

一. 填空题

1. 已知集合 $M = \{x \mid x(4-x) < 0\}$, $N = \{x \mid (x-1)(x-6) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap N =$ _____
2. 不等式 $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ 的解集是_____
3. 不等式 $\frac{5-x}{x+4} \geq 1$ 的解集是_____
4. 不等式 $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2) \leq 0$ 的解集为_____
5. 若不等式 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解集是 $(-2, 3)$, 则不等式 $bx^2 + ax + c < 0$ 的解集是_____
6. 已知 $A = \{x \mid |2x-3| < a\}$, $B = \{x \mid |x| \leq 10\}$, 且 $A \subset B$, 则实数 a 的取值范围_____
7. 关于 x 的方程 $m(x-3)+3 = m^2x$ 的解为不大于 2 的实数, 则 m 的取值范围_____
8. 设不等式 $(2x-1) > m(x^2-1)$ 对满足 $|m| \leq 2$ 的一切实数 m 的值都成立, 则 x 的取值范围_____
9. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 a 的取值范围_____
10. 已知不等式 $xy \leq ax^2 + 2y^2$ 对于 $x \in [1, 2]$, $y \in [2, 3]$ 恒成立, 则 a 的取值范围_____

二. 选择题

11. 不等式 $\frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1$ 成立的充要条件是 ()
A. $ab \neq 0$ B. $a^2 + b^2 \neq 0$ C. $ab > 0$ D. $ab < 0$
12. x 为实数, 且 $|x-5| + |x-3| < m$ 有解, 则 m 的取值范围是 ()
A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m > 2$ D. $m \geq 2$
13. 已知关于 x 的不等式 $ax + b > 0$ 的解集是 $(1, +\infty)$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax-b}{x-2} > 0$ 的解集是 ()
A. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 2\}$
C. $\{x \mid 1 < x < 2\}$ D. $\{x \mid x > 2\}$
14. 不等式组 $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > \left| \frac{2-x}{2+x} \right| \end{cases}$ 的解集是 ()
A. $\{x \mid 0 < x < 2\}$ B. $\{x \mid 0 < x < 2.5\}$ C. $\{x \mid 0 < x < \sqrt{6}\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 3\}$

三. 解答题

15. 已知 $f(x) = -3x^2 + a(6-a)x + 6$.

(1) 解关于 a 的不等式 $f(1) > 0$;

(2) 若不等式 $f(x) > b$ 的解集为 $(-1, 3)$, 求实数 a 、 b 的值.

16. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 解关于 x 的不等式 $x - \frac{1}{x} \geq a(x-1)$.

17. 已知 a 是实数, 函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$, 如果方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有根, 求 a 的取值范围.

18. (附加题)

已知 S_1 、 S_2 、 S_3 为非空整数集合, 对于 1、2、3 的任意一个排列 i 、 j 、 k , 若 $x \in S_i$, $y \in S_j$, 则 $x - y \in S_k$.

(1) 证明: 三个集合中至少有两个相等;

(2) 三个集合中是否可能有两个集合无公共元素? 说明理由.

参考答案

一. 填空题

1. $\{5\}$ 2. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 3. $(-4, \frac{1}{2}]$ 4. $(-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, 2]$
5. $(-3, 2)$ 6. $(-\infty, 17]$ 7. $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$
8. $(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2})$ 9. $(-1, \frac{18}{7}]$ 10. $[-1, +\infty)$

二. 选择题

11. B 12. C 13. A 14. C

三. 解答题

15. (1) $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$; (2) $a = 3 \pm \sqrt{3}$, $b = -3$.

16. 当 $a = 1$, $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$; 当 $a < 1$, $[\frac{1}{a-1}, 0) \cup [1, +\infty)$;

- 当 $1 < a \leq 2$, $(-\infty, 0) \cup [1, \frac{1}{a-1}]$; 当 $a > 2$, $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{a-1}, 1]$.

17. $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{7}}{2}] \cup [1, +\infty)$.

18. (1) 反证法, 略; (2) 可能, 如 $S_1 = S_2 = \{\text{奇数}\}$, $S_3 = \{\text{偶数}\}$.