

高一数学试题

(考试时间: 120 分钟)

试卷满分: 150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{-1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$, 则 $A \cup B =$

- A. \emptyset B. $\{-1, 2, 5, 10\}$ C. $\{-1, 1, 2, 5, 10\}$ D. $\{2, 5\}$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, 则 $f(2) - f(-1) =$

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

3. 下列选项中的两个函数,是同一函数的是

A. $y = x^2$ 与 $y = x|x|$

B. $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

C. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = x+1$

D. $y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 与 $y = \sqrt{(x+1)(x-1)}$

4. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 5\}$, 集合 $B = \{x | x = 2n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B$ 的非空子集的个数是

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

5. 函数 $f(x) = \sqrt{4-2^x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为

A. $(-\infty, -2) \cup (-2, 0]$

B. $(-\infty, -2) \cup (-2, 2]$

C. $(-2, 2]$

D. $[-2, 2]$

6. 若函数 $f(x) = (3-2x)\sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}}$, 则函数 $f(x)$ 是

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

7. 已知函数 $f(x) = -(3-a^2)^x$ 是实数集 \mathbb{R} 上的减函数, 函数 $g(x) = x^2 + (a-1)x - 2$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

B. $[\frac{1}{3}, \sqrt{2})$

C. $(-\sqrt{2}, \frac{1}{3}]$

D. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

8. 若集合 $A = \{-6, a, 3\}$, 集合 $B = \{3, a^2 - 5a\}$, 且 $B \subseteq A$, 则满足条件的实数 a 的取值个数为

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

9. 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x-2} < 0$ 的解集是

A. $(-3, 0) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$

B. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

C. $(-\infty, -3) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$

D. $(-3, 0) \cup (0, 3)$

10. 若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增, 且满足 $f(3-x)=f(3+x)$, 则下列结论正确的是

A. $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{7}{2}) < f(5)$

B. $f(\frac{7}{2}) < f(\frac{1}{2}) < f(5)$

C. $f(\frac{1}{2}) < f(5) < f(\frac{7}{2})$

D. $f(5) < f(\frac{1}{2}) < f(\frac{7}{2})$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2a^x + 1, & x > 1 \\ 3ax^2 - (2a+1)x + \frac{17}{8}, & x \leq 1 \end{cases}$ 是实数集 R 上的单调函数, 则正实数 a 的取值范围是

A. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$

B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{4}]$

D. $(0, \frac{1}{8}]$

12. 已知 $|a| > \frac{1}{2}$, 函数 $f(x) = -2ax^2 + (b-1)x + 3$ 是定义在区间 $[5a+1, 4a^2]$ 上的偶函数, 则函数 $g(x) = ax^2 + bx + 1$ 在区间 $[5a+1, 4a^2]$ 上的最小值是

A. -19

B. $\frac{5}{4}$

C. -11

D. 1

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f(x+1) = 2x+5$, 则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 高一(3)班有55名学生, 现报名参加数学或物理竞赛培训, 其中14人报物理, 30人报数学, 20人两科都没报, 则只报数学没有报物理的同学有 人.

15. 已知实数 a, b 满足 $(\frac{1}{3})^a = 5^b$, 有下列五个关系式:

① $a < 0 < b$; ② $b < 0 < a$; ③ $0 < a < b$; ④ $b < a < 0$; ⑤ $a = b$.

其中, 不可能成立的关系式是 .

16. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + (2a-3)x + 3$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-6, 4]$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 .

三、解答题(本大题共6小题, 共计70分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

化简并求出下列各式的值:

(1) $(3\frac{3}{5})^0 + 2^2 \times (2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - (2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{3}{5})^2$;

(2) 已知 $a = \sqrt{8}$, $b = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sqrt{a^3 b^2} \cdot \sqrt[3]{ab^2}}{a \cdot \sqrt{\frac{b}{a^2}}}$ ($a > 0, b > 0$) 的值.

18. (本小题满分 12 分)

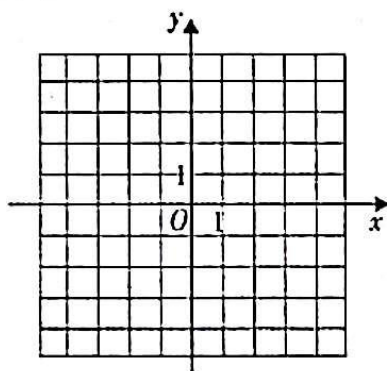
已知集合 $A = \{x | 3a - 2 < x < a + 4\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$.

(1) 若 $a = -1$, 求 $A \cap B, A \cup C_R B$;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 4x, & x > 0 \end{cases}$.



(1) 求 $f(f(5))$ 的值;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图像;

(3) 求函数 $f(x)$ 的单调区间, 并写出函数 $f(x)$ 的值域.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 4^x - 2a \cdot 2^x + 3, x \in [1, 2]$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 若方程 $f(x) = m$ 有解, 求实数 m 的取值范围;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

函数 $f(x)$ 的定义域是 R , 且满足对任意的 $x_1, x_2 \in R$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 成立.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并证明你的结论;

(2) 如果 $f(2) = -1$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 实数 m 满足 $f(2m) + f(7 - 3m^2) + 3 < 0$, 求实数 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若对任意的 $t \in R$, 不等式 $f(k - t^2) + f(2t - 2t^2 - 3) > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

豫南九校 2020—2021 学年上期第一次联考

高一数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. C

【解析】两个集合中元素合并，可得， $A \cup B = \{-1, 1, 2, 5, 10\}$

2. A

【解析】 $f(2) - f(-1) = 7 - 1 = 6$ 。

3. B

【解析】A 中的函数 $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，两个函数的对应法则不同，故 A 中的两个

函数不是相同的函数；B 选项，函数 $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x \in \mathbf{R}$ ，又

$g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ，所以两函数是同一函数；C 选项，函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ，函数 $g(x) = x + 1$ 的定义域是 \mathbf{R} ，定义域不同，故两函数不是同一函数；

对于 D，函数 $y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$ ，函数 $y = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ，两函数定义域不同，故 D 错误。

4. D

【解析】 $A \cap B = \{-1, 1, 3\}$ ，则 $A \cap B$ 的非空子集的个数是 $2^3 - 1 = 7$

5. C

【解析】 $f(x) = \sqrt{4 - 2^x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ， $\therefore \begin{cases} 4 - 2^x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$ ，解得 $-2 < x \leq 2$ ， $\therefore f(x)$ 的定义

域为 $(-2, 2]$ 。

6. D

【解析】首先，由 $\frac{3+2x}{3-2x} \geq 0$ ，解得 $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ ，即函数的定义域为 $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ，由此可知，函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，则函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

7. B

【解析】因为函数 $f(x)$ 是实数集 \mathbf{R} 上的减函数，所以 $3 - a^2 > 1$ ，即 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ ，又函数 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增，则 $x = -\frac{a-1}{2} \leq a$ ，即 $a \geq \frac{1}{3}$ ，综上所述，实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, \sqrt{2})$ 。

8. B

【解析】由题 $B \subseteq A$ ，若 $a^2 - 5a = -6$ ，解得 $a = 2$ 或 $a = 3$ （舍），若 $a^2 - 5a = a$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = 6$ ，经检验满足 $B \subseteq A$ 。所以满足条件的实数 a 有 3 个。

9. C

【解析】由题意，函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $\frac{f(x)-f(-x)}{x-2} = \frac{2f(x)}{x-2} < 0$ ，而 $f(3)=0$ ，

所以， $f(-3)=-f(3)=0$ ，又函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，若 $x > 2$ ，则需 $f(x) < 0 = f(3)$ ，所以， $x > 3$ ；若 $x < 2$ ，则需 $f(x) > 0 = f(-3)$ ，所以， $x < -3$ 或 $0 < x < 2$ ；综上，不等式的解集为 $(-\infty, -3) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$ 。

10. C

【解析】由题意，函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x) = f(3+x)$ ，则函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=3$ 对称，且函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增，在 $(3,6)$ 上单调递减。数形结合，易知， $f(\frac{1}{2}) < f(5) < f(\frac{7}{2})$ 成立。

11. D

【解析】由题意，若函数 $f(x)$ 是实数集 R 上的单调函数，则需要满足：
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ -\frac{(2a+1)}{6a} \geq 1 \\ f(1) \geq 2a+1 \end{cases}$$

解得 $0 < a \leq \frac{1}{8}$ 。

12. A

【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[5a+1, 4a^2]$ 上的偶函数，则 $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ 5a+1+4a^2 = 0 \end{cases}$ ，解

得 $\begin{cases} b=1 \\ a=-\frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$ ，又 $|a| > \frac{1}{2}$ ，则 $a = -1$ ， $b = 1$ ，则函数 $g(x) = -x^2 + x + 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$ ，

区间 $[5a+1, 4a^2]$ ，即 $[-4, 4]$ ，易求得函数 $g(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上的最小值是 -19 。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13. $2x+3$

【解析】 $f(x+1) = 2(x+1)+3$ ，所以 $f(x) = 2x+3$

14. 21

【解析】两科都报的有 $14+30+20-55=9$ 人， $30-9=21$ 人。

15. ③④

【解析】在同一坐标系中画函数 $y = (\frac{1}{3})^x$ 和 $y = 5^x$ ，问题相当于当两个函数的函数值相等时，对应的自变量的大小关系，数形结合可知①②⑤是可能成立的，所以，只有③④是不可能成立的。

16. $[-\frac{3}{10}, 0) \cup (0, \frac{3}{10}]$ 。

【解析】由题意， $a \neq 0$ ，若函数 $f(x)$ 在区间 $[-6, 4]$ 上是单调函数，则 $-\frac{2a-3}{2a} \leq -6$ 或 $-\frac{2a-3}{2a} \geq 4$ ，解得 $-\frac{3}{10} \leq a < 0$ 或 $0 < a \leq \frac{3}{10}$ 。所以，实数 a 的取值范围是 $[-\frac{3}{10}, 0) \cup (0, \frac{3}{10}]$ 。

三、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文

字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

$$(1) \text{原式} = 1 + 4 \times \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 + 6 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 7 - \frac{5}{3} = 5\frac{1}{3} \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{a^{\frac{3}{2}}b \cdot a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}}{a \cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}}b^{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}b. \because a = \sqrt{8}, b = \frac{1}{2}, \text{则原式等于 } 2 \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

18. (本小题满分 12 分)

解:

$$(1) \text{当 } a = -1 \text{ 时, } A = \{x | -5 < x < 3\}, \because B = \{x | -2 \leq x \leq 5\},$$

$$\text{因此, } A \cap B = \{x | -2 \leq x < 3\}; \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$C_R B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$A \cup C_R B = \{x | -5 < x < 3\} \cup \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\} = \{x | x < 3 \text{ 或 } x > 5\} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \because A \cup B = B, A \subseteq B \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\therefore \text{①当 } A = \emptyset \text{ 时, 即 } 3a - 2 \geq a + 4, \therefore a \geq 3; \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{②当 } A \neq \emptyset \text{ 时, 则 } \begin{cases} 3a - 2 < a + 4 \\ 3a - 2 \geq -2 \\ a + 4 \leq 5 \end{cases}, \text{解得 } 0 \leq a \leq 1. \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[0, 1] \cup [3, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

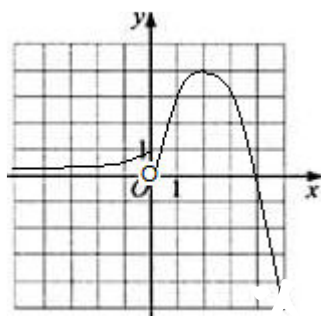
19. (本小题满分 12 分)

解:

$$(1) f(f(5)) = f(-5^2 + 4 \times 5) = f(-5) = 2^{-5} = \frac{1}{32},$$

$$\text{即 } f(f(5)) = \frac{1}{32}; \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

(2) 画函数图像简图如图:



注意几个特殊点要画到位. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

(3) 由图像易知: 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0]$ 和 $(0, 2]$ (也可以写为: 单调递增区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 2)$); 单调递减区间是 $(2, +\infty)$.

函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 4]$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. (本小题满分 12 分)

解:

(1) 令 $t = 2^x$, $x \in [1, 2]$, 则 $t \in [2, 4]$ 2 分

则 $g(t) = t^2 - 2at + 3$, $t \in [2, 4]$, 当 $a = 1$ 时, $g(t) = t^2 - 2t + 3$,

当 $t = 2$ 时, $g(t)$ 有最小值 3, 当 $t = 4$ 时, $g(t)$ 有最大值 11

若方程 $f(x) = m$ 有解, 结合图像可知, $3 \leq m \leq 11$6 分

(2) 函数 $f(x)$ 的最大值和最小值与函数 $g(t) = t^2 - 2at + 3$, $t \in [2, 4]$ 的最大值和最小值相同.

$g(t) = t^2 - 2at + 3$ 的对称轴是 $t = a$,

① 当 $a \leq 2$ 时, 当 $t = 2$ 时, 即 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有最小值 $7 - 4a$;7 分

② 当 $2 < a \leq 4$ 时, 当 $t = a$ 时, $f(x)$ 有最小值 $3 - a^2$ 9 分

③ 当 $4 < a$ 时, 当 $t = 4$ 时, 即 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $19 - 8a$ 11 分

综上: 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $7 - 4a$;

当 $2 < a \leq 4$ 时, $f(x)$ 有最小值 $3 - a^2$;

当 $4 < a$ 时, $f(x)$ 有最小值 $19 - 8a$12 分

21. (本小题满分 12 分)

解:

(1) 函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数, 证明如下:

证明: 由题意, 函数 $f(x)$ 的定义域是 R ,

在 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 中令 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $f(0) = 0$;

令 $x_1 = x$, $x_2 = -x$, 得 $f(x - x) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$,

即对任意的 $x \in R$, $f(-x) = -f(x)$,

所以, 函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数5 分

(2) 首先证明函数 $f(x)$ 在 R 上单调递减, 证明如下:

证明: 任取 $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_2) - f(x_1)$$

$$= f(x_2 - x_1 + x_1) - f(x_1)$$

$$= f(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_1)$$

$$= f(x_2 - x_1)$$

$$\text{且 } x_2 - x_1 > 0,$$

$$\text{又当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) < 0,$$

$$\text{所以, } f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) < 0, \text{ 即 } f(x_2) < f(x_1)$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 R 上单调递减;8 分

$$\text{由 } f(2) = -1,$$

$$\text{则 } -3 = f(2) + f(2) + f(2) = f(4) + f(2) = f(6),$$

$$\text{所以 } f(2m) + f(7 - 3m^2) + 3 < 0 \text{ 即 } f(2m + 7 - 3m^2) < -3 = f(6);$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递减, 则有 } 2m + 7 - 3m^2 > 6,$$

$$\text{即 } 3m^2 - 2m - 1 < 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{3} < m < 1.$$

即实数 m 的取值范围是 $\left\{ m \mid -\frac{1}{3} < m < 1 \right\}$ 12 分

22. (本小题满分 12 分)

解:

(1) 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$,

所以, 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

又因为 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的奇函数,

所以, $f(-x) = \frac{-3(-x)}{-x+2} = \frac{-3x}{x-2} = -f(x)$,

即当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

所以, 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \begin{cases} \frac{-3x}{x+2}, x \geq 0 \\ \frac{3x}{x-2}, x < 0 \end{cases}$;6 分

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{-3x}{x+2} = -3 + \frac{6}{x+2}$,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(x) \leq f(0) = 0$,

又因为 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的奇函数,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $x < 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 在实数集 R 上单调递减;8 分

那么, 不等式 $f(k-t^2) + f(2t-2t^2-3) > 0$

即: $f(k-t^2) > -f(2t-2t^2-3) = f(-2t+2t^2+3)$,

则有 $k-t^2 < -2t+2t^2+3$, 即 $k < 3t^2-2t+3 = 3(t-\frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3}$ 恒成立,

所以, $k < [3(t-\frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3}]_{\min} = \frac{8}{3}$,

所以, 实数 k 的取值范围是 $\left\{ k \mid k < \frac{8}{3}, k \in R \right\}$ 12 分