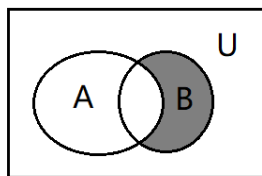


数学试卷

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1\}$, 则 $(\complement_U A) \cup B =$ ()
- (A) Φ (B) $\{1, 2, 4, 6\}$ (C) $\{0, 8, 10\}$ (D) $\{0, 1, 8, 10\}$
2. 设四边形 ABCD 的两条对角线为 AC, BD, 则“四边形 ABCD 为菱形”是“ $AC \perp BD$ ”的 ()
- (A) 充分不必要条件 (B) 充要条件
- (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分又不必要条件
3. 命题“ $\forall a \in \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 有实根”的否定是 ()
- (A) $\forall a \notin \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实根
- (B) $\exists a \notin \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实根
- (C) $\exists a \in \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实根
- (D) $\exists a \in \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2 - ax - 1 \neq 0$ 没有实根
4. 不等式 $-x^2 + x + 6 < 0$ 的解集是 ()
- (A) $\{x | -2 < x < 3\}$ (B) $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$
- (C) $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 3\}$ (D) $\left\{x \middle| x < -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x > \frac{1}{3}\right\}$
5. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x \leq 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则图中阴影部分对应的集合为 ()
- (A) $\{x | 1 < x < 2\}$ (B) $\{x | 1 \leq x < 2\}$ (C) $\{x | x > 1\}$ (D) $\{x | x \geq 1\}$



6. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x\}$, $M = \{(x, y) | \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}\}$, 则下列结论中正确的是 ()

- (A) $M = A$ (B) $M \subseteq A$ (C) $(1, 1) \subseteq A$ (D) $M \in A$

7. 已知 $p: m-1 < x < m+1$, $q: (x-2)(x-6) < 0$, 且 q 是 p 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $3 < m < 5$ B. $3 \leq m \leq 5$ C. $m > 5$ 或 $m < 3$ D. $m > 5$ 或 $m \leq 3$

8. 设 $x > 0$, 则 $y = 3 - 3x - \frac{1}{x}$ 的最大值为 ()

- (A) 3 (B) $3 + 2\sqrt{3}$ (C) $3 - 2\sqrt{3}$ (D) -1

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列关系中, 正确的有 ()

- (A) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ (B) $\frac{1}{3} \in \mathcal{Q}$ (C) $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Z}$ (D) $\emptyset \in \{0\}$

10. 下列命题为真命题的是 ()

- (A) 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$ (B) 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$
(C) 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$ (D) 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab < 0$

11. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 ()

- (A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 4 (B) \sqrt{ab} 有最小值 $\frac{1}{2}$
(C) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ (D) $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

12. 命题 “ $\forall 1 \leq x \leq 3, x^2 - a \leq 0$ 恒成立” 是真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \geq 9$ B. $a \geq 11$
C. $a \geq 10$ D. $a \leq 10$

第Ⅱ卷(非选择题, 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 设 $a, b \in \mathbf{R}, P = \{1, a\}, Q = \{-1, -b\}$, 若 $P = Q$, 则 $a + b =$ _____.

14. 已知 $2 < a < 3, -2 < b < -1$, 则 $a - 3b$ 的取值范围是_____.

15. 某公司一年共购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 x 的值是_____.

16. 若不等式 $kx^2 - kx - 1 < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 4 < 0\}, B = \{x \mid 0 \leq x - 1 \leq 2\}$.

(I) 求 $A \cap B$;

(II) 若 $C = \{x \mid m - 1 \leq x \leq m + 1\}, A \cap C = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}, B = \{x \mid x^2 + 2(m + 1)x + m^2 - 3 = 0\}$.

(I) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的值;

(II) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

(1) 已知 $x \neq 0$, 求 $y = x + \frac{1}{x}$ 的范围.

(2) 已知 $0 < x < \frac{1}{2}$, 求 $y = x(1 - 2x)$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 2$.

(I) 求 xy 的最大值;

(II) 求 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知不等式 $ax^2 - 5x + b > 0$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 2\}$, 设 $A = \{x | bx^2 - 5x + a > 0\}$,

$$B = \left\{ x \mid \frac{3}{x+1} \geq 5 \right\}.$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求 $A \cap B$ 和 $A \cup (C_U B)$.

22. (本小题满分 12 分)

解关于 x 的不等式

$$ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0 (a \in \mathbb{R})$$

选做题

1. 某班共有 38 人, 其中 21 人喜爱跑步运动, 15 人喜爱篮球运动, 10 人对两项运动都不喜爱, 则对两项运动都喜爱的人数为_____.

2. 当 $x > 2$ 时, $4x + \frac{1}{x-2}$ 的最小值是_____.

3. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $|2x-1| \leq 3$ ” 是 “ $\frac{3}{x+1} \geq 1$ ” 的 ()

A 充分而不必要条件 B 必要而不充分条件 C 充要条件 D 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + 4 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(1, b)$, 求 a 和 b 的值;

(2) 若对 $\forall 1 \leq x \leq 4$, $f(x) \geq -a-1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

试题答案

一、选择题

二、填空题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	C	C	A	B	B	C	AB	BCD	ACD	BC

13. -2 14. $5 < a - 3b < 9$ 15. 30 16. $-4 < k \leq 0$

三、解答题

17. (1) $\{x | 1 \leq x < 2\}$

(2) $m \leq -3$, 或 $m \geq 3$

18(1) $m = 0$

(2) $m \leq -2$, 或 $m = 0$

20(1) $x = 1, y = \frac{1}{2}$ 时 xy 最大值为 $\frac{1}{2}$

(2) $x = 1, y = \frac{1}{2}$ 时 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 最小值为 4

21

(1) 根据题意知, -3, 2 是方程 $ax^2 - 5x + b = 0$ 的实数根,

所以由根与系数, 得 $\begin{cases} \frac{5}{a} = -3 + 2 \\ \frac{b}{a} = -3 \times 2 \end{cases}$ 解得 $a = -5, b = 30$.

(2) 由(1)可知, $a = -5, b = 30$,

所以 $A = \{x | 30x^2 - 5x - 5 > 0\} = \left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$.

且 $B = \left\{x \mid -1 < x \leq -\frac{2}{5}\right\}, C_U B = \left\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x > -\frac{2}{5}\right\}$,

所以 $A \cap B = \left\{x \mid -1 < x \leq -\frac{2}{5}\right\}, A \cup C_U B = R$.

22

当 $a = 0$ 时, 不等式 $-2x + 4 > 0$ 的解为 $x < 2$;

当 $a \neq 0$ 时, 不等式对应方程的根为 $x = \frac{a}{2}$ 或 2,

① 当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0 (a \in R)$ 即 $(-ax-2)(x+2) < 0$ 的解集为

$$\left(\frac{2}{a}, 2\right);$$

②当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $(ax-2)(x-2) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$;

③当 $a=1$ 时, 不等式 $(x+2)^2 > 0$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

④当 $a > 1$ 时, 不等式 $(ax-2)(x-2) > 0$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right) \cup (2, +\infty)$.

综上所述, 当 $a=0$ 时, 不等式解集为 $(-\infty, 2)$; 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left(\frac{2}{a}, 2\right)$; 当

$0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$; 当 $a=1$ 时, 不等式的解集为

$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right) \cup (2, +\infty)$

选做 4 (1) 关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(1, b)$, 即 $x=1$, $x=b$ 为方程

$$x^2 - (a+2)x + 4 = 0 \text{ 的两解, 所以 } \begin{cases} 1+b=a+2 \\ b=4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$$

(2) 对任意的 $x \in [1, 4]$, $f(x) \geq -a-1$ 恒成立, 即 $x^2 - (a+2)x + 5 + a \geq 0$ 对任意的 $x \in [1, 4]$

恒成立, 即 $x^2 - 2x + 5 \geq a(x-1)$ 恒成立,

①当 $x=1$ 时, 不等式 $0 \leq 4$ 恒成立, 此时 $a \in \mathbb{R}$

②当 $x \in (1, 4]$ 时, $a \leq \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = x-1 + \frac{4}{x-1}$,

因为 $1 < x \leq 4$, 所以 $0 < x-1 \leq 3$, 所以 $x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$

当且仅当 $x-1 = \frac{4}{x-1}$ 时, 即 $x-1=2$, 即 $x=3$ 时取等号, 所以 $a \leq 4$,

综上 $a \leq 4$