青浦高中高一月考数学试卷

2020.10

一. 填空题

1. 设全集$U=\mathbf{R}$，若集合$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\mid 2\le x<3\}$，则$A\cap\overline{B}=$________

2. 被4除余2的所有自然数组成的集合$B=$________

3. 满足$\{1,2\}\subset M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$M$有________个

4. 集合$M=\{a\mid \dfrac{6}{5-2a}\in\mathbf{Z},a\in\mathbf{N}\}$用列举法为________

5. 已知集合$A=\{y\mid y=-x^2-2x+1\}$，$B=\{y\mid y=x^2+x+1\}$，则$A\cap B=$________

6. 已知一元二次方程$x^2+px+p=0$的两个实根分别为α、β，且$a^2+\beta^2=3$，则实数$p=$

____

7. 若关于x的不等式$ax^2+x+b>0$的解集为$(0,1)$，则$a+b=$________

8. 已知等式$(2+x)m+(1-2x)n+4-3x=0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则$m+n=$________

9. 若实数x、y满足$xy=1$，则x^2+2y^2的最小值为________

10. 设$n\in\mathbf{N}^*$，一元二次方程$x^2-4x+n=0$有整数根的充要条件是$n=$________

11. 定义$A\nabla B=\{z\mid z=xy+\dfrac{x}{y},x\in A,y\in B\}$，设集合$A=\{0,2\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1\}$，则集合$(A\nabla B)\nabla C=$________

12. 若$x\in A$，则$2-x\in A$，则称A是“对偶关系”集合，若集合$\{a,-4,-2,0,2,4,6,7\}$的所有非空子集中是“对偶关系”的集合一共15个，则实数a的取值集合为________

二. 选择题

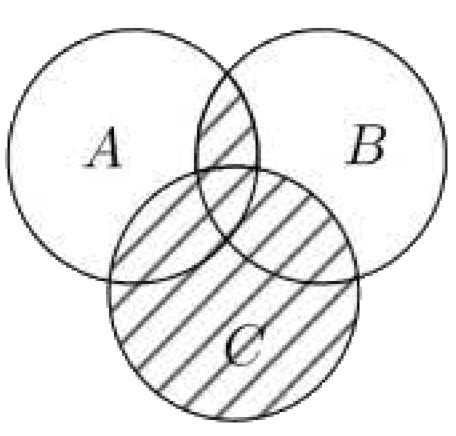
13. 设a、b是非零实数，若$a<b$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab^2<a^2b$　　C. $\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$　　D. $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

14. 右图表示图形中阴影部分的是（　　）

A. $(A\cup C)\cap(B\cup C)$　　B. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

C. $(A\cup B)\cap(B\cup C)$　　D. $(A\cup B)\cap C$



15. 一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有解是一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$有解的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

16. 已知k为正整数，x、y、z为正实数，若$k(xy+yz+zx)>5(x^2+y^2+z^2)$，则对此不等式描述正确的是（　　）

A. 若$k=5$，则至少存在一个以x、y、z为边长的等边三角形

B. 若$k=6$，则对任意满足不等式的x、y、z都存在以x、y、z为边长的三角形

C. 若$k=7$，则对任意满足不等式的x、y、z都存在以x、y、z为边长的三角形

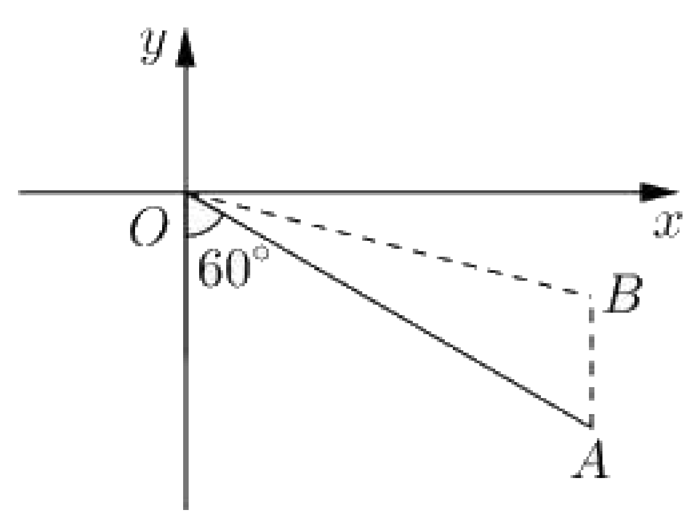
D. 若$k=8$，则对满足不等式的x、y、z不存在以x、y、z为边长的直角三角形

三. 解答题

17. 设$k\in\mathbf{R}$，求关于x与y的二元一次方程组$\begin{cases}y=kx+1\\y=2kx+3\end{cases}$的解集.

18. 已知命题p:方程$4x^2-4(m-2)x+1=0$有两个不相等的负根；命题q:方程$x^2+3mx+4=0$无实根，若命题p与命题q一真一假，求实数m的取值范围.

19. 距码头南偏东60°的400千米处有一个台风中心，已知台风以每小时40千米的速度向正北方向移动，距台风中心350千米以内都受台风影响，问：从现在起多少时间后，码头将受台风影响？码头受台风影响的时间有多长？



20.（1）已知 $a>b$，用比较法证明 $a^3>b^3$；

（2）已知 $p^3+q^3=2$，用反证法证明：$p+q\le 2$.

21. 设 n 为正整数，集合 $A=\{\alpha \mid \alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$，对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

记 $M_{(\alpha,\beta)}=\dfrac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$.

（1）当 $n=3$ 时，若 $\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(0,1,1)$，求 $M_{(\alpha,\alpha)}$ 和 $M_{(\alpha,\beta)}$ 的值；

（2）当 $n=4$ 时，设 B 是 A 的子集，且满足：对于 B 中的任意元素 α、β，当 α、β 相同时，$M_{(\alpha,\beta)}$ 是奇数；当 α、β 不同时，$M_{(\alpha,\beta)}$ 是偶数，求集合 B 中元素个数的最大值.

参考答案

一. 填空题

1. $\overline{B}=(-\infty,2)\bigcup\left[3,+\infty\right)$， $A\bigcap\overline{B}=\{1,3,4\}$

2. $B=\{x\mid x=4k+2,k\in Z\}$

3. $M=\{1,2\}\bigcup\{3,4,5\}$ 的非空子集，$\therefore M$ 的个数与 $\{3,4,5\}$ 的非空子集个数一样，即 M 的个数为 $2^3-1=7$ 个

4. $5-2a$ 为小于等于 5 的奇数，又 $\dfrac{6}{5-2a}\in Z$，$\therefore 5-2a=3,1,-1,-3$，$\therefore a=1,2,3,4$，$\therefore M=\{1,2,3,4\}$

5. $A=\left\{y\middle|\ y=-x^2-2x+1\right\}=\left(-\infty,2\right],B=\left\{y\middle|\ y=x^2+x+1\right\}=\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，

$\therefore A\bigcap B=[\dfrac{3}{4},2]$

6. 由韦达定理得：$\alpha+\beta=-p,\alpha\beta=p$，$\therefore a^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2p=3$，

解得：$p=-1或3$，又由 $\Delta=p^2-4p\geq 0$ 得 $p\leq 0或p\geq 4$，$\therefore p=-1$

7. 由题意得：$ax^2+x+b=0$ 的两根为 0 和 1，由韦达定理得 $1=-\dfrac{1}{a},0=b$，$\therefore a=-1,b=0$，$\therefore a+b=-1$

8. 把上述等式整理成 $(m-2n-3)x+2m+n+4=0$，该式对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则

$\begin{cases}m-2n-3=0\\2m+n+4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-1\\n=-2\end{cases}$，$\therefore m+n=-3$.

9. 由基本不等式得：$x^2+2y^2\geq 2\sqrt{2}xy=2\sqrt{2}$

10. 由 $\Delta=16-4n\geq 0$ 得 $n\leq 4$，又 $n\in N^*$，$\therefore n=1,2,3,4$，代入检验得，当 $n=3或4$ 时，原方程有整数根，$\therefore n=3或4$

11. $(A\nabla B)\nabla C=\{0,4,5\}\nabla\{1\}=\{0,8,10\}$

12. 由子集的个数公式得，若对偶关系有 n 对，则非空子集是对偶关系的有 2^n-1 个，

令 $2^n-1=15$，得 $n=4$，$\therefore$对偶关系有 4 对，而-4 和 6 对偶，-2 和 4 对偶，0 和 2 对偶，$\therefore a$ 和 7 对偶，$\therefore a=-5$，$\therefore$实数 a 的取值集合为 $\{-5\}$

二. 选择题

13. A　　14. A　　15. D　　16. B

13. A. 反例 $a=-2,b=1$；　B. 反例 $a=1,b=2$；　D. 反例 $a=1,b=2$；

C. 证明 $\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}<0$，$\therefore \frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$.

15. 充分性：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解，则 $a\neq 0,\Delta\geq 0$，此时一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 不一定有解，例如 $-x^2-2x-1>0$ 无解；

必要性：若一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 不一定有解，例如 $x^2+2x+3=0$ 无解；$\therefore$ 选 D.

16. 对于 A，若 $k=5$，由 $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0$ 得：

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\geq 0$，从而 $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$，矛盾；

对于 C，若 $k=7$，当 $x=1,y=2,z=3$ 时 $7\times(2+3+6)>5\times\left(1^2+2^2+3^2\right)$ 成立，

而不存在以 x,y,z 为边长的三角形，错误；

对于 D，若 $k=8$，当 $x=3,y=4,z=5$ 时 $8\times(12+15+20)>5\times\left(3^2+4^2+5^2\right)$ 成立，

而存在以 x,y,z 为边长的直角三角形，错误；

由排除法，选 B.

三. 解答题

17. 由 $\begin{cases}y=kx+1\\y=2kx+3\end{cases}$ 得 $kx+1=2kx+3$，即 $kx=-2(*)$，

当 $k=0$ 时，无解，解集为 $\varnothing$，

当 $k\neq 0$ 时，$x=-\frac{2}{k},y=k\cdot(-\frac{2}{k})+1=-1$，解集为 $\{(-\frac{2}{k},-1)\}$.

18. 若 p 为真，则 $\begin{cases}\Delta=16(m-2)^2-16>0\\m-2<0\end{cases}$，解得：$m<1$，

若 q 为真，则 $\Delta=9m^2-16<0$，解得：$-\frac{4}{3}<m<\frac{4}{3}$，

而命题 p 与 q 一真一假，共有两种情况，

① p 真 q 假，则 $\begin{cases}m<1\\m\leq -\frac{4}{3}或m\geq\frac{4}{3}\end{cases}$，$\therefore m\leq -\frac{4}{3}$；

② p 假 q 真，则 $\begin{cases}m\geq 1\\-\frac{4}{3}<m<\frac{4}{3}\end{cases}$，$\therefore 1\leq m<\frac{4}{3}$；

综上：实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[1,\frac{4}{3})$.

19. 过点 O 作正北方向的垂线，垂足为 C，设点 B 处刚受台风影响，则 $OB=350km$，

由含六十度直角三角形的性质得：$AC=\frac{1}{2}OA=200km, OC=\sqrt{3}AC=200\sqrt{3}km$，

在直角三角形 OBC 中，

$BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{350^2-(200\sqrt{3})^2}=\sqrt{2500}=50km$， $AB=AC-BC=150km$，

$\therefore 150\div 40=\frac{15}{4}$ 小时后，码头将受台风影响，影响时间为 $2\times\frac{50}{40}=\frac{5}{2}$ 小时.

20.（1）$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，

$\because a^2+ab+b^2=(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$，取等号的条件为 $a=b=0$，

而 $a>b$，$\therefore$ 等号无法取得，即 $a^2+ab+b^2=(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2>0$，

又 $a>b$，$\therefore a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$，$\therefore a^3>b^3$；

（2）假设 $p+q>2$，则 $p>2-q$，$\therefore$ 由（1）得 $p^3>(2-q)^3$，

$\therefore p^3+q^3>8-12q+6q^2$，又 $p^3+q^3=2$，$\therefore 2>8-12q+6q^2$，

即 $q^2-2q+1<0\Rightarrow(q-1)^2<0$ 矛盾，$\therefore$ 假设错误，$\therefore p+q\leq 2$.

21.（1）$\because \alpha=\{1,1,0\}$， $\beta=\{0,1,1\}$，

$\therefore M(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}[(1+1-|1-1|)+(1+1-|1-1|)+(0+0-|0-0|)]=2$，

$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(1+0-|1-0|)+(1+1-|1-1|)+(0+1-|0-1|)]=1$；

（2）设 $\alpha=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in B$，则 $M(\alpha,\alpha)=x_1+x_2+x_3+x_4$，

由题意得 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\{0,1\}$ 且 $M(\alpha,\alpha)$ 为奇数，

$\therefore x_1, x_2, x_3, x_4$ 中 1 有 1 个或 3 个，

$\therefore B\subseteq\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$

将上述集合中的元素分成如下四组：

$(1,0,0,0),(1,1,1,0);(0,1,0,0),(1,1,0,1);(0,0,1,0),(1,0,1,1);(0,0,0,1),(0,1,1,1)$，

经检验，对每组中的每个元素 α,β，都有 $M(\alpha,\beta)=1$，

$\therefore$ 每组中的两个元素不可能同时是集合 B 的元素，

$\therefore$ 集合 B 的元素个数不超过 4，

又集合 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ 满足题意，

$\therefore$ 集合 B 中元素个数的最大值为 4.