

高一数学试题

(考试时间: 120 分钟)

试卷满分: 150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 计算: $625^{\frac{1}{4}} =$
A. 5 B. 25 C. ± 5 D. ± 25
- 若函数 $y = (2m-1)x + b$ 在 R 上是减函数,则
A. $m > \frac{1}{2}$ B. $m < \frac{1}{2}$ C. $m > -\frac{1}{2}$ D. $m < -\frac{1}{2}$
- 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 $A \cap B = A$, 则集合 B 可以是
A. $\{x | 2^x > 1\}$ B. $\{x | x^2 > 1\}$ C. $\{x | x > 5\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
- 下列四组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是
A. $f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
B. $f(x) = |x + 1|, g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x - 1, & x < -1 \end{cases}$
C. $f(x) = 1, g(x) = (x + 1)^0$
D. $f(x) = \sqrt[3]{x^3}, g(x) = (\sqrt{x})^2$
- 已知 $f(x) = x^2 + x$, 则 $f(x-1)$ 等于
A. $x^2 - x + 1$ B. $x^2 - x$ C. $x^2 - 2x - 1$ D. $x^2 - 2x$
- 函数 $f(x) = \sqrt{3^{2x-1} - \frac{1}{27}}$ 的定义域是
A. $(-2, +\infty)$ B. $[-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, -2)$
- 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3 (a > 0)$, 则下列选项错误的是
A. $f(-3) > f(3)$ B. $f(-2) < f(3)$ C. $f(4) = f(-2)$ D. $f(4) > f(3)$
- 设函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 则函数 $f(x-1) - f^2(x)$ 的最大值为
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. -1
- 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 R , 值域为 $[-1, 2]$, 则值域也为 $[-1, 2]$ 的函数是
A. $y = 2f(x) + 1$ B. $y = f(2x + 1)$ C. $y = -f(x)$ D. $y = |f(x)|$
- 已知 $1 < b < a$, 则下列大小关系不正确的是
A. $a^b < a^a$ B. $b^a > b^b$ C. $a^b > b^b$ D. $a^b > b^a$
- 设函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ 在区间 $[2, 9]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m , 则 $m + M =$
A. $\frac{27}{2}$ B. 13 C. $\frac{25}{2}$ D. 12

- 已知函数 $f(x) (x \in R)$ 满足 $f(-x) = 4 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{2x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_m + y_m) =$
A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

- 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1} (a \in R)$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.
- 方程 $4^x + 2^x - 2 = 0$ 的解是 _____.
- 已知 $A = \{x | x^2 + px + 1 = 0, x \in R\}$, 若 $A \cap R^+ = \emptyset$, 则实数 p 的取值集合是 _____.
- 若函数 $f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2})^x + a, & a \leq x < 0 \\ -x^2 + 2x - 3, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ 的值域为 $[-11, -2]$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

- 求证: $f(x) + f(\frac{1}{x})$ 是定值;
- 求 $f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + \dots + f(2020) + f(\frac{1}{2020})$ 的值.

18. (本题满分 12 分)

已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x | x^2 - 5x < 0\}, B = \{x | m + 1 \leq x \leq 3m - 1\}$.

- 当 $m = 2$ 时, 求 $\complement_U(A \cap B)$;
- 如果 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3-ax}}{a-1} (a \neq 1)$.

- (1) 若 $a > 0$, 求 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上是减函数, 求实数 a 的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(mn) = f(m) + f(n) (m, n > 0)$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$.

- (1) 求证: $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$;
- (2) 求证: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;
- (3) 若 $f(2) = 1$, 解不等式 $f(x+2) - f(2x) > 2$.

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2tx + t^2 - 6t + 1 \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, 其最小值为 $g(t)$.

- (1) 求 $g(t)$ 的表达式;
- (2) 当 $t > 1$ 时, 是否存在 $k \in \mathbf{R}$, 使关于 t 的不等式 $g(t) < kt$ 有且仅有一个正整数解, 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2, & x > 0 \\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + n, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数.

- (1) 求实数 m, n 的值;
- (2) 若对任意实数 x , 都有 $f(4^x) + \lambda f(2^x) \geq 0$ 成立. 求实数 λ 的取值范围.

豫西名校 2020—2021 学年上期第一次联考

高一数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	B	B	B	B	C	B	D	C	C

1.

【解析】 $625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5$ ，故选 A.

2.

【解析】根据题意，有 $2m-1 < 0$ ，解得 $m < \frac{1}{2}$ ，故选 B.

3.

【解析】由 $A \cap B = A$ 可知， $A \subseteq B$ ，对于 A: $\{x | 2^x > 1 = 2^0\} = \{x | x > 0\} \supseteq A$ ，符合题意. 对于 B: $\{x | x^2 > 1\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ，没有元素 1，所以不包含 A. 对于 C、D 显然不合题意；故选 A.

4.

【解析】A 选项中， $f(x)$ 定义域为 R ， $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 A 错误；B 选项中， $f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -1-x, & x < -1 \end{cases}$ ，与 $g(x)$ 定义域相同，都是 R ，对应法则也相同，所以二者是同一函数，所以 B 正确；C 选项中， $f(x)$ 定义域为 R ， $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 C 错误；D 选项中， $f(x)$ 定义域为 R ， $g(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，所以二者不是同一函数，所以 D 错误. 故选 B

5.

【解析】因为 $f(x) = x^2 + x$ ，所以 $f(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) = x^2 - x$. 故选 B

6.

【解析】要使函数有意义，需满足 $3^{2x-1} - \frac{1}{27} \geq 0$ ，即： $3^{2x-1} \geq 3^{-3}$ ，因为 $y = 3^x$ 为增函数，所以 $2x-1 \geq -3$ ，解得： $x \geq -1$. 故选 B.

7.

【解析】 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3 (a > 0)$ 对称轴为 $x = 1$ ，且在 $[1, +\infty)$ 是增函数， $f(-3) = f(5) > f(3)$ ，选项 A 正确； $f(-2) = f(4) > f(3)$ ，选项 B 错误； $f(4) = f(-2)$ ，选项 C 正确； $f(4) > f(3)$ ，选项 D 正确. 故选 B.

8.

【解析】因为 $f(x-1) - f^2(x) = \sqrt{x-1} - x$ ，令 $\sqrt{x-1} = t (t \geq 0)$ ，则 $x = 1 + t^2$ ，所以

$y = -t^2 + t - 1 = -(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 函数取得最大值 $-\frac{3}{4}$, 故选 C.

9.

【解析】由于 $y = 2f(x) + 1 \in [-1, 5]$, \therefore A 错误; $y = f(2x+1) \in [-1, 2]$, \therefore B 正确; $y = -f(x) \in [-2, 1]$, \therefore C 错误; $y = |f(x)| \in [0, 2]$, \therefore D 错误. 故选 B.

10.

【解析】 $\because 1 < b < a$, $\therefore y = a^x$ 和 $y = b^x$ 均为增函数, $\therefore a^b < a^a$, $b^a > b^b$, A, B 项正确, 又由 $y = a^x$ 和 $y = b^x$ 的图像在第一象限内的关系可知: $a^b > b^b$, C 项正确; a^b 和 b^a 的大小关系不能确定, 如 $a=3, b=2, a^b > b^a$; $a=4, b=2, a^b = b^a$; $a=5, b=2, a^b < b^a$, 故 D 项不正确, 故选 D.

11.

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 4}{x-1} = (x-1) + \frac{4}{x-1}$; 因为 $x \in [2, 9]$, 所以 $x-1 \in [1, 8]$, 令 $x-1=t$, 则 $t \in [1, 8]$; 因为 $y = f(x) = t + \frac{4}{t}, t \in [1, 8]$, 根据对勾函数性质可知当 $t=2$ 时, 函数有最小值为 4; 当 $t=8$ 时, 函数有最大值为 $\frac{17}{2}$. 所以 $m+M = \frac{25}{2}$. 故选 C.

12.

【解析】由 $f(-x) = 4 - f(x)$, 得 $f(x) + f(-x) = 4$, 可得 $y = f(x)$ 的图象关于 $(0, 2)$ 对称, 而 $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$. 所以函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{2x+1}{x}$ 的图像都关于点 $(0, 2)$ 对称, 所以 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$, $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = \frac{m}{2} \times 4 = 2m$, 故选 C.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 1

14. $x=0$

15. $(-2, +\infty)$

16. $[-3, -1]$

【解析】

13.

【解析】因为函数 $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1} (a \in \mathbb{R})$ 是奇函数,

所以 $f(-x) = a - \frac{2}{e^{-x} + 1} = a - \frac{2e^x}{e^x + 1} = -f(x) = -a + \frac{2}{e^x + 1}$, $2a = 2$, 解得 $a = 1$.

14.

【解析】设 $2^x = t$, 则 $t^2 + t - 2 = 0$, $t = -2$ (舍去), $t = 1$, 所以解为 $x = 0$.

15.

【解析】 $\because A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, \therefore 方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 没有正实数解, 故 A 集合有两种情况:

①若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = p^2 - 4 < 0$, 则 $-2 < p < 2$;

②若 $A \neq \emptyset$, 则方程有两个非正数解, 且 0 不是其解, 则有: $\begin{cases} p^2 - 4 \geq 0 \\ -p \leq 0 \end{cases}$, 解得 $p \geq 2$.

综上所述, $p > -2$, 即实数 p 的取值范围是 $(-2, +\infty)$.

16.

【解析】当 $0 \leq x \leq 4$ 时, $f(x) \in [-11, -2]$,

当 $a \leq x < 0$ 时, $f(x) \in [-(\frac{1}{2})^a + a, -1 + a]$, 数形结合只需: $\begin{cases} -(\frac{1}{2})^a + a \geq -11 \\ -1 + a \leq -2 \end{cases}$, 解得

$-3 \leq a \leq -1$. 所以实数 a 的取值范围是 $[-3, -1]$.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【解析】

$$(1) \text{ 证明: } \because f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$\therefore f(i) + f\left(\frac{1}{i}\right) = 1 (i = 2, 3, 4, \dots, 2020) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 2019 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】

$$(1) \text{ 集合 } A = \{x | x^2 - 5x < 0\} = \{x | 0 < x < 5\}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } m=2 \text{ 时, } B = \{x | 3 \leq x \leq 5\},$$

$$\text{所以 } A \cap B = \{x | 3 \leq x < 5\}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 5\} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } A \cup B = A,$$

$$\text{所以 } B \subseteq A, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{①当 } B = \emptyset \text{ 时, 有 } m+1 > 3m-1 \text{ 得: } m < 1, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{②当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 有 } \begin{cases} m+1 \leq 3m-1 \\ m+1 > 0 \\ 3m-1 < 5 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 \leq m < 2, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{综合①②得: } m < 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故实数 } m \text{ 的取值范围为: } (-\infty, 2). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】

(1) 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 由 $3 - ax \geq 0$ 得 $x \leq \frac{3}{a}$,

即函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left(-\infty, \frac{3}{a}\right]$ 4 分

(2) 当 $a - 1 > 0$ 即 $a > 1$ 时, 令 $t = 3 - ax$,5 分

要使 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数, 则函数 $t = 3 - ax$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数,

即 $-a < 0$, 并且 $3 - a \times 1 \geq 0$, 解得 $1 < a \leq 3$;7 分

当 $a - 1 < 0$ 即 $a < 1$ 时, 令 $t = 3 - ax$ 8 分

要使 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数, 则函数 $t = 3 - ax$ 在 $(0, 1]$ 为增函数,

即 $-a > 0$ 并且 $3 - a \times 0 \geq 0$, 解得 $a < 0$ 10 分

综上可知, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 3]$ 12 分

20. 【解析】

(1) 由题可得 $f(m) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n)$,2 分

即 $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$ 4 分

(2) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$.

由 (1) 得: $f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.8 分

(3) $\because f(2) = 1, \therefore 2 = f(2) + f(2) = f(4)$,9 分

$f(x+2) - f(2x) > 2 \Leftrightarrow f(x+2) > f(2x) + f(4) \Rightarrow f(x+2) > f(8x)$ 10 分

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore \begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x > 0, \\ x+2 > 8x, \end{cases}$ 解得 $0 < x < \frac{2}{7}$ 11 分

故不等式 $f(x+2) - f(2x) > 2$ 的解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{2}{7}\right\}$ 12 分

21. 【解析】

(1) 函数 $f(x) = x^2 - 2tx + t^2 - 6t + 1 \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ 的对称轴为 $x = t$,1 分

当 $t \leq -\frac{1}{2}$ 时, 区间 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 为增区间, 可得 $g(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = t^2 - 5t + \frac{5}{4}$;2 分

当 $-\frac{1}{2} < t < 1$, 可得 $g(t) = f(t) = -6t + 1$;3 分

当 $t \geq 1$ 时, 区间 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 为减区间, 可得 $g(t) = f(1) = t^2 - 8t + 2$ 4 分

$$\text{则 } g(t) = \begin{cases} t^2 - 5t + \frac{5}{4}, & t \leq -\frac{1}{2} \\ 1 - 6t, & -\frac{1}{2} < t < 1 \\ t^2 - 8t + 2, & t \geq 1 \end{cases}; \text{6 分}$$

(2) 当 $t > 1$ 时, $g(t) < kt$ 即 $t^2 - 8t + 2 < kt$,

可得 $k > t + \frac{2}{t} - 8$,8 分

令 $m(t) = t + \frac{2}{t} (t > 1)$,

可得 $m(t)$ 在 $(1, \sqrt{2})$ 递减, 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 递增,

$m(1) = m(2) = 3$, $m(3) = \frac{11}{3}$,9 分

由图可得 $3 < k + 8 \leq \frac{11}{3}$, 即 $-5 < k \leq -\frac{13}{3}$,

关于 t 的不等式 $g(t) < kt$ 有且仅有一个正整数解 2,10 分

所以 k 的范围是 $\left[-5, -\frac{13}{3}\right]$ 12 分

22. 【解析】

(1) 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n$,

因为 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$,

$\therefore f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n = -\left[m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]$,2 分

即 $(m-2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (n-2) = 0$ 总成立.3 分

$\therefore \begin{cases} m-2=0 \\ n-2=0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$,4 分

又当 $x < 0$ 时, 同理可得 $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$,5 分

综上: $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$ 6分

(2) $\because 4^x > 0, 2^x > 0,$

原不等式化为 $2\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) - 2 + 2\lambda\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) - 2\lambda \geq 0,$ 7分

令 $t = 2^x + \frac{1}{2^x}$, 则 $t \geq 2,$

原不等式进一步化为 $t^2 + \lambda t - \lambda - 3 \geq 0$ 在 $t \geq 2$ 上恒成立.8分

记 $g(t) = t^2 + \lambda t - \lambda - 3, t \in [2, +\infty)$ 9分

①当 $-\frac{\lambda}{2} \leq 2$ 时, 即 $\lambda \geq -4$ 时, $g(t)_{\min} = g(2) = \lambda + 1 \geq 0,$

$\therefore \lambda \geq -1$ 合理;10分

②当 $-\frac{\lambda}{2} > 2$ 时, 即 $\lambda < -4$ 时,

$g(t)_{\min} = g\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} - \lambda - 3 \geq 0,$ 显然不成立.11分

综上实数 λ 的取值范围为: $\lambda \geq -1$ 12分