

武汉三中 2020-2021 学年高一十月月考
数学试卷

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 则集合 $B = \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 ()

- A. 9 B. 5 C. 3 D. 1

2. 若命题 $p: " \forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0 "$, 则命题 p 的否定为 ()

- A. $\forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ B. 不存在 $x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$
- C. $\exists x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 \neq 0$ D. $\forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 \neq 0$

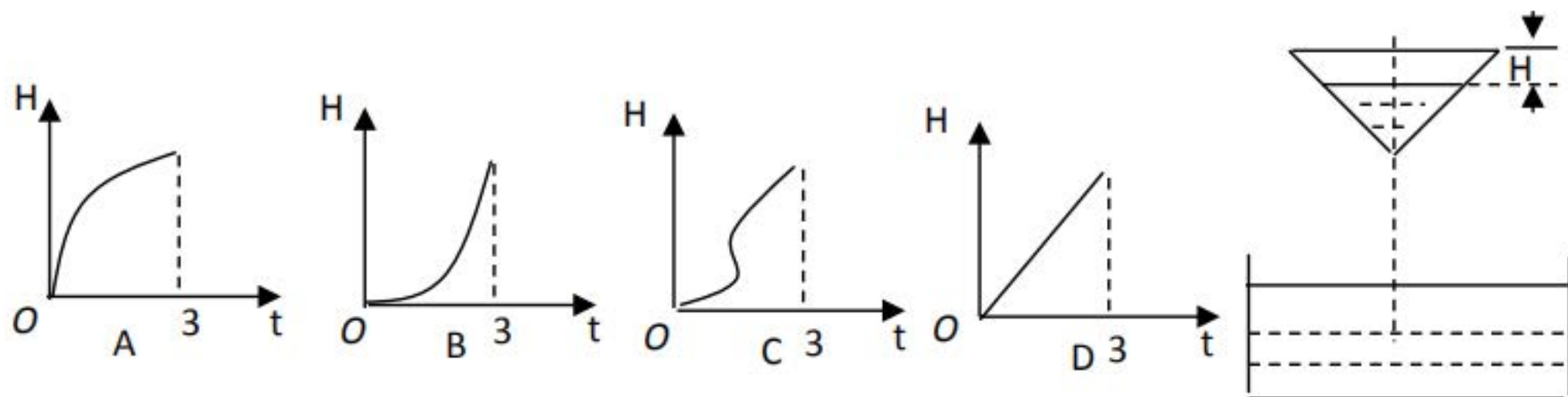
3. 当 $b < a$ 时, 不等式 $\frac{x-a}{x-b} > 1$ 的解是 ()

- A、 $\{x \mid x < b\}$ B、 $\{x \mid x > b\}$ C、 \mathbb{R} D、 以上均不对

4. 下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ().

- A. $f(x) = 3 - x$
- B. $f(x) = x^2 - 3x$
- C. $f(x) = -|x|$
- D. $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

5. 如图, 液体从一圆锥漏斗漏入一圆柱桶中, 开始漏斗盛满液体, 经过 3 分钟漏完, 若圆柱中液面上升速度是一常量, H 是圆锥漏斗中液面下落的距离. 则 H 与下落时间 t 分钟的函数关系表示的图象可能是()



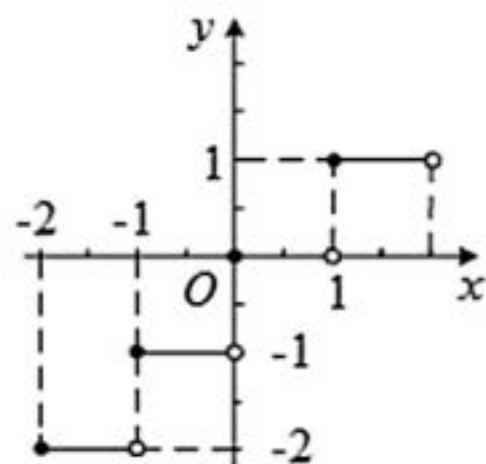
6. 设 $a, b \in R$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分又不必要条件

7. 已知函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 的定义域为 $[1, t]$, 且在该定义域内函数的最大值与最小值之和为 -5, 则实数 t 的取值范围是()

- A. $(1, 3]$
- B. $[2, 3]$
- C. $(1, 2]$
- D. $(2, 3)$

8. 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[1.8]=1$, $[-1.4]=-2$, $[-3]=-3$, 函数 $y=[x]$ 的图象如图所示, 则方程 $[x]=\frac{1}{2}x^2$ 的解为 ()



A. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$

B. 1 或 2

C. 1 或 $-\sqrt{2}$

D. 0 或 $\sqrt{2}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 对于实数 a, b, c , 下列说法正确的是 ()

A. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$, 则 $ac^2 \geq bc^2$

C. 若 $a > 0 > b$, 则 $ab < a^2$

D. 若 $c > a > b$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

10. 下列四个函数值域为 R 的函数为 ()

A. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ B. $y = 3 - x$ C. $y = x^2 + 2x - 10$ D. $y = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ -\frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$.

11. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in P$

($b \neq 0$) 则称 P 是一个数域, 例如有理数集 Q 是数域, 下列命题中正确的是 ()

A. 数域必含有 0, 1 两个数

B. 整数集是数域

C. 若有理数集 $Q \subseteq M$, 则数集 M 一定是数域

D. 数域中有无限多个元素

12. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 给出下列四个不等式, 其中一定成立的不等式为 ()

A. $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2};$

B. $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4;$

C. $\frac{2ab}{a + b} \geq \sqrt{ab}$

D. $\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \geq a + b$

第Ⅱ卷(非选择题, 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 已知集合 $A = \{2, (a+1)^2, a^2 + 3a + 3\}$, 且 $1 \in A$, 则实数 a 的值为_____.

14. 已知集合 $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid -1 < x < m+2\}$, 若 $x \in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x \in A$, 则实数 m 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数, 且在该区间上单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是_____.

16. 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$ 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分) 已知集合 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 2 + a \leq x \leq 1 - a, a \in R\}$

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $C_R(A \cup B)$;

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

18. (本小题满分12分) 若不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $\{x \mid -3 < x < 1\}$.

(1) 解不等式 $2x^2 + (2-a)x - a > 0$;

(2) 当 $ax^2 + bx + 3 \geq 0$ 的解集为 R 时, 求 b 的取值范围.

19. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x+1) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 根据函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

20. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{(1-a^2)x^2 + 3(1-a)x + 6}$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 R , 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分) 某厂家拟在 2019 年举行促销活动, 经调查测算, 某产品的年销售量(也即该产品的年产量) x 万件与年促销费用 $m(m \geq 0)$ 万元满足 $x = 3 - \frac{k}{m+1}$ (k 为常数), 如果不搞促销活动, 则该产品的年销售量只能是 1 万件. 已知 2019 年生产该产品的固定投入为 8 万元, 每生产 1 万件该产品需要再投入 16 万元, 厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分资金).

(1) 将 2019 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数.

(2) 该厂家 2019 年的促销费用投入多少万元时, 厂家的利润最大?

22. (本小题满分12分) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 - |x - a| + 1, x \in R$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

武汉三中 2020-2021 学年高一十月月考

数学试卷

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 则集合 $B = \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 (**B**)

A. 9

B. 5

C. 3

D. 1

2. 若命题 $p: "\forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0"$, 则命题 p 的否定为 (**C**)

A. $\forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$

B. 不存在 $x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$

C. $\exists x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 \neq 0$

D. $\forall x \in R, x^2 - 2mx + m^2 - 4 \neq 0$

3. 当 $b < a$ 时, 不等式 $\frac{x-a}{x-b} > 1$ 的解是 (**A**)

A. $\{x \mid x < b\}$

B. $\{x \mid x > b\}$

C. R

D. 以上均不对

4. 下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 (**D**).

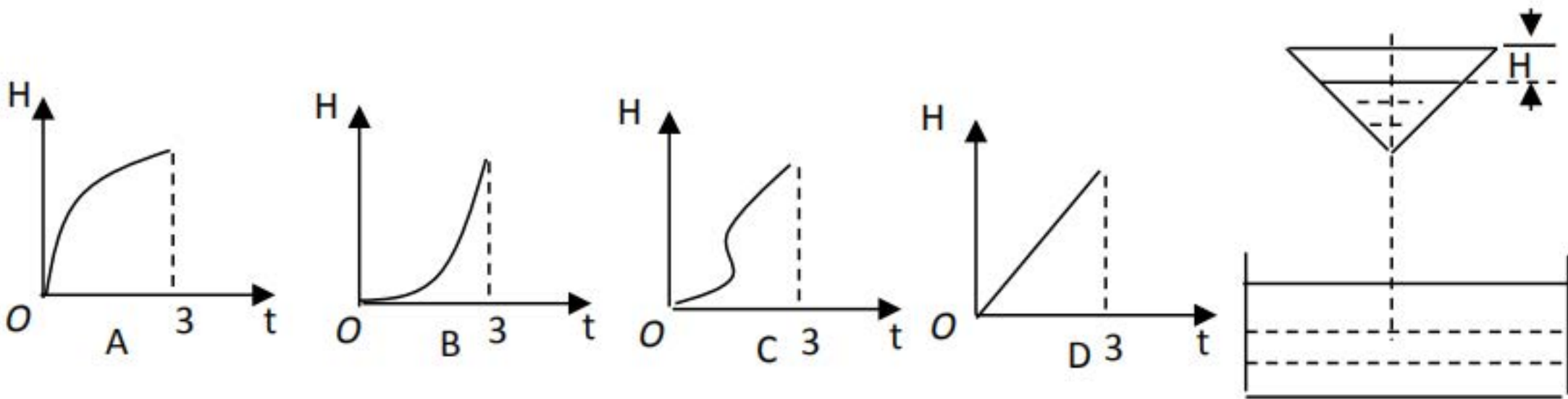
A. $f(x) = 3 - x$

B. $f(x) = x^2 - 3x$

C. $f(x) = -|x|$

D. $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

5. 如图, 液体从一圆锥漏斗漏入一圆柱桶中, 开始漏斗盛满液体, 经过 3 分钟漏完, 若圆柱中液面上升速度是一常量, H 是圆锥漏斗中液面下落的距离. 则 H 与下落时间 t 分钟的函数关系表示的图象可能是 (**B**)



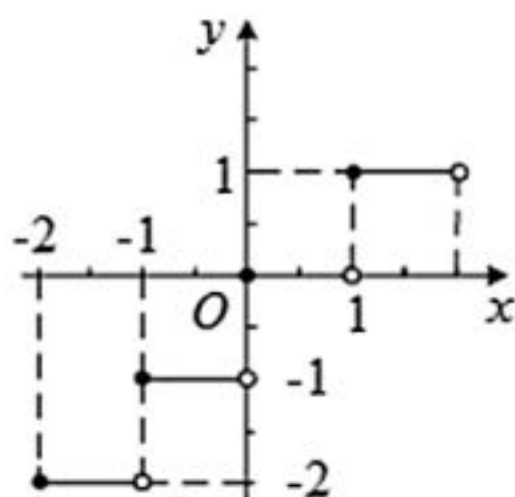
6. 设 $a, b \in R$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的 (**C**)

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分又不必要条件

7. 已知函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 的定义域为 $[1, t]$, 且在该定义域内函数的最大值与最小值之和为 -5, 则实数 t 的取值范围是 (**B**)

- A. $(1, 3]$
- B. $[2, 3]$
- C. $(1, 2]$
- D. $(2, 3)$

8. 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[1.8]=1$, $[-1.4]=-2$, $[-3]=-3$, 函数 $y=[x]$ 的图象如图所示, 则方程 $[x]=\frac{1}{2}x^2$ 的解为 (D)



A. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$

B. 1 或 2

C. 1 或 $-\sqrt{2}$

D. 0 或 $\sqrt{2}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 对于实数 a, b, c , 下列说法正确的是 (ABC)

A. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$, 则 $ac^2 \geq bc^2$

C. 若 $a > 0 > b$, 则 $ab < a^2$

D. 若 $c > a > b$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

10. 下列四个函数值域为 R 的函数为 (BD)

A. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ B. $y = 3 - x$ C. $y = x^2 + 2x - 10$ D. $y = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ -\frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$.

11. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in P$

($b \neq 0$) 则称 P 是一个数域, 例如有理数集 Q 是数域, 下列命题中正确的是 (AD)

A. 数域必含有 0, 1 两个数

B. 整数集是数域

C. 若有理数集 $Q \subseteq M$, 则数集 M 一定是数域

D. 数域中有无限多个元素

12. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 给出下列四个不等式, 其中一定成立的不等式为 (ABD)

A. $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2};$

B. $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4;$

C. $\frac{2ab}{a + b} \geq \sqrt{ab}$

D. $\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \geq a + b$

第II卷(非选择题, 共90分)

三、填空题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分. 把答案填在题中横线上)

13. 已知集合 $A = \{2, (a+1)^2, a^2 + 3a + 3\}$, 且 $1 \in A$, 则实数 a 的值为 0 或 -1.

14. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | -1 < x < m+2\}$, 若 $x \in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x \in A$, 则实数 m 的取值范围是 $[-1, +\infty)$.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数, 且在该区间上单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.

16. 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$ 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 $[\frac{1}{8}, 2]$.

四、解答题(本大题共6小题, 共70分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分) 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | 2+a \leq x \leq 1-a, a \in R\}$

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $C_R(A \cup B)$; $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

18. (本小题满分12分) 若不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 1\}$. $a=3$

(1) 解不等式 $2x^2 + (2-a)x - a > 0$; $(2x-3)(x+1) > 0, (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

(2) 当 $ax^2 + bx + 3 \geq 0$ 的解集为 R 时, 求 b 的取值范围. $[-6, 6]$

19. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x+1) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式; $f(x) = x + \frac{1}{x}, (x \neq 0)$

(2) 根据函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减. 设 $0 < x_1 < x_2 < 1, f(x_2) - f(x_1) < 0$

20. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{(1-a^2)x^2 + 3(1-a)x + 6}$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 R , 求实数 a 的取值范围;

$$\left[-\frac{5}{11}, 1\right]$$

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围.

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

21. (本小题满分 12 分) 某厂家拟在 2019 年举行促销活动, 经调查测算, 某产品的年销售量(也即该产品的年产量) x 万件与年促销费用 m ($m \geq 0$) 万元满足 $x = 3 - \frac{k}{m+1}$ (k 为常数), 如果不搞促销活动, 则该产品的年销售量只能是 1 万件. 已知 2019 年生产该产品的固定投入为 8 万元, 每生产 1 万件该产品需要再投入 16 万元, 厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分资金).

(1) 将 2019 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数. $k=2, x=3-\frac{2}{m+1}$

(2) 该厂家 2019 年的促销费用投入多少万元时, 厂家的利润最大?

$$(1) \quad y = (8 + 16x) \times 1.5 - (8 + 16x) - m = (4 + 8x) - m = 28 - \frac{16}{m+1} - m \quad (m \geq 0)$$

$$(2) \quad y = 29 - \left[(m+1) + \frac{16}{m+1} \right] \leq 29 - 2\sqrt{16} = 21.$$

$$\text{当且仅当: } m+1 = \frac{16}{m+1} \Rightarrow m=3 \text{ 时取等.}$$

22. (本小题满分 12 分) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 - |x - a| + 1, x \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值; $\max = 3, \min = \frac{3}{4}$

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} + a, & a < 0 \\ \frac{3}{4}, & a = 0 \\ \frac{3}{4} - a, & a > 0 \end{cases}$$