 3\}$，集合 C 为不等式组 $\begin{cases}x+1\ge 0\\3x-6\le 0\end{cases}$ 的解集.

⑴ 写出集合 A 的所有子集;

⑵ 求 $\complement_U B$ 和 $B\cup C$.

18. (本小题满分 12 分)

⑴ 若不等式$ax^2+bx-2>0$的解集为$\left\{x\,|\,-2<x<-\frac{1}{4}\right\}$，求实数$a,b$的值；

⑵ 若不等式$(2-a)x^2-2(a-2)x+4\geq 0$对一切实数x都成立，求实数a的取值范围.

19. （本小题满分 12 分）

设集合$A=\{x\,|\,|x-1|<3\}$，$B=\left\{x\,|\,\frac{x-3a-2}{1-x}>0\right\}$.

⑴ 当$a=1$时，求集合B；

⑵ $A\bigcap B=B$时，求实数a的取值范围.

20. （本小题满分 12 分）

已知函数$f\quad x\quad=\frac{x}{x^2+1}$.

⑴ 试判断$f(x)$在$[-1,1]$上的单调性，并证明你的结论；

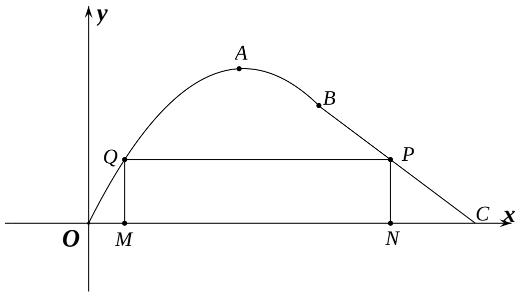
⑵ 求证：在区间$[-1,1]$上满足$f(x)=a$（a为常数）的实数x至多只有一个.

21. （本小题满分 12 分）

如图，在长为10千米的河流OC的一侧有一条观光带，观光带的前一部分为曲线段OAB．设曲线段OAB为函数$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right),x\in\left[0,6\right]$（单位：千米）的图象，且图象的最高点为$A\left(4,4\right)$，观光带的后一部分为线段$BC$．

⑴ 求函数为曲线段$OABC$的函数$y=f\left(x\right),x\in\left[0,10\right]$的解析式；

⑵ 若计划在河流和观光带$OABC$之间新建一个如图所示的矩形绿化带$MNPQ$，绿化带由线段MQ,QP,PN构成，其中点P在线段BC上.当OM长为多少时，绿化带的总长度最长？



22. （本小题满分 12 分）

已知二次函数$y=f\left(x\right)$满足$f\left(0\right)=1$且有$f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+2x$．

⑴ 求函数$f\left(x\right)$的解析式；

⑵ 若函数$g\left(x\right)=\left(t+1\right)x,t\in\mathbf{R}$，函数$h\left(x\right)=g\left(x\right)+f\left(x\right)$

① 求$h\left(x\right)$在区间$\left[-1,1\right]$上的最小值；

② 若对于任意的$x\in\left[-1,1\right]$，使得$h\left(x\right)\geq t$恒成立，求实数t的取值范围.

中华中学 2019-2020 学年度第一学期月考试卷

高一数学

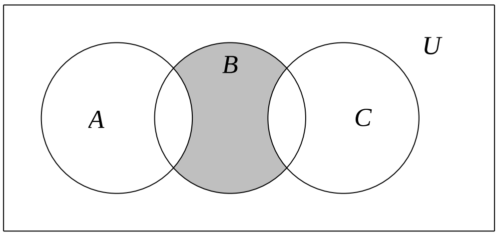
本卷考试时间：100 分钟　总分：150 分

一、单选题：本大题共 12 小题,每小题 5 分，共 60 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上

1. 将集合$\{(x,y)\mid x+y=5,且2x-y=1\}$表示成列举法，正确的是（　）.

A. $\{2,3\}$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $\{(3,2)\}$　　D. $(2,3)$

2. 如图中阴影部分所表示的集合是（　）



A. $B\cap \complement_U(A\cup C)$　　B. $(A\cup B)\cup(B\cup C)$

C. $(A\cup C)\cap(\complement_U B)$　　D. $B\cup\complement_U(A\cap C)$

3. 下列函数中，在区间$(0,2)$上为增函数的是（　）.

A. $y=3-x$　　B. $y=x^2+1$　　C. $y=-x^2$　　D. $y=x^2-2x-3$

4. 已知集合$P=\{x\mid y=\sqrt{x+1}\}$，集合$Q=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则P与Q的关系是（　）.

A. $P=Q$　　B. $P\supseteq Q$　　C. $P\subseteq Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

5. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则$f(a^2+1)$____$f(a)$（　）.

A. $>$　　B. $\geq$　　C. $<$　　D. $\leq$

6. 已知函数$f(x)$的定义域为$[1,3]$，则函数$f(2x+1)$的定义域为（　）.

A. $[1,3]$　　B. $[0,1]$　　C. $[3,7]$　　D. $[0,2]$

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leq 0\\-2x,x>0\end{cases}$，则使函数值为 5 的$x$的值是（　）.

A. -2　　B. $2或-\dfrac{5}{2}$　　C. $2或-2$　　D. $2或-2或-\dfrac{5}{2}$

8. 若偶函数$f(x)$在$(-\infty,-1]$上是减函数，则（　）.

A. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(-1)<f(2)$　　B. $f(-1)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(2)$

C. $f(2)<f(-1)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$　　D. $f(2)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(-1)$

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x-2, x\geq 10 \\ f\left[f(x+6)\right], x<10 \end{cases}$，则 $f(5)$ 的值为（　）.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

10. 若 $f(x)=\begin{cases} (3-a)x-4a, x<1 \\ x^2, x\geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 的增函数，则 a 的取值范围是（　）.

A. $\left[\frac{2}{5},3\right)$　　B. $\left(\frac{2}{5},3\right]$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$

11. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间 $[0,m]$ 上有最大值 3，最小值为 2，m 的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[0,2]$　　C. $[1,2]$　　D. $[1,+\infty)$

12. 设 $f(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty,0)$ 内是减函数，$f(-5)=0$，则 $x\cdot f(x)>0$ 的解集为（　）.

A. $(-5,0)\cup(0,5)$　　B. $(-\infty,-5)\cup(0,5)$　　C. $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　D. $(-5,0)\cup(5,+\infty)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上

13. 已知 $M=\{y\mid y=-x^2-1\}$，$N=\{y\mid y=x^2-4x+5\}$，则 $M\cup N=$____________.

14. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定义域是____________.

15. 已知函数 $f(x)=x^3$，若实数 a,b 满足 $f(a+2)+f(b)=0$，则 $a+b$ 等于____________.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-a^2}{x-a+1}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，则 a 的取值范围是____________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，请把答案填写在答题卡相应位置上

17. （10 分）已知集合 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 1<x<6\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，$C=\{x\mid 5-a<x<a\}$.

⑴ 求 $A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$；

⑵ 若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

18. （10 分）⑴ 已知 $f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1}{x}$，求 $f(x)$；

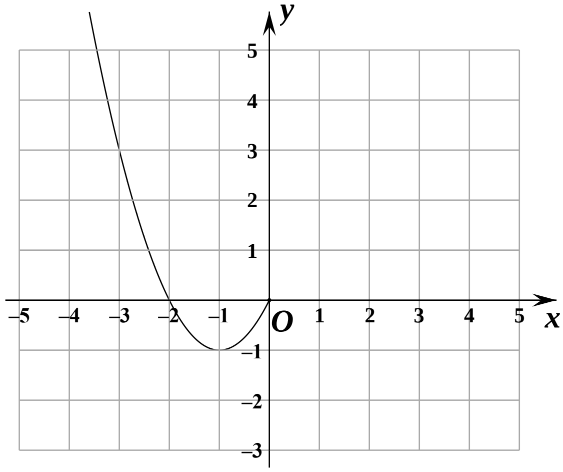
⑵ 已知 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$.

19. （10 分）求下列函数值域：

⑴ $f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1}$；

⑵ $f(x)=2x-\sqrt{x-1}$.

20. （12 分）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x\le 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象，如图所示，请根据图象.



⑴ 写出函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的增区间；

⑵ 求出函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的解析式；

⑶ 若函数 $g(x)=f(x)-2ax+2(x\in[1,2])$，求函数 $g(x)$ 的最小值.

21. （14 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $\left(-1,1\right)$ 上的奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$.

⑴ 求函数的解析式；

⑵ 判断函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上的单调性，并用定义证明；

⑶ 解关于 t 的不等式： $f\left(t+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(t-\dfrac{1}{2}\right)<0$.

22. （14 分）已知偶函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+b\right)}{x^2}$ 的定义域为 E，值域为 F.

⑴ 求实数 b 的值；

⑵ 若 $E=\left\{1,2,a\right\}$， $F=\left\{0,\dfrac{3}{4}\right\}$，求实数 a 的值；

⑶ 若 $E=\left[\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}\right]$， $F=\left[2-3m,2-3n\right]$，求 m,n 的值.

南京十三中高一年级十月阶段检测　数学试卷

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分，每小题只有一个选项正确）

1. 已知函数 $f(2x+1)=4x^2$，则 $f(-3)=$（　）.

A. 36　　B. 16　　C. 4　　D. 2

2. 集合 $M=\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{y|y=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$S=\{z|z=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是（　）

A. $S\subsetneqq P\subsetneqq M$　　B. $S=P\subsetneqq M$　　C. $S\subsetneqq P=M$　　D. $P=M\subsetneqq S$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{2}{x}$ 的定义域是（　）.

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　C. $[-1,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $\mathbf{R}$

4. 下列函数中，值域是$(0,+\infty)$的是（　）.

A. $y=\sqrt{x^2-2x+1}$　　B. $y=\dfrac{x+2}{x+1}\left(x\in(0,+\infty)\right)$　　C. $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}(x\in\mathbf{N})$　　D. $y=\dfrac{1}{|x+1|}$

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则（　）.

A. $f(3)<f(-2)<f(1)$　　B. $f(1)<f(-2)<f(3)$　　C. $f(-2)<f(1)<f(3)$　　D. $f(3)<f(1)<f(-2)$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x>10\\ f(f(x+5)), & x\le 10\end{cases}$，则 $f(5)$的值是（　）.

A. 24　　B. 21　　C. 18　　D. 16

7. 著名的 *Dirichlet* 函数 $D(x)=\begin{cases}1，x\text{为有理数}\\ 0，x\text{为无理数}\end{cases}$，则 $D(D(x))$ 等于（　）.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1，x\text{为有理数}\\ 0，x\text{为无理数}\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1，x\text{为无理数}\\ 0，x\text{为有理数}\end{cases}$

8. 函数 $f(x)=ax^2+2(a-1)x+2$ 在区间$(-\infty,4]$上为减函数，则 a 的取值范围为（　）.

A. $0<a\le\dfrac{1}{5}$　　B. $0\le a\le\dfrac{1}{5}$　　C. $0<a<\dfrac{1}{5}$　　D. $a>\dfrac{1}{5}$

9. 已知函数 $f(x)=(x-1)(ax+b)(-6<x<6)$ 为偶函数，且在$(0,6)$上单调递减，则 $f(3-x)<0$ 的解集为

（　）.

A. $(2,4)$　　B. $(-3,2)\cup(4,9)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-3,-1)\cup(1,4)$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x<0\\ -x^2, x\geq 0\end{cases}$， $f(f(a))\leq 3$，则实数 a 的取值范围为（　）.

A. $(-2,4)$　　B. $(-2,0]$　　C. $[0,\sqrt{3})$　　D. $(-\infty,\sqrt{3}]$

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11. 设集合 $M=\{1,2\}$，则满足条件 $M\cup N=\{1,2,3,6\}$ 的集合 N 的个数为____________.

12. 若函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[0,2]$，则函数 $f(2x)$ 的定义域是____________.

13. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$____________.

14. 函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 的单调递增区间为____________.

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}ax & ,x>1\\ \left(4-\frac{a}{2}\right)x+2, & x\leq 1\end{cases}$ 是 **R** 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围是____________.

16. 已知函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，设 $\alpha=\frac{\lambda}{1+\lambda}$， $\beta=\frac{1}{1+\lambda}$，若有 $f(\alpha)-f(\beta)>f(1)-f(0)$，则实数 λ 的取值范围是____________.

三、解答题（第 17 题 10 分，第 18-22 题每题 12 分，共 70 分）

17. 已知集合 $A=\left\{x\middle|\frac{6}{1+x}>1, x\in\mathbf{R}\right\}$， $B=\{x|x^2-2x-m<0\}$， $C=\{x|\,|x+1|<m\}$.

⑴ 当 $m=3$ 时，求 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$;

⑵ 若 $A\cap C=C$，求实数 m 范围.

18. 已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$，当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=2x+3$.

⑴ 求 $f(x)$ 的解析式;

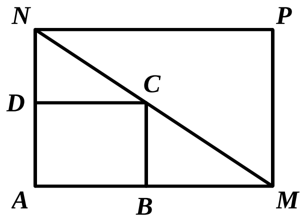
⑵ 若 $f(a)=7$，求实数 a 的值.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}$.

⑴ 函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $x\in\left[2,+\infty\right)$ 是否具有单调性？如果有请证明，如果没有请说明理由；

⑵ 求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[4,8\right]$ 上的值域.

20. 某物流公司购买了一块长 $AM=30$ 米，宽 $AN=20$ 米的矩形地块（如图），计划把矩形 $ABCD$ 建设为仓库，其余地方为道路和停车场，要求顶点 C 在地块对角线 MN 上，B，D 分别在边 AM，AN 上，假设 AB 的长度为 x 米.



⑴ 求矩形 $ABCD$ 的面积 S 关于 x 的函数解析式；

⑵ 要使仓库占地 $ABCD$ 的面积不少于144平方米，则 AB 的长度应在什么范围内？

21. ⑴ 解关于 x 的不等式 $x^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+1\leq 0$，其中 $a>0$；

⑵ 求 $f\left(x\right)=-x-\sqrt{3-2x}$ 的值域.

22. 已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$.

⑴ 求 $f\left(0\right)$；

⑵ 判断 $f\left(x\right)$ 奇偶性并证明；

⑶ 解不等式 $\dfrac{1}{2}f\left(x^2\right)-f\left(x\right)>\dfrac{1}{2}f\left(3x\right)$.

南京外国语学校高一数学月考试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 64 分）

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$， $A=\{1,2\}$， $B=\{1,2,4\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$____________.

2. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2^x-1}$的定义域为____________.

3. 函数$f(x)=-x^2+6x-2$， $x\in[0,3)$的值域是____________.

4. 已知函数$f(x)$满足$f(2x+1)=4x-3$，且$f(a)=9$，则$a=$____________.

5. 若函数$f(x)=(k-1)x^2+(2k-4)x+1$是偶函数，则$f(x)$的单调增区间是____________.

6. 已知函数$f(x)=1+\dfrac{2}{4^x-1}$，则$f(2019)+f(-2019)+2019=$____________.

7. 若函数$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{5-x}}{kx^2+2kx+3}$的定义域为$\mathbf{R}$，则实数$k$的取值范围是____________.

8. 函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x+a}$的图象C向下平移一个单位，再向左平移一个单位后，得到$y=f(x)$的图象C_1，若图象C_1关于原点对称，则实数$a=$____________.

9. 已知函数$f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$，则$f\left(\dfrac{1}{7}\right)+f\left(\dfrac{2}{7}\right)+f\left(\dfrac{3}{7}\right)+f\left(\dfrac{4}{7}\right)+f\left(\dfrac{5}{7}\right)+f\left(\dfrac{6}{7}\right)$的值是____________.

10. 不等式$(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$的解集是____________.

11. 不等式$\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geq 2$的解集是____________.

12. 若关于x的方程$3^x+a\cdot 9^x+1=0$在$x\in[1,2]$时有解，则实数a的取值范围为____________.

13. 若不等式$x^2-4x+2-a\leq 0$对一切$x\in[0,3]$恒成立，则实数a的取值范围为____________.

14. 设 $x>0, y>0$ 且满足 $x+xy+4y=5$，则 xy 的最大值是____________.

15. 若函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$，则不等式 $f\left(2x\right)<f\left(x+3\right)$ 的解集是____________.

16. 已知实数 $a,b\in\left(0,2\right)$，且满足 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，则 $a+b$ 的值为____________.

二、解答题：（每题 9 分，共 36 分）

17. ⑴ 设 $A=\left\{-4,2a-1,a^2\right\}$， $B=\left\{a-5,1-a,9\right\}$，已知 $A\cap B=\left\{9\right\}$，求 $A\cup B$.

⑵ 已知集合 $A=\left\{x\,|-3\le x\le 5\right\}$， $B=\left\{x\,|\,m-2\le x\le m+1\right\}$，满足 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

18. 判定函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ 的单调性，写出单调区间，并用定义法证明.

19. 若关于 x 的方程 $3tx^2+\left(3-7t\right)x+4=0$ 的两个实数根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 t 的取值范围.

20. 设函数 $f\left(x\right)=x^2-4\left|x\right|+3$，$\left(x\in\left[-4,4\right]\right)$.

⑴ 求证： $f\left(x\right)$ 是偶函数；

⑵ 画出函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 的图象，指出函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间，并说明在各个单调区间上 $f\left(x\right)$ 是单调递增还是单调递减；（不需要证明）

⑶ 求函数 $f\left(x\right)$ 的值域.

高一数学单元练习

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 下列集合 M 与 N 表示同一集合的是（　）.

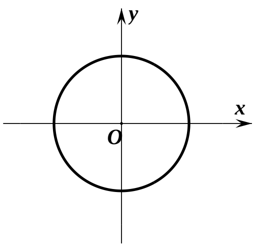
A. $M=\{(3,2)\},N=\{(2,3)\}$　　B. $M=\{3,2\},N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\},N=\{y|x+y=1\}$　　D. $M=\{2,3\},N=\{(2,3)\}$

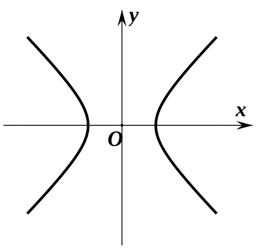
【答案】B;

【解析】集合中元素具有无序性，故选 B.

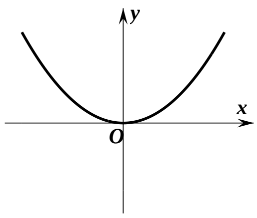
2. 下列图象表示函数图象的是（　）



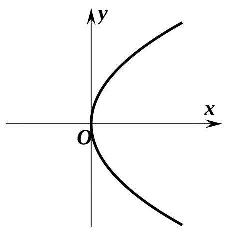
A.



B.



C.



D.

【答案】C;

【解析】由函数的定义，对于定义域上的每一个 x，有唯一确定的 y 与之对应，故选 C.

3. 设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　）.

A. $\{1,3\}$　　B. $\{1,0\}$　　C. $\{1,-3\}$　　D. $\{1,5\}$

【答案】A;

【解析】由题意得 $1\in B$，即 $1-4+m=0\Rightarrow m=3$，此时 $B=\{1,3\}$，故选 A.

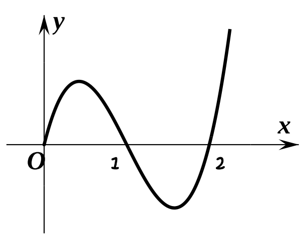
4. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-x^2\,(0\le x\le 3)\\ x^2+6x\,(-2\le x<0)\end{cases}$ 的值域是（　）.

A. $\mathbf{R}$　　B. $[-8,1]$　　C. $[-9,+\infty)$　　D. $[-9,1]$

【答案】B;

【解析】当 $-2\le x<0$ 时，值域为 $[-8,0)$，当 $0\le x\le 3$ 时，值域为 $[-3,1]$，所以 $f(x)$ 值域为 $[-8,1]$，故选 B.

5. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x\ge 0$ 时的图象如图所示，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为（　）.



A. $(1,2)$　　B. $(-2,-1)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-1,1)$

【答案】C;

【解析】由奇函数把图象补充完整，分 $x<0$ 和 $x\geq 0$ 两种情况讨论，可知选 C.

6. 若函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，则 m 的取值范围是（　）.

A. $[0,4]$　　B. $\left[\frac{3}{2},4\right]$　　C. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2},3\right]$

【答案】D;

【解析】函数在 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 单调递减，在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 单调递增，且当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y=-\frac{25}{4}$，当 $x=0$ 或 3 时，

$y=-4$，故选 D.

7. 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 为增函数，若 $x_1<0,x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则（　）.

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $-f(x_1)>f(-x_2)$　　D. $-f(x_1)<f(-x_2)$

【答案】A;

【解析】画出草图可知选 A.

8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，实数 a 使得 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对任意 $x\in[0,1]$ 都成立，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,1)$　　B. $[-2,0]$　　C. $(-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$　　D. $[0,1]$

【答案】A;

【解析】由函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，可得对任意 $x\in[0,1]$，$1-ax-x^2<2-a$ 恒成立，即

$a(1-x)<x^2+1$ 恒成立，当 $x=1$ 时，显然成立；当 $x\in[0,1)$ 时，$a<\frac{x^2+1}{1-x}$ 恒成立，令

$t=1-x\in(0,1]$，则 $a<\frac{(1-t)^2+1}{t}=t+\frac{2}{t}-2$ 恒成立，只需 $a<\left(t+\frac{2}{t}-2\right)_{\min}=1$. 故选 A.

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

9. 下列四个关系中错误的是（　）.

A. $1\subseteq\{1,2,3\}$　　B. $\{1\}\in\{1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3\}$　　D. $\varnothing\subseteq\{1\}$

【答案】AB;

【解析】$\subseteq$表示集合与集合的关系，$\in$表示元素与集合的关系，故 AB 错误；任意一个集合是它本身的子集，故 C 正确；空集是任何集合的子集，故 D 正确.

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x-x^2$，则下列说法正确的是（　）.

A. $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$　　　　B. $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 是增函数

C. $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,1)$　　　　D. $f(x)+2x\geq 0$ 的解集为 $[0,3]$

【答案】AD;

【解析】先求出 $f(x)=\begin{cases}x-x^2,x\geq 0\\-x-x^2,x<0\end{cases}$，最大值为 $\dfrac{1}{4}$，A 正确；在 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 单调递减，故 B 错误；$f(0)=0$，故 C 错误；分段解不等式 $f(x)+2x\geq 0$ 得解集为 $[0,3]$，故 D 正确.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

11. 已知集合 $A=\{x|ax+1=0\}$，$B=\{-1,1\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的所有可能取值的集合为____________.

【答案】$\{-1,0,1\}$；

【解析】由 $A\cap B=A$ 知 $A\subseteq B$，当 $a=0$ 时，$A=\varnothing\subseteq B$，当 $a\neq 0$ 时，$A=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}\subseteq B$，所以 $-\dfrac{1}{a}=\pm 1\Rightarrow a=\pm 1$，故实数 a 的所有可能取值的集合为 $\{-1,0,1\}$.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域是____________.

【答案】$(-\infty,1)$；

【解析】由题意知，$\begin{cases}\sqrt{1-x}\neq 0\\1-x\geq 0\end{cases}$，解得 $x\in(-\infty,1)$.

13. 函数 $y=\left|x^2-4x\right|$ 的单调递减区间为____________.

【答案】$(-\infty,0)$ 和 $(2,4)$；

【解析】画出函数草图即可.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，满足 $x>0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，则当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=$____________.

【答案】$x+x^2$；

【解析】当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)(1+x)]=x+x^2$ 对 $x=0$ 也成立，所以当 $x\le 0$ 时，$f(x)=x+x^2$.

四、解答题（本大题共 3 小题，共 38 分）

15. **（本小题满分 10 分）**

已知集合 $A=\{x|x^2-4>0\}$，$B=\{x\,|\,2x^2+x-6>0\}$，求 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

【答案】$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup(2,+\infty)$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$.

【解析】解不等式，可得 $A=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，$B=(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，故 $\complement_{\mathbf{R}}B=\left[-2,\dfrac{3}{2}\right]$，

所以 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup(2,+\infty)$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$.

16. **（本小题满分 14 分）**

小张周末自驾游，早上 8 点从家出发，驾车 $3h$ 到达景区停车场，已知小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家的时间 t（单位：h）的函数关系为 $s(t)=-5t(t-13)$，由于景区内不能驾车，小张把车停在景区停车场．在景区玩到 16 点，小张开车从停车场以 $60km/h$ 的速度沿原路返回．

⑴ 求这天小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家的时间 t（单位：h）的函数解析式；

⑵ 在距离小张家 $60km$ 处有一加油站，求这天小张的车途经该加油站的时间．

【答案】⑴ $s(t)=\begin{cases}-5t^2+65t\,,0\le t\le 3\\ 150\,,3<t\le 8\\ 60t-330\,,8<t\le 10.5\end{cases}$；⑵ 9 点和 17 点 30 分.

【解析】⑴ 小张家到景区的路程为 $s(3)=150km$，所以当 $3<t\le 8$ 时，$s(t)=150$；小张从景区回到家所花时间为 $\dfrac{150}{60}=\dfrac{5}{2}h$，故当 $8<t\le 10.5$ 时，$s(t)=150+60(t-8)=60t-330$，综上所述，

$$s(t)=\begin{cases}-5t^2+65t\,,0\le t\le 3\\ 150\,,3<t\le 8\\ 60t-330\,,8<t\le 10.5\end{cases};$$

⑵ 解方程 $s(t)=60$ 及方程 $s(t)=300-60$，得 $t=1$ 或 $\dfrac{19}{2}$，所以小张途经加油站的时间分别为 9 点和 17 点 30 分.

17. **（本小题满分 14 分）**

已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，对任意 $a,b\in(0,+\infty)$，都有 $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$ 恒成立，

当$x>1$时，满足$f\left(x\right)>0$.

(1) 判断$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上的单调性并用定义证明；

(2) 若$f\left(4\right)=4$，解关于实数m的不等式$f\left(m^2-2m-1\right)<2$.

【答案】(1) $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，证明见解析；(2)$\left(-1,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},3\right)$.

【解析】(1) $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，下面用定义证明.

由题意得，对任意$a,b\in\left(0,+\infty\right)$，都有$f\left(a\cdot b\right)-f\left(a\right)=f\left(b\right)$恒成立

对任意$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且$x_1>x_2$，有$\dfrac{x_1}{x_2}>1$，

故$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=f\left(x_2\cdot\dfrac{x_1}{x_2}\right)-f\left(x_2\right)=f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)>0$，即$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

(2) 令$a=b=2$，得$f\left(4\right)=2f\left(2\right)$，又$f\left(4\right)=4$，所以$f\left(2\right)=2$，原不等式可化为$f\left(m^2-2m-1\right)<f\left(2\right)$. 由$f\left(x\right)$定义在$\left(0,+\infty\right)$上且在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，得$0<m^2-2m-1<2$，解得$m\in\left(-1,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},3\right)$.

金陵中学 2019 级高一阶段考试

一、选择题（本大题共 12 小题,每小题 4 分,计 48 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

1. 设集合 $A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　）.

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,3,4\}$

【答案】C;

【解析】取交集即可.

2. 一元二次不等式 $x^2-2019x-2020<0$ 的解集为（　）

A. $(-1,2020)$　　B. $(-2020,1)$　　C. $(-\infty,-1)\cup(2020,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2020)\cup(1,+\infty)$

【答案】A;

【解析】由题意得，不等式化为 $(x+1)(x-2020)<0$，可知对应方程根为 $-1,2020$，画图即可判断解集，故选 A.

3. 下列函数中，在定义域上既是奇函数又是增函数的为（　）.

A. $y=x+1$　　B. $y=-x^3$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x|x|$

【答案】D;

【解析】A 不满足奇函数；B 减函数；C 减函数，D 分类讨论画图即知正确.

4. 若集合 $A=\{x\mid mx^2+2x+m=0,m\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素，则实数 m 的取值范围是（　）.

A. $\{1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【答案】D;

【解析】由题意知，集合元素则是含参方程的解，有如下讨论：当 $m=0$ 时，解得 $x=0$，满足；若 $m\neq0$，则二次方程必只有一解，即方程有两个等根，所以得 $m=\pm1$，选 D.

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域为（　）.

A. $[-3,+\infty)$　　B. $[-3,-2)$　　C. $[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$　　D. $(-2,+\infty)$

【答案】C;

【解析】根式满足，则 $x\geq-3$；分母不为零，则 $x\neq-2$，取交集即可.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x,x\geq0\\x^2,x<0\end{cases}$，则 $f(f(-2))$ 的值为（　）.

A. 4　　B. 12　　C. 16　　D. 36

【答案】B;

【解析】由内到外先求 $f(-2)=4$，然后 $f(4)=3\times4=12$.

7.　若对任意的 $x\in[1,3]$，不等式 $x^2-3x-m<0$ 都成立，则实数 m 的取值范围为（　）.

A. $(-2,+\infty)$　　B. $\left(-\frac{9}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(-\frac{9}{4},0\right)$　　D. $(0,+\infty)$

【答案】D;

【解析】由题意知，可转化为函数 $y=x^2-3x-m$ 函数恒小于零，故其仅需最大值小于零即可，故选 D.

8.　已知 $A=\{x\,|\,x<-2或x>3\},B=\{x\,|\,a\le x\le 2a-1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值范围为（　）.

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

C. $\left(-\infty.-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

【答案】B;

【解析】由题意知，$A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$，由 B 集合含参，故有：当 $a>2a-1\Rightarrow a<1$，即 $B=\varnothing$ 时，满足要求；当 $a=1$ 即 $B=\{1\}$ 时，不满足子集关系；当 $a>1$ 时，则 B 为 $[a,2a-1]$ 时，画出数轴，易得 $a>3$，故选 B.

9.　若函数 $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 是增函数，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $[-1,+\infty)$　　B. $[-1,0]$

C. $[0,1]$　　D. $[0,+\infty)$

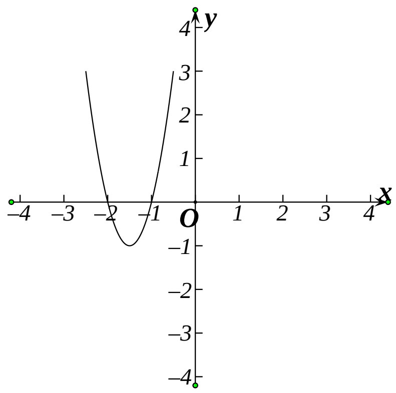
【答案】 D;

【解析】先讨论二次项系数，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=3x-1$ 单调递增，满足；当 $a\neq0$ 时，根据区间特点可知 $a>0$，若满足要求，则对称轴 $x_0=-\frac{a+3}{2a}\le1$ 即可，恒成立，故选 D.

10.　已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，函数的图象如图所示，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集为（　）.

A. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　B. $(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$

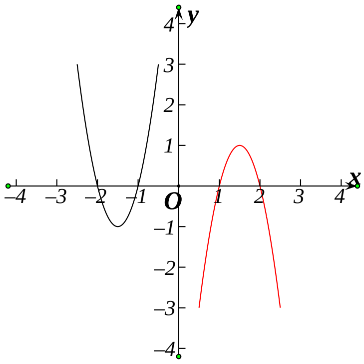
C. $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$



【答案】A;

【解析】由题意知，根据奇函数图象关于原点对称，故可直接画出另一半图象．故若 $xf(x)>0$，推知两种情况:

$\begin{cases} x>0 \\ f(x)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ f(x)<0 \end{cases}$，结合图象即得结果.



11．设 $f(x)=x^3+\dfrac{k}{x}+2$，其中 k 为参数，且 $k\in\mathbf{R}$，若 $y=f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的最大值为 4，则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有（　）.

A．最小值 -2　　B.最小值 0　　C．最小值 4　　D．最大值 2

【答案】 B;

【解析】由题意知，设 $g(x)=f(x)-2=x^3+\dfrac{k}{x}$，为奇函数，且 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 有最大值 4，等同于奇函数 $g(x)$ 在 $[-2,-1]$ 有最大值 2，根据奇函数值域特征，知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 有最小值 -2，故 $g(x)_{\min}=f(x)_{\min}-2\Rightarrow f(x)_{\min}=0$，选 B.

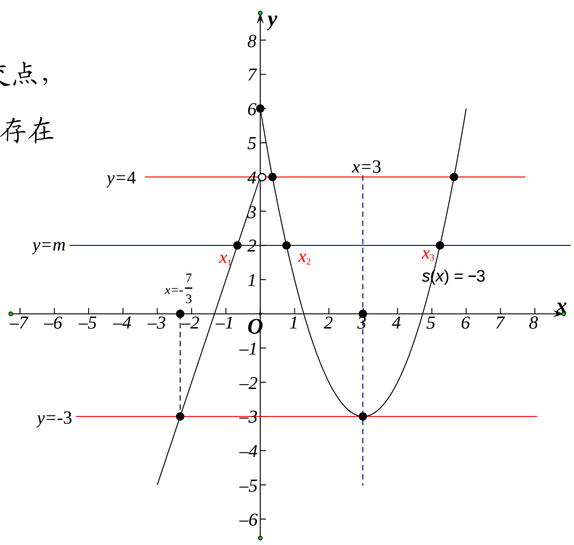
12．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+6, x\geq 0 \\ 3x+4, x<0 \end{cases}$，若互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是（　）.

A．$\left(\dfrac{11}{3},6\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　　C．$\left(\dfrac{11}{3},6\right]$　　D．$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3}\right]$

【答案】A;

【解析】分段函数画图，如图所示.

三者函数值相同，等同于一根水平线与图象有三个交点，根据二次函数对称性，可知 $x_2+x_3=6$，在三个交点存在的情况下，$-\dfrac{7}{3}<x_1<0$，故得结果.



二、填空题（共 4 小题，每题 4 分，共 16 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

13. 若$1\in\left\{x+2,x^2\right\}$，则实数$x$的值为____________.

【答案】1；

【解析】答案易得，主要考察了列举法集合下的元素互异性.

14. 若定义运算$a\odot b=\begin{cases}a,a\geq b\\ b^2,a<b\end{cases}$，则函数$f\left(x\right)=x\odot\left(2-x\right)$的值域为____________.

【答案】$\left[1,+\infty\right)$；

【解析】先分析$f\left(x\right)$的解析式，当$x\geq 2-x\Rightarrow x\geq 1$时，$f\left(x\right)=x$；当$x<2-x\Rightarrow x<1$时，

$f\left(x\right)=\left(2-x\right)^2$，故知$f\left(x\right)$为分段函数，画出其完整图像（注意分段点），即知结果.

15. 若函数$f\left(x\right)=\left(a^2+a\right)x+1$在区间$\left[a,a+1\right]$上最大值和最小值的差为2，则实数$a$的值为__________.

【答案】-2或1；

【解析】由题意知，此一次函数的一次项系数不为零，即$a\neq -1$且$a\neq 0$，而一次函数的最值均在端点处取，且单调性由一次项系数正负决定，故：当$a^2+a>0\Rightarrow a>0$或$a<-1$时，

$f\left(a+1\right)-f\left(a\right)=2\Rightarrow a=-2$或1，均满足要求；当$a^2+a<0\Rightarrow -1<a<0$，则

$f\left(a+1\right)-f\left(a\right)=-2$，无解，故得结果.

16. 已知函数$f\left(x\right)=x^2-\dfrac{1}{|x|+1}-2$，若$f\left(2a\right)\leq f\left(a-2\right)$，则实数$a$的取值范围为____________.

【答案】$\left[-2,\dfrac{2}{3}\right]$；

【解析】由题意知，注意到函数为偶函数，且在对称的区间中单调性相反. 而当$x>0$时，分别分析

$x^2,-\dfrac{1}{|x|+2},-2$单调性易知函数在$\left[0,+\infty\right)$上单调增，故在$\left(-\infty,0\right]$上单调减，且离对称轴越远，函数值越大，故$f\left(2a\right)\leq f\left(a-2\right)\Rightarrow\left|2a-0\right|\leq\left|a-2-0\right|\Leftrightarrow\left(2a\right)^2\leq\left(a-2\right)^2$，得$3a^2+4a-4\leq 0$，即得解集.

三、填空题：本题共 6 小题，共记 56 分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 8 分)

在实数范围内解下列不等式或方程.

⑴ $3x^2-x-4>0$；⑵ $x^3-2x+1=0$.

【答案】⑴ $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$；⑵ $x=1$或$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$或$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

【解析】⑴ 因式分解得 $(3x-4)(x+1)>0$，分类讨论再取并集即可;

⑵ $x^3-2x+1=x^3-1-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-1)=0$，再求即可.

18. (本小题满分 8 分)

已知集合 $A=\{x\mid x^2-8x+7<0\},B=\{x\mid x^2-2x-a^2-2a<0\}$.

⑴ 当 $a=4$ 时，求 $A\cap B$；

⑵ 若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

【答案】⑴ $(1,6)$；⑵ $(-\infty,-7]\cup[5,+\infty)$.

【解析】⑴ 由题意得 $A=(1,7)$， $B=(-4,6)$，即得交集;

⑵ $A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$，而方程 $x^2-2x-a^2-2a=0$ 的两根分别为 $-a,a+2$，知 $-a\neq a+2\Rightarrow a\neq -1$，分两种情况讨论:

① $a>-1$ 时，$-a<a+2$，根据题意，则 $\begin{cases}-a\le 1\\ a+2\ge 7\end{cases}\Rightarrow a\ge 5$；

② $a<-1$ 时，$-a>a+2$，根据题意，则 $\begin{cases}-a\ge 7\\ a+2\le 1\end{cases}\Rightarrow a\le -7$，取并集即可.

19. （本小题满分 10 分）

如图，$\triangle OAB$ 是边长为 2 的正三角形，记 $\triangle OAB$ 位于直线 $x=t\,(t\in(0,+\infty))$ 左侧的图形的面积为 $f(t)$，试求 $y=f(t)$ 的解析式，并画出函数 $y=f(t)$ 的图象.

【答案】见解析.

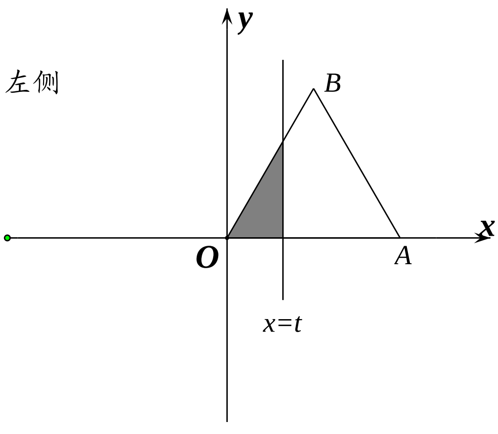
【解析】 由题意知，可知图形面积有两个节点，一是在 $x=1$ 处，左侧为三角形，右侧为四边形；二是在 $x=2$ 处，当 $t>2$ 时，面积不再变化，故有如下讨论:

① 当 $0<t\le 1$ 时，$S=\dfrac{t\cdot\sqrt{3}t}{2}$；

② 当 $1<t\le 2$ 时，$S=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}(2-t)^2}{2}$；

③ 当 $t>2$ 时，$S=S_{\triangle OAB}=\sqrt{3}$

故得 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2,t\in(0,1]\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3},t\in(1,2]\\ \sqrt{3},t\in(2,+\infty)\end{cases}$，图省略.



（第 19 题图）

20. （本小题满分 10 分）

设函数 $f\left(x\right)=x+\frac{a}{x}$，其中 $a>0$.

⑴ 证明：函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 是单调减函数，在区间 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 上是单调增函数；

⑵ 若函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,a\right]$ 上的最小值为 4，求实数 a 的值.

【答案】⑴证明见解析；⑵ 4.

先证在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 单调减，

任取 $0<x_1<x_2\le\sqrt{a}$， $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1+\frac{a}{x_1}-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)$

$=\left(x_1-x_2\right)+\left(\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}\right)=\left(x_1-x_2\right)+\frac{a\left(x_2-x_1\right)}{x_1x_2}=\left(x_1-x_2\right)\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right)$；

因 $0<x_1<x_2\le\sqrt{a}$，故 $x_1-x_2<0,0<x_1x_2<a$，故 $1-\frac{a}{x_1x_2}<0$，即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，证得函数在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 单调减；同理可证得另一半单调增，此处省略；

⑵ 由⑴中结论，可有如下想法：

若 $0<a\le1\Rightarrow a\le\sqrt{a}$，函数在 $\left(0,a\right]$ 上单调减，故 $f\left(x\right)$ 的最小值在 $x=a$ 取得，即 $a+1=4\Rightarrow a=3$，不满足要求；

若 $a>1$ 时，$a>\sqrt{a}$，可知函数在 $\left(0,\sqrt{a}\right]$ 单调减，在 $\left[\sqrt{a},a\right]$ 上单调增，故最小值在 $x=\sqrt{a}$ 处取得，即 $2\sqrt{a}=4\Rightarrow a=4$.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+2x+c\left(a,c\in\mathbf{N}^*\right)$，满足① $f\left(1\right)=5$； $6<f\left(2\right)<11$.

⑴ 求实数 a,c 的值；

⑵ 设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2x-3+\left|x-1\right|$，求 $g\left(x\right)$ 的最小值.

【答案】⑴ $a=1,c=2$；⑵ $-\frac{1}{4}$.

【解析】⑴ 由题意知， $f\left(1\right)=5\Rightarrow a+c=3\Rightarrow c=3-a$； $f\left(2\right)=3a+7$，而 $6<f\left(2\right)<11\Rightarrow a\in\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$，

因 $a\in\mathbf{N}^*\Rightarrow a=1,c=2$；

⑵ 易得 $g\left(x\right)=x^2-1+\left|x-1\right|$，去绝对值写成分段形式，则有 $g\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x-2,x\ge1\\x^2-x,x<1\end{cases}$，分别求两段

函数在各自定义域内最小值知当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数值最小，且为 $-\dfrac{1}{4}$.

22. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax-b}{4-x^2}$ 是定义在 $\left(-2,2\right)$ 上的奇函数，且 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求 $y=f\left(x\right)$ 的解析式；

(2) 判断并证明函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上的单调性；

(3) 解不等式 $f\left(t-1\right)+f\left(t\right)<0$.

【答案】(1) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{4-x^2}$；(2)函数在 $\left(-2,2\right)$ 上单调增，证明见解析；(3) $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

【解析】(1)由 $f\left(0\right)=0\Rightarrow b=0$，由 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=1\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x}{4-x^2}$；

(2)证明：任取 $-2<x_1<x_2<2$，$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{x_1}{4-x_1^2}-\dfrac{x_2}{4-x_2^2}=\dfrac{x_1\left(4-x_2^2\right)-x_2\left(4-x_1^2\right)}{\left(4-x_1^2\right)\left(4-x_2^2\right)}$

$=\dfrac{4\left(x_1-x_2\right)+x_1x_2\left(x_1-x_2\right)}{\left(4-x_1^2\right)\left(4-x_2^2\right)}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left(4+x_1x_2\right)}{\left(4-x_1^2\right)\left(4-x_2^2\right)}$，因 $-2<x_1<x_2<2$，故有

$4-x_1^2>0,4-x_2^2>0,x_1-x_2<0,-4<x_1x_2<4$，故 $4+x_1x_2>0$，得 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，证得函数在 $\left(-2,2\right)$ 上单调增；

(3)由奇函数性质，可知 $f\left(t-1\right)+f\left(t\right)<0\Rightarrow f\left(t-1\right)<-f\left(t\right)=f\left(-t\right)$，结合函数单调性及定义域，

有 $\begin{cases}-2<t-1\\ t-1<-t\\ -t<2\end{cases}\Rightarrow -1<t<\dfrac{1}{2}$，故得结果.

南京一中 2019~2020 学年第一学期十月阶段性检测

高一数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知全集$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，集合$A=\{1,3,5\}$，$B=\{0,2,3\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　）.

A. $\{2,4\}$　　B. $\{0,2,4\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{1,2,4\}$

【答案】C;

【解析】$\complement_U A=\{0,2,4\}$，则$(\complement_U A)\cap B=\{0,2\}$故选 C.

2. 已知集合$A=\{x\mid 2x+1>0\}$，$B=\{x\mid (x+1)(x-1)>0\}$，则$A\cup B=$（　）

A. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,-1)$

【答案】C;

【解析】$A=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，$B=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，所以$A\cup B=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，故选 C.

3. 适合条件$\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$A$的个数是（　）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】D;

【解析】A中必含元素$1,2$，所以即为 3 元元素集合的子集个数，为$2^3=8$个，故选 D.

4. 已知集合$A=\{x\mid ax^2+2x-1=0,x\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}\}$只有一个元素，则$a$的值为（　）.

A. 0　　B. 0或−1

C. −1　　D. 0或1

【答案】B;

【解析】当$a=0$时，$A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$满足题意；当$a\neq 0$时，则有$4+4a=0$，解得$a=-1$，故选 B.

5. 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x>6\\ f(x+3),x\le 6\end{cases}$，则$f(-5)=$（　）.

A. 42　　B. 30

C. 12　　D. 6

【答案】A;

【解析】$f(-5)=f(-2)=f(1)=f(4)=f(7)=42$，故选 A.

6. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=2x^3+x^2-x+1$，则 $f(3)=$（　）.

A. 55　　　　B. 51

C. 10　　　　D. 61

【答案】B;

【解析】当 $x=3$ 时，$f(3)+g(3)=61$；当 $x=-3$ 时，$f(-3)+g(-3)=-41$，由函数的奇偶性可得 $-f(3)+g(3)=-41$，两式相减除以 2 得 $f(3)=51$，故选 B.

二、填空题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

7. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过点 $(3,5)$，$(-3,5)$，$(0,-4)$，则 $f(x)$ 的解析式为____________.

【答案】$f(x)=x^2-4$；

【解析】由 $f(3)=f(-3)$，得二次函数对称轴为 $x=0$，设 $f(x)=ax^2+c$，由 $f(0)=-4$，得 $c=-4$，再由 $f(3)=5$，得 $a=1$，所以 $f(x)=x^2-4$.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}-(x-5)^0$ 的定义域是____________.（用区间表示）

【答案】$[2,4)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$；

【解析】由题意得：$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x-4\ne 0 \\ x-5\ne 0 \end{cases}$，解得 $x\ge 2$ 且 $x\ne 4$ 且 $x\ne 5$，用区间表示为 $[2,4)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$.

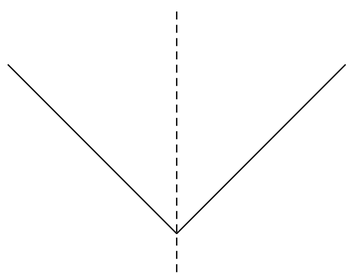
9. 函数 $f(x)=2x+\sqrt{1-x}$，$f(x)$ 的值域是____________.（用区间表示）

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{17}{8}\right]$；

【解析】令 $t=\sqrt{1-x}\ge 0$，则 $x=1-t^2$，所以 $y=2\left(1-t^2\right)+t=-2t^2+t+2$，$t\ge 0$，

结合二次函数图象，得值域为 $\left(-\infty,\dfrac{17}{8}\right]$.

10. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上为增函数，且 $y=f(x-2)$ 是偶函数，则 $f(-5)$，$f(-3)$，$f(0)$ 的大小关系为____________.（从小到大排列）



【答案】$f(-3)<f(0)<f(-5)$；

【解析】由题意得函数 $f(x)$ 的对称轴为直线 $x=-2$，结合函数的单

调性，画出函数草图，得 $f(-3)<f(0)<f(-5)$.

11. 已知 $f(x)=ax^3-bx+5$，且 $f(1)=6$，则 $f(-1)=$____________.

【答案】4；

【解析】观察 $f(x)$，有 $f(x)+f(-x)=10$，所以 $f(1)+f(-1)=10$，解得 $f(-1)=4$.

12. 已知函数 $f(x)=x^2+(a^2-a)x-2$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是____________.

【答案】$a\le -1$ 或 $a\ge 2$；

【解析】二次函数开口向上，对称轴为直线 $x=-\dfrac{a^2-a}{2}$，则有 $-\dfrac{a^2-a}{2}\le -1$，解得 $a\le -1$ 或 $a\ge 2$.

13. 若不等式 $-3x^2+ax+b>0$ 的解集为 $(-1,3)$，则 $a+b$ 的值是____________.

【答案】15;

【解析】由题意得方程 $-3x^2+ax+b=0$ 的两根为 -1 和 3，由韦达定理得：$\dfrac{a}{3}=2$ 且 $-\dfrac{b}{3}=-3$，解得

$a=6,b=9$，所以 $a+b=15$.

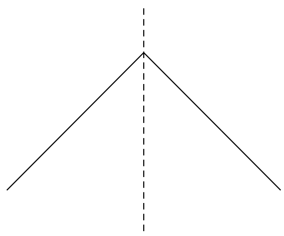
14. 若不等式 $(m-1)x^2-(m-1)x+3(m+1)>0$ 对一切实数 x 均成立，则 m 的取值范围为____________.

【答案】$m\ge 1$;

【解析】①当 $m=1$ 时，满足题意；②当 $m\ne 1$ 时，结合二次函数图象，则有

$\begin{cases} m-1>0 \\ (m-1)^2-12(m-1)(m+1)<0 \end{cases}$，解得 $m>1$；综上所述：$m\ge 1$.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-3,3]$ 上的偶函数，当 $x\in[-3,0]$ 时 $f(x)$ 是增函数，若不等式 $f(1-m)>f(m)$ 成立，则 m 的取值范围是____________.



【答案】$\dfrac{1}{2}<m\le 3$；

【解析】结合函数草图，解函数不等式，有 $|1-m|<|m|\le 3$，解得

$\dfrac{1}{2}<m\le 3$.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+1, x\ge 1 \\ ax^2+2x-1, x<1 \end{cases}$，对任意 $x_1\ne x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围

是____________.

【答案】$-1\le a\le 0$；

【解析】由题意得，该分段函数在$\mathbf{R}$上递增，①当$a\ne 0$时，则要有$\begin{cases}-\dfrac{a}{2}\le 1\\ a<0\\ -\dfrac{1}{a}\ge 1\\ 2+a\ge a+1\end{cases}$，解得$-1\le a<0$；

②当$a=0$时，也满足题意；综上所述，$-1\le a\le 0$.

三、解答题：（本大题共6小题，共70分）

17. (10分)已知集合$A=\left\{x\mid x^2-6x+5\le 0\right\}$，$B=\left\{x\mid 6+x-x^2>0\right\}$.

(1) 求$A\cup B$；

(2) 若$C=\left\{x\mid x\in A\cap B,且x\in \mathbf{Z}\right\}$，试写出集合$C$的所有子集.

【答案】(1) $\left(-2,5\right]$；(2)$\varnothing,\left\{1\right\},\left\{2\right\},\left\{1,2\right\}$.

【解析】(1) $A=\left[1,5\right]$，$B=\left(-2,3\right)$，所以$A\cup B=\left(-2,5\right]$；

(2) $C=\left\{1,2\right\}$，所以C的子集为$\varnothing,\left\{1\right\},\left\{2\right\},\left\{1,2\right\}$.

18. (10分)已知集合$A=\left\{x\mid \left|x-1\right|\le 2\right\}$，$B=\left\{x\mid m<x<2m-1\right\}$，若$A\cap B=B$，求实数$m$的取值范围.

【答案】$m\le 2$.

【解析】 $A=\left[-1,3\right]$，$A\cap B=B$，即$B\subseteq A$；

①当$B=\varnothing$时，即$2m-1\le m$，即$m\le 1$时，满足题意；

②当$B\ne\varnothing$时，即$m>1$时，则有$\begin{cases}m\ge -1\\ 2m-1\le 3\end{cases}$，解得$-1\le m\le 2$，所以$1<m\le 2$；

综上：$m\le 2$.

19. (10分)已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+9}{x}$.

(1) 判断函数$f\left(x\right)$的奇偶性；

(2) 用函数单调性的定义证明函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,3\right)$上是减函数.

【答案】(1) 奇函数；(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f\left(x\right)=x+\dfrac{9}{x}$，$f\left(-x\right)=-x+\dfrac{9}{-x}=-\left(x+\dfrac{9}{x}\right)=-f\left(x\right)$，

又因为定义域为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，所以函数$f\left(x\right)$为奇函数；

⑵ 任取 $x_1,x_2\in\left(0,3\right)$，且 $x_1<x_2$，

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1+\frac{9}{x_1}-x_2-\frac{9}{x_2}=\left(x_1-x_2\right)\left(1-\frac{9}{x_1x_2}\right)=\frac{x_1x_2-9}{x_1x_2}\left(x_1-x_2\right),$$

因为 $x_1,x_2\in\left(0,3\right)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1x_2-9<0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,3\right)$ 上单调递减.

20. (12 分)学校欲在甲、乙两店采购某款投影仪，该投影仪原价为每台 2000 元，甲店用如下方法促销：买一台单价为 1950 元，买两台单价为 1900 元，每多买一台，则所购买各台单价再减少 50 元，但每台不能低于 1200 元；乙店一律按原价的 75% 销售，学校需购买 x 台投影仪，若在甲店购买总费用记为 $f\left(x\right)$ 元，在乙店购买总费用记为 $g\left(x\right)$ 元.

⑴ 分别求 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 的解析式；

⑵ 当购买 x 台时，在哪家店买更省钱？

【答案】⑴ $f\left(x\right)=\begin{cases}-50x^2+2000x,0\le x\le 16,x\in\mathbf{N}\\1200x,x\ge 16,x\in\mathbf{N}\end{cases}$，$g\left(x\right)=1500x$；⑵ 详见解析.

【解析】⑴ 若在甲店购买，$\dfrac{2000-1200}{50}=16$，所以当 $0\le x\le 16$ 时，$f\left(x\right)=x\left(2000-50x\right)$

当 $x>16$ 时，$f\left(x\right)=1200x$，即 $f\left(x\right)=\begin{cases}-50x^2+2000x,0\le x\le 16,x\in\mathbf{N}\\1200x,x\ge 16,x\in\mathbf{N}\end{cases}$，$g\left(x\right)=1500x$；

⑵ 当 $0\le x\le 16$ 时，$-50x^2+2000x<1500x$ 时，$x>10$，所以当 $x\ge 11$ 时，在甲店更省钱;

当 $x\le 9$ 时，在乙店更省钱，当 $x=10$ 时，两店一样.

21. (14 分)已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\ge 0$ 时有 $f\left(x\right)=\dfrac{3x+m}{x+2}$，（$m$ 为常数）.

⑴ 求 m 的值，并求 $f\left(x\right)$ 的解析式;

⑵ 求 $f\left(x\right)$ 的值域;

⑶ 若 $f\left(3a+1\right)+f\left(a^2-4a-13\right)<0$，求实数 a 的取值范围.

【答案】⑴ $m=0$，$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2-x},x<0\\\dfrac{3x}{2+x},x\ge 0\end{cases}$；⑵ $\left(-3,3\right)$；⑶ $-3<a<4$.

【解析】⑴ 因为函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f\left(0\right)=0$，得 $m=0$

当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-\dfrac{3(-x)}{-x+2}=\dfrac{3x}{2-x}$，所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2-x},x<0\\ \dfrac{3x}{2+x},x\geq 0\end{cases}$；

(2) 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{3x}{x+2}=3-\dfrac{6}{x+2}$，值域为 $[0,3)$，又因为函数为奇函数，所以该函数的值域为 $(-3,3)$；

(3) 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{3x}{x+2}=3-\dfrac{6}{x+2}$，所以该函数在 $[0,+\infty)$ 上递增，又因为该函数为奇函数，所以该函数在 $\mathbf{R}$ 上递增；由 $f(3a+1)+f(a^2-4a-13)<0$，即

$f(3a+1)<-f(a^2-4a-13)\Leftrightarrow f(3a+1)<f(-a^2+4a+13)\Leftrightarrow 3a+1<-a^2+4a+13$，

解得 $-3<a<4$.

22. (14 分)已知函数 $f(x)=ax^2-2|x-1|+2a$，且 $a\geq 0$.

(1) 若 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的表达式；

(3) 求 $g(a)$ 的最小值.

【答案】(1) $(-1,+\infty)$；(2) $g(a)=\begin{cases}6a-2,0\leq a\leq\dfrac{1}{2}\\ 2a-\dfrac{1}{a}+2,\dfrac{1}{2}<a<1\\ 3a,a\geq 1\end{cases}$；(3) -2.

【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leq 1\\ x^2-2x+4,x>1\end{cases}$，该函数的单调递增区间为 $(-1,+\infty)$；

(2) 当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=ax^2-2x+2a+2$，当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x+2$，$g(a)=f(2)=-2$

当 $a>0$ 时，该函数为开口向上的二次函数，对称轴为 $x=\dfrac{1}{a}$；

① $\dfrac{1}{a}\leq 1$ 时，即 $a\geq 1$ 时，该函数在 $[1,2]$ 上递增，所以最小值 $g(a)=f(1)=3a$；

② $1<\dfrac{1}{a}<2$ 时，即 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，该函数在 $x=\dfrac{1}{a}$ 时取到最小值，所以 $g(a)=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=2a-\dfrac{1}{a}+2$

③ $\dfrac{1}{a}\geq 2$ 时，即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，该函数在 $[1,2]$ 上单调递减，所以 $g(a)=f(2)=6a-2$；

综上：$g\left(a\right)=\begin{cases}6a-2,0\le a\le\dfrac{1}{2}\\2a-\dfrac{1}{a}+2,\dfrac{1}{2}<a<1\\3a,a\ge 1\end{cases}$

⑶ 分析可知，$g\left(a\right)$在各段上均单调递增，所以最小值为$g\left(0\right)=-2$．

高一年级二十九中五校联考

一、选择题（本大题共 12 小题,每小题 5 分,计 60 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

1.　已知全集$U=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid -3<x<5\right\}$，集合$A=\{1,2\}$，则$\complement_U A$等于（　）.

A. $\{0,3,4,5\}$　　B. $\{-1,0,3,4\}$　　C. $\{0,3,4\}$　　D. $\{3,4\}$

【答案】D;

【解析】由$U=\{1,2,3,4\}$，则$\complement_U A=\{3,4\}$，故选 D.

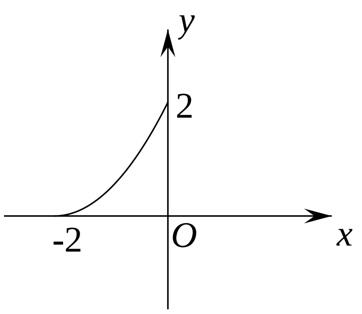
2.　函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}+(x-1)^0$的定义域为（　）

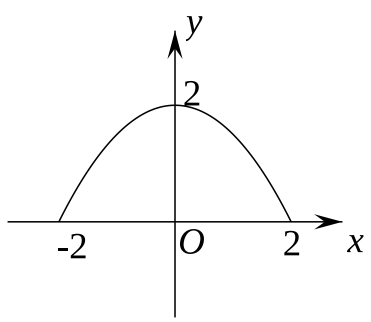
A. $\{x\mid x>1\text{且}x\neq 2\}$　　B. $\{x\mid x>1\}$　　C. $\{x\mid x\geq 1\text{且}x\neq 2\}$　　D. $\{x\mid x\geq 1\}$

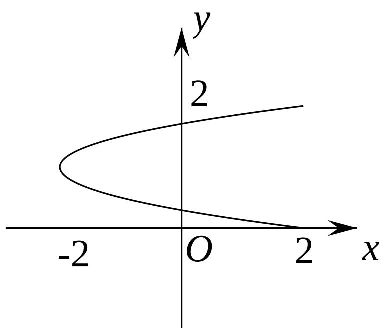
【答案】A;

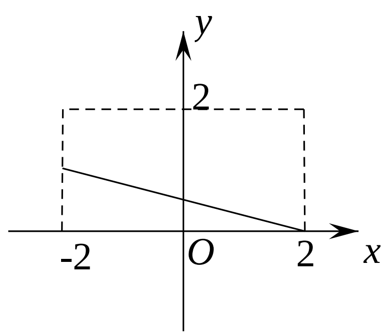
【解析】由题意得: $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-2\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>1$ 且 $x\neq 2$，故选 A.

3.　若函数$y=f(x)$的定义域为$M=\{x\mid -2\leq x\leq 2\}$，值域为$N=\{y\mid 0\leq x\leq 2\}$，则函数$y=f(x)$的图象可能是（　）.

A.


B.


C.


D.


【答案】B;

【解析】A 不满足定义域；C 不是函数；D 不满足值域，故选 B.

4. 已知一个等腰三角形的周长为20，底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式是（　）.

A. $y=\dfrac{20-x}{2}$　　　B. $y=20-2x$

C. $y=\dfrac{20-x}{2}(0<x<10)$　　　D. $y=20-2x(0<x<10)$

【答案】;

【解析】由周长为 20，则有 $y+2x=20$，所以 $y=20-2x$；考虑 x,y 均大于 0 以及三角形构成法则，得定义域为 $(5,10)$（此题无正确选项）.

5. 若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是（　）.

A. $[-3,+\infty)$　　　B. $(-\infty,-3]$

C. $(-\infty,5]$　　　D. $[5,+\infty)$

【答案】B;

【解析】$1-a\geq 4$，得 $a\leq -3$，故选 B.

6. 函数 $y=\dfrac{3-x}{2+x}$ 的值域为（　）.

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$　　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　　D. $\mathbf{R}$

【答案】A;

【解析】由分离常数得 $y=-1+\dfrac{5}{x+2}$，所以值域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，故选 A.

7. 已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x))=4x+9$，则 $f(x)$ 的解析式为（　）.

A. $f(x)=2x-3$　　　B. $f(x)=-2x-9$

C. $f(x)=2x+3$　　　D. $f(x)=2x+3$ 或 $f(x)=-2x-9$

【答案】D;

【解析】设一次函数 $f(x)=kx+b$，则 $f(f(x))=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b$，又因为 $f(f(x))=4x+9$，所以 $k^2=4,kb+b=9$，解得 $k=2,b=3$ 或 $k=-2,b=-9$，故选 D.

8. 已知函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+6(a\in\mathbf{R})$，若函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，则实数 a 的取值集合为（　）.

A. $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

C. $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left\{-1,\frac{3}{2}\right\}$

【答案】D;

【解析】由二次函数值域为$\left[0,+\infty\right)$，得二次函数判别式为 0，则$\left(4a\right)^2-4\left(2a+6\right)=0$，解得$a=-1$或$\frac{3}{2}$，故选 D.

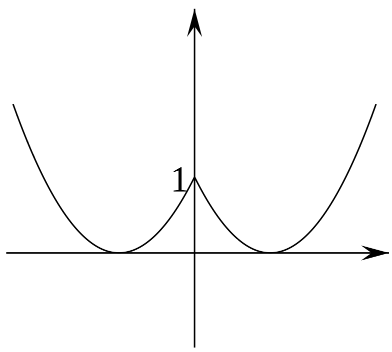
9. 若函数$y=x^2-2|x|+1$与$y=a$的图象有 4 个交点，则实数a的取值范围是（　）.

A. $\left(0,+\infty\right)$　　B. $\left(-1,1\right)$

C. $\left(0,1\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

【答案】C;

【解析】数形结合，画出函数的大致图象，由图象可得当$a\in\left(0,1\right)$时，有四个交点，故选 C.



10. 已知关于x的方程$x^2+2\left(m-2\right)x+m^2+4=0$有两个实数根，并且这两个实数根的平方和比这两个根的积大 21，则实数m的值是（　）.

A. 17　　B. -1

C. 17 或-1　　D. -17或1

【答案】B;

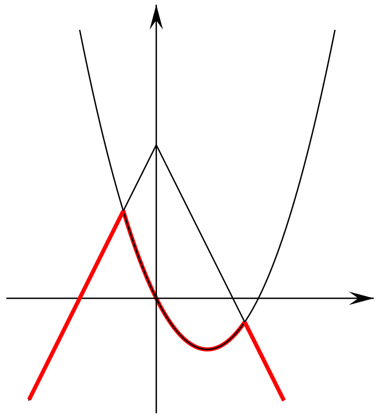
【解析】由该方程有 2 个实数根，所以$4\left(m-2\right)^2-4\left(m^2+4\right)\geq0$，得$m\leq0$；设方程的两个根为$x_1,x_2$，则$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=21$，即$\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=4\left(m-2\right)^2-3\left(m^2+4\right)=m^2-16m+4=21$，解得$m=-1$或$m=17$，又由$m\leq0$，所以$m=-1$，故选 B.

11. 已知$f\left(x\right)=3-2|x|$，$g\left(x\right)=x^2-2x$，$F\left(x\right)=\begin{cases}g\left(x\right),若f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\\ f\left(x\right),若f\left(x\right)<g\left(x\right)\end{cases}$，则$F\left(x\right)$的最大值为（　）.

A. $2\sqrt{7}-1$　　B. $3-2\sqrt{3}$　　C. $7-2\sqrt{7}$　　D. 3

【答案】C;

【解析】$F(x)$即取函数$f(x)$与$g(x)$中较小值部分，画出函数图象，数形结合；易知$F(x)$的最大值在$y=3+2x$与$y=x^2-2x$在y轴左侧交点处取得，经计算，当$x=2-\sqrt{7}$时，$F(x)$取得最大值，为$7-2\sqrt{7}$，故选C.



、

12. 函数$f(x)=\begin{cases}a(x-1)^2+1, x<1\\(a+3)x+4a, x\geq 1\end{cases}$，满足对任意实数$x_1,x_2$，当$x_1<x_2$时，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$成立，则实数$a$的取值范围是（　）.

A. $(-3,0)$　　B. $\left(-\dfrac{2}{5},0\right)$

C. $\left[-\dfrac{2}{5},0\right)$　　D. $\left(-3,-\dfrac{2}{5}\right]$

【答案】C;

【解析】即分段函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，则有$\begin{cases}a<0\\a+3>0\\1\leq 5a+3\end{cases}$，解得$-\dfrac{2}{5}\leq a<0$，故选C.

二、填空题（共4小题，每题5分，共20分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

13. 设集合$A=\{(x,y)\,|\,y=x+1, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{(x,y)\,|\,y=-x^2+2x+\dfrac{3}{4}, x\in\mathbf{R}\right\}$，则$A\cap B=$____________.

【答案】$\left\{\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)\right\}$;

【解析】即函数$y=x+1$和函数$y=-x^2+2x+\dfrac{3}{4}$图象交点坐标构成的集合；联立方程，得

$x+1=-x^2+2x+\dfrac{3}{4}$，解得$x=\dfrac{1}{2}$，所以$A\cap B=\left\{\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

14. 已知方程$x^2+4x+1=0$有两实根x_1,x_2，则$x_1^3+x_2^3$的值等于____________.

【答案】-52;

【解析】由韦达定理得：$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=1$，

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-52.$$

15. 国家为了加强对烟酒生产的宏观管理，实行征收附加税政策．已知某种酒每瓶 70 元，不加收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若政府征收附加税，每销售 100 元要征税 R 元（叫税率 R%），则每年的销售量将减少 10R 万瓶．要使每年在此项经营中所收取的附加税不少于 112 万元，则 R 的取值范围是____________．

【答案】$\left[2,8\right]$;

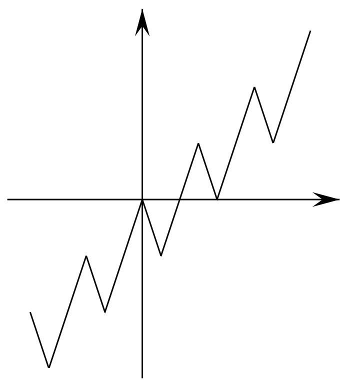
【解析】记所收取的附加税总额为 y 万元，则 $y=\dfrac{70}{100}\cdot \mathrm{R}\cdot\left(100-10\mathrm{R}\right)$，则要求 $y\geq 112$，即

$-7\mathrm{R}^2+70\mathrm{R}\geq 112$，解得 $2\leq \mathrm{R}\leq 8$．

16. 已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+1$，当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=\left|3x-1\right|-1$，若对任意实数 x，都有 $f\left(x-t\right)<f\left(x\right)$ 成立，则实数 t 的取值范围为____________．

【答案】$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$;

【解析】$f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+1$ 表明函数自变量每增大 1，函数值也增大 1，结合函数在 $\left[0,1\right]$ 上的解析式，可以画出函数的草图．易知，$t<0$ 时，不满足题意；当 $t>0$ 时，观察图象可知 $t>\dfrac{2}{3}$ 且 $t\neq\dfrac{4}{3}$．



17. (本小题满分 10 分)

设全集 $U=\mathbf{R}$，已知集合 $A=\left\{1,2\right\}$，$B=\left\{x\,|\,0\leq x\leq 3\right\}$，集合 C 为不等式组 $\begin{cases}x+1\geq 0\\3x-6\leq 0\end{cases}$ 的解集．

⑴ 写出集合 A 的所有子集;

⑵ 求 $\complement_U B$ 和 $B\cup C$．

【答案】⑴ $\varnothing,\left\{1\right\},\left\{2\right\},\left\{1,2\right\}$；⑵ $\complement_U B=\left(-\infty,0\right)\cup\left(3,+\infty\right)$，$B\cup C=\left[-1,3\right]$．

【解析】⑴ A 的子集为 $\varnothing,\left\{1\right\},\left\{2\right\},\left\{1,2\right\}$;

⑵ $C=\left[-1,2\right]$，所以 $\complement_U B=\left(-\infty,0\right)\cup\left(3,+\infty\right)$，$B\cup C=\left[-1,3\right]$．

18. (本小题满分 12 分)

⑴ 若不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集为 $\left\{x\,|\,-2<x<-\dfrac{1}{4}\right\}$，求实数 a,b 的值;

⑵ 若不等式 $\left(2-a\right)x^2-2\left(a-2\right)x+4\geq 0$ 对一切实数 x 都成立，求实数 a 的取值范围．

【答案】⑴ $a=-4,b=-9$；⑵ $-2\le a\le 2$．

【解析】⑴ 由题意得方程 $ax^2+bx-2=0$ 的两根为 $-2,-\frac{1}{4}$，由韦达定理得 $-\frac{b}{a}=-\frac{9}{4}$， $-\frac{2}{a}=\frac{1}{2}$，

解得 $a=-4,b=-9$；

⑵ ①当 $a=2$ 时，满足题意；②当 $a\ne 2$ 时，则有 $\begin{cases}2-a>0\\4(a-2)^2-4(2-a)\cdot 4\le 0\end{cases}$，解得 $-2\le a<2$；

综上所述， $-2\le a\le 2$．

19. （本小题满分 12 分）

设集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<3\}$， $B=\left\{x\,|\,\frac{x-3a-2}{1-x}>0\right\}$．

⑴ 当 $a=1$ 时，求集合 B；

⑵ $A\cap B=B$ 时，求实数 a 的取值范围．

【答案】⑴ $(1,5)$；⑵ $-\frac{4}{3}\le a\le\frac{2}{3}$．

【解析】⑴ 当 $a=1$ 时， $B=\left\{x\,|\,\frac{x-5}{1-x}>0\right\}=(1,5)$；

⑵ $A\cap B=B$，即 $B\subseteq A$， $A=(-2,4)$；

① $a=-\frac{1}{3}$ 时， $B=\varnothing$，满足题意；

②当 $a>-\frac{1}{3}$ 时， $B=(1,3a+2)$，则有 $3a+2\le 4$，解得 $-\frac{1}{3}<a\le\frac{2}{3}$；

③当 $a<-\frac{1}{3}$ 时， $B=(3a+2,1)$，则有 $3a+2\ge -2$，解得 $-\frac{4}{3}\le a<-\frac{1}{3}$；

综上所述： $-\frac{4}{3}\le a\le\frac{2}{3}$．

20. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\quad x\quad=\frac{x}{x^2+1}$．

⑴ 试判断 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的单调性，并证明你的结论；

⑵ 求证：在区间 $[-1,1]$ 上满足 $f(x)=a$（ a 为常数）的实数 x 至多只有一个．

【答案】⑴ $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是单调增函数，证明见解析；⑵ 证明见解析．

【解析】⑴ $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是单调增函数；

任取 $x_1,x_2\in[-1,1]$，令 $x_1<x_2$，

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_2\left(x_1^2+1\right)-x_1\left(x_2^2+1\right)}{\left(x_2^2+1\right)\left(x_1^2+1\right)}=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(1-x_1x_2\right)}{\left(x_2^2+1\right)\left(x_1^2+1\right)},$$

由于 $-1\le x_1<x_2\le 1$，所以 $x_2-x_1>0$， $x_1x_2<1$，所以 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上是单调增函数;

⑵ 假设在在区间 $\left[-1,1\right]$ 上满足 $f\left(x\right)=a$ 的实数 a 超过一个，设其中两个为 x_1,x_2， $x_1<x_2$，

由于 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上是增函数，可得 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，与 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=a$ 矛盾，

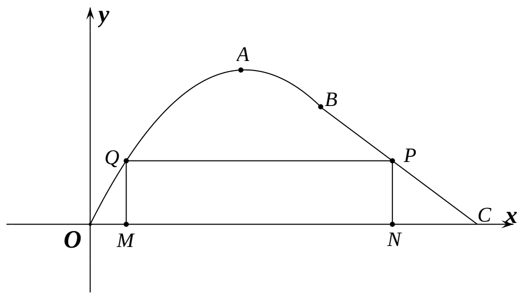
因此假设不成立，则在区间 $\left[-1,1\right]$ 上满足 $f\left(x\right)=a$（ a 为常数）的实数 x 至多只有一个.

21. （本小题满分 12 分）

如图，在长为10千米的河流 OC 的一侧有一条观光带，观光带的前一部分为曲线段 OAB . 设曲线段 OAB 为函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right),x\in\left[0,6\right]$（单位：千米）的图象，且图象的最高点为 $A\left(4,4\right)$，观光带的后一部分为线段 BC .

⑴ 求函数为曲线段 $OABC$ 的函数 $y=f\left(x\right),x\in\left[0,10\right]$ 的解析式;

⑵ 若计划在河流和观光带 $OABC$ 之间新建一个如图所示的矩形绿化带 $MNPQ$ ，绿化带由线段 MQ,QP,PN 构成，其中点 P 在线段 BC 上.当 OM 长为多少时，绿化带的总长度最长？



【答案】⑴ $f\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2+2x,x\in\left[0,6\right]\\-\frac{3}{4}x+\frac{15}{2},x\in\left(6,10\right]\end{cases}$；⑵ 当 $OM=1$ 千米时，总长度最长.

【解析】⑴ 由题意知，完整函数由二次函数部分（ OAB ）及线段部分（ BC ）共同构成，故函数为分段函数:

①在 OAB 段，图象过原点，得 $c=0$；由最高点为 $\left(4,4\right)$，得 $-\frac{b}{2a}=4\Rightarrow b=-8a$，再代入坐标得二次函数表达式为 $-\frac{1}{4}x^2+2x$；

②同时可得 $B\left(6,3\right)$，结合 $C\left(10,0\right)$，易知线段 BC 表达式为 $-\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}$；

⑵ 设 $M(t,0)$，由 P 点在线段 BC 上，可知 $0<t<2$.故 $MQ=NP=y_Q=-\frac{1}{4}t^2+2t$；

对于线段 BC，由 $y_P=-\frac{1}{4}t^2+2t\Rightarrow x_P=\frac{1}{3}t^2-\frac{8}{3}t+10$，得 $QP=MN=x_P-x_M=\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+10$，

故 $QM+QP+PN=-\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{3}t+10$，易得在 $t_0=1$ 处，可取最大值.

22. （本小题满分 12 分）

已知二次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=1$ 且有 $f(x+1)=f(x)+2x$.

⑴ 求函数 $f(x)$ 的解析式;

⑵ 若函数 $g(x)=(t+1)x,t\in\mathbf{R}$，函数 $h(x)=g(x)+f(x)$

① 求 $h(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值;

② 若对于任意的 $x\in[-1,1]$，使得 $h(x)\geq t$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】⑴ $f(x)=x^2-x+1$；⑵① $h(x)_{\min}=\begin{cases}2-t,t\in(2,+\infty)\\1-\frac{t^2}{4},t\in[-2,2]\\2+t,t\in(-\infty,-2)\end{cases}$；② $\left(-\infty,2\sqrt{2}-2\right]$.

【解析】⑴ 直接设二次函数表达式为 $f(x)=ax^2+bx+c$，由 $f(0)=1\Rightarrow c=1$；由

$f(x+1)=f(x)+2x\Rightarrow a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+bx+1+2x$，即

$ax^2+(2a+b)x+a+b+1=ax^2+(b+2)x+1\Rightarrow\begin{cases}2a+b=b+2\\a+b+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，故得结果;

⑵ ① 易知 $h(x)=x^2+tx+1$，函数开口朝上且对称轴为 $x_0=-\frac{t}{2}$，故讨论此函数在区间内的最小值，即讨论对称轴与区间的位置关系，有:

ⅰ $-\frac{t}{2}<-1\Rightarrow t>2$ 时，函数在 $[-1,1]$ 上单调增，故 $h(x)_{\min}=h(-1)=2-t$；

ⅱ $-1\leq-\frac{t}{2}\leq1\Rightarrow-2\leq t\leq2$ 时，函数在对称轴处取最小值，且为 $1-\frac{t^2}{4}$；

ⅲ $-\frac{t}{2}>1\Rightarrow t<-2$ 时，函数在 $[-1,1]$ 上单调减，故 $h(x)_{\min}=h(1)=2+t$；

综上所述，$h(x)_{\min}=\begin{cases}2-t,t\in(2,+\infty)\\1-\frac{t^2}{4},t\in[-2,2]\\2+t,t\in(-\infty,-2)\end{cases}$；

② 若满足题设不等式成立，即等价于 $h(x)_{\min}\geq t$，由①中，已得 $h(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值表达式，故同样按照 t 的范围进行分类:

ⅰ $t>2$时，$h(x)_{\min}=h(-1)=2-t$，则$2-t\ge t\Rightarrow t\le 1$，与条件无交集，舍去;

ⅱ $-2\le t\le 2$时，$h(x)_{\min}=1-\frac{t^2}{4}$，则$1-\frac{t^2}{4}\ge t\Rightarrow -2\sqrt{2}-2\le t\le 2\sqrt{2}-2$，

取交集得$-2\le t\le 2\sqrt{2}-2$；

ⅲ $t<-2$时，$h(x)_{\min}=h(1)=2+t$，则$2+t\ge t$恒成立，故$t<-2$；

综上所述，可得$t\in\left(-\infty,2\sqrt{2}-2\right]$.

中华中学 2019-2020 学年度第一学期月考试卷

高一数学

本卷考试时间：100 分钟　总分：150 分

一、单选题：本大题共 12 小题,每小题 5 分，共 60 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上

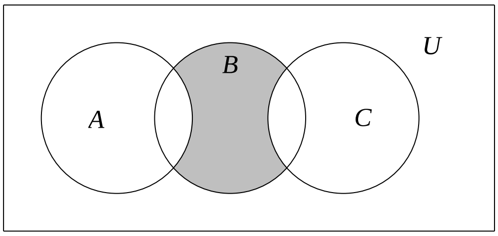
1. 将集合$\{(x,y)\,|\,x+y=5,且2x-y=1\}$表示成列举法，正确的是（　）.

A. $\{2,3\}$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $\{(3,2)\}$　　D. $(2,3)$

【答案】B;

【解析】联立方程，易得$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，注意是点集.

2. 如图中阴影部分所表示的集合是（　）



A. $B\cap \complement_U(A\cup C)$　　B. $(A\cup B)\cup(B\cup C)$

C. $(A\cup C)\cap(\complement_U B)$　　D. $B\cup \complement_U(A\cap C)$

【答案】A;

【解析】首先阴影部分是B集合子集，可直接排除B,C,D，故选 A.

3. 下列函数中，在区间$(0,2)$上为增函数的是（　）.

A. $y=3-x$　　B. $y=x^2+1$　　C. $y=-x^2$　　D. $y=x^2-2x-3$

【答案】B;

【解析】A 是$(0,2)$上减函数；C 是$(0,2)$上减函数；D 在$(0,2)$上先减后增，故选 B.

4. 已知集合$P=\{x\,|\,y=\sqrt{x+1}\}$，集合$Q=\{x\,|\,y=\sqrt{x-1}\}$，则P与Q的关系是（　）.

A. $P=Q$　　B. $P\supseteq Q$　　C. $P\subseteq Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

【答案】B;

【解析】易得$P=[-1,+\infty),Q=[1,+\infty)$.

5. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则$f(a^2+1)$____$f(a)$（　）.

A. $>$　　B. $\geq$　　C. $<$　　D. $\leq$

【答案】A;

【解析】易得自变量离对称轴越远，函数值越大，而$a^2+1>|a|$恒成立，故得结果.

6. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为$\left[1,3\right]$，则函数 $f\left(2x+1\right)$ 的定义域为（　）.

A. $\left[1,3\right]$　　B. $\left[0,1\right]$　　C. $\left[3,7\right]$　　D. $\left[0,2\right]$

【答案】B;

【解析】两个原则：定义域仅指 x 的范围；括号内范围不变.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+1,x\le 0\\ -2x,x>0\end{cases}$，则使函数值为 5 的 x 的值是（　）.

A. -2　　B. 2或$-\dfrac{5}{2}$　　C. 2或-2　　D. 2或-2或$-\dfrac{5}{2}$

【答案】A;

【解析】分段函数分段代函数值求解，注意适用的定义域.

8. 若偶函数 $f\left(x\right)$ 在$\left(-\infty,-1\right]$上是减函数，则（　）.

A. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f\left(-1\right)<f\left(2\right)$　　B. $f\left(-1\right)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f\left(2\right)$

C. $f\left(2\right)<f\left(-1\right)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$　　D. $f\left(2\right)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f\left(-1\right)$

【答案】B;

【解析】由此偶函数图象特征，可知当$|x|>1$时，离对称轴越远，函数值越大．故选 B.

9. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}x-2,x\ge 10\\ f\left[f\left(x+6\right)\right],x<10\end{cases}$，则 $f\left(5\right)$ 的值为（　）.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

【答案】B;

【解析】由题意知，$5<10$，故 $f\left(5\right)=f\left(f\left(11\right)\right)=f\left(11-2\right)=f\left(9\right)=f\left(f\left(15\right)\right)=f\left(15-2\right)=f\left(13\right)=11$.

10. 若 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(3-a\right)x-4a,x<1\\ x^2,x\ge 1\end{cases}$ 是$\left(-\infty,+\infty\right)$的增函数，则 a 的取值范围是（　）.

A. $\left[\dfrac{2}{5},3\right)$　　B. $\left(\dfrac{2}{5},3\right]$　　C. $\left(-\infty,3\right)$　　D. $\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$

【答案】A;

【解析】分段函数单调增，注意两条：一是每段均增，故$3-a>0\Rightarrow a<3$；分段点处左侧函数值小于或等于右侧函数值，故$3-5a\le 1\Rightarrow a\ge\dfrac{2}{5}$，即得答案.

11. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间 $[0,m]$ 上有最大值 3，最小值为 2，m 的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[0,2]$　　C. $[1,2]$　　D. $[1,+\infty)$

【答案】C;

【解析】画出图像，易知若能取到最小值 2，则 $m\geq1$；注意到 $x=2$ 时 $y=3$，故 $m\leq2$，即得结果.

12. 设 $f(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty,0)$ 内是减函数，$f(-5)=0$，则 $x\cdot f(x)>0$ 的解集为（　）.

A. $(-5,0)\cup(0,5)$　　B. $(-\infty,-5)\cup(0,5)$　　C. $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　D. $(-5,0)\cup(5,+\infty)$

【答案】A;

【解析】画出奇函数的草图，可知函数在 $(-\infty,-5)\cup(0,5)$ 函数值大于零；在 $(-5,0)\cup(5,+\infty)$ 函数值小于零；在 $\{-5,0,5\}$ 上函数值为零，故 $x\cdot f(x)>0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\f(x)<0\end{cases}$，结合图象即得.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，请把答案直接填写在答题卡相应位置上

13. 已知 $M=\{y\mid y=-x^2-1\}$，$N=\{y\mid y=x^2-4x+5\}$，则 $M\cup N=$____________.

【答案】$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；

【解析】分别求出两个函数的因变量 y 的取值范围，再取并集即可，注意答案是集合形式.

14. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定义域是____________.

【答案】$(-3,2)$；

【解析】由题意知，定义域取值依据则是 $6-x-x^2>0\Rightarrow x^2+x-6<0\Rightarrow(x-2)(x+3)<0$，即得答案.

15. 已知函数 $f(x)=x^3$，若实数 a,b 满足 $f(a+2)+f(b)=0$，则 $a+b$ 等于____________.

【答案】-2；

【解析】易得函数为奇函数且单调递增，故 $f(a+2)+f(b)=0\Rightarrow f(a+2)=f(-b)\Rightarrow a+2=-b$.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-a^2}{x-a+1}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，则 a 的取值范围是____________.

【答案】$(0,1]$；

【解析】先对函数进行分离常数，得 $f(x)=\dfrac{a(x-a+1)-a}{x-a+1}=a+\dfrac{-a}{x-(a-1)}$，是一个类反比例函数，若满足在 $(0,+\infty)$ 单调增，则有 $\begin{cases}-a<0\\a-1\leq0\end{cases}$，故得结果.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，请把答案填写在答题卡相应位置上

17. （10 分）已知集合 $U=\mathbf{R}$， $A=\{x\mid 1<x<6\}$， $B=\{x\mid 2<x<10\}$， $C=\{x\mid 5-a<x<a\}$.

⑴ 求 $A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$；

⑵ 若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

【答案】⑴ $A\cup B=(1,10)$，$(\complement_U A)\cap B=[6,10)$；⑵ $(-\infty,3]$.

【解析】⑴ 根据交集、并集、补集的定义可得 $A\cup B=(1,10)$，$(\complement_U A)\cap B=[6,10)$；

⑵ 当 $5-a\geq a$ 即 $a\leq\dfrac{5}{2}$ 时，$C=\varnothing$，满足要求；

当 $5-a<a$ 即 $a>\dfrac{5}{2}$ 时，若满足子集关系，则 $\begin{cases}a\leq 10\\5-a\geq 2\end{cases}$，解得 $a\leq 3$，则 $\dfrac{5}{2}<a\leq 3$；

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

18. （10 分）. ⑴ 已知 $f\left(\dfrac{1+x}{x}\right)=\dfrac{1+x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$；

⑵ 已知 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$.

【答案】⑴ $f(x)=x^2-x+1,x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；⑵ $f(x)=\dfrac{2}{x}-x,x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

【解析】⑴ 即 $f\left(\dfrac{1+x}{x}\right)=\dfrac{1+x^2+2x-2x}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2-\dfrac{1}{x}$

$=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1+x}{x}\right)+1$，即得 $f(x)=x^2-x+1$，注意 $\dfrac{1+x}{x}=1+\dfrac{1}{x}\neq 1$；

⑵ 用 $\dfrac{1}{x}$ 替换原式中的 x，得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$，联立 $\begin{cases}f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x\\f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}\end{cases}$，

得 $f(x)=\dfrac{2}{x}-x$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

19. （10 分）求下列函数值域：

⑴ $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$；

⑵ $f(x)=2x-\sqrt{x-1}$.

【答案】⑴ $[-3,2)$；⑵ $\left[\dfrac{15}{8},+\infty\right)$.

【解析】⑴ 令 $t=x^2+1\geq 1$，则 $y=\dfrac{2t-5}{t}=2-\dfrac{5}{t}$，

$t\in[1,+\infty)$ 时 $-\dfrac{5}{t}\in[-5,0)$，则 $2-\dfrac{5}{t}\in[-3,2)$，函数值域为 $[-3,2)$；

⑵ 令 $t=\sqrt{x-1}\geq 0$，则 $y=2t^2+2-t$，

二次函数 $y=2t^2+2-t$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 上是减函数，$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ 上是增函数，

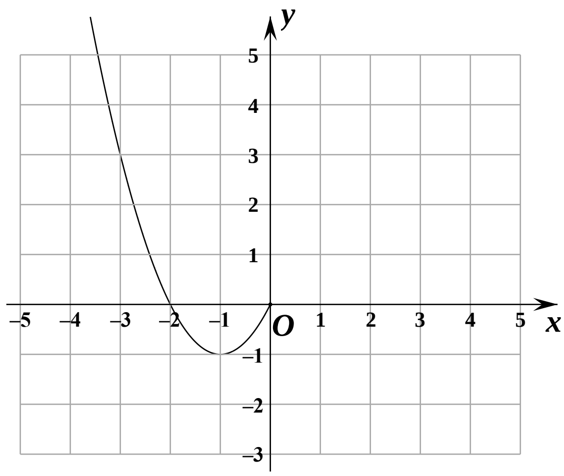
则函数值域为 $\left[\dfrac{15}{8},+\infty\right)$.

20. （12 分）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象，如图所示，请根据图象.

⑴ 写出函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的增区间；

⑵ 求出函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的解析式；

⑶ 若函数 $g(x)=f(x)-2ax+2(x\in[1,2])$，求函数 $g(x)$ 的最小值.



【答案】⑴ $[-1,0],[1,+\infty)$；⑵ $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leq 0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$；⑶ $g(x)_{\min}=\begin{cases}1-2a & ,a<0\\-a^2-2a+1 & ,0\leq a\leq 1\\2-4a & ,a>1\end{cases}$.

【解析】⑴ 根据 $f(x)$ 为偶函数，根据图象可得函数 $f(x)$ 的增区间为 $[-1,0],[1,+\infty)$；

⑵ 当 $x>0$ 时，$f(x)=f(-x)=x^2-2x$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leq 0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$；

⑶ 当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x,g(x)=x^2-(2a+2)x+2$，对称轴为 $x_0=a+1$：

当 $a+1<1$ 即 $a<0$ 时，函数在 $x\in[1,2]$ 单调增，故 $g(x)_{\min}=g(1)=1-2a$；

当 $1\leq a+1\leq 2$ 即 $0\leq a\leq 1$ 时，对称轴在区间内，最小值为 $g(a+1)=-a^2-2a+1$；

当 $a+1>2$ 即 $a>1$ 时，函数在 $x\in[1,2]$ 单调减，故 $g(x)_{\min}=g(2)=2-4a$.

21. （14 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $\left(-1,1\right)$ 上的奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$.

⑴ 求函数的解析式；

⑵ 判断函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上的单调性，并用定义证明；

⑶ 解关于 t 的不等式： $f\left(t+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(t-\dfrac{1}{2}\right)<0$.

【答案】⑴ $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$；⑵函数在 $\left(-1,1\right)$ 上是增函数，证明见解析；⑶不等式的解集为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

【解析】⑴ 由函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $\left(-1,1\right)$ 上的奇函数，

可得 $f\left(0\right)=0$，解得 $b=0$；由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$ 可解得 $a=1$；

则 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$，经检验 $f\left(x\right)$ 为奇函数；

⑵ $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上为增函数，证明如下:

证明：任取 $-1<x_1<x_2<1$

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1\left(x_2^2+1\right)-x_2\left(x_1^2+1\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$$

$=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)+x_1x_2\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left(1-x_1x_2\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$，因 $-1<x_1<x_2<1$，故有

$x_1-x_2<0$， $x_1^2+1>0$， $x_2^2+1>0$， $0\le\left|x_1\right|<1, 0\le\left|x_2\right|\le1$，

则 $\left|x_1x_2\right|<1$，则 $1-x_1x_2>0$，则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

则函数在 $\left(-1,1\right)$ 上为增函数；

⑵ 由 $f\left(x\right)$ 为奇函数， $f\left(t+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(t-\dfrac{1}{2}\right)<0$，可得 $f\left(t+\dfrac{1}{2}\right)<-f\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}-t\right)$，

由 $f\left(x\right)$ 为 $\left(-1,1\right)$ 上的增函数，可得 $-1<t+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}-t<1$，解得 $-\dfrac{1}{2}<t<0$，

不等式的解集为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

22. （14 分）已知偶函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+b)}{x^2}$ 的定义域为 E，值域为 F .

⑴ 求实数 b 的值；

⑵ 若 $E=\{1,2,a\}$， $F=\left\{0,\dfrac{3}{4}\right\}$，求实数 a 的值；

⑶ 若 $E=\left[\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}\right]$， $F=[2-3m,2-3n]$，求 m,n 的值.

【答案】⑴ -1；⑵ $a=-2$ 或 -1；⑶ $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

【解析】⑴ $f(x)$ 为偶函数，可得对定义域 E 内任意 x， $f(-x)=f(x)$，

即 $\dfrac{(x+1)(x+b)}{x^2}=\dfrac{(-x+1)(-x+b)}{x^2}$，即 $(b+1)x=0$，由 $0\notin E$，可得 $x\neq 0$，则 $b=-1$，

经检验此时 $f(x)$ 为偶函数;

⑵ 由第一问可得 $f(x)=1+\dfrac{-1}{x^2}$， $f(1)=0,f(2)=\dfrac{3}{4}$，

则 $f(a)=0$ 或 $f(a)=\dfrac{3}{4}$，结合元素互异性，解得 $a=-2$ 或 -1；

⑶ $f(x)=1+\dfrac{-1}{x^2}$，由 $0\notin E$，可得 $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}<0$ 或 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$，

① $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$ 时， $0<\dfrac{1}{m^2}<x^2<\dfrac{1}{n^2}$，则 $n^2<\dfrac{1}{x^2}<m^2$，则 $1-\dfrac{1}{x^2}\in\left[1-m^2,1-n^2\right]$，

由 $F=[2-3m,2-3n]$，可得 $\begin{cases}m^2-3m+1=0\\n^2-3n+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\\n=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，

由 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$ 可得 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$；

② $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}<0$ 时， $0<\dfrac{1}{n^2}<x^2<\dfrac{1}{m^2}$，则 $m^2<\dfrac{1}{x^2}<n^2$，则 $1-\dfrac{1}{x^2}\in\left[1-n^2,1-m^2\right]$，

由 $F=[2-3m,2-3n]$，可得 $\begin{cases}m^2-3n+1=0\\n^2-3m+1=0\end{cases}$，

两式作差得: $m+n=-3$，代入 $m^2-3n+1=0$ 得 $m^2+3m+10=0$，无解;

综上 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2019 级南京十三中高一年级十月阶段检测　数学试卷

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分，每小题只有一个选项正确）

1.　已知函数 $f\left(2x+1\right)=4x^2$，则 $f\left(-3\right)=$（　）.

A. 36　　B. 16　　C. 4　　D. 2

【答案】B;

【解析】令 $x=-2$，得 $f\left(-3\right)=16$，故选 B.

2.　集合 $M=\left\{x\middle|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{y\middle|y=3n+1,n\in\mathbf{Z}\right\}$，$S=\left\{z\middle|z=6m+1,m\in\mathbf{Z}\right\}$之间的关系是（　）

A. $S\subsetneqq P\subsetneqq M$　　B. $S=P\subsetneqq M$　　C. $S\subsetneqq P=M$　　D. $P=M\subsetneqq S$

【答案】C;

【解析】因为 $x=3k-2=3\left(k-1\right)+1$，所以 $M=P$，因为 $z=6m+1=3\cdot 2m+1$，所以 $S\subsetneqq P$，故选 C.

3.　函数 $f\left(x\right)=\sqrt{1+x}-\dfrac{2}{x}$ 的定义域是（　）.

A. $\left[-1,+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　　C. $\left[-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　　D. $\mathbf{R}$

【答案】C;

【解析】由$\begin{cases}1+x\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$解得 $x\in\left[-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，故选 C.

4.　下列函数中，值域是$\left(0,+\infty\right)$的是（　）.

A. $y=\sqrt{x^2-2x+1}$　　B. $y=\dfrac{x+2}{x+1}\left(x\in\left(0,+\infty\right)\right)$　　C. $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}\left(x\in\mathbf{N}\right)$　　D. $y=\dfrac{1}{\left|x+1\right|}$

【答案】D;

【解析】A 值域为$\left[0,+\infty\right)$，B 值域为$\left(1,2\right)$，C 值域是离散集合，不是区间，D 值域为$\left(0,+\infty\right)$，故选 D.

5.　定义在 **R** 上的偶函数 $f\left(x\right)$，对任意 $x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)\left(x_1\neq x_2\right)$，有 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$，则（　）.

A. $f\left(3\right)<f\left(-2\right)<f\left(1\right)$　B. $f\left(1\right)<f\left(-2\right)<f\left(3\right)$　C. $f\left(-2\right)<f\left(1\right)<f\left(3\right)$　D. $f\left(3\right)<f\left(1\right)<f\left(-2\right)$

【答案】A;

【解析】$f\left(x\right)$ 在$\left[0,+\infty\right)$单调递减，所以 $f\left(3\right)<f\left(2\right)<f\left(1\right)$，又因为 $f\left(x\right)$ 为偶函数，所以

$f\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$，所以 $f\left(3\right)<f\left(-2\right)<f\left(1\right)$，故选 A.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x>10 \\ f\left(f(x+5)\right), & x\le 10 \end{cases}$，则 $f(5)$ 的值是（　）.

A. 24　　B. 21　　C. 18　　D. 16

【答案】A;

【解析】因为 $f(5)=f\left(f(10)\right)=f\left(f\left(f(15)\right)\right)=f\left(f(18)\right)=f(21)=24$，故选 A.

7. 著名的 *Dirichlet* 函数 $D(x)=\begin{cases} 1，x\text{为有理数} \\ 0，x\text{为无理数} \end{cases}$，则 $D\left(D(x)\right)$ 等于（　）.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases} 1，x\text{为有理数} \\ 0，x\text{为无理数} \end{cases}$　　D. $\begin{cases} 1，x\text{为无理数} \\ 0，x\text{为有理数} \end{cases}$

【答案】B;

【解析】由题意，$D(x)=0$ 或 1 是有理数，所以 $D\left(D(x)\right)=D(0)=0$ 或 $D\left(D(x)\right)=D(1)=0$，故选 B.

8. 函数 $f(x)=ax^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上为减函数，则 a 的取值范围为（　）.

A. $0<a\le\frac{1}{5}$　　B. $0\le a\le\frac{1}{5}$　　C. $0<a<\frac{1}{5}$　　D. $a>\frac{1}{5}$

【答案】B;

【解析】当 $a=0$ 时，符合题意；当 $a\ne 0$ 时，$\begin{cases} a>0 \\ \dfrac{2(a-1)}{-2a}\ge 4 \end{cases}$，得 $0<a\le\frac{1}{5}$，所以 $0\le a\le\frac{1}{5}$，故选 B.

9. 已知函数 $f(x)=(x-1)(ax+b)(-6<x<6)$ 为偶函数，且在 $(0,6)$ 上单调递减，则 $f(3-x)<0$ 的解集为（　）.

A. $(2,4)$　　B. $(-3,2)\cup(4,9)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-3,-1)\cup(1,4)$

【答案】B;

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(3-x)=f(|3-x|)$，再结合 $f(1)=0$ 及 $f(x)$ 在 $(0,6)$ 上单调递减可得：$f(3-x)<0\Leftrightarrow f(|3-x|)<0\Leftrightarrow 1<|3-x|<6$，解得 $x\in(-3,2)\cup(4,9)$，故选 B.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, x<0 \\ -x^2, x\ge 0 \end{cases}$，$f\left(f(a)\right)\le 3$，则实数 a 的取值范围为（　）.

A. $(-2,4)$　　B. $(-2,0]$　　C. $\left[0,\sqrt{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$

【答案】D;

【解析】令 $t=f(a)$，由 $f(t)\le 3$ 解得 $t\ge -3$，即 $f(a)\ge -3$，解得 $a\le\sqrt{3}$，故选 D.

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11．设集合 $M=\{1,2\}$，则满足条件 $M\cup N=\{1,2,3,6\}$ 的集合 N 的个数为__________.

【答案】4；

【解析】由题意知，$3\in N$，$6\in N$，满足条件的集合 N 可能为：$\{3,6\}$，$\{1,3,6\}$，$\{2,3,6\}$，$\{1,2,3,6\}$，共 4 个.

12．若函数 $y=f\left(x+1\right)$ 的定义域是 $\left[0,2\right]$，则函数 $f\left(2x\right)$ 的定义域是__________.

【答案】$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$；

【解析】对于函数 $y=f\left(x+1\right)$，定义域是 $\left[0,2\right]$，所以 $x\in\left[0,2\right]$，所以 $x+1\in\left[1,3\right]$，

对于函数 $y=f\left(2x\right)$，$2x\in\left[1,3\right]$，解得 $x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$，所以定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

13．已知 $f\left(\sqrt{x}+1\right)=x+2\sqrt{x}$，则 $f\left(x\right)=$__________.

【答案】$f\left(x\right)=x^2-1\left(x\geq 1\right)$；

【解析】令 $t=\sqrt{x}+1\geq 1$，则 $x=\left(t-1\right)^2$，所以 $f\left(t\right)=f\left(\sqrt{x}+1\right)=x+2\sqrt{x}=\left(t-1\right)^2+2\sqrt{\left(t-1\right)^2}$

$=\left(t-1\right)^2+2\left(t-1\right)=t^2-1$，即 $f\left(x\right)=x^2-1\left(x\geq 1\right)$.

14．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 的单调递增区间为__________.

【答案】$\left[-2,-1\right]$ 和 $\left[0,1\right]$；

【解析】由 $-x^2+2|x|\geq 0$ 解得函数定义域为 $\left[-2,2\right]$．函数是 $t=-x^2+2|x|$ 与 $y=\sqrt{t}$ 的复合，其中 $y=\sqrt{t}$ 单调递增，所以只需求 $t=-x^2+2|x|$ 的单调递增区间，为 $\left[-2,-1\right]$ 和 $\left[0,1\right]$.

15．已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax & ,x>1\\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x+2, & x\leq 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围是__________.

【答案】$\left[4,8\right)$；

【解析】由 $\begin{cases}a>0\\ 4-\dfrac{a}{2}>0\\ 4-\dfrac{a}{2}+2\leq a\end{cases}$，解得 $a\in\left[4,8\right)$.

16. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，设 $\alpha=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$， $\beta=\dfrac{1}{1+\lambda}$，若有 $f(\alpha)-f(\beta)>f(1)-f(0)$，则实数 λ 的取值范围是____________.

【答案】$(-\infty,-1)$；

【解析】观察发现 $\alpha+\beta=1+0=1$，构造函数 $g(x)=f(x)-f(1-x)$，由题意知 $g(\alpha)>g(1)$．因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $\alpha>1$ 即 $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}>1$，解得 $\lambda\in(-\infty,-1)$.

三、解答题（第 17 题 10 分，第 18-22 题每题 12 分，共 70 分）

17. 已知集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{6}{1+x}>1,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$， $B=\left\{x\left|x^2-2x-m<0\right.\right\}$， $C=\left\{x\left|\,|x+1|<m\right.\right\}$.

⑴ 当 $m=3$ 时，求 $A\cap\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)$；

⑵ 若 $A\cap C=C$，求实数 m 范围.

【答案】⑴ $[3,5)$ ；⑵ $m\le 0$.

【解析】⑴ 当 $m=3$ 时， $B=(-1,3)$， $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$， $A\cap\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)=[3,5)$；

⑵ 由 $A\cap C=C$ 知 $C\subseteq A$，当 $m\le 0$ 时 $C=\varnothing$ 符合题意，当 $m>0$ 时， $C=(-1-m,-1+m)$ 不是 A 的子集，所以 $m\le 0$.

18. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，当 $x\ge 0$ 时， $f(x)=2x+3$.

⑴ 求 $f(x)$ 的解析式；

⑵ 若 $f(a)=7$，求实数 a 的值.

【答案】⑴ $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ge 0\\ -2x+3, & x<0\end{cases}$；⑵ $a=\pm 2$.

【解析】⑴ 当 $x<0$ 时，有 $-x>0$，由 $f(x)$ 是偶函数得 $f(x)=f(-x)=2(-x)+3=-2x+3$，所以

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ge 0\\ -2x+3, & x<0\end{cases};$$

⑵ ①当 $a\ge 0$ 时， $2a+3=7$，解得 $a=2$；②当 $a<0$ 时， $-2a+3=7$，解得 $a=-2$；

综上所述， $a=\pm 2$.

19. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$.

⑴ 函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 是否具有单调性？如果有请证明，如果没有请说明理由；

⑵ 求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[4,8\right]$ 上的值域.

【答案】⑴ 有，证明见解析；⑵ $\left[5,\dfrac{17}{2}\right]$.

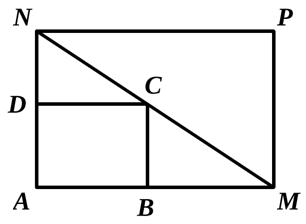
【解析】⑴ $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[2,+\infty\right)$ 上是单调增函数.

任取 $x_1,x_2\in\left[2,+\infty\right)$，令 $x_1<x_2$，则 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\left(x_2+\dfrac{4}{x_2}\right)-\left(x_1+\dfrac{4}{x_1}\right)=\dfrac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_1x_2-4\right)}{x_1x_2}$，

由于 $2\le x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>4$，所以 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[2,+\infty\right)$ 上是单调增函数；

⑵ $f\left(x\right)$ 在 $\left[4,8\right]$ 上单调递增，所以值域为 $\left[5,\dfrac{17}{2}\right]$.

20. 某物流公司购买了一块长 $AM=30$ 米，宽 $AN=20$ 米的矩形地块（如图），计划把矩形 $ABCD$ 建设为仓库，其余地方为道路和停车场，要求顶点 C 在地块对角线 MN 上，B，D 分别在边 AM，AN 上，假设 AB 的长度为 x 米.



⑴ 求矩形 $ABCD$ 的面积 S 关于 x 的函数解析式；

⑵ 要使仓库占地 $ABCD$ 的面积不少于 144 平方米，则 AB 的长度应在什么范围内？

【答案】⑴ $S=-\dfrac{2}{3}x^2+20x$，其中 $x\in\left(0,30\right)$；⑵ $\left[12,18\right]$.

【解析】⑴ 由三角形相似可得 $\dfrac{CB}{NA}=\dfrac{BM}{AM}$，即 $\dfrac{CB}{20}=\dfrac{30-x}{30}$，得 $CB=20-\dfrac{2}{3}x$ 米，所以

$S=x\left(20-\dfrac{2}{3}x\right)=-\dfrac{2}{3}x^2+20x$，其中 $x\in\left(0,30\right)$；

⑵ 由 $S=-\dfrac{2}{3}x^2+20x\ge 144$，解得 $x\in\left[12,18\right]$.

21. ⑴ 解关于 x 的不等式 $x^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+1\le 0$，其中 $a>0$；

⑵ 求 $f\left(x\right)=-x-\sqrt{3-2x}$ 的值域.

【答案】⑴ 见解析；⑵ 当 $OM=1$ 千米时，总长度最长.

【解析】⑴ $x^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+1\le 0\Leftrightarrow\left(x-a\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\le 0$，下面分三种情况讨论.

① 当 $a<\dfrac{1}{a}$ 即 $a\in\left(0,1\right)$ 时，解集为 $\left[a,\dfrac{1}{a}\right]$；

② 当 $a=\dfrac{1}{a}$ 即 $a=1$ 时，解集为 $\left\{1\right\}$；

③当 $a > \frac{1}{a}$ 即 $a \in (1,+\infty)$ 时，解集为 $\left[\frac{1}{a}, a\right]$；

⑵ 令 $t = \sqrt{3-2x} \geq 0$，则 $x = -\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}$，$y = \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} - t$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以值域为 $[-2,+\infty)$.

22. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

⑴ 求 $f(0)$；

⑵ 判断 $f(x)$ 奇偶性并证明；

⑶ 解不等式 $\frac{1}{2} f(x^2) - f(x) > \frac{1}{2} f(3x)$.

【答案】⑴ 0；⑵ 奇函数，证明见解析；⑶ $(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$.

【解析】⑴ 令 $x = y = 0$，得 $f(0) = 2f(0)$，所以 $f(0) = 0$；

⑵ 对任意 $x \in \mathbf{R}$，$-x \in \mathbf{R}$，

令 $y = -x$，得 $f(0) = f(x) + f(-x)$，因为 $f(0) = 0$，所以 $(x) + f(-x) = 0$ 即 $f(-x) = f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数；

⑶令 $y = x$，得 $f(2x) = 2f(x)$，即 $f(x) = \frac{1}{2} f(2x)$，

原不等式可化为 $\frac{1}{2} f(x^2) - \frac{1}{2} f(2x) > \frac{1}{2} f(3x) \Rightarrow f(x^2) > f(2x) + f(3x) = f(5x)$，

因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x^2 > 5x$，解得 $x \in (-\infty,0) \cup (5,+\infty)$.

南京外国语学校高一数学月考试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 64 分）

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,4\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$____________.

【答案】$\{3,5\}$;

【解析】由并集和补集定义.

2. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2^x-1}$的定义域为____________.

【答案】$[-1,0)\cup(0,+\infty)$;

【解析】由$\begin{cases}x+1\ge 0\\ 2^x-1\ne 0\end{cases}$，解得$x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

3. 函数$f(x)=-x^2+6x-2$，$x\in[0,3)$的值域是____________.

【答案】$[-2,7)$;

【解析】$f(x)=-x^2+6x-2$在$[0,3)$上单调递增，所以值域为$[-2,7)$.

4. 已知函数$f(x)$满足$f(2x+1)=4x-3$，且$f(a)=9$，则$a=$____________.

【答案】7;

【解析】令$4x-3=9$，解得$x=3$，所以$a=2x+1=7$.

5. 若函数$f(x)=(k-1)x^2+(2k-4)x+1$是偶函数，则$f(x)$的单调增区间是____________.

【答案】$(0,+\infty)$;

【解析】由偶函数知$2k-4=0$，解得$k=2$，所以$f(x)=x^2+1$，单调增区间为$(0,+\infty)$.

6. 已知函数$f(x)=1+\dfrac{2}{4^x-1}$，则$f(2019)+f(-2019)+2019=$____________.

【答案】2019;

【解析】$f(-x)=1+\dfrac{2}{4^{-x}-1}=1+\dfrac{2\cdot 4^x}{1-4^x}$，所以$f(x)+f(-x)=1+\dfrac{2}{4^x-1}+1+\dfrac{2\cdot 4^x}{1-4^x}=0$，令$x=2019$得

$f(2019)+f(-2019)=0$，所以$f(2019)+f(-2019)+2019=2019$.

7. 若函数$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{5-x}}{kx^2+2kx+3}$的定义域为$\mathbf{R}$，则实数$k$的取值范围是____________.

【答案】$[0,3)$;

【解析】即函数 $kx^2+2kx+3\neq 0$ 恒成立，当 $k=0$ 时，符合题意；当 $k\neq 0$ 时，只需 $\Delta=4k^2-12k<0$，解得 $0<k<3$，所以 k 的取值范围是 $[0,3)$.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+a}$ 的图象 C 向下平移一个单位，再向左平移一个单位后，得到 $y=f(x)$ 的图象 C_1，若图象 C_1 关于原点对称，则实数 $a=$____________.

【答案】-1；

【解析】函数 $f(x)$ 图象 C 关于点 $(1,1)$ 中心对称，所以 $-a=1$，解得 $a=-1$.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$，则 $f\left(\dfrac{1}{7}\right)+f\left(\dfrac{2}{7}\right)+f\left(\dfrac{3}{7}\right)+f\left(\dfrac{4}{7}\right)+f\left(\dfrac{5}{7}\right)+f\left(\dfrac{6}{7}\right)$ 的值是____________.

【答案】3；

【解析】$f(1-x)=\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9}{9+3\cdot 9^x}=\dfrac{3}{3+9^x}$，所以 $f(1-x)+f(x)=1$，故原式的值为 3.

10. 不等式 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$ 的解集是____________.

【答案】$[3,+\infty)\cup\{-1\}$；

【解析】首先满足定义域：$x^2-2x-3\geq 0$，即 $x\geq 3$ 或 $x\leq -1$；当 $x=-1,3$ 时，满足题意；当 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}>0$ 时，$\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$，解得 $x>3$，所以解集为 $[3,+\infty)\cup\{-1\}$.

11. 不等式 $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geq 2$ 的解集是____________.

【答案】$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3)$；

【解析】原不等式等价于 $x+5>2(x-1)^2$ 且 $x\neq 1$，解得 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3)$.

12. 若关于 x 的方程 $3^x+a\cdot 9^x+1=0$ 在 $x\in[1,2]$ 时有解，则实数 a 的取值范围为____________.

【答案】$\left[-\dfrac{4}{9},-\dfrac{10}{81}\right]$；

【解析】令 $t=3^x\in[3,9]$，则关于 t 的方程 $t+at^2+1=0$ 在 $t\in[3,9]$ 时有解，所以 $a=-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}\in\left[-\dfrac{4}{9},-\dfrac{10}{81}\right]$.

13. 若不等式 $x^2-4x+2-a\le 0$ 对一切 $x\in[0,3]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为____________.

【答案】$[2,+\infty)$；

【解析】函数 $f(x)=x^2-4x+2-a$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,3)$ 单调递增，要使 $f(x)\le 0$ 恒成立，只需最大值 $f(0)=2-a\le 0$，解得 $a\in[2,+\infty)$.

14. 设 $x>0,y>0$ 且满足 $x+xy+4y=5$，则 xy 的最大值是____________.

【答案】1；

【解析】由基本不等式，$5-xy=x+4y\ge 4\sqrt{xy}$，解得 $xy\le 1$.

15. 若函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$，则不等式 $f(2x)<f(x+3)$ 的解集是____________.

【答案】$\left[\dfrac{1}{2},3\right)$；

【解析】函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 定义域为 $[1,+\infty)$ 且在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以

$f(2x)<f(x+3)\Leftrightarrow 1\le 2x<x+3$，解得 $x\in\left[\dfrac{1}{2},3\right)$.

16. 已知实数 $a,b\in(0,2)$，且满足 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，则 $a+b$ 的值为____________.

【答案】2；

【解析】由题意得 $a^2+2^a=(2-b)^2+2^{2-b}$，考虑函数 $f(x)=x^2+2^x$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增，又因为 $f(a)=f(2-b)$，且 $a,2-b\in(0,2)$，所以 $a=2-b$，即 $a+b=2$.

二、解答题：（每题 9 分，共 36 分）

17. ⑴ 设 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-5,1-a,9\}$，已知 $A\cap B=\{9\}$，求 $A\cup B$.

⑵ 已知集合 $A=\{x\mid -3\le x\le 5\}$，$B=\{x\mid m-2\le x\le m+1\}$，满足 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

【答案】⑴ $A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$；⑵ $[-1,4]$.

【解析】⑴ 由题意得 $9\in A$，若 $2a-1=9$，解得 $a=5$，经检验，不符合题意；若 $a^2=9$，解得 $a=\pm 3$，当 $a=3$ 时不符题意，当 $a=-3$ 时，经检验，符合题意，所以 $a=-3$，所以 $A=\{-4,-7,9\}$，$B=\{-8,4,9\}$，所以 $A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$；

⑵ 由题意 $B\ne\varnothing$，由 $B\subseteq A$ 可得 $\begin{cases}m-2\ge -3\\ m+1\le 5\end{cases}$，解得 $m\in[-1,4]$.

18. 判定函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ 的单调性，写出单调区间，并用定义法证明.

【答案】 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数，证明见解析.

【解析】 任取 x_1,x_2，令 $x_1<x_2$，则 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{{x_2}^2+1}-x_2}-\dfrac{1}{\sqrt{{x_1}^2+1}-x_1}$

$$=\sqrt{{x_2}^2+1}+x_2-\sqrt{{x_1}^2+1}-x_1=\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{\sqrt{{x_2}^2+1}+\sqrt{{x_1}^2+1}}+\left(x_2-x_1\right)$$

$$=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1+\sqrt{{x_2}^2+1}+\sqrt{{x_1}^2+1}\right)}{\sqrt{{x_2}^2+1}+\sqrt{{x_1}^2+1}},$$

因为 $\sqrt{{x_1}^2+1}>\sqrt{{x_1}^2}=\left|x_1\right|\geq -x_1$，所以 $\sqrt{{x_1}^2+1}+x_1>0$，同理 $\sqrt{{x_2}^2+1}+x_2>0$，

所以 $x_2+x_1+\sqrt{{x_2}^2+1}+\sqrt{{x_1}^2+1}>0$，又 $x_2-x_1>0$，$\sqrt{{x_2}^2+1}+\sqrt{{x_1}^2+1}>0$，

所以 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数.

19. 若关于 x 的方程 $3tx^2+\left(3-7t\right)x+4=0$ 的两个实数根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 t 的取值范围.

【答案】 $\left(\dfrac{7}{4},5\right)$.

【解析】考虑函数 $f\left(x\right)=3tx^2+\left(3-7t\right)x+4$，它的两个零点为 α,β，要使 $0<\alpha<1<\beta<2$，

则 $t\neq 0$，而 $f\left(0\right)=4>0$，则 $f\left(1\right)<0,f\left(2\right)>0$，解得 $t\in\left(\dfrac{7}{4},5\right)$.

20. 设函数 $f\quad x\quad=x^2-4|x|+3$，$\left(x\in\left[-4,4\right]\right)$.

(1) 求证：$f\left(x\right)$ 是偶函数；

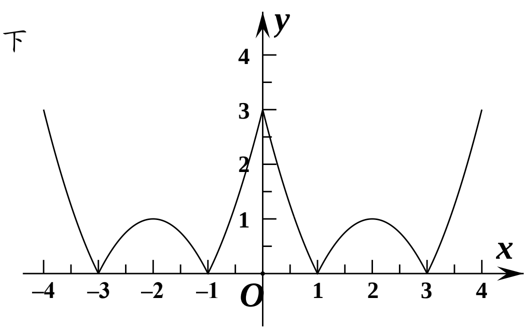
(2) 画出函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 的图象，指出函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间，并说明在各个单调区间上 $f\left(x\right)$ 是单调递增还是单调递减；（不需要证明）

(3) 求函数 $f\left(x\right)$ 的值域.

【答案】(1) 证明见解析；(2) 见解析；(3) $\left[-1,3\right]$.

【解析】(1) 对任意的 $x\in\left[-4,4\right]$，都有 $-x\in\left[-4,4\right]$，且 $f\left(-x\right)=\left(-x\right)^2-4\left|-x\right|+3=x^2-4\left|x\right|+3=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数；

(2) 画出 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 图象如下



$y=f\left(x\right)$的单调递增区间分别为$\left(-2,0\right)$和$\left(2,4\right)$；

$y=f\left(x\right)$的单调递减区间分别为$\left(-4,-2\right)$，$\left(0,2\right)$；

(3) 因为函数$f\quad x\quad=x^2-4|x|+3$是偶函数，故只需求$\left[0,4\right]$上的值域，

当$x\in\left[0,4\right]$ 时，$f\left(x\right)=x^2-4x+3$在$\left[0,2\right]$上单调递减，在$\left[2,4\right]$上单调递增，

且$f\left(0\right)=f\left(4\right)=3$，$f\left(2\right)=-1$，所以$f\left(x\right)$值域为$\left[-1,3\right]$.