

# 2020 年秋期六校第一次联考

## 高一年级数学试题

(考试时间: 120 分钟)

试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.)

1. 下列符号表述正确的是

A.  $0 \in N^*$

B.  $1.732 \notin Q$

C.  $\emptyset \in \{0\}$

D.  $\emptyset \subseteq \{x | x \leq 2\}$

2. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 6, 7\}$ , 则  $(C_U A) \cap B =$

A.  $\{1, 6\}$

B.  $\{1, 7\}$

C.  $\{6, 7\}$

D.  $\{1, 6, 7\}$

3. 已知函数  $y = f(x)$ , 部分  $x$  与  $y$  的对应关系如表: 则  $f(f(4)) =$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	3	2	1	0	0	-1	-2	-3

A. -1

B. -2

C. -3

D. 3

4. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2-x}$  的定义域为

A.  $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

B.  $(-1, +\infty)$

C.  $[-1, 2)$

D.  $[-1, +\infty)$

5. 已知集合  $M = \{x | 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$ ,  $P = \{x | ax = 1\}$ , 若  $P \subseteq M$ , 则  $a$  的取值集合为

A.  $\{2\}$

B.  $\{3\}$

C.  $\{2, 3\}$

D.  $\{0, 2, 3\}$

6. 函数  $y = f(x)$  的图像与直线  $x = a$  的交点个数为

A. 0

B. 1

C. 0 或 1

D. 无数个

7. 下列函数为同一函数的是

A.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  与  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

B.  $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1}$  与  $g(x) = \sqrt{x(x+1)}$

C.  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  与  $g(t) = t^2 - 2t - 1$

D.  $f(x) = 1$  与  $g(x) = x^0 (x \neq 0)$

8. 某校高一(9)班共有 49 名同学,在学校举办的书法竞赛中有 24 名同学参加,在数学竞赛中有 25 名参加,已知这两项都参赛的有 12 名同学,在这两项比赛中,该班没有参加过比赛的同学的人数为

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

9. 已知函数  $f(\sqrt{x} + 2) = x + 4\sqrt{x} + 5$ , 则  $f(x)$  的解析式为

A.  $f(x) = x^2 + 1$

B.  $f(x) = x^2 + 1 (x \geq 2)$

C.  $f(x) = x^2$

D.  $f(x) = x^2 (x \geq 2)$

10. 函数  $f(x) = |x^3 + 1| + |x^3 - 1|$ , 则函数  $f(x)$  图象

A. 关于原点对称

B. 关于直线  $y = x$  对称

C. 关于  $x$  轴对称

D. 关于  $y$  轴对称

11. 已知  $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a & (x < 1) \\ -ax & (x \geq 1) \end{cases}$ , 是定义在  $\mathbb{R}$  上的减函数, 则  $a$  的取值范围是

A.  $[\frac{1}{8}, \frac{1}{3})$

B.  $(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}]$

C.  $(0, \frac{1}{3})$

D.  $(-\infty, \frac{1}{3}]$

12. 设集合  $M$  满足: 若  $t \in M$ , 则  $2020 - t \in M$ , 且集合  $M$  中所有元素之和  $m \in (2020 \times 11, 2020 \times 12)$ , 则集合  $M$  中元素个数为

A. 22

B. 22 或 23

C. 23

D. 23 或 24

二、填空题(本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知幂函数  $y = f(x)$  的图象过点  $(2, \sqrt{2})$ , 则  $f(9) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知集合  $A = \{2, 4, 6, 8, 9, 11\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ , 非空集合  $C$  满足:  $C$  中每一个元素都加上 2 变成  $A$  的一个子集,  $C$  中每一个元素都减去 2 变成  $B$  的一个子集, 则集合  $C$  中元素的个数最多有 \_\_\_\_\_ 个.

15. 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}$  的单调递减区间是 \_\_\_\_\_.

16. 设函数  $f(x) = \frac{(x+1)^2 + a^2x}{x^2 + 1}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ , 则  $M + m =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

已知集合  $A = [-5, 6], B = [2m - 1, m + 1]$ .

(1) 当  $m = -3$  时, 求  $A \cap B, A \cup B$ ;

(2) 若  $A \cup B = A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

18. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$ .

(1) 判断函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上的单调性, 并用定义证明其结论;

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $[2, 9]$  上的最大值与最小值.

19. (本小题满分12分)

某地煤气公司规定, 居民每个月使用的煤气费由基本月租费、保险费和超额费组成. 每个月的保险费为3元, 当每个月使用的煤气量不超过  $am^3$  时, 只缴纳基本月租费  $c$  元; 如果超过这个使用量, 超出的部分按  $b$  元/ $m^3$  计费.

月份	煤气使用量/ $m^3$	煤气费/元
7	4	4
8	25	14
9	35	19

(1) 写出每个月的煤气费  $y$  (元) 关于该月使用的煤气量  $x$  ( $m^3$ ) 的函数解析式;

(2) 如果某个居民7~9月份使用煤气与收费情况如上表, 请确定  $a, b, c$  及  $y$  与  $x$  的函数关系式. (其中, 仅7月份煤气使用量未超过  $am^3$ .)

20. (本小题满分 12 分)

已知二次函数  $f(x)$  的图象过点  $(0,4)$ , 对任意  $x$  满足  $f(3-x) = f(x)$ , 且有最小值是  $\frac{7}{4}$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式;

(2) 在区间  $[-1,3]$  上,  $y = f(x)$  的图象恒在函数  $y = 2x + m$  的图象上方, 试确定实数  $m$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x + \frac{a}{x}$ ,  $g(x) = x^2 - bx$ , ( $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ).

(1) 若集合  $\{x \mid f(x) = 2x + 2\}$  为单元素集, 求实数  $a$  的值;

(2) 在(1)的条件下, 对任意  $m \in [2,4]$ , 存在  $n \in [1,5]$ , 使  $f(m) \geq g(n)$  成立, 试求实数  $b$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

设二次函数  $f(x) = x^2 - (4a - 2)x + 5a^2 - 4a + 2$ ,  $x \in [0,1]$  的最小值为  $g(a)$ .

(1) 求  $g(a)$  的解析式;

(2) 求  $g(a)$  的最小值.

## 2020 年秋期六校第一次联考高一年级

### 数 学 试 题

一. 选择题: 1-5 DCDAD 6-10 CCCBD 11-12 AC

二. 填空题: 13. 3 14. 3 15.  $(2, \frac{5}{2})$  或  $(2, \frac{5}{2}]$  16. 2

### 三. 解答题

17. 解: (1)  $\because m = -3, \therefore B = [-7, -2]$  .....2 分

$$\therefore A \cap B = [-5, -2] \quad \text{.....4 分}$$

$$A \cup B = [-7, 6] \quad \text{.....6 分}$$

$$(2) \because A \cup B = A \therefore B \subseteq A$$

$$\textcircled{1} B = \Phi \quad 2m-1 \geq m+1 \quad \therefore m \geq 2$$

$$\textcircled{2} B \neq \Phi \text{ 由题意知 } \begin{cases} 2m-1 < m+1, \\ 2m-1 \geq -5, \\ m+1 \leq 6, \end{cases} \quad \text{.....8 分}$$

$$\therefore m \in [-2, 2)$$

$$\text{综上: } \therefore m \in [-2, +\infty) \quad \text{.....10 分}$$

18. (1)  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上是增函数. ....2 分

证明如下: 任取  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1} \\ &= \frac{(2x_1 - 3)(x_2 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} - \frac{(2x_2 - 3)(x_1 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} \quad \text{.....6 分} \end{aligned}$$

因为  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ ,

所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

所以函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上是增函数. ....8 分

(2) 由 (1) 知函数  $f(x)$  在区间  $[2, 9]$  上是增函数,

故函数  $f(x)$  在区间  $[2,9]$  上的最大值为  $f(9) = \frac{2 \times 9 - 3}{9 + 1} = \frac{3}{2}$ , .....10 分

最小值为  $f(2) = \frac{2 \times 2 - 3}{2 + 1} = \frac{1}{3}$ . .....12 分

**19.解:** (1) 设每个月使用的煤气量为  $x \text{ m}^3$ , 煤气费为  $y$  元, 那么

$$y = \begin{cases} 3 + c, & 0 \leq x \leq a \\ 3 + c + b(x - a), & x > a \end{cases} \quad \text{.....6 分}$$

(2) 有表格可知,

$$\begin{cases} 3 + c = 4 \\ 3 + c + b(25 - a) = 14 \\ 3 + c + b(35 - a) = 19 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 4 & (0 \leq x \leq 5) \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & (x > 5) \end{cases}. \quad \text{.....12 分}$$

**20.解:** (1) 由题知二次函数图象的对称轴为  $x = \frac{3}{2}$ , 又最小值是  $\frac{7}{4}$ ,

$$\text{则可设 } f(x) = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \quad (a \neq 0). \quad \text{.....3 分}$$

又图象过点  $(0, 4)$ ,

$$\text{则 } a\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 4, \text{ 解得 } a = 1,$$

$$\therefore f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = x^2 - 3x + 4. \quad \text{.....6 分}$$

(2) 由已知,  $f(x) > 2x + m$  对  $x \in [-1, 3]$  恒成立,

$$\therefore m < x^2 - 5x + 4 \text{ 对 } x \in [-1, 3] \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m < (x^2 - 5x + 4)_{\min} \quad (x \in [-1, 3]). \quad \text{.....9 分}$$

$$\because g(x) = x^2 - 5x + 4 \text{ 在 } x \in [-1, 3] \text{ 上的最小值为 } -\frac{9}{4},$$

$$\therefore m < -\frac{9}{4}. \quad \text{.....12 分}$$

**21.解析:** (1) 由题意知,  $x + \frac{a}{x} = 2x + 2$  有唯一实数解

即  $x^2 + 2x - a = 0$  有两个相等的实数根, 所以  $\Delta = 4 + 4a = 0, \therefore a = -1$ . .....4 分

$$(2) f(m) = m - \frac{1}{m}, \because m \in [2, 4] \therefore f(m)_{\min} = f(2) = \frac{3}{2} \quad \text{.....6 分}$$

$\therefore$  当任意  $m \in [2, 4]$ , 存在  $n \in [1, 5]$  使  $f(m) \geq g(n)$  成立

存在  $n \in [1, 5]$ , 使  $n^2 - bn \leq \frac{3}{2}$  成立, 即  $b \geq \left(n - \frac{3}{2n}\right)_{\min}$  .....9 分

$\because y = n - \frac{3}{2n}$  在  $[1, 5]$  上单调递增,  $\therefore y_{\min} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore b$  的取值范围为  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ . .....12 分

22. 解析: (1)  $f(x) = [x - (2a - 1)]^2 + a^2 + 1, x \in [0, 1]$ , ... 2 分

①若  $2a - 1 < 0$ , 即  $a < \frac{1}{2}$  时,  $g(a) = f(0) = 5a^2 - 4a + 2$ ; ..... 3 分

②若  $0 \leq 2a - 1 \leq 1$ , 即  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$  时,  $g(a) = f(2a - 1) = a^2 + 1$ ; .... 4 分

③若  $2a - 1 > 1$ , 即  $a > 1$  时,  $g(a) = f(1) = 5a^2 - 8a + 5$ . .... 5 分

综上所述  $g(a) = \begin{cases} 5a^2 - 4a + 2, & a < \frac{1}{2}, \\ a^2 + 1, & \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \\ 5a^2 - 8a + 5, & a > 1. \end{cases}$  ..... 6 分

(2) 由 (1) 知

①当  $a < \frac{1}{2}$  时,  $g(a) = 5(a - \frac{2}{5})^2 + \frac{6}{5} \in [\frac{6}{5}, +\infty)$ ; ..... 8 分

②当  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$  时,  $g(a) = a^2 + 1 \in [\frac{5}{4}, 2]$ ; ..... 9 分

③当  $a > 1$  时,  $g(a) = 5(a - \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{5} \in (2, +\infty)$ . .... 11 分

所以  $g(a)_{\min} = \frac{6}{5}$ . ..... 12 分