河北正定中学高一第一次月考试卷

数 学

（总分：150 分　　考试时间：120 分钟）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡相应位置.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案书写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x<2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{-2,-1,0,1,2\}$　　B．$\{-2,-1,0,1,4\}$　　C．$\{-2,-1,0,1\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

2. 命题“$\exists x\in R$，$x^2+2x+2\le 0$”的否定是（　　）

A．$\forall x\in R$，$x^2+2x+2>0$　　B．$\forall x\in R,x^2+2x+2\le 0$

C．$\exists x\in R$，$x^2+2x+2>0$　　D．$\exists x\in R$，$x^2+2x+2\ge 0$

3. 2020 年正定高中学生运动会，某班 62 名学生中有一半的学生没有参加比赛，参加比赛的学生中，参加田赛的有 16 人，参加径赛的有 23 人，则田赛和径赛都参加的学生人数为（　　）

A．7　　B．8　　C．10　　D．12

4. 设 U 为全集，A,B 是集合，则“存在集合 C 使得 $A\subseteq C,B\subseteq C_UC$”是“$A\cap B=\varnothing$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知实数 a,b,c ，若 $a>b$ ，则下列不等式成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$　　C. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$　　D. $a|c|>b|c|$

6. 若 $\forall x\in\{x\,|\,1\le x\le 5\}$，不等式 $x^2+ax-2\le 0$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left\{a\,|\,a>-\frac{23}{5}\right\}$　　B. $\left\{a\,|\,-\frac{23}{5}\le a\le 1\right\}$　　C. $\{a\,|\,a>1\}$　　D. $\left\{a\,|\,a\le -\frac{23}{5}\right\}$

7. 设 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m+6=0$ 的两个实根，则 $(a-1)^2+(b-1)^2$ 的最小值是（　　）

A. $-\frac{49}{4}$　　B. 18　　C. 8　　D. -6

8. 若两个正实数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，且关于 m 的不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2-3m$ 有解，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\{m\mid -1<m<4\}$　　B. $\{m\mid m<-1或m>4\}$　　C. $\{m\mid -4<m<1\}$　　D. $\{m\mid m<0或m>3\}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 下列命题中假命题的是（　　）

A. $\forall x\in \mathbf{Z}, x^4\geq 1$　　B. $\exists x_0\in \mathbf{Q}, x_0^2=3$

C. $\forall x\in \mathbf{R}, x^2-\sqrt{2}x-1>0$　　D. $\exists x_0\in \mathbf{N}, |x_0|\leq 0$

10. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集是 $\{x\mid -2<x<-1\}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $a-b=1$

B. $bx^2+ax+1>0$ 的解集是 $\left\{x\mid -1<x<\frac{2}{3}\right\}$

C. $a=-2$

D. $bx^2+ax-1<0$ 的解集是 $\left\{x\mid -\frac{2}{3}<x<1\right\}$

11. 若 $x\in A$，则 $\frac{1}{x}\in A$，称 A 为“影子关系”集合. 下列对集合 $M=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3,4\right\}$ 的所有非空子集中是“影子关系”的集合叙述正确的是（　　）

A. 集合个数为 7

B. 集合个数为 8

C. 含有 1 的集合个数为 4

D. 元素个数为 2 的集合有 2 个

12. 已知正实数 a,b,c 满足 $a^2-ab+4b^2-c=0$，当 $\frac{c}{ab}$ 取最小值时，下列说法正确的是（　　）

A. $a=2b$　　B. $c=4b^2$　　C. $a+b-c$ 的最大值为$\dfrac{3}{4}$　　D. $a+b-c$ 的最大值为$\dfrac{3}{8}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$a>0,b>0,ab=16$，则$3a+b$的最小值是__________.

14. 已知集合$A=\{x\mid -1\le x\le 3\},B=\{y\mid y=x^2,x\in A\},C=\{y\mid y=2x+a,x\in A\}$，若满足$C\subseteq B$，则实数$a$的取值范围为__________.

15. 若实数α，β满足$-1\le\alpha+\beta\le 1$，$1\le\alpha+2\beta\le 3$，则$\alpha+3\beta$的取值范围为__________.

16. 在R上定义运算：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若不等式$\begin{vmatrix} x-1 & a-2 \\ a+1 & x \end{vmatrix}\ge 1$对任意实数$x\in R$恒成立，则实数$a$的最大值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}, B=\{a-5,1-a,9\}$，若 $9\in(A\cap B)$，求实数 a 的值.

18.（本小题满分 12 分）

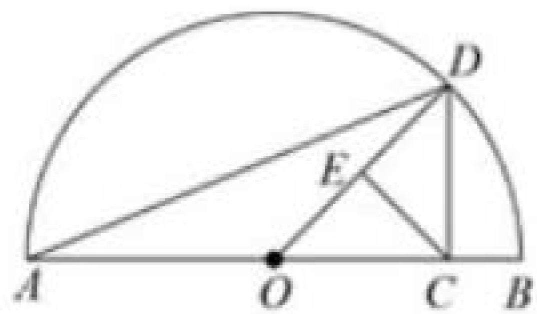
已知 $a\in R$，集合 $A=\{x\mid 2a\le x\le a+3\}$，$B=\{x\mid x^2+5x-6\le 0\}$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求 $A\cap B$；

(2) 若 $A\cup B=B$，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

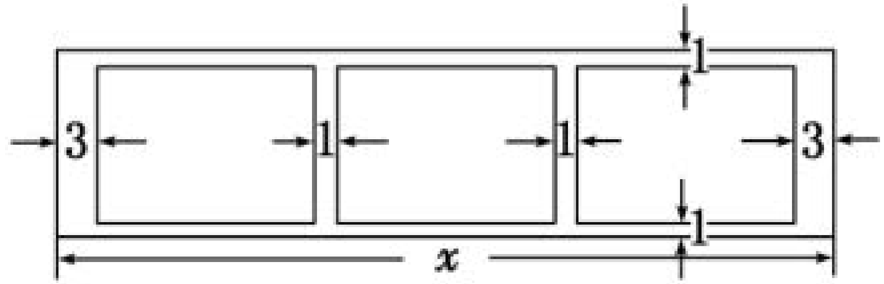
《几何原本》中的几何代数法（以几何方法研究代数问题）成为了后世数学家处理问题的重要依据.通过这一原理，很多的代数公理或定理都能够通过图形实现证明，也称之为无字证明.如图所示的图形中，在 AB 上取一点 C，使得 $AC=a,BC=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交以 AB 为直径的半圆弧于 D，连结 OD，作 $CE\perp OD$，垂足为 E，请从下列不等式①、②、③中选出表示 $CD\ge DE$ 的序号（不需要写出推导过程，只需选出不等式序号即可），并证明选出的不等式.



① $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}(a>0,b>0)$；② $\sqrt{ab}\ge\dfrac{2ab}{a+b}(a>0,b>0)$；③ $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|\le\sqrt{ab}(a>0,b>0)$.

20．（本小题满分 12 分）

某学校为了支持生物课程基地研究植物的生长规律，计划利用学校空地建造一间室内面积为 900 m^2 的矩形温室，在温室内划出三块全等的矩形区域，分别种植三种植物，相邻矩形区域之间间隔 1 m，三块矩形区域的前、后与内墙各保留 1 m 宽的通道，左、右两块矩形区域分别与相邻的左右内墙保留 3 m 宽的通道，如图．设矩形温室的室内长为 x(单位：m)，三块种植植物的矩形区域的总面积为 S (单位：m^2).



(1) 求 S 关于 x 的函数关系式；

(2) 求 S 的最大值，并求出此时 x 的值.

21．（本小题满分 12 分）

已知正实数 x,y 满足 $x+y=4$.

（1）是否存在正实数 x,y，使得 $xy=5$？若存在，求出 x,y 的值；若不存在，请说明理由.

（2）求证：$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{y+2}\geq\dfrac{9}{7}$，并说明等号成立的条件.

22.（本小题满分 12 分）

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$，对任意实数 x，不等式 $2x\le ax^2+bx+c\le\frac{1}{2}(x+1)^2$ 恒成立.

（1）求 $a+b+c$ 的值；

（2）若该二次函数有两个不同零点 x_1、x_2.

①求 a 的取值范围；　　②证明：x_1x_2 为定值.

河北正定中学高一第一次月考试卷数学答案

1-8 C A B C C D C B

9. ABC　　10. AB　　11. ACD　　12. AD　　13. $8\sqrt{3}$　　14. $\{a \mid 2 \le a \le 3\}$

15. $1 \le \alpha + 3\beta \le 7$　　16. $\dfrac{3}{2}$

17.　　(1)∵$9 \in (A \cap B)$，∴$9 \in B$ 且 $9 \in A$，

∴$2a-1=9$ 或 $a^2=9$，∴$a=5$ 或 $a=\pm 3$.··································7 分

检验知 $a=5$ 或 $a=-3$.··································10 分

18.　　（1）当 $a=-1$ 时，$A=\{x \mid -2 \le x \le 2\}$··································1 分

解得 $B=\{x \mid -6 \le x \le 1\}$，··································3 分

故 $A \cap B=\{x \mid -2 \le x \le 1\}$；··································5 分

（2）由 $A\cup B=B$ 知 $A\subseteq B$ ……………………………………………6 分

当 $A=\varnothing$ 时，$2a>a+3$，解得 $a>3$；……………………………………8 分

当 $A\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}2a\le a+3\\ a+3\le 1\\ 2a\ge -6\end{cases}$，解得 $-3\le a\le -2$.……………………………10 分

综上所述，$a>3$ 或 $-3\le a\le -2$.………………………………………………12 分

19. 选择：②…………………………………………………………………………4 分

下面证明：$\sqrt{ab}\ge\dfrac{2ab}{a+b}(a>0,b>0)$

作差法：$\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a+b}\ge 0$，当且仅当 $a=b$

时，等号成立，故 $\sqrt{ab}\ge\dfrac{2ab}{a+b}$ 成立.………………………………………12 分

20. (1) 由题设，得 $S=(x-8)\left(\dfrac{900}{x}-2\right)=-2x-\dfrac{7200}{x}+916,x\in(8,450)$.

……………………………………………………………………………………5 分

(2) 因为 $8<x<450$，所以 $2x+\dfrac{7200}{x}\ge 2\sqrt{2x\times\dfrac{7200}{x}}=240$，

………………………………………………………………………………………10 分

当且仅当 $x=60$ 时等号成立，从而 $S\le 676$．

故当矩形温室的室内长为 60 m 时，三块种植植物的矩形区域的总面积最大，为 676 m^2.………………………………………………………………………12 分

21. （1）因为 $x+y=4\ge 2\sqrt{xy}$，所以 $xy\le 4$，故不存在正实数 x,y，使得 $xy=5$；

………………………………………………………………………………………5 分

（2）由 $(x+1)+(y+2)=7$，…………………………………………………7 分

故 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{y+2}=\dfrac{1}{7}[(x+1)+(y+2)]\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{y+2}\right)=\dfrac{1}{7}\left(5+\dfrac{y+2}{x+1}+\dfrac{9(x+1)}{y+2}\right)\ge\dfrac{9}{7}$，

………………………………………………………………………………………10 分

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{y+2}{x+1}=\dfrac{9(x+1)}{y+2}\\ x+y=4\end{cases}$ 即 $x=\dfrac{4}{3},y=\dfrac{8}{3}$ 时，等号成立.……………………12 分

22. （1）令 $x=1$ 得 $2\le a+b+c\le 2$，故 $a+b+c=2$；………………3 分

（2）由 $2x\le ax^2+bx+c\le \frac{1}{2}(x+1)^2$ 知 $ax^2+(b-2)x+c\ge 0$ 且

$\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(1-b)x+\frac{1}{2}-c\ge 0$，

当 $a\ne \frac{1}{2}$ 时，故有 $\begin{cases}(b-2)^2-4ac\le 0\\(1-b)^2-4ac\le 0\\\frac{1}{2}-a>0\end{cases}$，………………………………………………6 分

将 $a+b+c=2$ 代入解得 $\begin{cases}a=c\\0<a<\frac{1}{2}\end{cases}$；………………………………………………9 分

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$b=1,c=\frac{1}{2}$.………………………………………………………………10 分

对于方程 $ax^2+bx+c=0$ 有判别式 $\Delta=b^2-4ac=(2-2a)^2-4a^2=4-8a$，因为函数存在

两个零点，故 $0<a<\frac{1}{2}$，且 $x_1x_2=\frac{c}{a}=1$.………………………………